CONDUCCIONES FORZADAS:
UNA CONTRIBUCIÓN TEÓRICA A LA DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMADA DE CHRISTIANSEN

Josep Maria Franquet Bernis

Dr. Ingeniero Agrónomo. Dr. en Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Campus del Nordeste. Centro Asociado de Tortosa (Tarragona). director@tortosa.uned.es.

RESUMEN

El cálculo de las pérdidas de carga en una tubería con distribución discreta del gasto, régimen permanente y uniforme, caudal constante por derivación y salidas equidistantes (conducción a presión con servicio en ruta), fue abordado y resuelto por *Christiansen* en el año 1942, para el caso en que la primera derivación estuviera situada a una distancia del extremo aguas arriba de la tubería igual al espaciamiento existente entre todas las derivaciones. Posteriormente, en 1957, *Jensen* y *Fratini* introdujeron la correspondiente modificación en el valor del coeficiente de *Christiansen* para el caso de que la primera salida se hallara a una distancia del comienzo del ramal (línea portagoteros o portaaspersores) igual a la mitad de su espaciamiento. Dichas circunstancias se vienen presentando, sistemáticamente, en el diseño de las redes de riego por aspersión y en los localizados de alta frecuencia (microaspersión, exudación y goteo). El ensayo original, de tipo académico e ingenieril, que se desarrolla a continuación, trata de la justificación matemática de la función aproximada de *Christiansen*, que constituye un tema de notable interés teórico y de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto.

Palabras clave: tubería, riego, aspersión, goteo, aproximación, caudal, salidas, servicio en ruta, pérdida de carga, fórmula.

RESUM

El càlcul de les pèrdues de càrrega en una canonada amb distribució discreta de l'aigua, règim permanent i uniforme, cabal constant per derivació i sortides equidistants (conducció a pressió amb servei en ruta), fou estudiat i resolt per *Christiansen* l'any 1942, per al cas que la primera derivació es situés a una distància de l'extrem aigües amunt de la canonada igual a l'interval existent entre les mateixes derivacions. Posteriorment, al 1957, *Jensen* i *Fratini* introduïren la corresponent modificació en el valor del coeficient de *Christiansen* per al cas que la primera sortida es trobi a una distància de l'inici de la canonada (línia portagoters o portaaspersors) igual a la meitat d'aquell interval. Les esmentades circumstàncies es presenten, sistemàticament, en el disseny de les xarxes de reg per aspersió i en els localitzats d'alta freqüència (microaspersió, exsudació i degoteig). L'assaig original, de tipus acadèmic i enginyeril, que es desenvolupa a continuació, tracta de la justificació matemàtica de la funció aproximada de *Christiansen*, la qual cosa constitueix un tema de notable interès teòric i d'escassa o nul·la difusió en la bibliografia especialitzada existent al respecte.

Paraules clau: canonada, reg, aspersió, degoteig, aproximació, cabal, sortides, servei en ruta, pèrdua de càrrega, fórmula.

ABSTRACT / SUMMARY

The estimate of loss of cargo in a pipeline with a discreet cost distribution, a permanent and uniform regimen, a constant flow by derivation and equidistant outlets (conduction under pressure with service in route), was approached and resolved by Christiansen in 1942, in which case the first derivation is situated at the farthest distance upstream of the pipeline equal to the existing space between the derivations. Later, in 1957, Jensen and Fratini introduced the corresponding modification in the value of the coefficient by Christiansen, in which case the first outlet of the branch is found at a distance (sprinkling or spray line) equal to half of its space. Such circumstances occur systematically, in the design of watering networks by spray and in those sites of high frequency (microspray, exudation and sprinkling). The original study of an academic and engineering nature, which is developed subsequently deals with Christiansen's mathematical justification, and constitutes a theme of notable theoretical interest with little or no diffusion in the existent specialized bibliography in this material.

Key words: *pipeline, irrigation, sprinkling, dripping, approach, flow, exits, en-route service, pressure drop, formula.*

1. INTRODUCCIÓN

En el primer número de la revista *AGRÓNOMOS* del Colegio Oficial de Ingenieros Agrónomos de Levante (correspondiente al verano de 1989) se publicó una brillante colaboración del Dr. Teodoro Montalvo López, Catedrático de Hidráulica General y Agrícola (Departamento de Ingeniería Agroforestal de la Universidad Politécnica de Valencia) y a la sazón Director de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de la capital del Turia. Se abordaba allí, con claridad y profundidad encomiables, el problema de la generalización del coeficiente de Christiansen –empleado para al cálculo de les pérdidas hidráulicas de carga en una tubería con distribución discreta del gasto, caudal constante por derivación y salidas equidistantes– para cualquier valor de la relación:

$$r = \frac{l_o}{l}$$

y de los parámetros $\mathbf{n_0}$ y $\mathbf{m}$, así como se posibilitaba el cálculo directo de las pérdidas de carga en una tubería de característica única formada por un tramo inicial de cualquier longitud, en régimen permanente y uniforme, y de un tramo final con distribución discreta de caudales y servicio en ruta. Estas circunstancias se vienen presentando, sistemáticamente, en el diseño de las redes de riego por aspersión y en los localizados de alta frecuencia (RLAF, microaspersión, exudación y goteo).

Tuve la oportunidad de ponerme en contacto, más recientemente, con el Dr. Montalvo, que me propuso el estudio o deducción matemática de la función aproximada de Christiansen, por tratarse de un tema de notable interés teórico y, al parecer, de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto. De hecho, según el profesor Montalvo, el Departamento de Matemáticas de aquella Universidad lo había venido intentando infructuosamente hasta la fecha.

El ensayo o artículo que aquí se desarrolla constituye, pues, la justificación matemática (conseguida por quien suscribe) de la aproximación de la formulación de Christiansen, de fecundas aplicaciones en el diseño de las modernas instalaciones de riego a presión. Puede considerarse como continuación de los artículos publicados por este autor en la misma revista *AGRÓNOMOS* (nº: 2, Otoño-Invierno 1989/90) y en *ENGINYERIA AGRONÒMICA* (nº: 1, Junio de 1990, del Colegio Oficial y la Asociación de Ingenieros Agrónomos de Cataluña).

2. JUSTIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMADA

Tenemos así, el caso general de una tubería con servicio en ruta, con $\mathbf{n_0}$ derivaciones de caudal constante, con un distanciamiento entre salidas $\mathbf{l}$ y encontrándose la primera derivación a una distancia **l_0** del origen de la conducción, según puede verse en la Figura 1:

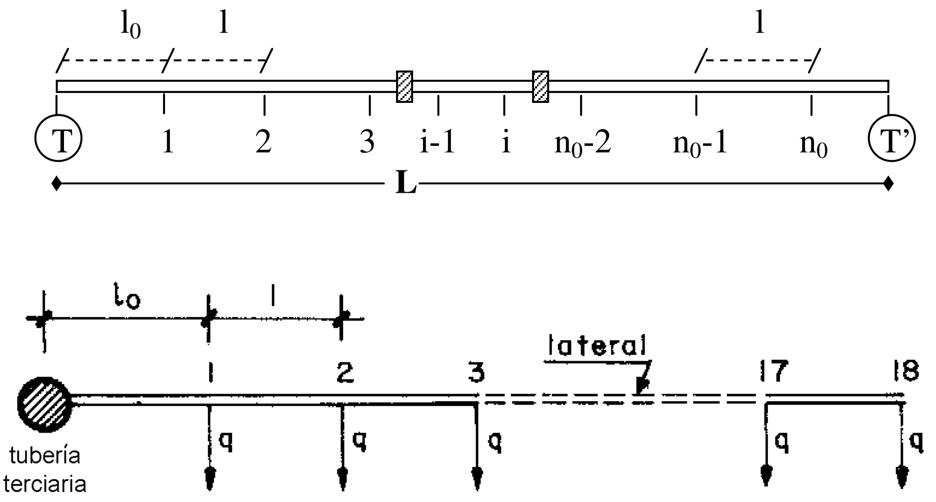

Fig. 1. Tubería con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal constante q.

En la que que se cumplirá $\forall\ l\ /\ l_1 = l_2 = ... = l_i = ... = l$.

Pues bien, el caudal de salida de T, que se agota en T', será:

$$Q = n_0 \cdot q \ ,$$

y la longitud total de la conducción, teniendo en cuenta que: $l_0 = r \cdot l$, es:

$$L = l_0 + (n_0 - 1) \cdot l = (r + n_0 - 1) \cdot l$$

Teóricamente, en una tubería de las características expresadas, el coeficiente de reducción por salidas, aplicable a las pérdidas de carga que experimenta una tubería con servicio único en su extremo final, respondería a la expresión:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m \ ,$$

para la cual Christiansen (1942) obtuvo la función aproximada siguiente:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2}$$, en la cual:

n_0 = número de derivaciones o salidas. m = exponente de la fórmula utilizada en el cálculo hidráulico de las pérdidas de carga.

El problema que aquí se plantea constituye una generalización del problema clásico de una tubería sencilla con varias tomas intermedias (de número no excesivo) y diámetro constante, cuya resolución suele presentarse por aplicación de la conocida fórmula de Darcy y la determinación previa de la línea de niveles piezométricos.

En el caso de tratarse de derivaciones equidistantes y caudal constante **q** por cada una de ellas, la determinación de dicha línea piezométrica de obtendría dividiendo la carga total **h** en partes proporcionales a la sucesión de números reales: n_0^2, $(n_0 - 1)^2$, ..., 1.

Pues bien, vamos a tratar, aquí, de explicar o justificar matemáticamente la que denominaremos "aproximación de Christiansen", basándonos, inicialmente, en el concepto clásico de "suma integral".

En efecto, veamos que la expresión: $\sum_{i=1}^{n_0} i^m = 1^m + 2^m + 3^m + ... + n_0^m$,

representa la suma o adición de las áreas de los rectángulos yuxtapuestos de alturas: 1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m,..., y de base igual a la unidad. Véase la Figura 2:

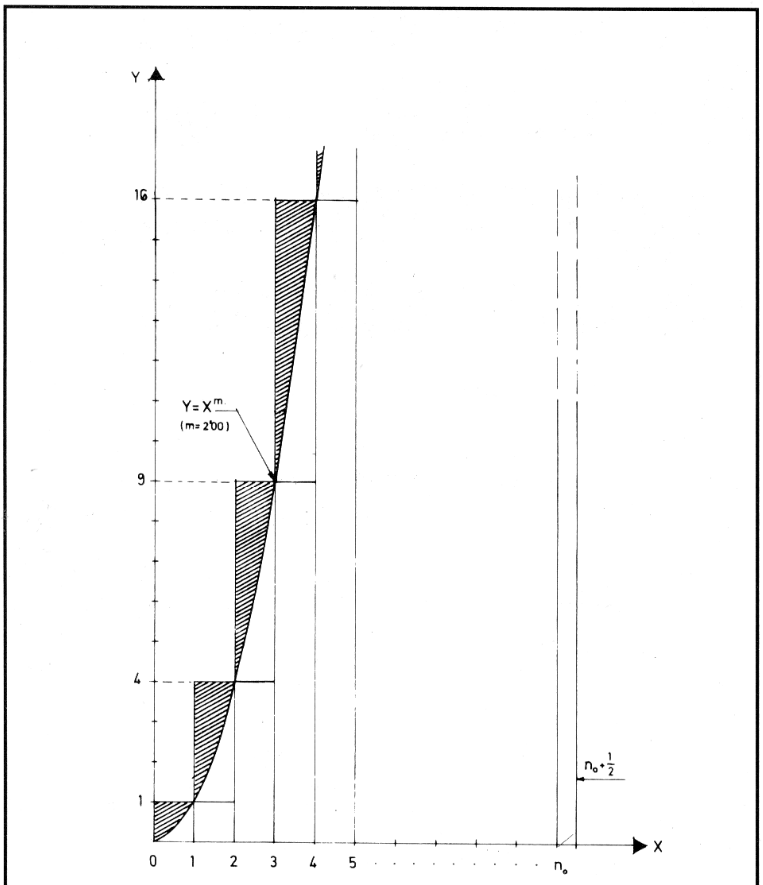

Fig. 2. Representación gráfica para m = 2.00.

Tal y como se puede ver en la Figura 2 (realizada, v.gr., para m = 2.00), la curva o función potencial $y = x^m$, comprende, entre ella y el eje de abscisas OX, un área que difiere de la buscada en aproximadamente la mitad del área del rectángulo mayor, ya que, efectivamente, la zona representada en la figura anterior por , puede considerarse equivalente a la mitad de la superficie de este rectángulo.

Asimismo, se obtendrá una buena aproximación a esta determinación tomando para la expresión: $\sum_{i=1}^{n_0} i^m$, el área existente bajo la curva y sobre el eje de abscisas, pero entre los límites u ordenadas extremas:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = n_0 + ½$$

por la aplicación del propio concepto de integral definida. El límite superior se incrementará en ½ para así obtener, precisamente, la mitad de la superficie del rectángulo mayor, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = \int_0^{n_0+\frac{1}{2}} x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^{n_0+\frac{1}{2}} = \frac{\left(n_0+\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{m+1} = \frac{n_0^{m+1}\cdot\left(1+\frac{1}{2n_0}\right)^{m+1}}{m+1}$$

Ahora bien, se cumple que:

$$\left(1+\frac{1}{2n_0}\right)^{m+1} = 1+(m+1)\cdot\frac{1}{2n_0}+\frac{(m+1)\cdot m}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot n_0^2}+\ldots$$

por la fórmula clásica del desarrollo del binomio de Newton-Tartaglia. Los términos que no aparecen son de tercer grado y sucesivos en $\frac{1}{n_0}$ y se pueden despreciar, a efectos prácticos, teniendo en cuenta su bajísima magnitud cuando el número de derivaciones o salidas $\mathbf{n_0}$ resulta suficientemente elevado, tal y como acostumbra a suceder en la realidad.

