http://www.virtualeduca.org
Palacio Euskalduna, Bilbao 20-23 de junio, 2006

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO CON SECUENCIAS

Ildikó J. Pelczer, Fernando Gamboa Rodríguez

Laboratorio de Interacción Humano-Máquina y Multimedios Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM, México D.F.
IPelczer@iingen.unam.mx gfer@servidor.unam.mx

Resumen

En el trabajo presente se presenta una taxonomía de los problemas con secuencias numéricas. Estos problemas se relacionan con las nociones básicas del análisis matemático (como límite, vecindad, convergencia, etc.) y se encuentran entre los primeros a los que se enfrenta un estudiante universitario. Mediante la taxonomía propuesta buscamos identificar metas pedagógicas particulares y factores de dificultad específicas a cada clase de problema. De misma manera asociamos las clases identificados con los niveles de aprendizaje propuestas por Bloom.

El beneficio principal de las múltiples clasificaciones consiste en la posibilidad de relacionar las clases de problemas con las dificultades particulares con cuales se enfrenta un alumno durante la solución de problemas. Consideramos que de esta manera la clasificación sirve para dar atención individualizada, dado que su uso permite la adecuación del material disponible a las necesidades del alumno ya que sea en un entorno clásico de enseñanza o implementado en un software educativo. La asociación de las clases de problemas con los niveles de aprendizaje en la clasificación de Bloom permite, por otra parte, conectar la información recuperada en el proceso de solución de problemas con un modelo de conocimiento del estudiante.

1. Introducción

Por *problemas con secuencias* nos referimos a problemas de convergencia de secuencias de números. Este tipo de problemas se encuentra entre los primeros a los que se enfrenta un estudiante universitario y están estrechamente relacionados con la noción de límite y convergencia. Con esta temática se introduce a los estudiantes el pensamiento matemático avanzado (PMA), definido por el Grupo Internacional para la psicología de la Enseñanza de las Matemáticas de la siguiente manera:
"Los procesos del pensamiento matemático avanzado incluyen, por una parte, el pensar sobre temas de matemáticas avanzadas, que en este contexto significa matemáticas más allá de la geometría Euclidiana y álgebra intermedia y, por otra parte, procesos avanzados del pensamiento matemático como abstracción, demostración y razonamiento bajo hipótesis." (Nesher y Kilpatrick, 1990, página 113)
Los conceptos del análisis matemático en general y los conceptos que se relacionan con el tipo de problemas bajo estudio (problemas con secuencias numéricas) en particular, tienen las dos características mencionadas en la definición de Nesher y Kilpatrick. Por lo tanto estos conceptos presentan una complejidad intrínseca: para su análisis y comprensión no es suficiente con entender conceptos básicos, involucrados en sus construcciones. Es precisamente, la complejidad de estos conceptos es lo que dificulta a los estudiantes entenderlo como entidades (Nesher y Kilpatrick, 1990). Cornu (1981) subraya que el concepto de límite es, para la mayoría de los estudiantes, el primer tema en el que las matemáticas no se resumen a seguir un proceso finito de pasos que llevan a un resultado definitivo.

Las múltiples dificultades que presenta la introducción al análisis matemático (el fundamento para esta introducción se basa en los conceptos de *secuencia*, *límite* y de *convergencia*) ha llevado a investigadores a proponer maneras de elaborar el temario para esta materia (por ejemplo, Tall et al., 1985; Akkoç y Tall, 2005; Tall, 1986; Thompson, 1985). En cuanto los problemas relacionados con estos conceptos, consideramos que es importante hacer una revisión detallada de los problemas con secuencias e identificar diferentes aspectos característicos a cada grupo de problemas. Estos aspectos, una vez identificados, nos pueden servir para encontrar factores de dificultad e identificar metas de aprendizaje características a cada grupo.

