LA ESTIMACIÓN DE PROPORCIONES MEDIANTE TÉCNICAS BAYESIANAS*

ESTIMATION OF RATIOS USING BAYESIAN TECHNIQUES

E. I. DE LA FUENTE[1]; L. M. LOZANO[2]; C. SAN LUIS[3]; E. GARCIA-CUETO[4]; J. GUÀRDIA[5]
M. E. MARTÍN[2]; M. I. BARBERO[3]; M. FREIXA[5]; M. PERÓ[5]; A. R. ORTEGA[2]; G. R. CAÑADAS[1];
D. ALCARAZ[1]; M. C. DÍAZ[6] E I. PEDROSA[4]

[1]Universidad de Granada
[2]Universidad de Jaén
[3]Universidad Nacional de Educación a Distancia
[4]Universidad de Oviedo
[5]Universidad de Barcelona
[6]Universidad de Huelva

Resumen

Los procedimientos de estimación basados en el teorema de Bayes son inusuales en los diferentes ámbitos de aplicación de la inferencia paramétrica clásica. El objetivo de este trabajo es presentar un esquema para la estimación bayesiana de parámetros bajo los supuestos de un modelo binomial. El procedimiento Bayes se estudia en comparación con la aproximación paramétrica clásica, ambas opciones, en su versión puntual y mediante intervalos de estimación. Se presenta también un estudio de simulación con diferentes tamaños muestrales en el que se ponen de manifiesto las ventajas del procedimiento bayesiano.

Abstract

The estimation procedures based on Bayes' Theorem are still an unusual option in many of the environments of classic parametric inference. The aim of this paper is to show an effective scheme for the use of Bayesian estimation of unknown parameters. We have opted to focus on the estimation of parameters under the assumption of a binomial model, so that it can be followed by all those situations that meet the aforementioned probabilistic model. This approximation was studied in comparison with the classic parametric approximation, both in its point version and by means of interval estimation. On a study, by simulating samples of several sizes, we obtained empirical evidence regarding the advantage of the Bayesian procedure.

* Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia (proyecto SEJ2006-13009) y por la Junta de Andalucía (proyecto de excelencia P07-HUM02529 cofinanciado con fondos FEDER).

[1] Autor para correspondencia: E. I. de la Fuente Solana. Dpto. de Psicología Social y Metodología de las Ciencias del Comportamiento. Facultad de Psicología. Campus Universitario de Cartuja. Universidad de Granada. 18071 Granada. edfuente@ugr.es

Introducción

En el análisis de los datos en el ámbito de investigación en Ciencias Sociales y de la Salud suelen utilizarse modelos matemáticos que incorporan el concepto de incertidumbre. Habitualmente el objetivo de este análisis se centra en la determinación o selección de un modelo probabilístico, su ajuste o su validación, y en las predicciones que puedan realizarse teniendo dicho modelo como base. En todos estos aspectos las técnicas inferenciales de estimación de parámetros y contraste de hipótesis tienen un papel central en el análisis y, por consiguiente, en las conclusiones que se puedan establecer a partir de los resultados obtenidos. En este contexto el uso de la filosofía Bayesiana se ha ido generalizado debido a que los investigadores son cada vez más conscientes de las ventajas que tiene su utilización y también gracias a la existencia de software que hace su aplicación accesible.