Así pues, el coeficiente experimental de reducción por salidas, anteriormente definido, tomará el valor:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}}\cdot\sum_{i=1}^{n_0} i^m = \frac{n_0^{m+1}\cdot\left[1+(m+1)\cdot\frac{1}{2n_0}+\frac{(m+1)\cdot m}{2}\cdot\frac{1}{4n_0^2}\right]}{n_0^{m+1}\cdot(m+1)} = \frac{1}{m+1}+\frac{1}{2n_0}+\frac{m}{8n_0^2}$$

Con todo esto, ya hemos obtenido los dos primeros términos o sumandos fraccionarios de la fórmula aproximada, cuya deducción es objeto de nuestro estudio, a saber:

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2n_0}$$

Ahora bien, el tercero de ellos: $\frac{\mathrm{m}}{8\mathrm{n}_0^2}$ no coincide con el $\frac{\sqrt{\mathrm{m}-1}}{6\mathrm{n}_0^2}$, que encontraremos en esta fórmula. Sin duda, esto es debido a que este tercer término ha estado cambiado o alterado expresamente (lo cual resultaría lícito ya que, en definitiva, nos encontramos ante un proceso de aproximación) con el único objetivo de que la fórmula sea válida para los casos particulares: m = 1, 2, 3.

Veamos, a continuación, lo que sucede en cada uno de ellos:

Para m = 1, se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i=\frac{n_0\cdot(n_0+1)}{2}=1+2+3+\ldots+n_0,$$

ya que se trata de la suma de los n_o primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad. Así:

$$F=\frac{n_0\cdot(n_0+1)}{2n_0^2}=\frac{n_0+1}{2n_0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_o}$$

En este nivel, hay que cambiar el término $\frac{\mathrm{m}}{8\,\mathrm{n}_0^2}$ por otro como, por ejemplo, $\frac{\mathrm{m}-1}{8\,\mathrm{n}_0^2}$, para que se obtenga 0 cuando m = 1.

Para m = 2, se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^2=\frac{n_0\cdot(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6}=1+2^2+3^2+\ldots+n_0^2$$

En efecto, esto puede demostrarse por inducción, ya que la igualdad anterior se cumple, evidentemente, para $n_0 = 1$, puesto que:

$$\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}=1$$

Supongamos, también, que resulta cierta para n_0. Entonces, se tendrá:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n_0^2 = n_0 \cdot (n_0 + 1)\cdot(2n_0 + 1) / 6$, y sumando $(n_0 + 1)^2$ a los dos miembros de la anterior expresión, resultará lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\ldots+n_0^2+(n_0+1)^2 &= \frac{n_0\cdot(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6}+(n_0+1)^2 = \\
&= \frac{(n_0+1)\cdot[n_0\cdot(2n_0+1)+6\cdot(n_0+1)]}{6} = \\
&= \frac{(n_0+1)\cdot[n_0\cdot(2n_0+3)+4n_0+6]}{6} = \\
&= \frac{(n_0+1)\cdot[n_0\cdot(2n_0+3)+2(2n_0+3)]}{6} = \\
&= \frac{(n_0+1)\cdot(n_0+2)\cdot(2n_0+3)}{6}
\end{aligned}
$$

Así pues, la igualdad es cierta para (n_0 + 1), tal y como pretendíamos demostrar. Entonces, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = \frac{(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2+3n_0+1}{6n_0^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{6n_0^2}$$

En este nivel, hay que cambiar el término $\frac{m-1}{8\,n_0^2}$ por otro, como por ejemplo el $\frac{m-1}{6\,n_0^2}$, para que adopte el valor 0 cuando m = 1, y además valga $\frac{1}{6\,n_0^2}$, cuando m = 2.

Para m = 3, se tendrá la serie numérica:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^3 = \frac{n_0^2\cdot(n_0+1)^2}{4} = 1+2^3+3^3+\ldots+n_0^3;$$

en efecto, al igual que en el caso anterior, veamos que esta identidad se cumple para: n_0 = 1. Siguiendo el mismo método de inducción, supongámosla también cierta para n_0. Entonces, se cumplirá que:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n_0^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n_0)^2$, y sumando $(n_0 + 1)^3$ a los dos miembros de la igualdad, con lo cual ésta no varía, resultará:

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n_0^3 + (n_0 + 1)^3 &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n_0)^2 + (n_0 + 1)\cdot(n_0 + 1)^2 = \\
&= (1 + 2 + 3 + \ldots + n_0)^2 + n_0\,(n_0 + 1)^2 + (n_0 + 1)^2.
\end{aligned}
$$

Pero, según hemos visto en el primer caso (para m = 1), se cumple que:

$$n_0(n_0 + 1) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n_0),$$

con lo que, también tendremos que:

$$n_0 (n_0 + 1)^2 = 2\cdot(1 + 2 + 3 + ... + n_0)\cdot(n_0 + 1), \text{ y por tanto:}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n_0 + (n_0 + 1)^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n_0)^2 + 2\,(1+ 2 + 3 + ... + n_0)\cdot$$
$$(n_0 + 1) + (n_0 + 1)^2 = [1 + 2 + 3 + ... + n_0 + (n_0 + 1)]^2,$$

lo que prueba que la igualdad es cierta para $(n_0 +1)$, tal y como pretendíamos demostrar. Así pues, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = \frac{1}{n_0^4}\cdot\frac{n_0^2(n_0+1)^2}{4} = \frac{n_0^4+2n_0^3+n_0^2}{4n_0^4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{4n_0^2}$$

En este nivel, hay que cambiar el término $\frac{m-1}{6n_0^2}$ por otro que continúe valiendo 0 para m = 1, que valga $\frac{1}{6n_0^2}$, para m = 2 y que valga $\frac{1}{4n_0^2}$, cuando sea m = 3. En el mismo orden de ideas, veamos que resulta útil su substitución por el término $\frac{\sqrt{m-1}}{6n_0^2}$, ya que esta última expresión vale 0 para m = 1, vale $\frac{1}{6n_0^2}$ para m = 2, y, para m = 3 no vale $\frac{1}{4n_0^2}$ en sentido estricto, pero sí toma un valor próximo que es: $\frac{\sqrt{2}}{6n_0^2}$, y, $\frac{\sqrt{2}}{6} = 0.2357022$ resulta aproximadamente igual a: 1/4 = 0.2500000 (concretamente, el primer valor es un 94.28% del segundo), lo que satisface plenamente, de hecho, nuestras exigencias prácticas.

