

# **CONDUCTO DE AGUA CON TOMA INTERMEDIA. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA OPTIMIZACIÓN Y GENERALIZACIÓN DEL PROBLEMA**

Franquet-i-Bernis, Josep M.

Universitat Rovira i Virgili, Departamento de Ingeniería Mecánica, Tarragona, Spain.

## **RESUMEN**

En el presente trabajo se aborda el estudio de una tubería o conducto de agua a presión provisto de una toma intermedia con salida libre por su extremo, aplicándose también la teoría de la optimización clásica y alguna nueva formulación propuesta por el autor. El problema se generaliza al aumentar el número de tomas o salidas equidistantes del conducto de igual caudal, con la determinación correspondiente de la pérdida de carga resultante mediante el empleo de la formulación de Christiansen, que obvia el proceso de cálculo iterativo que resulta altamente farragoso si dicho número de salidas es importante, como sucede en los riegos por aspersion o localizados de alta frecuencia. Se considera, por último, el estudio del caso de una tubería que distribuye el caudal de manera uniforme en toda su longitud.

*Palabras clave: conducción forzada, nivel piezométrico, pérdida de carga, optimización, coeficiente reductor, derivación, tubería, caudal, diámetro.*

## **WATER DUCT WITH INTERMEDIATE TAKING. APPLICATION OF THE THEORY OF OPTIMIZATION AND GENERALIZATION OF THE PROBLEM**

### **SUMMARY/ABSTRACT**

The present work deals with the study of a pressure water pipe or conduit provided with an intermediate outlet with free exit at its end is applied, also applying the theory of classical optimization and some new formulation proposed by the author. The problem is generalized by increasing the number of equidistant outlets or outlets of the conduit of equal flow, with the corresponding determination of the resulting head loss by using the Christiansen formulation, which obviates the iterative calculation process that is highly cumbersome if this number of exits is important, as it happens in sprinkler or localized high frequency irrigation. Finally, it is considered the case study of a pipeline that distributes the flow uniformly over its entire length.

*Keywords: forced conduction, piezometric level, headloss, optimization, reducing coefficient, derivation, pipeline, flow, diameter.*

# **CONDUITE D'EAU AVEC PRISE INTERMÉDIAIRE. APPLICATION DE LA THÉORIE DE L'OPTIMISATION ET GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME**

## **RÉSUMÉ**

Dans le présent travail, est abordée l'étude d'une canalisation ou d'un conduit d'eau sous pression dotée d'une prise intermédiaire avec sortie libre à son extrémité, appliquant également la théorie de l'optimisation classique et une nouvelle formulation proposée par l'auteur. Le problème se généralise en augmentant le nombre de prises ou de sorties équidistantes du conduit de flux égal, avec la détermination correspondante de la perte de charge résultante grâce à l'utilisation de la formulation de Christiansen, qui évite le processus de calcul itératif qui est très fastidieux si le nombre de sorties est important, comme dans l'arrosage par aspersion ou irrigation localisée à haute fréquence. Enfin, l'étude du cas d'un pipeline distribuant le flux de manière uniforme sur toute sa longueur est considérée.

*Mots clés: conduite forcée, niveau piézométrique, perte de charge, optimisation, coefficient de réduction, dérivation, conduite, débit, diamètre.*

# **CONDUCTE D'AIGUA AMB PRESA INTERMÈDIA. APLICACIÓ DE LA TEORIA DE L'OPTIMITZACIÓ I GENERALITZACIÓ DEL PROBLEMA**

## **RESUM**

En el present treball s'aborda l'estudi d'una canonada o conducte d'aigua a pressió que disposa d'una presa d'aigua intermèdia amb sortida lliure pel seu extrem, aplicant també la teoria de l'optimització clàssica i alguna nova formulació proposada pel propi autor. El problema es generalitza en augmentar el nombre de preses o sortides equidistants del conducte d'igual cabal, amb la determinació corresponent de la pèrdua de càrrega resultant mitjançant l'ús de la formulació de Christiansen, que obvia el procés de càlcul iteratiu que resulta altament carregós si el nombre de sortides és important, com succeeix en els regs per aspersion o localitzats d'alta freqüència. Es considera, finalment, l'estudi del cas d'una canonada que distribueix el cabal de manera uniforme en tota la seva longitud.

*Paraules clau: conducció forçada, nivell piezomètric, pèrdua de càrrega, optimització, coeficient reductor, derivació, canonada, cabal, diàmetre.*

## Tubería con una salida intermedia

Sea la tubería AC de longitud  $L$  y diámetro constante  $D$ , en la que existe una toma en B (Fig. 1), provista de su llave de paso, que divide dicha longitud en dos tramos de longitudes  $L_1$  y  $L_2$ . Así:

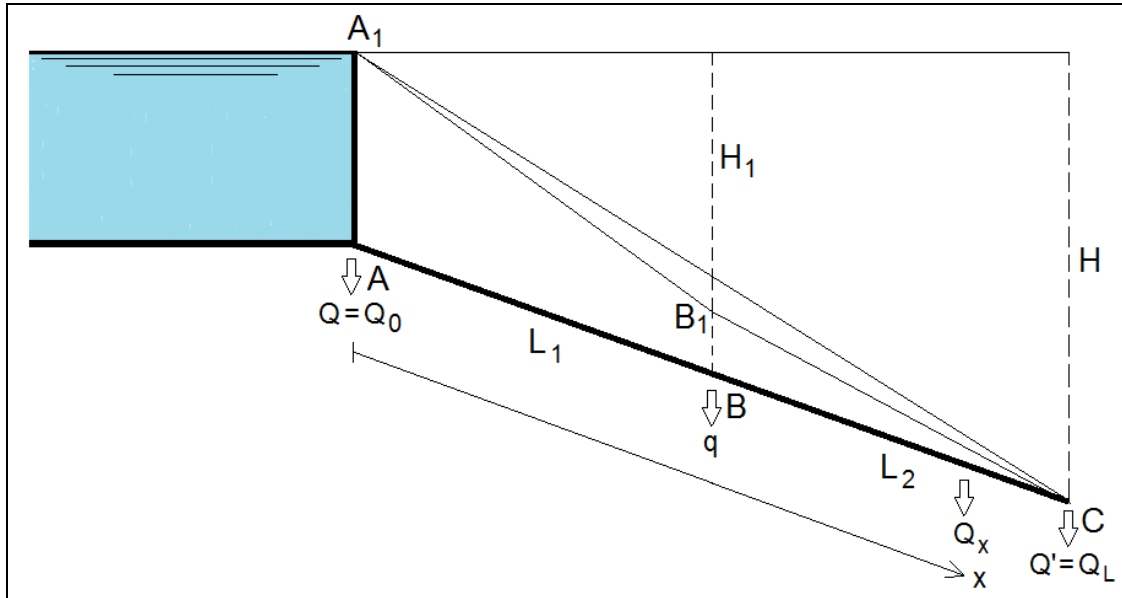


Fig. 1. Esquema del problema.