De acuerdo con (De la Fuente, García y De la Fuente, 2002; Guàrdia, De la Fuente y Lozano, 2008), cuando se analizan los datos de una investigación se pueden encontrar circunstancias como: (a) los métodos estadísticos se utilizan como una herramienta para obtener explicaciones científicas y el procedimiento estadístico a aplicar depende de las hipótesis de investigación utilizadas que, casi siempre, son el reflejo de las expectativas del investigador; (b) no se utiliza la experiencia adquirida investigaciones previas, lo que no sucede en el diseño y en el planteamiento de las hipótesis de investigación; (c) no siempre se comprueba si se cumplen los supuestos o requisitos necesarios para poder hacer uso, con objetivos inferenciales, de las diferentes técnicas estadísticas, a pesar de que es sabido que la obtención de conclusiones válidas depende de la elección acertada del procedimiento estadístico y del respeto de los supuestos que exige dicho procedimiento; (d) se utilizan los procedimientos clásicos de estimación de parámetros y se concluye que el parámetro poblacional se encuentra contenido en el intervalo de confianza que se obtiene, con una probabilidad determinada, lo que es erróneo; (e) los usuarios de las técnicas estadísticas interpretan las conclusiones a las que se llega tras su aplicación en términos probabilísticos. De este modo se concluye que «*el tratamiento tiene efecto*» en caso de obtener un valor estadísticamente significativo lo que, generalmente, lleva a interpretar un resultado significativo en términos de cómo de probables son las hipótesis.

Los aspectos citados son algunos de los puntos débiles de muchas investigaciones llevadas a cabo en Ciencias Sociales y de la Salud que han sido reiteradamente denunciados (Bakan, 1966; Bolles, 1962; Borges y Sánchez-Bruno, 2002; Borges, San Luis, Sánchez-Bruno y Cañadas, 2001; De la Fuente, García y De la Fuente, 2007; Guàrdia, Peró, Freixa y Honrubia, 2008; Harcun, 1990; Kish, 1959; Krueger, 2001; Migon y Gamerman, 1999; Wilkinson, 1999). Este mismo tipo de problemas metodológicos pueden encontrarse también en trabajos sobre evaluación de programas comunitarios en el ámbito sanitario psicológico, lo cual ha generado una cierta distancia entre las cuestiones propias de la evaluación comunitaria y las técnicas de la epidemiología inferencial.

Muchas de estas cuestiones podrían eliminarse, o mitigarse, si se utilizaran las técnicas de análisis que proceden de la filosofía bayesiana, la cual puede no sólo solventar problemas de tipo metodológico como los mencionados sino también ofrecer una concepción más realista del fenómeno sanitario. De hecho, existen diversas razones que apoyan el uso de este tipo de técnicas: su aplicación es más sencilla que la de las técnicas de análisis clásicas, permiten el uso de la información obtenida en investigaciones anteriores, no tienen las exigencias o supuestos de aplicación de las técnicas clásicas y ofrecen aquello con lo que de forma errónea se concluye en las técnicas clásicas, las probabilidades de las hipótesis. Además, los procedimientos bayesianos son mucho más flexibles e intuitivos que los de la estadística clásica.

El enfoque clásico y el enfoque bayesiano no son incompatibles. La fase estadístico-analítica del proceso de modelización en una investigación, puede llevarse a cabo utilizando cualquiera de ellos. Por tanto, no se trata de proponer uno como mejor que otro de modo genérico, serán las características propias de cada investigación las que determinen si es más recomendable utilizar la Estadística clásica o la bayesiana. Desde esta perspectiva resulta indiscutible que la mejor opción consiste en el conocimiento de ambas aproximaciones filosóficas al análisis de los datos, y seleccionar la más adecuada en cada caso, según los objetivos de la investigación y las posibilidades de los datos recogidos.

El objetivo de este trabajo es presentar un esquema del procedimiento que ha de llevarse a cabo para realizar inferencias desde el punto de vista bayesiano mediante la estimación de un parámetro, en concreto la proporción de éxitos en poblaciones binomiales. En primer lugar, se expone el desarrollo teórico necesario para llevar a a cabo la estimación puntual del parámetro así como el establecimiento de la región de alta densidad de dicho parámetro. Además, se indican de modo explícito las divergencias existentes entre la inferencia clásica y la bayesiana. En segundo lugar, se muestra la bondad de las dos aproximaciones mediante un estudio de simulación en el que se obtienen estimaciones y regiones de alta densidad para el parámetro «*proporción de éxitos*» en una población binomial utilizando como base muestras de distintos tamaños para realizar las inferencias.

