¿CUÁNTOS ESTUDIANTES SE EXAMINARON?

Josep Maria Franquet Bernis

Dr. Ingeniero Agrónomo EUR-ING. Dr. en Ciencias Económicas y Empresariales. Diplomado en Investigación Operativa. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Campus del Nordeste. Centro Asociado de Tortosa (Tarragona). director@tortosa.uned.es.

RESUMEN

La resolución de este problema, mediante la aplicación de sencillos y conocidos principios del álgebra de los conjuntos finitos, pone de manifiesto, en definitiva, la aplicabilidad de estas técnicas elementales del álgebra moderna para la resolución de algunos problemas de la vida real cuya cierta complejidad les impide una fácil o inmediata resolución a primera vista.

Palabras clave: examen, conjunto, lógica matemática.

SUMMARY / ABSTRACT

The resolution of this problem, through the application of simple and well-known principles of the algebra of finite sets, reveals, in short, the applicability of these elementary techniques of modern algebra for the resolution of some real-life problems whose complexity it prevents them from an easy or immediate resolution at first sight.

***Key words**: exam, set, mathematical logic.*

RESUM

La resolució d'aquest problema, mitjançant l'aplicació de senzills i coneguts principis de l'àlgebra dels conjunts finits, posa de manifest, en definitiva, l'aplicabilitat d'aquestes tècniques elementals de l'àlgebra moderna per a la resolució d'alguns problemes de la vida real la complexitat dels quals els impedeix una fàcil o immediata resolució a primera vista.

Paraules clau: examen, conjunt, lògica matemàtica.

En una sección de cierto diario de gran tirada, en plena canícula estival, apareció un curioso *acertijo* o *problema matemático* dentro del apartado correspondiente al “enigma de la semana” que se planteaba, aproximadamente, en los siguientes términos:

“Un examen consta de 2 partes distintas: 18 estudiantes aprobaron la primera, 23 estudiantes la segunda y 8 estudiantes ambas partes. Once alumnos suspendieron las 2 partes del examen. ¿Cuántos estudiantes se examinaron?”.

Pues bien, la solución que se dio puntualmente al día siguiente, en el mismo medio de comunicación, se expresaba así:

“Un total de 11 estudiantes fallaron las dos partes y 18 acertaron la primera, así que estos dos conjuntos se pueden sumar hasta tener **29**. Eso ya es una buena tajada de la clase. El problema se hace más complicado al descifrar al resto. Sabemos que 23 muchachos/as respondieron bien a la segunda parte, pero resulta que no sabemos si estos hicieron bien o mal la parte anterior. ¿Cuántos de los que respondieron bien a la primera hicieron lo mismo en la segunda?. Según el problema planteado fueron 8, así que si sumamos 23 a los 29 que ya teníamos claros estaríamos contando dos veces a este pequeño grupo de 8 alumnos.

La **solución** pasa por restar a estos 8 en lugar de sumarlos, por lo tanto la respuesta correcta es **44 alumnos** (11 + 18 + 23 – 8 = 44)”.

El problema de tal suerte planteado parece resuelto por la “cuenta de la vieja”. Y de hecho es así. Si pretendemos resolverlo, ahora, de un modo más ortodoxo o académico desde el punto de vista de la ciencia matemática, tendríamos que acogernos a rudimentarios conceptos de la Teoría de Conjuntos, e incluso plantear el enunciado de otro modo más atractivo que dificultaría, por cierto, su resolución por el expeditivo método anteriormente empleado. En efecto, el nuevo enunciado del problema podría ser el siguiente:

“Un examen consta de 2 partes distintas: 18 estudiantes aprobaron la primera, 23 la segunda y 8 ambas partes. La cuarta parte de los alumnos suspendieron ambas partes del examen. ¿Cuántos estudiantes se examinaron?”.

Para lograr una mejor comprensión del ejercicio, nos hemos de plantear la representación gráfica del mismo mediante un sencillo diagrama de Venn-Euler como el de la figura siguiente, que recordarán (siquiera vagamente) todos aquellos que han pasado por la enseñanza secundaria. Esto es:

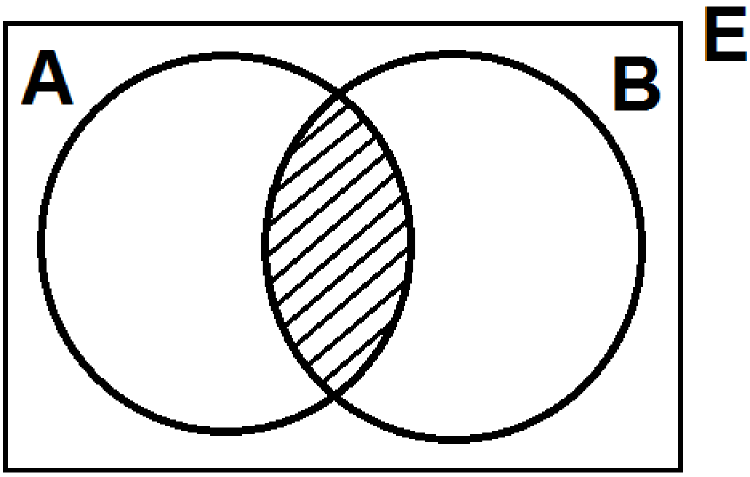

Fig.1. Diagrama de Venn-Euler.

$$
\text{, siendo } \begin{cases} A \text{ (alumnos que aprueban 1ª parte)} = 18 \\ B \text{ (alumnos que aprueban 2ª parte)} = 23 \\ A \cap B \text{ (alumnos que aprueban ambas partes)} = 8 \\ \overline{A \cup B} \text{ (alumnos que lo suspenden todo)} = E/4 \end{cases}
$$

Evidentemente, denominamos "E" al conjunto universal, cuyo número de elementos (alumnos), en definitiva, es lo que andamos buscando. Basta, para ello, en considerar la siguiente ecuación que se da en el caso de dos sucesos o conjuntos no disyuntos que aquí se contempla (puesto que existe intersección entre ambos conjuntos finitos de alumnos):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)\ .$$

En la propuesta del diario en cuestión, se ofrecía un dato que simplificaba bastante las cosas, a saber: $n(\overline{A \cup B}) = 11$ alumnos (que lo suspendían todo). Ello nos permite deducir rápidamente, pero ya en este caso por procedimientos ortodoxos, el número de elementos que conforman el conjunto universal, a saber:

$$E = n(A \cup B) + 11 = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + 11 = 18 + 23 - 8 + 11 = 44 \text{ alumnos}$$

Ahora bien, con la nueva presentación del problema que aquí se propugna, ese dato no existe y únicamente se nos dice que "la cuarta parte de los alumnos de la clase suspenden todo el examen". Con ello, nos quedará la siguiente ecuación que resuelve elegantemente el número total de examinandos:

$$E = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B}) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + 0.25 \cdot E\ ,$$

y entonces, substituyendo los valores conocidos, se tendrá que::

$$0.75 \cdot E = 18 + 23 - 8 = 33 \text{ , de donde: } E = 33/0.75 = \mathbf{44\ alumnos},$$

tal como se pretendía demostrar.

La resolución de este problema, mediante la aplicación de sencillos y conocidos principios del álgebra de los conjuntos finitos, pone de manifiesto, en definitiva, la aplicabilidad de estas técnicas elementales del álgebra moderna para la resolución de ciertos problemas de la vida real cuya complejidad les impide una fácil o inmediata resolución por otros procedimientos que, coloquialmente, pudiéramos calificar de “a simple vista”.

La Teoría de Conjuntos, creada por Cantor[1], resulta de gran utilidad en las matemáticas, pues es una herramienta importante para poder estudiar las relaciones existentes entre un todo y sus partes, al mismo tiempo que sienta las bases para simplificar definiciones de conceptos que resultaban más complejos, como es el caso del problema aquí contemplado.

Más aún, la teoría de los conjuntos es lo suficientemente rica como para construir el resto de objetos y estructuras de interés en matemáticas: números, funciones, figuras geométricas, ...; y junto con la lógica matemática permite estudiar los fundamentos de ésta. En la actualidad, se acepta que el conjunto de axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel es suficiente como para desarrollar toda la matemática. En esta disciplina es habitual que se presenten casos de propiedades indemostrables o contradictorias, como la hipótesis del continuo o la existencia de un cardinal inaccesible. Por esta razón, los razonamientos y técnicas de la teoría de conjuntos se apoyan, en gran medida, en la lógica matemática.

[1] La teoría de conjuntos y sus fundamentos básicos fueron desarrollados por George Cantor (1845-1918), matemático alemán, hacia finales del siglo XIX. Dicha teoría trata de entender las propiedades de conjuntos que no están relacionados a los elementos específicos de los cuales están compuestos. Por ende, tanto los teoremas como los axiomas de la teoría de conjuntos involucran a conjuntos generales, sin importar que contengan objetos físicos o números. Existen muchas aplicaciones prácticas de la teoría de conjuntos como la que se desarrolla en el presente ejercicio.