En caso de que ambos tramos sean de diferentes diámetros interiores,  $D_1$  y  $D_2$ , se trataría de una conducción mixta (en serie) que podría substituirse, a efectos de cálculo, por una cierta “tubería equivalente” de diámetro constante  $D_e$ . En este sentido, se dice que una tubería es equivalente cuando la pérdida de carga, para un caudal dado, es la misma que en el sistema de tuberías al que substituye (Torres, 1970). En nuestro caso sucedería que:

$$\frac{L}{D_e^5} = \frac{L_1}{D_1^5} + \frac{L_2}{D_2^5}, \text{ o sea: } D_e = \sqrt[5]{\frac{L}{\frac{L_1}{D_1^5} + \frac{L_2}{D_2^5}}}, \text{ considerando: } L = \sum_{i=1}^2 L_i \quad (1)$$

Ello se puede generalizar a cualquier número  $n$  de tramos de diámetros interiores diferentes de que conste la conducción forzada en estudio, con lo que

$$D_e = \sqrt[5]{\frac{L}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{D_i^5}}}, \text{ considerando } L = \sum_{i=1}^n L_i.$$

Hay que hacer constar, no obstante, que el promedio de las formulaciones propuestas en nuestros estudios (Franquet, 2005) resulta tener la configuración genérica:  $J = \gamma \cdot Q^2 \cdot D^{-5.3}$ , con lo que el exponente 5 y grado de la raíz que

aparecen en la expresión (1) podrían ser modificados por el valor 5.30 o bien aplicados para cada caso diferente según la categoría de rugosidad específicamente adoptada. En efecto:

$$J = \gamma \cdot \frac{Q^2}{D^{5.3}} = \frac{\gamma \left( \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)^2 \cdot V^2}{D^{5.3}} = \frac{\gamma \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot D^4 \cdot V^2}{D^{5.3}} = \gamma' \cdot V^2 \cdot D^{-1.3}, \text{ con } \gamma' \approx 0.0013,$$

que constituye la expresión genérica media, del tipo  $J(V,D)$ , de la pérdida de carga continua unitaria que aparece en nuestra investigación.

De hecho, obsérvese que según las diferentes formulaciones propuestas por muchos autores, el mencionado exponente del diámetro en la función  $J(Q,D)$ , que viene dado por  $(2\beta_1 + \beta_2)$ , siendo  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , respectivamente, los valores de los exponentes de la velocidad y el diámetro interior en la formulación empleada para el cálculo de las pérdidas unitarias continuas de carga, adoptaría valores oscilantes alrededor de 5, tal como puede verse en la tabla 1 referidos a algunos de ellos. De este modo, en la tabla 2 se muestra el exponente del diámetro que correspondería aplicar, según nuestra propia formulación, para el cálculo de dichas pérdidas unitarias continuas de carga según las diferentes categorías de rugosidad  $k$  propuestas en nuestros estudios.

Tabla 1. Exponente del diámetro en  $J(Q,D)$  según diferentes autores.

<i>Autor</i>	<i>Exponente de D</i>
Manning-Strickler-Gaukler (1890, 1923)	5.33
Sonier, <b>Franquet</b> (2005)	5.30
Mougnie	5.25
Darcy-Weisbach (1843), Dupuit (1848), Colombo, Catani	5.00
Scobey (1930)	4.90
Hazen-Williams (1920)	4.87
Veronese-Datei	4.80
Scimemi (1951)	4.79
Cruciani-Margaritora	4.75

Fuente: elaboración propia.

Las formulaciones propuestas por este autor para el dimensionamiento de las conducciones forzadas (Franquet, 2005) tienen la ventaja de que, tal como sucede en las conducciones libres, el exponente de la  $J$  es, en todos los casos:  $v = \frac{1}{2} = 0.5$  (sin embargo, dicho exponente, en su relación con la velocidad o el caudal, puede oscilar desde 0.5 en régimen turbulento, que es el más normal, hasta 1.0 en régimen laminar, tal como se ha visto en los ejercicios del epígrafe anterior); también en la fórmula explícita de la  $J$  el exponente de la velocidad  $V$

es 2.0, mientras que el exponente del diámetro interior  $\beta$  en la fórmula explícita de la velocidad va aumentando progresivamente con el grado de rugosidad  $k$ , desde 0.6215 hasta 0.67725.

Tabla 2. Valor del exponente de D aplicable según las categorías de rugosidad adoptadas.

Rugosidad (k)	$\beta_1$	$\beta_2$	Exponente de D ajustado
<b>1.0</b>	<b>2</b>	<b>1.2430</b>	<b>5.24</b>
1.5	2	1.2560	5.26
<b>2.0</b>	<b>2</b>	<b>1.2691</b>	<b>5.27</b>
2.5	2	1.2821	5.28
<b>3.0</b>	<b>2</b>	<b>1.2952</b>	<b>5.30</b>
3.5	2	1.3032	5.30
<b>4.0</b>	<b>2</b>	<b>1.3112</b>	<b>5.31</b>
4.5	2	1.3210	5.32
<b>5.0</b>	<b>2</b>	<b>1.3308</b>	<b>5.33</b>
5.5	2	1.3426	5.34
<b>6.0</b>	<b>2</b>	<b>1.3545</b>	<b>5.35</b>

Fuente: elaboración propia.

El exponente antedicho de valor 5.30 se corresponde exactamente con las diferentes medidas del valor central o promedios usualmente empleados, tanto clásicos como más propios de los métodos estadísticos robustos (medias aritmética, geométrica o armónica, trimedia, mediana, mediana de Gastwirth, moda) en la distribución de frecuencias de la tabla 2 anterior.

Supongamos, ahora, que tiene lugar una salida libre del líquido a la atmósfera en el extremo C y que la longitud de la conducción es lo suficientemente grande como para poder desprejar las pérdidas de carga accidentales o singulares ( $h_s = 0$ ). Si la llave de B no existiera o estuviera totalmente cerrada, la línea piezométrica sería  $A_1C$ , y en las condiciones del problema saldría por C un gasto Q, que de acuerdo con la fórmula simplificada de DARCY, sería:

$$Q^2 = m' \cdot J = m' \cdot \frac{H}{L}, \text{ de donde:}$$

$$Q^2 \cdot L = m' \cdot H \quad (1')$$

y con  $m' = \frac{\pi^2 \cdot D^5}{64 \times b}$ , y  $b = \alpha + \frac{\beta}{D}$ , siendo los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  dependientes del material constitutivo de la tubería. En el caso concreto de tratarse, v. gr., de una tubería de plástico (Franquet, 2005), el valor de la pérdida total continua de carga en el extremo C de la conducción vendrá dado por la expresión:

$$H = J \times L = 0.000743 \times \frac{V^2 \times L}{D^{1.243}}$$

Si se abre la llave situada en B, y se deriva por ella un cierto caudal  $q$ , la línea de niveles piezométricos, se convierte en la  $A_1B_1C$  y por el extremo C saldrá un caudal residual  $Q'$ , de forma que el gasto en el primer tramo AB de longitud  $L_1$  será:  $q + Q' = Q$ , y en el segundo tramo BC de longitud  $L_2$  será  $Q'$ , pudiendo establecerse las siguientes ecuaciones (Torres, 1970),

$$(q + Q')^2 \cdot L_1 = m' \cdot H_1 \quad (2)$$

$$Q'^2 \cdot L_2 = m' (H - H_1) \quad (3)$$

Sumando ahora las ecuaciones (2) y (3), se obtiene:

$$(q + Q')^2 \cdot L_1 + Q'^2 \cdot L_2 = m' \cdot H,$$

y teniendo en cuenta la expresión (1') resulta:

$$(q + Q')^2 \cdot L_1 + Q'^2 \cdot L_2 = Q^2 \cdot L,$$

de donde se deduce que:

$$L Q'^2 + 2 q \cdot L_1 \cdot Q' + q^2 \cdot L_1 - L \cdot Q^2 = 0.$$

Dividiendo por  $L = L_1 + L_2$ , quedará:

$$Q'^2 + \frac{2q \cdot L_1}{L} \cdot Q' + \frac{q^2 \cdot L_1}{L} - Q^2 = 0,$$

y resolviendo esta ecuación de 2º grado, resulta:

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{-\frac{2qL_1}{L} + \sqrt{\frac{4q^2L_1^2}{L^2} - \frac{4q^2L_1}{L} + 4Q^2}}{2} = \frac{-q \cdot L_1}{L} + \sqrt{\frac{q^2 \cdot L_1^2}{L^2} + Q^2 - \frac{q^2 \cdot L_1}{L}} = \\ &= \frac{-q \cdot L_1}{L} + \sqrt{Q^2 - \frac{L_1 \cdot L_2}{L^2} \times q^2}, \end{aligned}$$

y también:

$$Q' = -\frac{q \cdot L_1}{L} + Q \sqrt{1 - (q^2 / Q^2) \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{L^2}} \quad (4)$$

### Aplicación de la teoría de la optimización funcional

Llegados a este punto, y a la vista del radicando que aparece en la expresión (4), cabría preguntarse: **¿cuándo se maximiza el cociente entre la media geométrica de las distancias  $L_1$  y  $L_2$  y su suma (longitud total) y cuál es su valor?** Así pues, se trataría de maximizar el cociente:

$$\frac{G}{L_1 + L_2} = \frac{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}{L} = \sqrt{\frac{L_1 \cdot L_2}{L^2}} \quad (5)$$

Nos hallamos, pues, ante un problema de optimización clásica, consistente en la maximización con condiciones de una función real de variable real, puesto que se trata de maximizar una función de dos variables positivas o nulas, por lo que consideraremos simplifcativamente la maximización del radicando de la expresión anterior (5): [MAX]Z =  $\frac{L_1 L_2}{L^2}$ , sujeta a la ecuación condicionante siguiente:  $L_1 + L_2 = L$ , empleando el conocido método de los multiplicadores u operadores de Lagrange.

El problema planteado reside en obtener el valor de las variables  $L_1$  y  $L_2$  donde la función objetivo Z diferenciable alcanza un máximo, sabiendo que dichas variables están relacionadas entre sí mediante la expresada condición de contorno o restricción de igualdad de tipo geométrico, referente a la longitud de la tubería.

Formamos, para ello, la ecuación de Lagrange o auxiliar:

$$\Phi = \frac{L_1 L_2}{L^2} + \lambda (L_1 + L_2 - L).$$

- Condición necesaria o de 1r. grado:

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_{L_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial L_1} = \frac{L_2}{L^2} + \lambda \cdot L_1 = 0 \\ \Phi'_{L_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial L_2} = \frac{L_1}{L^2} + \lambda \cdot L_2 = 0 \\ \Phi'_{\lambda} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = L_1 + L_2 - L = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda = -\frac{L_2}{L^2 \cdot L_1} = -\frac{L_1}{L^2 \cdot L_2}; \\ L^2 \cdot L_2 = L^2 \cdot L_1; \text{ o sea:} \\ L_1 = L_2 = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

- Condición suficiente o de 2º grado:

Se cumple que:  $\lambda = -\frac{L_2}{L^2 \cdot L_1} = (L_1 = L_2) = -\frac{1}{L^2}$ ; teniendo en cuenta que:

$$\Phi''_{L_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial L_1^2} = \lambda; \quad \Phi''_{L_1 L_2} = \Phi''_{L_2 L_1} = \frac{1}{L^2}; \quad \Phi''_{L_2^2} = \lambda; \text{ y se tendrá el determinante}$$

“hessiano orlado relevante”:

$$H(L_1, L_2, \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{L_1^2} & \Phi''_{L_1 L_2} & \Phi''_{L_1 \lambda} \\ \Phi''_{L_1 L_2} & \Phi''_{L_2^2} & \Phi''_{L_2 \lambda} \\ \Phi''_{L_1 \lambda} & \Phi''_{L_2 \lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} & \frac{L}{2} \\ \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L}{2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{L^2}{4L^2} + \frac{L^2}{4L^2} + \frac{L^2}{4L^2} + \frac{L^2}{4L^2} = \frac{4L^2}{4L^2} = 1 > 0 \text{ (2 variables), luego se trata de un máximo, c.s.q.d.}$$

En definitiva, el valor máximo de la función Z, será

$$[\text{MAX } Z] = \frac{L_1 L_2}{L^2} = \frac{L^2}{4L^2} = \frac{1}{4}, \text{ y también: } [\text{MAX} \left( \sqrt{\frac{L_1 \cdot L_2}{L^2}} \right)] = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Siendo constante la longitud:  $L_1 + L_2 = L$ , el valor máximo de  $\frac{L_1 L_2}{L^2}$  corresponde, pues, a:  $L_1 = L_2 = \frac{L}{2}$ , y para este valor máximo resulta:

$$\text{Valor máximo de } \left( \frac{q^2}{Q^2} \cdot \frac{L_1 \cdot L_2}{L^2} \right) = \frac{q^2}{Q^2} \cdot \frac{L^2}{4L^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{q}{Q} \right)^2.$$

Entonces, la ecuación (4) quedará así:

$$Q' = Q - q = -\frac{q \cdot L_1}{L} + Q \sqrt{1 - \left( \frac{q}{2Q} \right)^2} = -\frac{q}{2} + Q \sqrt{1 - \left( \frac{q}{2Q} \right)^2}, \text{ y también:}$$

$$Q = \frac{q}{2} + Q \sqrt{1 - \left( \frac{q}{2Q} \right)^2}, \text{ y teniendo en cuenta que: } Q > 0 \text{ y } q > 0, \text{ resulta:}$$

$$Q = \frac{\sqrt{4Q^2 - q^2} + q}{2}.$$

Así mismo, en la ecuación (4), si el caudal q derivado por la toma B es muy pequeño comparado con Q, se puede poner, en términos aproximados, que:

$$Q' \approx Q - \frac{q \cdot L_1}{L} \quad (6)$$

con lo que para igual pérdida de carga, el caudal Q' en el extremo de la conducción es Q menos una fracción de q que depende de la posición relativa de la toma intermedia B. Entonces, cuando dicha toma se halla situada en la sección



media a la que nos hemos referido anteriormente, o sea,  $L_1 = L_2 = \frac{L}{2}$ , el caudal total tomará un valor aproximado:  $Q \approx Q' + \frac{q}{2}$ .

Esta misma expresión se cumplirá exactamente cuando la toma se desplace hasta el extremo de la tubería C, con lo que  $L_2 = 0$ ,  $L_1 = L$  y  $Q' = 0$ , con lo que:

$$Q' = Q - q = 0 \Rightarrow Q = q.$$

De esta expresión se deduce, que el caudal residual  $Q'$  que sale por el extremo C de la tubería, será tanto menor cuanto mayor sea  $L_1$ , es decir cuanto más próxima esté situada la toma intermedia al extremo C de la conducción.