Estimación bayesiana de la proporción de éxitos en una población binomial

En la inferencia clásica los datos de una muestra se consideran variables aleatorias, por tanto, una muestra de tamaño n es, en realidad, un vector aleatorio de la forma $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, y los parámetros poblacionales que se quieren estimar son valores constantes y desconocidos. Por contra, en la inferencia bayesiana los n datos que constituyen la muestra son valores fijos y los parámetros son variables aleatorias.

Una diferencia fundamental entre el procedimiento de análisis clásico y el bayesiano es que mientras que en el primer caso no se suele utilizar la información previa, conocida a partir de investigaciones anteriores, en el segundo existe esa posibilidad. Este conocimiento se plasma a través de la distribución inicial o distribución «a priori» la cual es el modelo que se establece como punto de partida para realizar inferencias. El único requerimiento para establecer esta distribución es que represente el conocimiento que se tiene del parámetro al que se refiere la inferencia que se desea realizar, antes de observar nuevos resultados experimentales.

La información necesaria para establecer la forma de la distribución «a priori» puede obtenerse mediante diversos procedimientos que pueden ser totalmente subjetivos, parcialmente subjetivos, o una combinación de ambos. Entre los métodos totalmente subjetivos se encuentra el método del histograma, que divide el rango de valores del parámetro, θ, en un conjunto de intervalos y utiliza la probabilidad subjetiva de que θ se encuentre en cada intervalo; a partir de este conjunto de probabilidades, se puede representar como una distribución inicial discreta o, mediante suavizado, como una distribución de densidad de probabilidad (Gelman, Carlin, Stern y Rubin, 2000). Entre los métodos parcialmente subjetivos se encuentra una aproximación indirecta de dicha información mediante distribuciones de probabilidad con formas funcionales conocidas, haciendo uso de las familias de distribuciones conjugadas que existen, con lo que los cómputos son mucho más fáciles (DeGroot, 1970, 1986; De la Fuente, De la Fuente, García, Iglesias, Martín, Ramírez y Cañadas, 2002; Raiffa y Schlaifer, 1961). Finalmente, la forma de proceder que resulta más enriquecedora es la combinación de ambos tipos de procedimientos. Esto se puede plantear en dos etapas; en primer lugar, y asociada al parámetro al que se refieren las inferencias, se elige una familia de distribuciones conjugadas compatible con el modelo poblacional y, en segundo lugar, se elige un elemento de dicha familia mediante la aproximación del histograma, la de la función de distribución, la de la verosimilitud relativa o cualquier otra conocida (Gelman et al., 2000).

La ventaja de utilizar una familia de distribuciones conjugadas es que se conoce su transformación mediante el teorema de Bayes y, por tanto, la distribución final sobre la que se realizan las inferencias está perfectamente determinada.

La distribución final o distribución «a posteriori» es la distribución resultante al aplicar el teorema de Bayes a la distribución inicial que se estableció al inicio del proceso. En ella, se pueden calcular el estimador puntual bayesiano, los intervalos de alta densidad o regiones creíbles asociadas al parámetro que deseamos estimar y las probabilidades de las hipótesis establecidas en un contraste de dos o más hipótesis.

A fin de ilustrar este proceso, en este trabajo se utilizan poblaciones Binomiales, familia paramétrica que tiene asociada como distribución inicial en las inferencias la distribución Beta que incluye como caso particular la distribución uniforme.

Si se considera el modelo Binomial:

$$p(y/\theta) = Bin(y/n,\theta) = \binom{n}{y}\theta^{y}(1-\theta)^{n-y}$$

En este caso, la verosimilitud asociada al modelo se puede parametrizar como una distribución Beta de hiperparámetros α y β del modo siguiente:

$$p(\theta) \prec \theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta-1}$$

Dado que la distribución inicial Beta es una familia de distribuciones conjugadas para la verosimilitud Binomial (Gelman et al., 2000), la densidad final o densidad «a posteriori» tiene esta misma forma, es decir, es también una distribución Beta con la forma siguiente:

$$p(\theta/y) \prec \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1} = \\ = Beta(\theta/\alpha+y,\beta+n-y)$$