Siendo la fórmula anteriormente obtenida válida para los valores del exponente m = 1, m = 2, m = 3, o sea: $m \in (1, 2, 3)$, resultará además válida para los números reales no enteros del tipo: $m \in [1, 4]$, esto es: 1. ..., 2. ..., 3. ..., y también, aunque con menor grado de aproximación, para los valores supuestos: 4. ..., 5. ..., etc., que pudiera adoptar el coeficiente utilizado en la fórmula empleada en el cálculo de las pérdidas de carga de la conducción, según los diferentes casos.

Veamos, al respecto de los diferentes valores que puede tomar el coeficiente **m**, que, en general, las pérdidas unitarias de carga de una tubería a presión o conducción forzada, en función del caudal por ella circulante, responden a una expresión potencial del tipo:

$$J = n \cdot Q^m$$

que, en el caso de la expresión simplificada de Darcy, adopta el valor: m = 2.00, así como en las de Lèvy, Gaukler, Weissbach, Kütter, Mougnie, Chèzy, Sonier, Manning-Strickler o Catani. En las de la sociedad SOGREAH (1962), Flamant o Blasius es m = 1.75, así como en las de Saph y Schoder; en la de Scimemi-Veronese, es m = 1.78571, en la de Hazen-Williams es m = 1.852, en las de Biegeleisen y Boukowsky es m = 1.90, así como en la de Meyer-Peter, mientras que en las diversas formulaciones propuestas por Scobey encontramos los valores: m = 1.80, 1.90, etc., pero siempre dentro del intervalo de existencia al que nos hemos referido, y expresándolas, todas ellas, como fórmulas potenciales monomias.

La versatilidad de tan amplia formulación induce a concluir que en tal información están incluidos los diferentes estilos de trabajo sucesivamente empleados a lo largo de casi dos centurias y representativos, en el fondo, de una evolución de los conocimientos que tienden a generalizar y unificar, cada vez más, sus afirmaciones, en la prosecución de una síntesis final aún no alcanzada. En este mismo sentido, nosotros hemos realizado un esfuerzo en el cálculo de las conducciones libres, que puede hallarse en otros trabajos (Franquet, 2005).

Resulta ineludible, hoy en día, distinguir con arreglo a la experimentación de Von Kàrmàn-Nikuradse y de Colebrook-White, las tuberías lisas, rugosas e intermedias, denominaciones éstas establecidas no en función de la contextura de la pared, sino según el comportamiento hidráulico, por virtud de la configuración de la capa límite que se halla perfectamente definida en cada caso. Sucede, de este modo, que la ley de resistencia en las tuberías lisas es única, independiente de su material constitutivo y expresable por una ley analítica de la que la fórmula de Blasius es una primera aproximación que ha sido prolongada por otros investigadores.

Así pues, resultará, en definitiva:

$$\boxed{F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2}}$$

tal y como se quería demostrar, que es la expresión aproximada adoptada por Christiansen en su estudio acerca de las conducciones hidráulicas con servicio en ruta.

Conviene tener presente, asimismo, que esta fórmula sólo resultará válida para el caso concreto en el cual la primera salida se encuentre del principio de la conducción a una distancia $l_0 = l$ (r = 1).

Es obvio, por otra parte, que cuando el número de derivaciones o salidas aumenta indefinidamente (o sea, cuando el caudal se reparte a lo largo de toda la conducción forzada, como en el caso del riego por cinta exudante o subterráneo), la expresión anterior se convertirá en:

$$\lim_{n_0 \to \infty} F = \frac{1}{1+m} ,$$

que constituye, en estas circunstancias, el valor mínimo al cual tiende el coeficiente experimental de reducción que nos ocupa. Si el caudal residual o extremal de la conducción es nulo, y considerando el caso normal m = 2.00, veamos que ello nos indica que la pérdida de carga que tiene lugar es la tercera parte de la que se produciría si el gasto o caudal inicial recorriera toda la tubería y saliera libremente por el extremo de la misma (y ello considerando que la tubería en cuestión distribuye un gasto uniformemente repartido que se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la conducción).

Normalmente, en los RLAF (riegos localizados de alta frecuencia) se cumplirá que m = 1.75, mientras que cuando el régimen es laminar, situación ésta frecuente en el riego por exudación en que la pérdida de carga es, prácticamente, continua y no discreta, se tendrá que con: m = 1.00 y F = 0.500 y con m = 2.00 se tiene F = 0.333.

El estudio más preciso de este caso se desarrolla en el epígrafe siguiente.

3. TUBERÍA DE EXUDACIÓN QUE DISTRIBUYE UN GASTO O CAUDAL UNIFORMEMENTE REPARTIDO

Sea una tubería OB de longitud **l** y diámetro **D**, que tiene su origen en un grupo de bombeo o bien en un depósito de agua elevado como el de la Figura 3, con varias tomas laterales uniformemente espaciadas, por las cuales se derivan gastos idénticos. A saber:

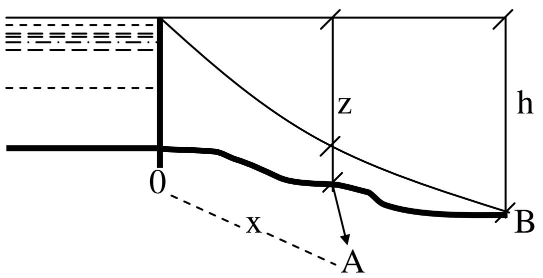

Fig. 3. Tubería saliente de un depósito con tomas de idéntico caudal.

Cuando en una conducción de estas características, es suficientemente grande el número de derivaciones (típico, v. gr, en los sistemas de riego por aspersión y localizados de alta frecuencia, como la microaspersión, la exudación y el goteo en sus diferentes modalidades), se efectúa el cálculo, con gran aproximación, suponiendo que se distribuye un gasto uniformemente repartido a lo largo del trayecto, el cual se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la tubería o distancia: l = OB. A este gasto así obtenido, se le denomina gasto por unidad de longitud de tubería.

En estos casos, puede asimilarse el movimiento del agua por la tubería a una sucesión de movimientos uniformes infinitesimales de ley variable con el caudal -o bien con la sección de la conducción si ésta no es constante- debido a la proximidad de los cambios y a la pequeña variación del caudal que tiene lugar como consecuencia de ellos. Si bien sería preciso, para la intachable resolución del problema, el conocimiento exacto de dicha ley de variación del caudal, podríamos admitir, con buena aproximación, que el servicio en el trayecto se reparte uniformemente en toda la longitud de la tubería, disminuyendo el caudal en una cierta cantidad **q** por unidad de longitud de la tubería. **Es decir, que se gasta o consume un caudal q por unidad de longitud de la conducción** (Torres, 1970).