Para conseguir que los caudales  $q$  y  $Q'$  sean aproximadamente iguales, haremos:

$$q = Q - \frac{q \cdot L_1}{L}$$

de donde la situación de la toma intermedia, en este caso, vendrá definida por la distancia  $L_1$ , de la misma, al origen de la tubería:

$$L_1 = \frac{(Q - q)}{q} \cdot L, \text{ y como } L_1 < L \text{ será } Q - q < q, \text{ o bien } q > \frac{Q}{2},$$

y, por otra parte, al ser  $Q > q$ , resultará:  $Q > q > Q/2$ .

Además, en el caso de toma intermedia en B y diámetro interior constante o equivalente  $D = D_e$ , en los nodos B y C se tienen, respectivamente, los caudales salientes  $q$  y  $Q'$ . Para hallar la pérdida de carga total  $H$  se procederá de tal modo que la suma de las pérdidas de carga en los tramos  $L_1$  y  $L_2$  nos ofrezca dicha pérdida total  $H$ . Esto es, en el ejemplo propuesto de la tubería de plástico, se tendría:

$$\begin{aligned} H = H_1 + H_2 &= J_1 \times L_1 + J_2 \times L_2 = 0.000743 \times \frac{V_1^2 \times L_1}{D^{1.243}} + 0.000743 \times \frac{V_2^2 \times L_2}{D^{1.243}} = \\ &= \frac{0.000743}{D^{1.243}} (V_1^2 \times L_1 + V_2^2 \times L_2) \end{aligned} \quad (7)$$

En el caso de pretender determinar la  $H$  aplicando la formulación de Christiansen (1942), que se verá con mayor detalle en el apartado siguiente de nuestro trabajo, se tendrían unos valores de  $m = 2$  (exponente de la velocidad o del caudal en la fórmula empírica utilizada para la determinación de las pérdidas de carga continuas) y  $n_0 = 2$  salidas equidistantes de caudales  $q$  y  $Q'$ , tales que se

cumple  $q = Q'$ , en los nodos respectivos B y C, agotándose el caudal en este último punto o extremo de la conducción. Entonces:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} =$$

$$= \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{\sqrt{2-1}}{6 \cdot 2^2} = 0.333 + 0.250 + 0.042 = 0.625 ,$$

y la pérdida total de carga H vendría dada por:

$$H = F \times J \times L = 0.625 \times \frac{0.000743}{D^{1.243}} \times V^2 \times L ,$$

siendo la pérdida de carga resultante en este conducto un  $100 - 62.5 = 37.5\%$  inferior a la que se produciría de transcurrir todo el caudal Q por el mismo tubo sin derivaciones, y saliendo el agua libremente por el extremo C.

Como se ha dicho, en todo el proceso descrito se ha supuesto que la tubería es de gran longitud, por lo que no se han tenido en cuenta las pérdidas accidentales. En cualquier caso, si interesara se pueden incrementar aproximadamente las pérdidas continuas en un 10% para instalaciones con escasas piezas especiales o puntos singulares, en un 15% para instalaciones normales (de no suponerse una calificación diferente) y en un 20% para instalaciones con un elevado número de estas piezas. Una mayor precisión en el cálculo exigiría la determinación pormenorizada de las pérdidas accidentales de carga que se producen en cada pieza especial, disponiendo de los datos suficientes y haciendo uso de las fórmulas o tablas existentes al respecto, que frecuentemente expresan la equivalencia en metros lineales agregables de tubería.

## Generalización a una tubería con diversas tomas intermedias

Veamos, al respecto de los diferentes valores que puede tomar el coeficiente o exponente  $m$  en la siguiente expresión (8) que, en general, las pérdidas continuas unitarias de carga de una tubería a presión o conducción forzada, en función del caudal por ella circulante, responden a una expresión potencial del tipo:

$$J = n \cdot Q^m \tag{8}$$

siendo aquí:  $n = \frac{1}{m'} = \frac{64 \times b}{\pi^2 \times D^5}$ , que en el caso de la expresión simplificada de

Darcy, al igual que en las propuestas por el autor del presente artículo (Franquet, 2005), adopta el siguiente valor:  $m = 2.00$ , así como en las de Lèvy (1899),

Gaukler (1867), Weisbach (1843), Kütter (1870), Mougny, Chèzy, Sonier, Manning-Strickler (1923) o Catani. En las de la sociedad SOGREAH (1962), Flamant (1891) o Blasius (1913) es  $m = 1.75$ , así como en las de Saph y Schoder (1903); en la de Scimemi-Veronese (1925), es  $m = 1.78571$ , en la de Hazen-Williams (1920) es  $m = 1.852$ , en las de Biegeleisen y Bukowsky (1942) resulta  $m = 1.90$ , así como en la de Meyer-Peter (1931), mientras que en las diversas formulaciones propuestas por Scobey (1930) encontramos los valores:  $m = 1.80$ ,  $1.90$ , etc., pero siempre dentro del intervalo de existencia  $[1.50, 2.00]$ , y expresándolas, todas ellas, como fórmulas potenciales monomias. Por otra parte, es frecuente considerar  $m = 1.75$  para riegos por goteo y  $m = 1.80$  para riegos por aspersión (Franquet, 2003). Solamente en el caso de otro tipo de fluidos (petróleo, bencina, keroseno, aceites) de viscosidad superior a la del agua, Carothers adopta un valor  $m = 1.50$  (Forchheimer, 1935-1950).

La versatilidad de tan amplia formulación induce a concluir que en tal información están incluidos los diferentes estilos de trabajo sucesivamente empleados a lo largo de casi dos centurias y representativos, en el fondo, de una evolución de los conocimientos que tienden a generalizar y unificar, cada vez más, sus afirmaciones, en la prosecución de una síntesis final aún no alcanzada. En este mismo sentido, nosotros hemos realizado un esfuerzo de investigación, tanto por lo que se refiere al cálculo de las conducciones libres como en el de las conducciones forzadas o a presión (Franquet, 2019).

Resulta ineludible, hoy en día, distinguir con arreglo a la experimentación de Von Kàrmàn-Nikuradse y de Colebrook-White, las tuberías lisas, rugosas e intermedias, denominaciones éstas establecidas no en función de la contextura de la pared, sino según el comportamiento hidráulico, por virtud de la configuración de la capa límite que se halla perfectamente definida en cada caso. Sucede, de este modo, que la ley de resistencia en las tuberías lisas es única, independiente de su material constitutivo y expresable por una ley analítica de la que la fórmula de Blasius es una primera aproximación que ha sido prolongada por otros investigadores (Franquet, 2003).