Es decir, en un modelo Binomial, con distribución inicial Beta, con media $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ y varianza $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$, la distribución final es otra distribución Beta con media $E[\theta/y] = \dfrac{\alpha+y}{\alpha+\beta+n}$ y varianza

$$\operatorname{var}(\theta/y) = \frac{E[\theta/y]E[1-E(\theta/y)]}{\alpha+\beta+n+1} = \\ = \frac{(\alpha+y)(\beta+n-y)}{(\alpha+\beta+n)^2(\alpha+\beta+n+1)}$$

El estimador puntual Bayes $\varphi^*(\theta)$ del parámetro proporción de éxitos en una población Binomial, si se utiliza la función de pérdida cuadrática, es la media de la distribución final indicada anteriormente (Press, 1989), a la que se llega por remuestreo en la distribución final (Gilks, Richardson y Spiegelhalter, 1996). Esto quiere decir que se puede obtener una estimación de la proporción de éxitos en la población teniendo en cuenta el conocimiento previo que se tiene del problema y combinando dicho conocimiento con los datos recogidos, de forma que dicha estimación puntual del parámetro poblacional es la aproximación por remuestreo en la distribución final del parámetro, del valor esperado $E[\theta/y]$. La variabilidad en dicho resultado, puesto que trabajamos en términos probabilísticos, viene dada por la varianza final (θ/y).

Si se fijan α y β para tamaños muestrales grandes, se tiene que $E[\theta/y] \approx \dfrac{y}{n}$ y $\operatorname{var}(\theta/y) \approx$ $\approx \dfrac{1}{n}\dfrac{y}{n}\left(1-\dfrac{y}{n}\right)$, que tiende a cero. Es decir, en el límite, la distribución inicial no influye en los valores obtenidos en la distribución final, y haciendo uso de la versión bayesiana del teorema central del límite, puede concluirse que las dos aproximaciones al análisis consideradas, clásica y bayesiana, llevan, en este caso, a resultados muy similares, aunque la interpretación conceptual que se hace de ellos en cada enfoque es siempre diferente.

Estudio de simulación

Procedimiento

A partir de una población teórica que se distribuye de acuerdo con un modelo binomial cuya probabilidad de éxito es de 0.15, se generaron cinco muestras de tamaño 10, 20, 50 y 100, respectivamente mediante un muestreo con reposición de elementos. Para ello se utilizó el programa SPLUS 8.0, el algoritmo de simulación se basó en el procedimiento clásico de Montecarlo. De este modo se obtuvieron 4 condiciones de simulación utilizando esos valores para el arranque de la simulación. Como es habitual en estos casos la semilla inicial fue la aleatoria del propio hardware (Gelman, 1992; Geman y Geman, 1984).

Análisis de Datos y Resultados

De acuerdo con el procedimiento de inferencia clásica, en cada una de las muestras obtenidas, se obtuvo la estimación de máxima verosimilitud del parámetro proporción de éxitos π, notado como $\hat{\theta}$, así como el intervalo de confianza, utilizando para ello el programa STATGRAPHICS PLUS 5.

Asimismo, mediante el uso del programa WinBugs (Lunn, Thomas, Best & Spiegelhalter, 2000; Spiegelhalter, Thomas, Best y Gilks, 1994a, 1994b) se obtuvieron el estimador bayesiano, tanto con distribución inicial no informativa ($\theta^*_{\text{no inf}}$) como con distribución inicial informativa (θ^*_{inf}), la región de alta densidad y el test bayesiano del parámetro, en cada una de las muestras.

En el análisis bayesiano, cuando la distribución inicial era no informativa se utilizó la distribución Beta, familia de distribuciones conjugadas en el caso de poblaciones binomiales, cuyos parámetros iniciales son $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. En el caso de la distribución inicial informativa se determinó el número exacto de éxitos que ocurre en la población Binomial considerada, según los diferentes tamaños muestrales y se utiliza el procedimiento que establece Congdon (2003), obteniéndose una distribución beta con parámetros a $\alpha = 30.5$ y $\beta = 172.5$.