Utilizando, ahora, la siguiente notación:

Q_0 = gasto en el origen 0 de la tubería.
q = gasto derivado por unidad de longitud de tubería.
Q = gasto disponible en un punto genérico A, situado a una distancia del origen OA = x

evidentemente se verificará que:

$$Q = Q_0 - q \cdot x \qquad (1)$$

siendo $q \cdot x$ el gasto distribuido en el trayecto OA.

Si expresamos la pérdida de carga por rozamiento en el tramo OA, mediante la fórmula:

$$z = n\int_0^x Q^2 dx = n\int_0^x (Q_0 - q\cdot x)^2 dx =$$
$$= n\int_0^x (Q_0^2 - 2q\cdot x\cdot Q_0 + q^2\cdot x^2)dx$$

La constante de integración es nula, pues para x = 0, también: z = 0 $\Rightarrow$ c = 0; o sea:

$$z = n(Q_0^2\cdot x - q\cdot Q_0\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot q^2\cdot x^3) = n\left[(Q+q\cdot x)^2\cdot x - q(Q+q\cdot x)x^2 + \frac{1}{3}\cdot q^2\cdot x^3)\right]$$

$$z = n(Q^2\cdot x + Q\cdot q\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot q^2\cdot x^3) \qquad (2)$$

que es la ecuación de una parábola cúbica o función representativa de la línea de niveles piezométricos.

Si llamamos Q_e al caudal residual o extremal que sale por el extremo B de la tubería tendremos, según la ecuación (2):

$$h = n(Q_e^2\cdot l + Q_e\cdot q\cdot l^2 + \frac{1}{3}\cdot q^2\cdot l^3) \qquad (3)$$

Ahora bien, si el extremo B de la tubería es un punto muerto, o sea, si todo el caudal se deriva a lo largo de la conducción sin que al punto B llegue caudal residual alguno, se tendrá evidentemente que:

$Q_e = 0$ y, por tanto, en (1) se tendrá: $Q_0 = q \cdot l$,

y sustituyendo estos valores en la ecuación (3), obtendremos:

$$h = \frac{1}{3} n \cdot q^2 \cdot l^3 = \frac{1}{3} n \cdot (q \cdot l)^2 \cdot l = 0.333\, n \cdot Q_0^2 \cdot l \qquad (4)$$

expresión que nos indica que la pérdida de carga es la tercera parte de la que se produciría si el gasto Q_0 recorriera toda la tubería y saliera libremente por el extremo B de la misma, tal como ya se ha enunciado en el epígrafe anterior.

La ecuación (4) también puede expresarse así:

$$h = \frac{1}{3} n \cdot Q_0^2 \cdot l = n \cdot Q'^2 \cdot l \text{ , de donde resulta:}$$

$$Q' = \frac{Q_0}{\sqrt{3}} = 0.577 \cdot Q_0 \qquad (5)$$

lo que significa que la pérdida de carga es equivalente a la que se produciría si por la tubería circulara un gasto constante e igual a:

$$\frac{Q_0}{\sqrt{3}} = 0.577 \cdot Q_0$$

Estudiaremos, a continuación, el procedimiento que se utiliza para determinar el diámetro conveniente, para que la tubería pueda distribuir el gasto uniformemente repartido en la forma anteriormente indicada.

La ecuación (3) equivale a la formulación:

$$h = n(Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3} q^2 \cdot l^2) \cdot l = n \cdot Q_1^2 \cdot l = J_1 \cdot l\,;$$

introduciendo un caudal ficticio Q_1 que al circular por la tubería de manera constante produzca una pérdida de carga *h*.

$$Q_1^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot l^2 \qquad (6)$$

pero si tenemos en cuenta que:

$$(Q_e + \frac{1}{2} q \cdot l)^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{4} \cdot q^2 \cdot l^2 < Q_1^2$$

$$(Q_e + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot q \cdot l)^2 = Q_e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} Q_e \cdot q \cdot l + \frac{1}{3} \cdot q^2 \cdot l^2 > Q_1^2$$

resulta el valor de Q_1 acotado entre los límites:

$$Q_e + \frac{1}{2} q \cdot l < Q_1 < Q_e + \frac{1}{\sqrt{3}} q \cdot l \text{ , o lo que es igual:}$$

$$Q_e + 0.5 \cdot q \cdot l < Q_1 < Q_e + 0.577 \cdot q \cdot l \text{ ,}$$

luego puede tomarse con suficiente aproximación, como valor de Q_1, para el cálculo del diámetro interior de la conducción:

$$\boxed{Q_1 = Q_e + 0.55\, q \cdot l}$$

, que es la fórmula que se emplea usualmente para el diseño de las redes de abastecimiento de agua agrícola, industrial y doméstica.

Conociendo ya los valores de Q_1 y $J = h/l$, se halla fácilmente el valor de D y S. Si al punto B no llegara ningún caudal (con lo que: $Q_e = 0$), se tomará, según hemos demostrado, como valor de Q_1 (de 6):

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} q \cdot l \text{ ; o lo que es lo mismo:}$$

$$\boxed{Q_1 = 0.577 \cdot q \cdot l \approx 58\% \text{ de } Q_0}$$

4. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

La expresión general teórica que Christiansen trató de simplificar, correspondiente al coeficiente de reducción por n_0 salidas o derivaciones, tal como se ha visto en los expositivos anteriores, viene dada por la formulación siguiente, para un exponente de la velocidad del agua **m** dado:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m = f(n_0)$$

para la cual Christiansen (1942), como hemos visto, obtuvo la función aproximada siguiente:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} = g(n_0) \text{ ,}$$

siendo: $m \in [1.75, 2.00]$ para las diferentes formulaciones usualmente empleadas en el cálculo de las pérdidas hidráulicas de carga de una tubería a presión con servicio en ruta, distribución discreta del caudal por salidas equidistantes y régimen permanente y uniforme.

En definitiva, el problema que, sin duda, se planteó Christiansen consistía en obtener la aproximación de la función g(x) a la función f(x) con el mínimo error posible, en un entorno del punto de abscisa: $x = n_0$, o dicho de otro modo, que dada la función real de variable real: $F = f(x)$, definida en $x = n_0$, se pretendía encontrar otra función real de variable real: $F = g(x)$ lo más "sencilla" posible y que se "aproximase" suficientemente a $f(x)$ en un entorno de radio suficientemente pequeño del punto considerado, hasta el punto que en $x = n_0$, también se cumple que: $f(n_0) = g(n_0)$. En este caso, el error que se comete en un entorno del punto $x = n_0$, cuando en vez de $f(x)$ se toma la función $g(x)$, vendrá dado por la expresión:

$$E = \left| f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx) \right|$$

Por otra parte, la *medida de la aproximación* de $g(x)$ a $f(x)$ es un cierto número **r**, tal que el límite siguiente existe, es finito y distinto de 0:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{E}{dx^r} = \lim_{dx \to 0} \frac{\left| f(n_0 + dx) - g(n_0 + dx) \right|}{dx^r}$$