Así pues, resultará, en definitiva:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} \quad (9)$$

**que es la expresión aproximada adoptada por Christiansen en su estudio acerca de las conducciones hidráulicas con servicio en ruta.**

En todo caso, tal como se determina en nuestros estudios (Franquet, 2019) la determinación del grado más correcto de la raíz que aparece en el numerador del tercer sumando o fracción del 2º miembro de la expresión (9) resulta

inmediata haciendo:  $\frac{\sqrt[1.7]{2}}{6} = \frac{1}{4} = \frac{2^x}{6}$ , de donde se infiere que:

$$x = \frac{\log 1.5}{\log 2} = \frac{0.1760912}{0.30103} = 0.585, \text{ y el grado de la raíz deberá ser: } 1/0.585 = 1.71,$$

con lo que la expresión de la formulación de Christiansen quedaría definitivamente corregida así, proporcionando valores exactos:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt[1.7]{m-1}}{6 \cdot n_0^2}, \forall m \text{ tal que } m \in [1,2,3].$$

Tenemos, pues, el caso general de una tubería con servicio en ruta, con  $n_0$  derivaciones de caudal constante, con un distanciamiento entre salidas  $l$  y encontrándose la primera derivación a una distancia  $l_0$  del origen de la conducción A, que puede tratarse de una tubería terciaria de riego, de un depósito elevado o bien de un grupo de bombeo. Esto es:

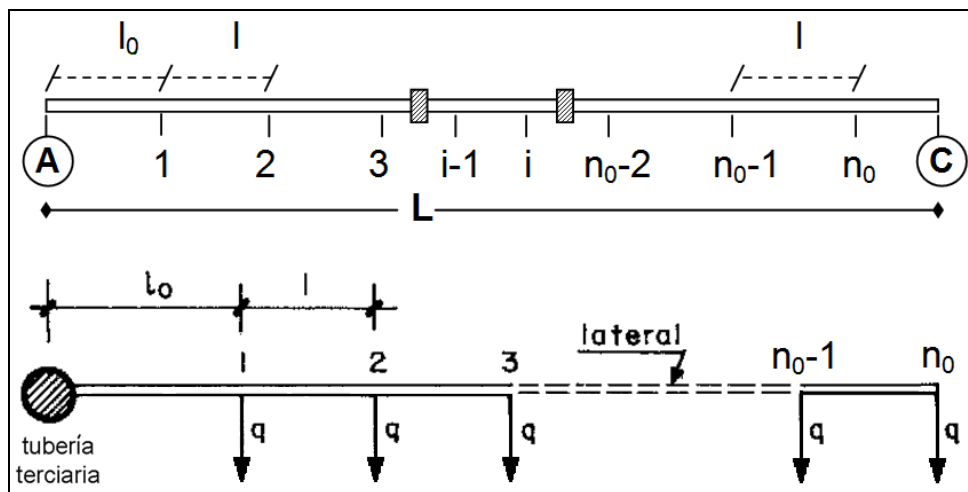


Fig. 2. Tubería con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal constante.

que se cumplirá  $\forall l$  tal que:  $l_1 = l_2 = \dots = l_i = \dots = l$ .

Pues bien, el caudal de salida de A, que se agota en C, será:  $Q = n_0 \cdot q$ ,

y la longitud total de la conducción, teniendo en cuenta que:  $l_0 = r \cdot l$ , es:

$$L = l_0 + (n_0 - 1) \cdot l = (r + n_0 - 1) \cdot l.$$

Teóricamente, en una tubería de las características expresadas, el coeficiente de reducción por salidas, aplicable a las pérdidas de carga continuas que experimenta una tubería que agota el caudal en su extremo final C y mantiene constantes el caudal  $q$ , el diámetro interior, su rugosidad absoluta  $K$  y la equidistancia entre las salidas  $l$ , con  $l_0 = l$ , respondería a la expresión:

$$F = \frac{1}{n_0^{1+m}} \sum_{i=1}^{n_0} i^m,$$

para la cual Christiansen (1942) obtuvo la función expresada en (9).

El problema que aquí se plantea constituye una generalización del problema clásico de una tubería sencilla con varias tomas intermedias (de número no excesivo) y diámetro constante, cuya resolución suele presentarse por aplicación de la conocida fórmula de Darcy y Bazin (1865) aunque también puede aplicarse la formulación que se propone por este autor (Franquet, 2005), y la determinación previa de la línea de niveles piezométricos<sup>1</sup>.

En el caso de tratarse de derivaciones equidistantes y caudal constante  $q$  por cada una de ellas, la determinación de dicha línea piezométrica se obtendría dividiendo la carga total  $H$  en partes proporcionales a la sucesión de números reales:  $n_0^2, (n_0-1)^2, \dots, 1$ .

Conviene tener presente, asimismo, que esta fórmula (9) sólo resultará válida para el caso concreto en el cual la primera salida se encuentre del principio de la conducción (Fig. 2) a una distancia  $l_0 = 1$ , o sea, igual a las distancias existentes entre sí de las diferentes salidas ( $r = l_0/l = 1$ ). Y en el caso de la formulación propuesta por este autor (Franquet, 2005), con  $m = 2.00$ , la expresión de Christiansen adoptará la configuración:

$$F = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{2-1}}{6 \cdot n_0^2} = \frac{(n_0+1)(2n_0+1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2+3n_0+1}{6n_0^2} \quad (10)$$

Es obvio, por otra parte, que cuando el número de derivaciones o salidas aumenta indefinidamente (o sea, cuando el caudal se reparte uniformemente a lo largo de toda la conducción forzada, como en el caso del riego por exudación), la expresión anterior se convertirá en:

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} F = \frac{1}{1+m} \quad (11)$$

que constituye, en estas circunstancias, el valor mínimo al cual tiende el coeficiente experimental de reducción que nos ocupa. Si el caudal residual o extremal  $Q'$  de la conducción es nulo, y considerando el caso normal  $m = 2.00$ , veamos que ello nos indica que la pérdida de carga continua que tiene lugar es la tercera parte de la que se produciría si el gasto o caudal inicial recorriera toda la

---

<sup>1</sup> La "línea piezométrica" se corresponde con el lugar geométrico de los niveles de agua de los tubos piezométricos o piezómetros conectados a la tubería y es la suma de las alturas de presión y de posición o cota taquimétrica. La diferencia de altura existente entre la línea de energía y la línea horizontal o plano de carga representa la pérdida de carga total por rozamiento existente entre dos puntos cualesquiera de la conducción en estudio.

tubería y saliera libremente por el extremo de la misma (y ello considerando que la tubería en cuestión distribuye un gasto uniformemente repartido que se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la conducción). Ello equivaldría, pues, a un coeficiente reductor de Christiansen de valor:  $F = 1/3 = 0.333$  que se obtendría de la formulación (9) cuando  $n_0$  tiende a  $\infty$  y también cuando  $m = 2.00$ .

Normalmente, en ciertos riegos localizados de alta frecuencia (RLAF) como el goteo o la microaspersión, se cumplirá que  $m = 1.75$ , mientras que cuando el régimen es laminar, situación ésta frecuente en el riego por exudación en que la pérdida de carga es, prácticamente, continua y no discreta, se tendrá que con:  $m = 1.00$  será  $F = 0.500$  y con  $m = 2.00$  se tiene que  $F = 0.333$ , que se corresponde justamente con la formulación propuesta por aquel autor americano.