En todos los casos se utilizó en el análisis clásico un nivel de confianza del 95% y una probabilidad con un valor idéntico en el análisis bayesiano.

Los resultados obtenidos mediante ambos tipos de análisis, es decir, las estimaciones puntuales de máxima verosimilitud, $\hat{\theta}$, así como el estimador bayesiano tanto con distribución inicial no informativa, $\theta^*_{\text{no inf}}$ como con distribución inicial informativa, θ^*_{inf}, aparecen en la tabla 1.

Por otra parte, se obtuvieron tanto el intervalo de confianza clásico como las regiones de alta densidad, tanto en el caso de una distribución inicial no informativa como de una distribución inicial informativa (ver tabla 2) El ajuste de estas estimaciones puede valorarse observando las amplitudes de los citados intervalos de estimación los cuales pueden verse en la tabla 3.

Tabla 1. Estimación puntual de la proporción (π = .15).

n		$\hat{\theta}$	$\theta^*_{\text{no informativa}}$	$\theta^*_{\text{informativa}}$
10	Puntual	.3	.2329	.1571
20	Puntual	.1	.1366	.1456
50	Puntual	.16	.1732	.1521
100	Puntual	.14	.1471	.1468

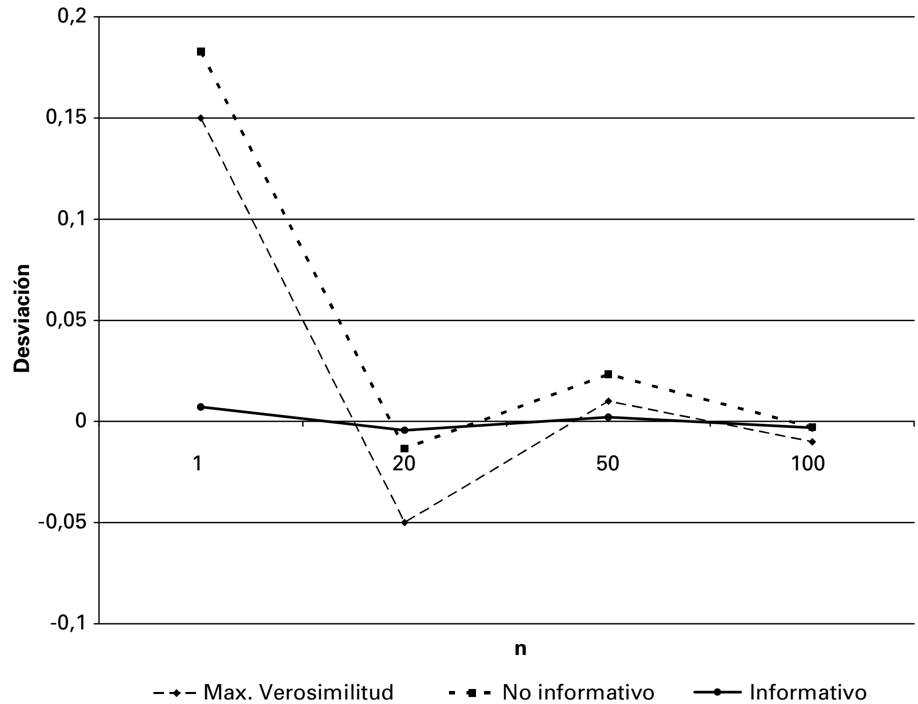
Tabla 2. Intervalo de confianza y región de alta densidad (NC = 95%)(π = .15).