2. Clasificación de los problemas con secuencias

Un modo de avanzar hacia una clasificación de los problemas con secuencias es recordando las observaciones de Pólya (1967) sobre la noción de problema. Pólya afirma que tener un problema significa buscar de manera conciente alguna acción adecuada para alcanzar alguna meta, claramente definida, pero no inmediata. Esta observación nos parece importante porque estamos interesados en problemas de este tipo y no en ejercicios simples, en los que basta con aplicar ecuaciones siguiendo en una serie de pasos preestablecidos. Por lo tanto, dice Pólya, el concepto mismo de problema implica la presencia de alguna dificultad: sin dificultad no hay problema. En tal situación una clasificación adecuada nos puede ayudar a manejar las diferentes dificultades que aparecen en los problemas. Pólya mismo propone una clasificación muy general de los problemas matemáticos: problemas para encontrar entidades y problemas para demostrar. Nosotros estamos interesados en una clasificación más detallada, en un dominio muy particular. Pero nos parece importante la observación que hace Pólya sobre lo que significa tener una buena clasificación: "una buena clasificación debería introducir tipos de tal manera que el mismo tipo del problema sugiera el tipo de solución." (Pólya, 1967; página 123).
A continuación describimos varias clasificaciones de los problemas con secuencias teniendo en la mente la recomendación de Pólya. En las descripciones usaremos términos y conceptos relacionados con este tema de análisis matemático (*p.e.*: secuencia, vecindad, convergencia, límite, monotonía, limitada, término general de la secuencia) y conceptos matemáticos generales (exponencial, funciones trigonométricas, valor absoluto etc.), que consideraremos del dominio del lector. Al final mostramos la manera en cual es posible conectar las clases de problemas con los niveles de aprendizaje propuestas por Bloom *et al.* (1956).

2.1. Clasificación de problemas según sus componentes
Como punto de partida para esta clasificación consideramos los elementos constitutivos (componentes) de un problema: por una parte, hay varios datos (elementos) dados y, por otra parte, hay elementos que se deben deducir o establecer. Pólya (1967) usa el término *datos* para designar los elementos dados (conocidos) y el término *desconocido del problema* para las entidades que se deben encontrar o deducir. Los datos limitan la variedad de los elementos requeridos, por lo que son un factor determinante para la clasificación.
En primer lugar vamos a diferenciar entre problemas con términos definidos de manera explícita y problemas generales. Así obtenemos dos clases grandes de problemas:

A. Problemas teóricos: en este caso el dato del problema es una propiedad de una secuencia arbitraria, sin la necesidad de especificar el término general. Vamos a usar el término *problemas teóricos*, porque en general se refieren a establecer resultados generales y relaciones entre diferentes conceptos.
Elemento dado: la propiedad de una secuencia.

Elemento requerido: la validez de otra propiedad de la secuencia.
Meta pedagógica: verificar el conocimiento teórico del estudiante, su entendimiento de las relaciones entre los conceptos presentados, entender el papel de los cuantificadores.
Dificultades posibles: entendimiento y manejo de los cuantificadores universal y existencial ($\forall, \exists$), entendimiento y manejo de relaciones lógicas (implicación, equivalencia, etc.), manejo de conceptos abstractos.

B. Problemas concretos: nos referimos con este término a los problemas en los que se específica el término general de la secuencia, para subrayar el contraste con los problemas teóricos. Según la forma del término general tenemos los siguientes casos:

B1. *Elemento dado:* el término general está dado en forma de una expresión concreta, es decir $a_n = f(n,\alpha)$. En esta situación α representa un parámetro.

Elementos requeridos (habitualmente):
- límite;
- convergencia;
- propiedades de la secuencia: limitada, monótona.
- elementos particulares: término mínimo, máximo de la secuencia.
- valores de un parámetro para cual alguna propiedad se cumple.

Meta pedagógica: aplicar casos conocidos, aplicar conocimiento existente, verificar el entendimiento y la aplicación correcta de los conocimientos (definiciones y ejemplos típicos)
Dificultades posibles: entendimiento parcial de los conceptos fundamentales, aplicación parcial de las condiciones que aparecen en las definiciones y reglas de cálculo, falta de conocimiento trigonométrico o algebraico.

B2. *Elemento dado:* el término general está dado en forma de una suma o producto, es decir $a_n = \sum_k f(k,n,\alpha)$ ó $a_n = \prod_k f(k,n,\alpha)$.
Elementos requeridos (habitualmente):
- límite;
- convergencia;
- propiedades de la secuencia: limitada, monótona.
- el n / α a partir de cual / para cual alguna propiedad se cumple.
- forma reducida del término general: forma explícita o relación de recurrencia entre los términos.