Veamos que, en función del número  $n_0$  de salidas o derivaciones iguales del caudal  $q$ , el coeficiente reductor  $F$  de Christiansen sigue trayectorias diferentes según la formulación empleada en el diseño hidráulico, como puede comprobarse en el siguiente gráfico:

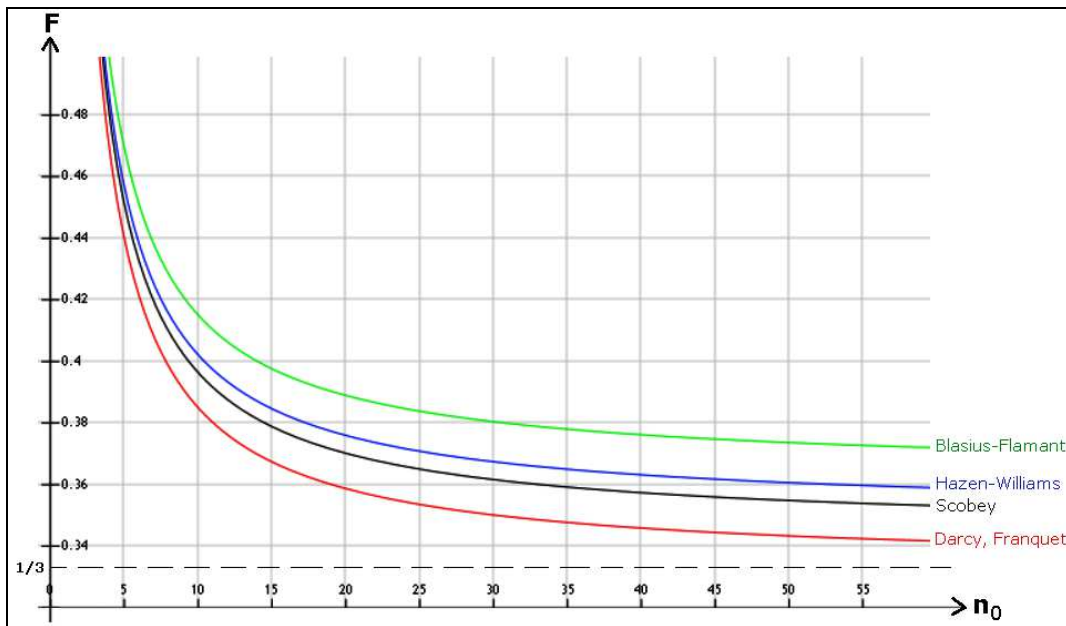


Fig. 3. Trayectoria de  $F$  según la formulación.

Las 4 funciones representadas en la Fig. 3, respectivamente, son las siguientes:

- Blasius-Flamant, Cruciani-Margaritora ( $m = 1.75$ ):

$$F = \frac{1}{2.75} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{0.75}}{6 \cdot n_0^2} = 0.364 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.144}{n_0^2}.$$

- Hazen-Williams, Ludin (1932), ( $m = 1.852$ ):

$$F = \frac{1}{2.852} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{0.852}}{6 \cdot n_0^2} = 0.351 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.154}{n_0^2}.$$

- Scobey, Biegeleisen-Bukowsky, Meyer-Peter ( $m = 1.9$ ):

$$F = \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{0.9}}{6 \cdot n_0^2} = 0.345 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.158}{n_0^2}.$$

- Darcy-Weisbach, Franquet, Manning-Strickler-Gaukler, Tillmann, Lèvy, Ganguillet-Kütter, Dupuit, Bazin, Mougny, Sonier, Colombo, Catani ( $m = 2$ ):

$$F = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{1}{6 \cdot n_0^2} = \frac{2 \cdot n_0^2 + 3 \cdot n_0 + 1}{6 \cdot n_0^2} = 0.333 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.167}{n_0^2}.$$

Puede revestir cierto interés por su utilidad, en algunos casos concretos, además de las anteriores, considerar otras expresiones como las siguientes:

- Scimemi ( $m = 1.78571$ ):

$$F = \frac{1}{2.78571} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{0.78571}}{6 \cdot n_0^2} = 0.359 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.148}{n_0^2}$$

- Veronese-Datei, Stucky, Lampe ( $m = 1.8$ ):

$$F = \frac{1}{2.8} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{0.8}}{6 \cdot n_0^2} = 0.357 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.149}{n_0^2}$$

- Wegmann-Aeryns ( $m = 1.856$ ):

$$F = \frac{1}{2.856} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{0.856}}{6 \cdot n_0^2} = 0.350 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.154}{n_0^2}$$

- Eytelwein (1801), ( $m = 1.944$ ):

$$F = \frac{1}{2.944} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{0.944}}{6 \cdot n_0^2} = 0.340 + \frac{0.5}{n_0} + \frac{0.162}{n_0^2}.$$

De este modo, se observa que cuando  $n_0 \rightarrow \infty$ , el valor del coeficiente de Christiansen toma valores  $F \in [0.333, 0.364]$  según la fórmula empírica empleada

para el cálculo de las pérdidas de carga correspondientes en las tuberías de conducción de agua. Para conductos de líquidos de mayor viscosidad (aceites vegetales, petróleo y derivados ...), como en la mencionada expresión de Carothers (con  $m = 1.50$ ), resultará  $F = 0.400$ .

### **Generalización a una tubería que distribuye un gasto o caudal uniformemente repartido**

Sea ahora una tubería AC de longitud  $L$  y diámetro  $D$ , que tiene su origen en un grupo de bombeo o bien en un depósito de agua elevado sobre el terreno como el de la Fig. 1, con varias tomas laterales próximas y uniformemente espaciadas, por las cuales se derivan gastos idénticos.

Cuando en una conducción de estas características, es suficientemente grande el número de derivaciones (típico, v. gr, en los sistemas de riego localizados de alta frecuencia, como la microaspersión, la exudación y el goteo en sus diferentes modalidades), se efectúa el cálculo, con gran aproximación, suponiendo que se distribuye un gasto uniformemente repartido a lo largo del trayecto, el cual se obtiene sumando todos los gastos de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total de la tubería o distancia:  $L = AC$ . A este gasto así obtenido, se le denomina “gasto por unidad de longitud” de tubería.

En estos casos, puede asimilarse el movimiento del agua por la tubería a una sucesión de movimientos uniformes infinitesimales de ley variable con el caudal -o bien con la sección de la conducción si ésta no es constante- debido a la proximidad de los cambios y a la pequeña variación del caudal que tiene lugar como consecuencia de ellos. Si bien sería preciso, para la intachable resolución del problema, el conocimiento exacto de dicha ley de variación del caudal, podríamos admitir, con buena aproximación, que el servicio en el trayecto se reparte uniformemente en toda la longitud de la tubería, disminuyendo el caudal en una cierta cantidad  $q$  por unidad de longitud de la tubería. Sería el caso paradigmático de una cinta de riego subterráneo por exudación. **Es decir, que se gasta o consume un caudal  $q$  por unidad de longitud de la conducción.**

Utilizando, ahora, la siguiente notación:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \text{gasto en el origen A de la tubería.} \\ q = \text{gasto derivado por unidad de longitud de tubería.} \\ Q_x = \text{gasto disponible en un punto genérico de la tubería situado a una distancia del origen } x. \end{array} \right.$$

Evidentemente, se verificará que:

$$Q_x = Q - q \cdot x \quad (12)$$



siendo  $(q \cdot x)$  el gasto distribuido en el trayecto que transcurre desde A hasta x, con lo que el caudal inicial:  $Q_0 = Q$ .

Expresemos ahora la pérdida de carga continua por rozamiento en el tramo de tubería comprendido desde el punto A hasta x, mediante la fórmula:

$$z = n \int_0^x Q_x^2 \cdot dx = n \int_0^x (Q - q \cdot x)^2 \cdot dx = n \int_0^x (Q^2 - 2q \cdot x \cdot Q + q^2 \cdot x^2) \cdot dx = n \left[ \frac{q^2 x^3}{3} - qQx^2 + Q^2 x \right]_0^x$$

$$\forall x \text{ tal que } x \in [0, L] .$$

La constante de integración es nula, pues para  $x = 0$ , también:  $z = 0 \Rightarrow \Rightarrow c = 0$ ; o sea:

$$z = n(Q^2 \cdot x - q \cdot Q \cdot x^2 + \frac{1}{3} q^2 \cdot x^3) = n \left[ (Q_x + q \cdot x)^2 \cdot x - q(Q_x + q \cdot x)x^2 + \frac{1}{3} q^2 \cdot x^3 \right], \text{ o sea:}$$

$$z = n(Q_x^2 \cdot x + Q_x \cdot q \cdot x^2 + \frac{1}{3} q^2 \cdot x^3) \quad (13)$$

que es la ecuación de una parábola cúbica o función polinomial representativa de la línea de niveles piezométricos.