n		$\hat{\theta}$	$\theta^*_{\text{no informativa}}$	$\theta^*_{\text{informativa}}$
10	Lim. inferior	.016	.1089	.1117
	Lim. superior	.584	.6071	.2091
20	Lim. inferior	-.03	.003	.1026
	Lim. superior	.23	.3	.1949
50	Lim. inferior	.0584	.0846	.1109
	Lim. superior	.2616	.2853	.199
100	Lim. inferior	.072	.0857	.1094
	Lim. superior	.208	.2219	.1889

Tabla 3. Amplitud del intervalo (NC = 95%).

n		$\hat{\theta}$	$\theta^*_{\text{no informativa}}$	$\theta^*_{\text{informativa}}$
10	A. de Int.	.557	.498	.097
20	A. de Int.	.26	.297	.092
50	A. de Int.	.2032	.201	.088
100	A. de Int.	.136	.136	.079

Figura 1. Desviaciones de la estimación puntual en función del tamaño muestral.



Por otra parte, dado que se conoce el valor del parámetro «*proporción de éxitos*» en la población simulada, es posible conocer las desviaciones de las estimaciones realizadas en sus versiones clásica y bayesiana, con o sin información inicial, y según los diferentes tamaños muestrales considerados. Dichas desviaciones aparecen en la figura 1.

Finalmente, los resultados muestran, tal y como indica la teoría, que todas las estimaciones convergen a valores similares conforme el tamaño de la muestra aumenta.

Discusión y conclusiones

En el caso de la estimación puntual, los resultados obtenidos (ver tabla 1) muestran que la mejor estimación del parámetro θ es la estimación bayesiana con distribución inicial informativa. Por otra parte, tal y como era de esperar según la teoría, el estimador bayesiano con distribución inicial no informativa y el de máxima verosimilitud toman valores similares, si bien el bayesiano es más preciso en tamaños de muestra pequeños.

En el caso de la estimación mediante intervalos (tablas 2 y 3) vuelve a encontrarse el mismo patrón de resultados. Los intervalos más precisos en todos los casos son los que corresponden a la estimación bayesiana con distribución inicial informativa. Además, como puede observarse, la estimación bayesiana con distribución «a priori» no informativa ofrece intervalos de menor amplitud que la estimación clásica.

La figura 1 muestra las desviaciones entre los estimadores obtenidos con respecto al verdadero valor del parámetro poblacional, en las diferentes condiciones simuladas. Como puede verse. en todos los casos la estimación bayesiana con distribución inicial informativa, está más cerca del verdadero valor poblacionales, alternándose los otros dos procedimientos, en su proximidad al valor poblacional, aunque siguen un patrón similar.

Tal y como se indicaba al principio del presente trabajo existen algunas diferencias entre la filosofía clásica y la bayesiana en inferencia estadística, tanto en lo que se refiere a la estimación puntual como a la estimación por intervalos de credibilidad. Mientras que la Estadística clásica utiliza sólo la información contenida en la muestra de datos seleccionada, en la aproximación bayesiana los estimadores son índices de posición de la distribución final, dependiendo de la función de pérdida que se elija. En el caso de que se use una distribución inicial no informativa, el estimador bayesiano que minimiza la función de pérdida cuadrática coincide con el que maximiza la verosimilitud, por lo que los resultados que se obtienen con las dos aproximaciones son similares.

Los resultados de este trabajo apoyan todo lo dicho anteriormente. En el estudio de simulación que se ha presentado los estimadores puntuales que resultan más precisos son los estimadores bayesianos con distribución inicial informativa y los valores de los estimadores bayesianos cuando no se considera información inicial, aún siendo similares a los estimadores máximo verosímiles, están más cercanos al verdadero valor del parámetro.

Referencias bibliográficas

Bakan, D. (1966). The test of Significance in Psychological Research. *Psychological Bulletin, 66*, 423-437.

Bolles, R. (1962). The difference between statistical hypotheses and scientific hypotheses. *Psychological Reports*, *11*, 639-645.

Borges, A., San Luis, C., Sánchez-Bruno, A. y Cañadas, I. (2001). El juicio contra la hipótesis nula: muchos testigos y una sentencia virtuosa. *Psicothema, 13*(1), 173-178.