Meta pedagógica: verificar el conocimiento de técnicas para calcular sumas/productos (en caso que se puedan calcular), identificar el método adecuado para tratar el problema (sobre todo cuando no se puede calcular la suma/producto), aplicar el aspecto particular del conocimiento general de matemáticas que ayuda a resolver el problema, identificar componentes dominantes en la expresión.
Dificultades posibles: entendimiento superficial (o unidireccional) de las reglas sobre las propiedades de las sumas/productos de secuencias, falta de conocimiento trigonométrico o algebraico.

B3. *Elemento dado:* el término general está dado en forma de una relación de recurrencia, es decir $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, n, \alpha)$.
Elemento requerido (habitualmente):

- límite;
- convergencia;
- propiedades de la secuencia: limitada, monótona.
- el α para el cual alguna propiedad se cumple.
- forma reducida del término general.

Meta pedagógica: verificar el conocimiento de técnicas para encontrar la forma del término general (en caso que se pueda calcular), identificar el método adecuado para tratar el problema (sobre todo cuando no se puede calcular el término).
Dificultades posibles: entendimiento superficial (o unidireccional) de las reglas sobre las propiedades de las secuencias, falta de conocimiento trigonométrico o algebraico, falta de conocimiento en manejo de las relaciones de recurrencia.

Hay que resaltar que los problemas de tipo B2 pueden ser considerados también como de tipo B3. Sin embargo, ambos tipos se diferencian por los métodos que se pueden aplicar para su solución. La mayoría de los B2 tienen una expresión que permite el cálculo del término general de manera simple o bien, el método para resolver el problema es simple, mientras que en el caso de los problemas de tipo B3 normalmente los métodos son más laboriosos y requieren conocimiento especifico sobre el manejo de las recurrencias.

B4. *Elemento dado:* una secuencia a_n con algunas propiedades $P_1, P_2, ..., P_k$. A partir de esta secuencia se construye otra(s), b_n de la forma $b_n = f(a_n, \alpha)$.
Elemento requerido (habitualmente):

- límite de b_n;
- convergencia de b_n;
- propiedades de la secuencia b_n: limitada, monótona.
- el α para el cual se cumple alguna propiedad de la secuencia b_n.
- relación de recurrencia entre los elementos de b_n.

Meta pedagógica: verificar el conocimiento sobre las propiedades $P_1, P_2, ..., P_k$, verificar el conocimiento sobre el manejo de la función f, identificar los términos de una secuencia.
Dificultades posibles: falta de entendimiento de la importancia de las propiedades de una secuencia, falta de conocimiento trigonométrico o algebraico.

B5. *Elemento dado:* varias secuencias con los términos generales en forma de relación de recurrencia mezclada, es decir $a_n = f(a_{n-1}, b_{n-1}),\ b_n = g(a_{n-1}, b_{n-1})$.
Elemento requerido (habitualmente):

- límite a_n, b_n;
- convergencia a_n, b_n;
- propiedades de la secuencia a_n, b_n: limitada, monótona.

Meta pedagógica: identificar el método correcto para resolver el problema, manejar propiedades de las secuencias.
Dificultades posibles: falta de conocimiento de las reglas sobre sumas/productos de secuencias, falta de conocimiento trigonométrico o algebraico, falta de conocimiento en el manejo de las propiedades de las secuencias.

2.2. Clasificación de los problemas según los métodos posibles de solución
En este tipo de clasificación podemos aplicar varios criterios para determinar grupos (tipos) de problemas.

A. Según el número de métodos posibles a aplicar tenemos:

A1. Problemas con un sólo método disponible para resolverlos. Es importante diferenciar entre dos situaciones para este caso: en la primera, el método es único porque así se indica en el problema (el problema exige la solución con un método en particular) y, en la segunda en la que no hay más que un sólo método para resolver el problema.

Meta pedagógica: verificar el conocimiento sobre el método indicado, identificar el método disponible para resolver el problema.
Dificultades posibles: falta de conocimiento del método particular, incapacidad de identificar el método adecuado para solucionar el problema.

A2. Problemas que se pueden resolver con varios métodos.
Meta pedagógica: identificar todos los métodos disponibles o verificar si se puede identificar el método más simple por aplicar.
Dificultades posibles: falta de conocimiento en cuanto los métodos posibles para aplicar, incapacidad de identificar el método más simple para aplicar en la situación dada.