De alguna manera las funciones que llamamos "elementales" como sin x, cos x, log x, e^x, ..., etc., no resultan, en realidad, nada elementales; por ejemplo, si deseamos calcular sin x, encontramos que, salvo para unos pocos valores: $x = 0$, $x = \pi/4$, $x = \pi/2$, ..., etc., el cálculo directo de sin x es imposible. No ocurre así, en cambio, con las funciones polinómicas:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

donde las operaciones a realizar son simplemente aritméticas. Por ello, tiene gran interés obtener fórmulas que permitan **aproximar** las funciones irracionales o trascendentes mediante polinomios, con el fin de calcular de manera aproximada los valores de aquéllas. Como es natural, en toda aproximación es preciso obtener estimaciones fidedignas del error cometido. Obviamente, no podemos esperar un conocimiento exacto del error, puesto que ello supondría también un conocimiento preciso de la magnitud que aproximamos y haría innecesaria la aproximación. Lo que deseamos, en cualquier caso, es **acotar**, de manera que al realizar la aproximación tengamos la seguridad de que el error cometido no supera cierta cantidad.

Recordemos que en el Análisis matemático, el concepto de diferencial supone una aproximación lineal de la función en un entorno del punto en consideración. Diríamos que si $f(x)$ es una función derivable en el punto n_0, la función afín $g(x)$ es tal que:

$$g(x) = f(n_0) + f'(n_0) \cdot (x - n_0)$$

y aproxima los valores de $f(x)$ en un entorno de n_0. Puede verse ello gráficamente en la Figura 4.

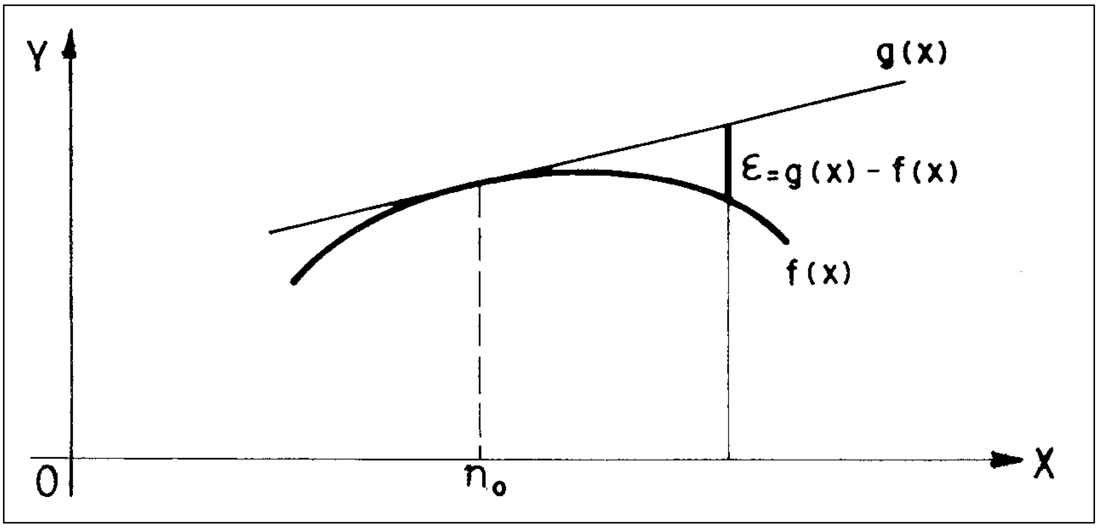

Fig. 4. Aproximación entre las funciones f(x) y g(x) en el punto: $x = n_0$.

No obstante, el sentido de la palabra "aproxima", empleado en la afirmación anterior, resulta, a nuestro juicio, excesivamente vago. Podemos precisarlo más si decimos que:

$$\lim_{x \to n_0} [g(x) - f(x)] = 0 \quad (7)$$

pero, aunque esa igualdad sugiere que f(x) y su aproximación g(x) son más y más parecidos cuánto más próximo está x de n_0, no nos proporciona una idea precisa de la magnitud del error cometido al sustituir f(x) por g(x) para un valor particular de **x**.

Siguiendo este camino podemos afirmar, aún más, que:

$$\lim_{x \to n_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - n_0} = \lim_{x \to n_0} \left(\frac{f(x) - f(n_0)}{x - n_0} - f'(n_0) \right) = f'(n_0) - f'(n_0) = 0 \quad (8)$$

Esta afirmación contenida en la expresión (8), aunque sigue siendo imprecisa, resulta más fuerte que la anterior (7), y nos garantiza, no solamente que el error $|g(x)-f(x)|$ se hace más y más pequeño al acercarnos a n_0, sino también que esa cantidad comparada con $(x-n_0)$, que es una magnitud que decrece hacia cero, tiende también a cero; esto lo resumiremos diciendo que $|g(x)-f(x)|$ tiende a cero más rápidamente que $(x-n_0)$. Con símbolos, las aseveraciones anteriores se expresan escribiendo:

$$g(x) - f(x) = o(x - n_0)$$

que se lee "g(x)-f(x) es un infinitésimo (una cantidad infinitamente pequeña) comparado con $(x-n_0)$". Esta notación, que se corresponde con la "o pequeña" de

Landau[1] resulta muy útil en el cálculo de límites y para describir términos cuya expresión exacta puede ser complicada, pero cuyo comportamiento en el límite nos es conocido. Para precisarla mejor, damos la definición siguiente:

"Decimos que la función h(x) es $o((x-a)^n)$, $h(x) = ((x-a)^n)$, si se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x - a)^n} = 0 \text{ "}$$

Así pues, la notación infinitesimal: $o((x-a)^n)$ nos permite ofrecer una información **cualitativa** más que cuantitativa sobre el error cometido en la aproximación funcional.

Por otra parte, podemos esperar que si una función posee en un punto varias derivadas, sea posible aproximar los valores de la función en un entorno de ese punto por funciones, más que lineales, polinómicas.

En algunos puntos de la recta real, la aproximación de ambas funciones puede ser total e incluso coincidente el valor que toman $f(n_0)$ y $g(n_0)$. Y así, veamos que si hubiéramos supuesto, v.gr., un exponente de la velocidad del agua de m = 2 (de haber empleado, para el cálculo de las pérdidas de carga de la conducción porta-goteros, la formulación de Manning-Strickler), con $n_0 = 54$ salidas equidistantes, habríamos obtenido un coeficiente teórico de reducción por salidas de:

$$F = f(n_0) = \frac{(n_0+1)(2n_0+1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2+3n_0+1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 54} + \frac{1}{6 \cdot 54^2} = 0.343$$

y, también, la aplicación estricta de la fórmula aproximada de Christiansen conduciría a la obtención exacta del mismo resultado, puesto que:

$$F = g(n_0) = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{2-1}}{6 \cdot n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 54} + \frac{1}{6 \cdot 54^2} = 0.343$$

con lo que el error cometido en la aproximación sería nulo (E = 0).