Borges, A. y Sánchez-Bruno, A. (2002). La simulación al servicio de los contrastes estadísticos: resumen de métodos y estado de la cuestión en grupos pequeños e independientes. *Psicothema*, *4*(2), 255-271.

Congdon, P. (2003). *Bayesian statistical modelling*. Wiley, West Sussex.

DeGroot, M.H. (1970). *Optimal Statistical Decisions.* New York: McGraw-Hill.

DeGroot, M.H. (1986). *Probabilidad y Estadística*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana S.A.

De la Fuente, E.I., García, J. y De la Fuente, L. (2002). Estadística Bayesiana en la Investigación Psicológica. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento*, *4*(2), 185-200.

De la Fuente, E.I., García, J. y De la Fuente, L. (2007). ¿Es importante conocer la Estadística Bayesiana si investigamos en Psicología? En: A. Borges y P. Prieto (Eds). *Psicología y Ciencias Afines en los Albores del s. XXI*. La Laguna: Grupo Editorial Universitario.

De la Fuente, E.I., De la Fuente, L., García, J., Iglesias, S., Martín, I., Ramírez, I. y Cañadas, G. (2002). El Análisis de Bayesiano de Datos en Psicología. Distribuciones conjugadas en un problema de Inferencia Estadística. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento*, *4*(Esp), 189-191.

Gelman, A. (1992). Iterative and non-iterative simulation algorithms. *Computing Science and Statistics*, *24*, 433-438.

Geman, S. y Geman, D. (1984). Stochastic Relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *6*, 721-741.

Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S. y Rubin, D.B. (2000). *Bayesian Data Analysis*. Boca Raton: Chapman Hall CRC.

Gilks, W.R., Richardson, S. y Spiegelhalter, D. (1996). *Practical Markov Chains Monte Carlo*. New York: Chapman & Hall.

Guàrdia, J., De la Fuente, E.I. y Lozano, L.M. (2008). Bayesian inference for binomial populations Bayesian estimation for child depression prevalence. *Advances in Statistics and Applications, 9*(1), 13-35.

Guàrdia, J., Peró, M., Freixa, M. y Honrubia, M.L. (2008). Análisis de las aportaciones y limitaciones derivadas de la utilización de los diseños y técnicas epidemiológicas en la investigación psicológica. *Revista de Neuropsicología,* vol 2 (1), 18-23.

Harcum, E.R. (1990). Methodological versus empirical literature: two views on casual acceptance of the null hypothesis. *American psychologist*, *45*, 404-405.

Jeffreys, H. (1961). *Theory of probability*. (3rd Ed.) London, Oxford University Press.

Kish, L. (1959). Some Statistical problems in research design. *American Sociological Review*, *24*, 328-338.

Krueger, J. (2001). Null hypothesis significance testing: On the survival of a flawed method. *American Psychologist*, *56*(1), 16–26.

Lunn, D.J., Thomas, A., Best, N. & Spiegelhalter, D. (2000). WinBUGS A Bayesian modelling framework: concepts, structure and extensibility. *Statistics and Computing*, *10*, 325-337.

Migon, H.S. y Gamerman, D. (1999). *Statistical Inference. An Integrated Approach.* London: Arnold.

Press, J. (1989). *Bayesian Statistics*. New York: Wiley.

Raiffa, H. y Schlaifer, R. (1961). *Applied Statistical Decision Theory*. Cambridge, Mass: The MIT Press.

Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N. y Gilks, W. (1994a). BUGS: Bayesian Inference using Gibbs sampling. Avalaible from MRC Biostatistics Unit, Cambridge.

Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N. y Gilks, W. (1994b). BUGS: Examples. Avalaible from MRC Biostatistics Unit, Cambridge.

Wilkinson, L. and Task Force on Statistical Inference, APA Board of Scientific Affairs (1999). Statistical Methods in Psychology Journals: Guidelines and Explanations. *American Psychologist*, *54*, 594-604.