B. Según la complejidad del método de solución:
Los métodos de solución representan un aspecto importante para la clasificación de los problemas. A continuación sugerimos una lista de ellos y especificaremos qué debe entenderse por cada categoría.

B1. Problemas que se resuelven de manera directa con métodos propios del dominio. Nos referimos a aquellos métodos que se enseñan junto con los conceptos básicos del análisis matemático, permiten la conclusión directa de resultados y, por lo tanto, no requieren alcanzar metas intermedias en el proceso de solución. Aunque usamos el término método, a veces algunos se denominan propiedad u operaciones. En el caso de problemas con secuencias estos métodos se expresan como reglas, por ejemplo: "*La secuencia con el término general definido como suma de dos términos generales de dos secuencias convergentes es una secuencia convergente, con el límite igual a la suma de los dos límites*". La descripción "de manera directa" que aparece en la categorización se refiere a que no hay resultados intermedios que obtener, sino que la regla es directamente aplicable y pertenece al mismo dominio.
Meta pedagógica: verificar si se conoce el método.
Dificultades posibles: falta de conocimiento en cuanto los métodos posibles para aplicar, incapacidad de identificar el método más simple para aplicar en la situación dada.

B2. Problemas que se resuelven con métodos propios del dominio y requieren resultados parciales. Nos referimos así a los métodos que exigen cumplir con criterios para poder aplicar el método, el cual pertenece al dominio. En el caso de problemas con secuencias, éstos se enseñan en forma de reglas, como por ejemplo: "*Una secuencia limitada y monótona es convergente*" o la implicación inversa de la regla "*una secuencia es convergente sólo y sólo si tiene todas las sub-secuencias convergentes al mismo límite*". Para aplicar estas reglas se necesita demostrar que se cumplen las premisas especificadas en ellas.
Meta pedagógica: verificar si se conoce el método y si se puede aplicar correctamente.

Dificultades posibles: aplicación parcial del método, omisión de verificación u obtención de los resultados parciales requeridos por el método.

B3. Problemas que se resuelven con métodos no-propios del dominio. Nos referimos a los métodos que no son particulares al dominio de secuencias, sino que se pueden "adaptar" para aplicarse. Por ejemplo, tenemos el caso de la suma Riemann que pertenece a otro dominio, pero se puede aplicar para calcular el límite de secuencias en algunas situaciones. Otro ejemplo de método (más cercano al dominio de secuencias) es el que utiliza límites de funciones para calcular el límite de una secuencia (y frecuentemente exigen una transformación del término general de la secuencia).
Meta pedagógica: verificar si se identifica y se aplica correctamente el método.
Dificultades posibles: incapacidad de identificar el método adecuado (ya que requiere aplicación de un conocimiento que originalmente pertenece a otro dominio), incapacidad de reconocer las modificaciones necesarias a aplicar para reducir el problema a un tipo conocido, falta de conocimiento trigonométrico o algebraico.

Obviamente, la clasificación tiene el propósito de acentuar particularidades de clases de problemas. En muchas ocasiones estos métodos deben aplicarse de manera combinada; sin embargo, hay que subrayar que para el caso B3 los métodos se aplican más bien para calcular entidades y no tanto para demostrar propiedades de la secuencia.

2.3. Clasificación de los problemas según la forma de la pregunta
En la primera clasificación mencionamos a dos grandes partes del problema: elementos conocidos (datos) y elementos requeridos (no-conocidos, por determinar). Otro aspecto importante del problema es la manera en la cual se requiere la determinación de los elementos no-conocidos, es decir, la forma de la pregunta. Según este aspecto tenemos los siguientes tipos:

A1. Demostración. En este tipo de problemas la pregunta exige demostrar alguna propiedad de la secuencia, alguna relación o alguna afirmación. En este grupo podemos diferenciar entre la demostración de alguna afirmación positiva (por ejemplo, "...la secuencia tiene la propiedad") y la demostración de afirmación negativa ("...la secuencia no tiene la propiedad").

Meta pedagógica: verificar si se conoce el método que permite la demostración o la capacidad de construir ejemplos/contraejemplos con propiedades dadas o manejo de cuantificadores.
Dificultades posibles: incapacidad de llevar a cabo una demostración formal, falta de entendimiento en cuanto el significado de la "demostración" (en contraste con "verificación").