Recordemos que, al principio del presente epígrafe, se decía que se pretendía hallar una cierta función g(x) "lo más sencilla" posible y que se aproximara "lo suficiente" a la función problema. Anteriormente, ya hemos

---

[1] Dada una cierta función f(x), con la notación o(f), se designa cualquier función φ(x) tal que se cumpla que: $\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0$. La condición anterior puede sustituirse por la siguiente: $\forall \varepsilon > 0$, corresponde un entorno: ε*(a) donde: $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$. Una ecuación de la forma: φ = o(f) equivale, pues, a la relación anterior.

indicado cómo medir el grado de aproximación en cuestión; ahora bien, al objeto de no perdernos en subjetivismos, ¿qué debemos entender por la expresión “lo más sencilla posible”?.

En general, tomaremos como tales funciones las polinómicas o parabólicas (a partir del 2º grado), esto es, las de configuración analítica del tipo:

$$g(x) = a + b\cdot x + c\cdot x^2 + d\cdot x^3 + ...$$

cuyo grado nos vendrá determinado por la aproximación que deseemos obtener y donde las constantes (a, b, c, d, ...) se hallarán con la condición de que la nueva función g(x) se aproxime lo más posible a la f(x).

La aproximación más sencilla, o sea, la de primer grado, es la lineal ofrecida por la ecuación de la recta tangente a la curva dada f(x) en el punto de abscisa $x = n_0$. Las aproximaciones de orden superior podrán obtenerse por aplicación del conocido teorema de Taylor para el desarrollo de la función f(x) en dicho punto. En cualquier caso, el problema eficazmente resuelto por Christiansen alcanzó una mayor complejidad, sin que, por razones desconocidas por quien suscribe, dicho autor quisiera publicitar, en su día, la deducción matemática de su famosa fórmula, cuestión ésta que constituye, precisamente, el objeto fundamental del presente artículo.

5. COEFICIENTE DE CHRISTIANSEN GENERALIZADO

Hace falta, por último, efectuar alguna otra consideración. En el caso particular de que se cumpla que: $l_0 = ½$ (primera salida situada a una distancia del inicio de la conducción igual a la mitad del espacio existente entre las restantes salidas de la tubería), la expresión general teórica: $F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m$ tomará la configuración siguiente:

$$F = \frac{1}{n_0^m \cdot \left(n_0 - \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{n_o^m}{2} + \sum_{i=1}^{n_0} i^m\right) \quad ,$$

expresión debida a Jensen y Fratini, que, como ya se ha mencionado, se cumplirá exclusivamente para la relación:

$$r = l_0 / l = 1/2.$$

Las pérdidas continuas de carga en el tramo genérico **i** del eje hidráulico de la conducción, comprendido entre las derivaciones (**i-1**)-ésima e **i**-ésima, son las siguientes:

$$h_i = n \cdot l \cdot Q_i^m$$

y puesto que el caudal circulante por el tramo **i** es:

$$Q_i = (n_0 - i + 1) \cdot q \quad ,$$

las pérdidas de carga en el tramo **i** podrán expresarse también como:

$$h_i = n \cdot l \cdot (n_0 - i + 1)^m \cdot q^m \quad .$$

De este modo, las pérdidas de carga continuas en toda la conducción, serán:

$$h = \sum_{i=1}^{n_0} h_i = n \cdot q^m \sum_{i=1}^{n_0} l_i \cdot (n_0 - i + 1)^m = n \cdot q^m \left[l_0 \cdot n_0^m + \sum_{i=2}^{n_0} (n_0 - i + 1)^m \right] ;$$

y como, a la vez, se cumple que:

$$\sum_{i=2}^{n_0} (n_0 - i + 1)^m = \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m \quad ,$$

quedará la siguiente expresión para las pérdidas de carga:

$$h = n \cdot q^m \cdot l (r \cdot n_0^m + \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m) = n \cdot Q^m \cdot L \cdot F$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las diversas relaciones anteriores, se obtiene:

$$q^m \cdot l (r \cdot n_0^m + \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m) = n_0^m \cdot q^m \cdot (r + n_0 - 1) \cdot l \cdot F \quad ;$$

de donde:

$$r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m = (r + n_0 - 1) \cdot F \quad ,$$

con lo que despejando el coeficiente de reducción F (que representaremos por F_r, para cualquier valor que pueda adoptar la relación **r**), se tiene:

$$\boxed{F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m}{r + n_0 - 1} \qquad (9)}$$

que constituye la expresión generalizada del coeficiente de reducción por salidas, para cualquiera de los valores de los parámetros **r**, $\mathbf{n_0}$ y de **m**.

A continuación, se han tabulado expresamente los valores de F_1 (r = 1) y de $F_{1/2}$ (r = 1/2), para diferentes valores de $\mathbf{n_0}$ y de **m**, a saber:

Tabla 1. Coeficiente de reducción por salidas F (r = ½).

n_0	m = 1,75	m = 1,80	m = 1,85	m = 1,90	m = 2,00
1	1, 000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,532	0,525	0,518	0,512	0,500
3	0,455	0,448	0,441	0,434	0,422
4	0,426	0,419	0,412	0,405	0,393
5	0,410	0,403	0,397	0,390	0,378
6	0,401	0,394	0,387	0,381	0,369
7	0,395	0,388	0,381	0,375	0,363
8	0,390	0,383	0,377	0,370	0,358
9	0,387	0,380	0,374	0,367	0,355
10	0,384	0,378	0,371	0,365	0,353
11	0,382	0,375	0,369	0,363	0,351
12	0,380	0,374	0,367	0,361	0,349
13	0,379	0,372	0,366	0,360	0,348
14	0,378	0,371	0,365	0,358	0,347
15	0,377	0,370	0,364	0,357	0,346
16	0,376	0,369	0,363	0,357	0,345
17	0,375	0,368	0,362	0,356	0,344
18	0,374	0,368	0,361	0,355	0,343
19	0,374	0,367	0,361	0,355	0,343
20	0,373	0,367	0,360	0,354	0,342
22	0,372	0,366	0,359	0,353	0,341
24	0,372	0,365	0,359	0,352	0,341
26	0,371	0,364	0,358	0,351	0,340
28	0,370	0,364	0,357	0,351	0,340
30	0,370	0,363	0,357	0,350	0,339
35	0,369	0,362	0,356	0,350	0,338
40	0,368	0,362	0,355	0,349	0,338
50	0,367	0,361	0,354	0,348	0,337
100	0,365	0,359	0,353	0,347	0,335
200	0,365	0,358	0,352	0,346	0,334
∞	0,364	0,357	0,351	0,345	0,333