Si llamamos  $Q'$  al caudal residual o extremal que sale por el extremo C de la tubería tendremos, según la ecuación (13), se tendrá la pérdida continua total de carga siguiente:

$$H = n(Q'^2 \cdot L + Q' \cdot q \cdot L^2 + \frac{1}{3} q^2 \cdot L^3) \quad (14)$$

Ahora bien, si el extremo C de la tubería es un punto muerto, o sea, si todo el caudal se deriva y consume a lo largo de la conducción sin que al punto C llegue ya caudal residual alguno, se tendrá evidentemente que:

$$Q' = Q_{x=L} = 0, \text{ y por tanto, en (12) se tendrá: } Q = q \cdot L ,$$

y substituyendo estos valores en la ecuación (14), obtendremos:

$$H = \frac{1}{3} n \cdot q^2 \cdot L^3 = \frac{1}{3} n \cdot (q \cdot L)^2 \cdot L = 0.333 \cdot n \cdot Q^2 \cdot L \quad (15)$$

expresión que nos indica que la pérdida de carga continua que tiene lugar es la tercera parte de la que se produciría si el gasto Q recorriera toda la tubería y saliera libremente por el extremo C de la misma, tal como ya se ha enunciado en

el epígrafe anterior. Ello equivaldría, pues, a un coeficiente reductor de Christiansen  $F = 0.333$ , cuando  $n_0$  tiende a  $\infty$  y  $m = 2.00$ .

La ecuación anterior (15) también puede expresarse así:

$$H = \frac{1}{3} n \cdot Q^2 \cdot L = n \cdot (Q_1)^2 \cdot L, \text{ de donde resulta:}$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{3}} = 0.577 \cdot Q \quad (16)$$

lo que significa que la pérdida de carga continua es equivalente a la que se produciría si por la tubería circulara un gasto constante  $Q_1$  e igual al 57.7% del caudal inicial  $Q$ .

Un sencillo ejemplo de lo expuesto sería el caso de una cinta regante<sup>2</sup> con goteros integrados autocompensantes espaciados cada 20 cm de caudal 1l/h, lo que implicaría la obtención de un caudal unitario (por unidad de longitud de la tubería) de 5 l/h·m, o sea, si el ramal tiene una longitud total de  $L = 100$  m, se tiene (Fig. 4):

$$q = \frac{Q}{L} = \frac{500 \text{ l/h}}{100 \text{ m}} = 5 \text{ l/h} \cdot \text{m}.$$

De este modo, la ecuación lineal (12) quedará expresada así:

$Q_x = 500 - 5x$ ,  $Q_0 = Q = 500$  l/h, con la siguiente representación gráfica:

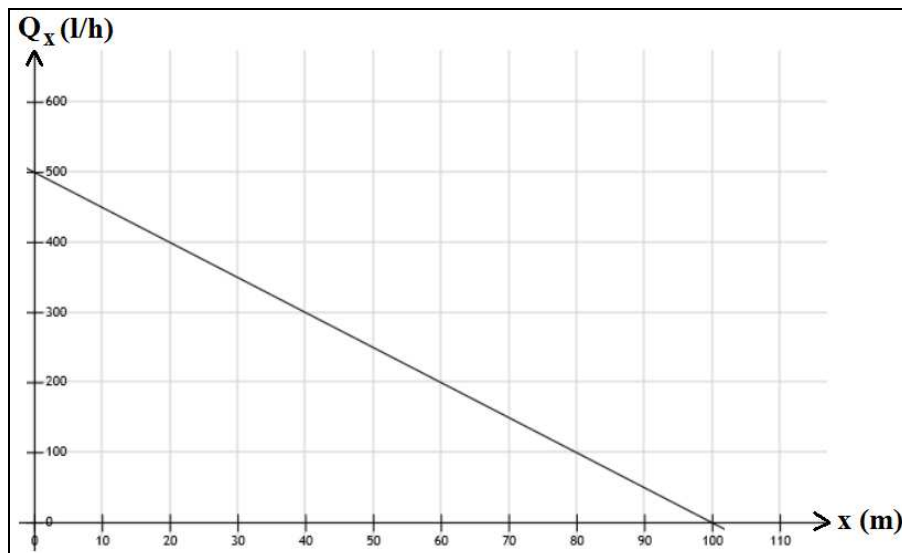


Fig. 4. Gráfico ( $Q_x - x$ ) en una cinta de riego.

<sup>2</sup> No debe confundirse este sistema de riego, que también puede ir provisto de goteros en régimen turbulento, con la cinta de exudación, que constituye otro sistema hidráulico, sin goteo y frecuentemente empleado en el riego subterráneo, que aplica el agua de forma continua mediante un tubo poroso que exuda agua uniformemente en todo su recorrido.

## Dimensionamiento del conducto

Expondremos, a continuación, el procedimiento que se utiliza para determinar el diámetro conveniente, para que la tubería pueda distribuir el gasto uniformemente repartido en la forma anteriormente indicada.

La ecuación (14) equivale a la formulación:

$$H = n(Q'^2 + Q' \cdot q \cdot L + \frac{1}{3}q^2 \cdot L^2) \cdot L = n \cdot Q_1^2 \cdot L = J_1 \cdot L ;$$

introduciendo un “caudal ficticio”  $Q_1$  que al circular por la tubería de manera constante produzca una pérdida de carga continua  $H$ . Con ello:

$$Q_1^2 = Q'^2 + Q' \cdot q \cdot L + \frac{1}{3}q^2 \cdot L^2 \quad (17)$$

pero si tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} (Q' + \frac{1}{2}q \cdot L)^2 &= Q'^2 + Q' \cdot q \cdot L + \frac{1}{4}q^2 \cdot L^2 < Q_1^2 \\ (Q' + \frac{1}{\sqrt{3}}q \cdot L)^2 &= Q'^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}Q' \cdot q \cdot L + \frac{1}{3}q^2 \cdot L^2 > Q_1^2 \end{aligned}$$

resulta que el valor de  $Q_1$  queda acotado entre los límites:

$$Q' + \frac{1}{2}q \cdot L < Q_1 < Q' + \frac{1}{\sqrt{3}}q \cdot L , \text{ o lo que es igual:}$$

$$Q' + 0.5 \cdot q \cdot L < Q_1 < Q' + 0.577 \cdot q \cdot L ,$$

**luego puede tomarse con suficiente aproximación, como valor de  $Q_1$ , para el cálculo del diámetro interior de la conducción:**

$$\boxed{Q_1 = Q' + 0.55 q \cdot L} \quad (18)$$

, que es la fórmula que se emplea usualmente para el diseño de las redes de abastecimiento de agua agrícola, industrial y doméstica (Torres, 1970).