A2. Cálculo. Con este tipo de preguntas se exige calcular alguna entidad.
Meta pedagógica: verificar si se aplica correctamente el método.
Dificultades posibles: falta de conocimiento en cuanto los métodos posibles para aplicar, incapacidad de identificar el método más simple para aplicar en la situación dada, falta de conocimiento trigonométrico o algebraico.

A3. Análisis. La pregunta de este tipo exige un análisis de una situación, sin dar indicación sobre los resultados que se deben obtener.
Meta pedagógica: verificar la capacidad de formular hipótesis y verificarla/demostrarla.
Dificultades posibles: incapacidad de llevar a cabo una demostración formal, incapacidad de generalización o abstracción, incapacidad de reconocer el papel de los parámetros en una expresión, falta de conocimiento en el manejo de los parámetros.

El análisis se puede referir a alguna propiedad de la secuencia o al analizar el papel de algún parámetro en el comportamiento de la secuencia.

A4. Selección. Es una forma particular de la pregunta en la cual la respuesta debe escogerse de un conjunto de respuestas ofrecidas. Aunque esto supone efectuar un análisis, se diferencia de la forma A3 por tener la respuesta correcta en el conjunto de respuestas ofrecidas. Obviamente esta forma de pregunta tiene sentido cuando hay varias (más de dos) respuestas plausibles.
Meta pedagógica: verificar la capacidad de diferenciar entre respuestas y argumentar la selección.
Dificultades posibles: incapacidad de analizar las variantes de respuesta, incapacidad de descartar rápidamente las respuestas "obviamente" erróneas, falta de entendimiento en el manejo de los cuantificadores universal y existencial, falta de conocimiento en el manejo de las relaciones lógicas (implicación, equivalencia, etc.).

A5. Negación. Es una forma particular de pregunta a los problemas teóricos, dado que exigen la negación de alguna proposición.
Meta pedagógica: verificar el manejo y el entendimiento sobre el papel de los cuantificadores.
Dificultades posibles: falta de entendimiento en el manejo de los cuantificadores universal y existencial, falta de conocimiento en el manejo de las relaciones lógicas (implicación, equivalencia, etc.).

En la clasificación presentada nos referimos a la forma de la pregunta, sin embargo es obvio que en el proceso de solución del problema el estudiante puede reformular (y a veces debe reformular) la pregunta para poder resolverla. Por el momento, estamos interesados en identificar formas "puras" de preguntas sin considerar las modificaciones que éstas pueden sufrir en el proceso de resolución.

3. Relación de las clases con la taxonomía Bloom para niveles de aprendizaje

Bloom y sus colaboradores (1956) han identificado tres dominios de aprendizaje: el afectivo, cognitivo y el psicomotor. El aprendizaje en el dominio afectivo se refiere a la identificación y manejo de los estados afectivos (emociones, estados de ánimo, sentimientos), formación de preferencias y asimilación de los valores presentes en una comunidad, mientras que en el dominio psicomotor se habla del desarrollo de las habilidades físicas y de percepción. El aprendizaje en el dominio cognitivo se relaciona con el manejo de la información: como producirla, obtenerla, evaluarla y sintetizarla. Ellos proponen una taxonomía de las metas de aprendizaje en este último dominio descrito. Las categorías en el dominio cognitivo son los siguientes:
Conocimiento: la habilidad de recordar material previamente aprendido, manejar la terminología, definiciones y reconocer casos particulares ya presentados.
Entendimiento: la habilidad de explicar, de entender el significado, reformular ideas, entender la información básica, interpretarlo y extrapolarlo.
Aplicación: del material aprendido en situaciones nuevas.
Análisis: identificar las partes componentes de la información.
Síntesis: significa juntar ideas y conocimiento en una forma nueva.
Evaluación: la habilidad de juzgar el valor de un material con un criterio dado.

Varios investigaciones han confirmado la jerarquía de los primeros cuatro niveles mencionados, en cambio no se ha llegado a resultados ciertos en cuanto los últimos dos, por lo tanto se ha sugerido que el síntesis y evaluación parecen mas bien de mismo nivel, complementándose recíprocamente. Experimentos han confirmado que para un aprendizaje profundo y duradero es necesario que el estudiante aprenda a todos los niveles que aparecen en la taxonomía. En este sentido nos parece importante buscar la relación entre la clasificación de los problemas presentado en la sección anterior y los niveles de aprendizaje de la taxonomía de Bloom. A continuación procedemos con esto.