Tabla 2. Coeficiente de reducción por salidas F (r = 1).

n_0	m = 1.00	m = 1.75	m = 1.80	m = 1.85	m = 1.90	m = 2.00
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.750	0.650	0.644	0.639	0.634	0.625
3	0.667	0.546	0.540	0.535	0.528	0.518
4	0.625	0.497	0.491	0.486	0.480	0.469
5	0.600	0.469	0.463	0.457	0.451	0.440
6	0.583	0.451	0.445	0.435	0.433	0.421
7	0.571	0.438	0.432	0.425	0.419	0.408
8	0.563	0.428	0.422	0.415	0.410	0.398
9	0.556	0.421	0.414	0.409	0.402	0.391
10	0.550	0.415	0.409	0.402	0.396	0.385
11	0.545	0.410	0.404	0.397	0.392	0.380
12	0.542	0.406	0.400	0.394	0.388	0.376
13	0.538	0.403	0.396	0.391	0.384	0.373
14	0.536	0.400	0.394	0.387	0.381	0.370
15	0.533	0.397	0.391	0.384	0.379	0.367
16	0.531	0.395	0.389	0.382	0.377	0.365
17	0.529	0.393	0.387	0.380	0.375	0.363
18	0.528	0.392	0.385	0.379	0.373	0.361
19	0.526	0.390	0.384	0.377	0.372	0.360
20	0.525	0.389	0.382	0.376	0.370	0.359
22	0.523	0.387	0.380	0.374	0.368	0.357
24	0.521	0.385	0.378	0.372	0.366	0.355
26	0.519	0.383	0.376	0.370	0.364	0.353
28	0.518	0.382	0.375	0.369	0.363	0.351
30	0.517	0.380	0.374	0.368	0.362	0.350
32	0.516	0.379	0.373	0.367	0.361	0.349
35	0.514	0.378	0.371	0.365	0.359	0.347
40	0.513	0.376	0.370	0.364	0.357	0.345
50	0.510	0.374	0.367	0.361	0.355	0.343
60	0.508	0.372	0.366	0.359	0.353	0.342
80	0.506	0.370	0.363	0.357	0.351	0.340
100	0.505	0.369	0.362	0.356	0.350	0.338
150	0.503	0.367	0.360	0.354	0.348	0.337
300	0.502	0.365	0.359	0.353	0.346	0.335
∞	0.500	0.364	0.357	0.351	0.345	0.333

6. CÁLCULO PRÁCTICO DEL COEFICIENTE UNIVERSAL DE CHRISTIANSEN

No obstante, teniendo en cuenta el infinito número de valores posibles de **r**, resultará más práctico que tabular la ecuación anterior (9) basarse en los correspondientes valores para r = 1 para el cálculo del resto de los valores de F. En efecto, dado que se cumple la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = \sum_{i=1}^{n_0} i^m - n_0^m \quad ,$$

y además de la ecuación: $F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m$ se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = F \cdot n_0^{1+m} \quad ,$$

También se habrá de satisfacer la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m \quad ,$$

que introducida en la expresión: $F_r = \dfrac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0-1} i^m}{r + n_0 - 1}$, la transforma en:

$$F_r = \frac{r + \frac{1}{n_0^m} \cdot \left(F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m \right)}{r + n_0 - 1} = \frac{r + n_0 \cdot F - 1}{r + n_0 - 1} \quad ,$$

que permite la obtención del valor de F_r para cualquier valor de **r**, en función del correspondiente a F_1 (r = 1), para los mismos valores de los restantes parámetros $\mathbf{n_0}$ y **m**. Obviamente, para n_0 =1, también F_r = 1.00, y ello con independencia de los valores de la relación: $r = l_0 / l$.

Hace falta apuntar, en definitiva que, al ser posible encontrarnos, en la práctica, con cualquier valor del parámetro **r**, este coeficiente generalizado permite el cálculo directo de las pérdidas de carga en una conducción forzada de característica única, formada por un tramo inicial de cualquier longitud en régimen permanente y uniforme o estacionario y de un tramo final con distribución discreta del caudal y servicio en ruta.

7. CONCLUSIONES

El cálculo de las pérdidas de carga de una conducción de característica única, con servicio en ruta y distribución discreta del gasto, régimen permanente y uniforme, caudal constante por derivación y salidas equidistantes, de gran interés práctico para el dimensionamiento de instalaciones de riego por aspersión y localizados de alta frecuencia (microaspersión, exudación, goteo) fue resuelto por Christiansen (1942) mediante una formulación aproximada cuya justificación matemática, que nunca fue expuesta por su autor, se realiza en el presente artículo, lo que constituye un tema de notable interés teórico y de escasa o nula difusión en la bibliografía especializada existente al respecto.

BIBLIOGRAFÍA

1. ALFAMI, A. *Irrigazione a pioggia.* Edizioni Agricole. Bologna, 1957.

2. BLANES, O. *Manual de Instalaciones y aparatos para riego*. Ed.: CEAC. Barcelona, 1981.

3. CHRISTIANSEN, J.E. "Irrigation by Sprinkling". *Bulletin* 670. University of California. Agricultural Experimental Station. Berkeley, California. 124 p, 1942.

4. COPELAND, R. D. y YITAYEW, C. M. *Evaluation of a subsurface trickle irrigation system. Presented at the international winter meeting of the American Society of Agricultural Engineers. ASAE paper, 902.531*. Chicago, 1990.

5. DEL AMOR, F. M. y DEL AMOR, F. "Riego por goteo subterráneo en almendro. Aspectos de manejo y respuesta del cultivo", en *Fruticultura profesional, 104*. Barcelona, 1999.

6. FRANQUET BERNIS, J.M. *Cinco temas de hidrología e hidráulica*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya. Tortosa, 2003.

7. FRANQUET BERNIS, J.M. *Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas (Una aproximación de los métodos estadísticos)*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya. Tortosa, 2005.

8. GÓMEZ POMPA, P. *Técnica y tecnología del riego por aspersión.* Serie Técnica. Ministerio de Agricultura. Secretaría General Técnica. Madrid, 1981.

9. I.R.Y.D.A. *Manual Técnico. Normas para la redacción de proyectos de riego localizado*. Madrid, 1986.

10. KRUSE, E. G. y ISRAELI, I. *Evaluation of a subsurface drip irrigation system. Presented at the international summer meeting of the American Society of Agricultural Engineers. ASAE paper, 872.034*. 1987.

11. PIZARRO CABELLO, F. *Riegos localizados de alta frecuencia*. Ed.: Mundi-Prensa. Madrid, 1987.

12. TORRES SOTELO, J.E. *Apuntes de hidráulica general y agrícola. Primera y Segunda Parte*. Universidad Politécnica de Valencia. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Valencia, 1970.

13. Tubos *SAENGER*. *Manual técnico*. Barcelona, 1989.