De los cuatro criterios de clasificación propuestos para los problemas (según *a.* los elementos especificados en el problema; *b.* el número de métodos de solución disponibles para aplicar; *c.* la complejidad del método de solución y *d.* forma de la pregunta) vamos a analizar las clasificación cruzada de los últimos dos. Nos interesan estos dos en particular por ser aspectos identificables desde la expresión del problema y, por lo tanto, fácil de establecer aun en un sistema de cómputo. En consecuencia sería posible conectar la información proporcionada por ellos con un modelo de conocimiento del estudiante en cual para cada concepto se manejarían algunos o todos los niveles de aprendizaje de la taxonomía de Bloom (así como se maneja, por ejemplo, en Budenbender *et al.*, 2003).

Los dos criterios mencionados se refieren a dos aspectos de un problema: el enunciado o los elementos dados (el primer criterio) y la forma en cual se requiere el resultado (segundo criterio), en consecuencia vamos a analizar los problemas considerando estos aspectos de manera simultánea.

1. *Problemas concretos con el término general de la secuencia dado*:

a) *Demostración:* en caso de estos problemas se requiere demostrar alguna propiedad de la secuencia con el término general conocido. Para hacerlo el estudiante debe emplear ejemplos conocidos, definiciones y debe conocer la terminología usada. Por lo tanto, los problemas de este tipo se consideran como correspondientes al nivel de *conocimiento* en la clasificación de Bloom.

b) *Cálculo*: en estos problemas se requiere calcular algún valor, ya que sea límite o de un parámetro tal que se cumpla alguna propiedad. Para solucionarlo el alumno debe entender el significado de los términos, por lo tanto relacionamos este tipo de problema con el nivel de *entendimiento* de la taxonomía Bloom.

c) *Análisis*: este tipo de pregunta está relacionado con problemas que tienen un parámetro y normalmente se requiere el análisis en términos del parámetro. Como se supone que el alumno debe saber como detectar casos generales y que vaya integrando los resultados, consideramos que los problemas con la particularidad descrita corresponderán al nivel de *análisis* en la taxonomía de Bloom.

d) *Selección:* el alumno debe elegir la respuesta correcta de un conjunto dado. Los problemas de este tipo son iguales a los de cálculo (podemos verlo como el calculo del valor "verdadero-falso"), por lo tanto corresponden al nivel *entendimiento.*

e) *Negación:* para resolver problemas de este tipo el alumno debe entender a fondo los conceptos, por lo tanto corresponden al nivel de *entendimiento* de la taxonomía de Bloom.

2. *Problemas concretos con el término general en forma de suma o producto*:

a) *Demostración:* en caso de estos problemas se requiere demostrar alguna propiedad de la secuencia. Para hacerlo el estudiante debe saber manejar los conceptos involucrados, por lo tanto, los problemas de este tipo se consideran como correspondientes al nivel de *entendimiento* en la clasificación de Bloom.

b) *Cálculo*: en estos problemas se requiere calcular algún valor, ya que sea límite o de un parámetro tal que se cumpla alguna propiedad. Para solucionarlo el alumno debe entender el significado de los términos, por lo tanto relacionamos este tipo de problema con el nivel de *aplicación* de la taxonomía Bloom.

c) *Análisis*: similar a los problemas de misma categoría del primer tipo estos corresponden al nivel de *análisis* en la taxonomía de Bloom.

d) *Selección:* los problemas de este tipo son iguales a los de cálculo, por lo tanto corresponden al nivel *aplicación.*

e) *Negación:* similar a lo anterior, los problemas de este tipo corresponden al nivel de *entendimiento* de la taxonomía de Bloom.

3. *Problemas concretos con el término general en forma de recurrencia*:

a) *Demostración:* estos problemas son más difíciles que los anteriores de misma categoría, dado que el alumno debe razonar sobre una secuencia que no tiene a priori especificado su término general, por lo tanto, los problemas de este tipo se consideran como correspondientes al nivel de *aplicación* en la clasificación de Bloom.

b) *Cálculo*: los problemas de esta categoría enfrentan el alumno con dificultades particulares y requieren de la habilidad de ver la estructura general de una secuencia, por lo tanto relacionamos este tipo de problema con el nivel de *análisis* de la taxonomía Bloom.

c) *Análisis*: similar a los problemas de cálculo estos corresponden al nivel de *análisis* en la taxonomía de Bloom.

d) *Selección:* los problemas de este tipo son iguales a los de cálculo, por lo tanto corresponden al nivel *análisis.*

e) *Negación:* problemas de esta subcategoría son muy raros y corresponden al nivel de *aplicación* de la taxonomía de Bloom.

4-5. *Problemas concretos con el término general en función del término de otra secuencia*:

Tratamos estas dos clases juntas, dado la similitud entre ellas desde punto de vista de los procedimientos requeridos para la solución. Independientemente de la forma del problema, estos problemas exigen tratar dos secuencias simultáneamente y ser capaz de transferir información de una a otra, por lo tanto los consideramos correspondientes al nivel de *síntesis/evaluación* en la clasificación de Bloom. En este sentido son los más complejos, dado que para resolverlos se necesita sintetizar toda la información y conocimiento sobre secuencias.

6. *Problemas teóricos*:

Los problemas teóricos requieren del alumno entender la terminología, conocer las definiciones y el significado de cada uno de los elementos que aparecen en ellas, pero además de esto exigen que el alumno sea capaz de construir ejemplos, contraejemplo, formule hipótesis. Al considerar estos aspectos correspondemos a estos problemas con nivel de *síntesis/evaluación* en la clasificación de Bloom.

Dados los beneficios potenciales de tales correspondencias es importante validar la propuesta presentada con una validación empírica.

4. Conclusiones

Hemos presentado clasificaciones de los problemas de análisis matemático con secuencias bajo varios criterios de agrupación. En el caso de cada tipo de problema identificado hemos mencionado posibles metas pedagógicas y factores de dificultad.

Consideramos que al identificar (en el caso de un estudiante) el tipo de problema con cuales tiene dificultad en resolverlas, al emplear los elementos mencionados para cada clase de problema se facilita la identificación de las causas de esta dificultad y, por lo tanto, se puede ayudar el estudiante a superarla. En un escenario de enseñanza presencial, tal clasificación puede ayudar a dar atención individualizada a los estudiantes, al proponerles problemas o reactivos adecuadas a su nivel de conocimiento o a las dificultades detectadas. En caso de un software educativo, consideramos que de la misma manera la clasificación puede ayudar adecuar el material al nivel del estudiante e insistir en aspectos faltantes para un aprendizaje profundo. En caso de un software con un modelo del conocimiento del estudiante (que contenga, por ejemplo, los niveles de aprendizaje de Bloom para cada concepto previsto en ello), la clasificación permite identificar niveles de manejo de los conceptos involucrados (no solamente los conceptos de análisis matemático, sino también los que se relacionan con el conocimiento algebraico o trigonométrico). De esta manera se podría detectar una situación en cual la incapacidad del estudiante de resolver el problema no surge por falta de conocimiento del método o de los conceptos del análisis matemático, sino por falta de un manejo adecuado de algún concepto relacionado con otro tipo de conocimiento (por ejemplo, errores en el manejo de las propiedades de los logaritmos).

5. Referencias

Akkoç, H. y D. Tall (2005). A mismatch between curriculum design and student learning: the case of the function concept. Sixth British Congress of Mathematics Education, Warwick, UK.

Bloom, B., Englehart, M. Furst, E., Hill, W., y Krathwohl, D. (1956). Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain. New York, Toronto: Longmans, Green.

Budenbender, J., Goguadze, G., Libbrecht, P., Melis, E. y Ullrich, C. (2003). Metadata for ACTIVEMATH. Technical Report, DFKI Saarbrucken.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite. Modèles spontanés et modèles propres. Fifth International Conference of International Group of Psychology of Mathematics Education.

Nesher, P. y J. Kilpatrick (1990). Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Bristol, Cambridge University Press.

Pólya, G. (1967). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, John Wiley & Sons, INC.

Tall, D. et al. (1985). The calculus curriculum. Mathematical Association Conference on Microcumputers in the A level Curriculum.

Tall, D. (1986). “The Calculus Curriculum in the MicroComputer Age.” Mathematical Gazette **70**: 123-128.

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula. Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives. E. Silver. NJ: Lawrence Erlbaum, Hillsdale**:** 189-236.