Conociendo ya los valores de  $Q_1$  y  $J_1 = H/L$ , se halla fácilmente el valor de  $D$  y  $S$ . Concretamente, en el ejemplo anteriormente propuesto de una tubería plástica se tendrá, de acuerdo con la formulación del autor del presente artículo para las tuberías en servicio (Franquet, 2005), que:

$$Q_1 = 28.82 \times D^{2.6215} \times \sqrt{J_1}, \text{ de donde: } D = \sqrt[2.6215]{\frac{Q_1}{28.82 \times \sqrt{J_1}}}.$$

Del mismo modo:

$$S = \frac{\pi \times D^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times \sqrt[1.3108]{\frac{Q_1}{28.82 \times \sqrt{J_1}}} \quad (19)$$

estando expresadas las fórmulas anteriores en las unidades propias del SI<sup>3</sup>, esto es: Q (m<sup>3</sup>/s), V (m/s), D (m), L (m), H (m), S (m<sup>2</sup>) y J (m/m).

Si al punto C no llegara ningún caudal (con lo que: Q' = 0), se tomará, según hemos demostrado como valor de Q<sub>1</sub> (16), el siguiente:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot q \cdot L ; \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$\boxed{Q_1 = 0.577 \cdot q \cdot L \approx 58\% \text{ de } Q} \quad (20)$$

## Resolución de sendos casos prácticos

### 1. Tubería con pérdida continua de caudal

El siguiente ejercicio, tomado de Hernández y Crespo (1996), p. 147 y ss., resulta suficientemente ilustrativo para contrastar algunos de los conceptos aquí expresados.

*Enunciado:*

**El caudal de alimentación de una tubería de conducción de agua, de diámetro D = 10 cm y longitud L = 5 km, es Q<sub>0</sub> = 10 l/s. Debido a las numerosas tomas de agua que existen a lo largo de la tubería, puede estimarse que su caudal disminuye uniformemente en q = 6 l/h por metro de longitud de tubería. Calcular la pérdida de carga a lo largo de la tubería así como estudiar el régimen hidráulico y la conveniencia de escoger el material más adecuado constitutivo de la misma. Supóngase un factor de fricción constante de valor: f = 0.020.**

<sup>3</sup> El *Sistema Internacional de Unidades*, abreviado SI, también denominado *Sistema Internacional de Medidas*, es el heredero del antiguo sistema métrico decimal. Una de las principales características del Sistema Internacional de Medidas, es que sus unidades están basadas en fenómenos físicos fundamentales. La única excepción a ello es la definición de la unidad de la magnitud Masa, el kilogramo, que está definida como la masa de un prototipo internacional del kilogramo que está almacenado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, en Sèvres, Francia. Las unidades del SI son la referencia internacional de las indicaciones de todos los instrumentos de medida, y a las que están referidas a través de una cadena ininterrumpida de calibraciones o comparaciones.

*Solución:*

En un tramo elemental de tubería de longitud  $dl$  se producirá una pérdida de altura, prescindiendo de las pérdidas locales, según la ecuación general o universal de Darcy-Weisbach, de:

$$dH_{\phi} = f \frac{V^2}{2g} \cdot \frac{1}{D} dl.$$

De acuerdo con los datos del enunciado anterior, la variación del caudal a lo largo de la tubería (con servicio en ruta) está dada por:

$$Q = Q_0 - q \cdot l, \text{ siendo } q = \frac{0.006}{3600} = 1.667 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

$$\text{La velocidad del agua será: } V = \frac{4Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4}{\pi \cdot D^2} (Q_0 - q \cdot l).$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación inicial e integrando, resulta:

$$H_{\phi} = \frac{8f}{g\pi^2 D^5} \int_0^L (Q_0 - q \cdot l)^2 dl.$$

Resolviendo la integral y substituyendo valores, se obtiene en definitiva:

$$H_{\phi} = \frac{8f}{g\pi^2 D^5} \left( Q_0^2 L + q^2 \frac{L^3}{3} - 2Q_0 \cdot q \frac{L^2}{2} \right) = \frac{(8)(0.02)}{(9.807)\pi^2(0.1)^5} \left[ (0.01)^2(5000) + (1.667 \times 10^{-6})^2 \frac{(5000)^3}{3} - (0.01)(1.667 \times 10^{-6})(5000)^2 \right] = 32.93 \text{ m.c.a.}$$

En definitiva, los datos del problema son los siguientes:

$$q = 6 \text{ l/h} \cdot \text{m} = 0.006 \text{ m}^3/\text{h} \cdot \text{m}; D = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}; L = 5000 \text{ m.}$$

Caudal en el inicio de la tubería:

$$Q_0 = 10 \text{ l/s} \equiv 36000 \text{ l/h} = 0.01 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Gasto de caudal a lo largo de la tubería:

$$Q = 5000 \text{ m} \times 6 \text{ l/h} \cdot \text{m} = 30000 \text{ l/h} \equiv 30 \text{ m}^3/\text{h}, \text{ y un caudal residual o extremal:}$$

$$Q' = 36000 \text{ l/h} - 30000 \text{ l/h} = 6000 \text{ l/h} = 6 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0017 \text{ m}^3/\text{s.}$$

Así pues, de acuerdo con la expresión (14), se tendrá una pérdida total de carga de:

$$H_{\phi} = J \times L = n \left( Q'^2 \times L + Q' \times q \times L^2 + \frac{1}{3} \times q^2 \times L^3 \right), \text{ siendo:}$$

$$n = \frac{8f}{g \cdot \pi^2 \times D^5} = \frac{8 \times 0.02}{g \times \pi^2 \times 0.1^5} = 165.25294; \text{ y entonces:}$$

$$H_{\phi} = 165.25294 \times \left( \overbrace{0.0017^2 \times 5000}^{0.01445} + \overbrace{0.0017 \times 1.667 \times 10^{-6} \times 5000^2}^{0.0708475} + \underbrace{\frac{(1.667 \times 10^{-6})^2 \times 5000^3}{3}}_{0.115787} \right) = 33.23 \text{ m.c.a., que resulta ser prácticamente idéntica}$$

a la obtenida mediante la formulación anterior. Considerando, pues, una pérdida total de carga de 33 m.c.a., se tendrá una pérdida unitaria de carga de:

$$J = \frac{H_{\phi}}{L} = \frac{33}{5000} = 0.0066 \text{ m/ml.}$$

Como sea que el caudal disminuye uniformemente a lo largo de la tubería (servicio en ruta), se tendría un caudal medio de:

$$Q_m = \frac{Q_0 + Q'}{2} = \frac{0.01 + 0.0017}{2} = 0.00585 \text{ m}^3/\text{s},$$

lo que implica una velocidad media a lo largo de la misma de:

$$V_m = \frac{Q_m}{S} = \frac{4 \times Q_m}{\pi \times D^2} = \frac{4 \times 0.00585}{\pi \times 0.1^2} = 0.745 \text{ m/s.}$$

Tanteamos ahora, en base a nuestras propuestas, en busca de la pérdida de carga correspondiente según las diversas categorías de rugosidad de las tuberías de posible instalación. Para ello, habrá que considerar que la tubería planteada es nueva y sometida a desgaste normal, con lo que se tendrá un coeficiente relativo de rozamiento  $\alpha_2$  de valor (Franquet, 2019):

$$\left[ \alpha_2 = \frac{0.50 + \sqrt{D}}{0.30 + \sqrt{D}} = \frac{0.50 + \sqrt{0.1}}{0.30 + \sqrt{0.1}} = \frac{0.816}{0.616} \approx 1.3247 \right],$$

(que puede comprobarse en la tabla 1.3 del Anexo nº: 3 del Apéndice del manual relacionado, con un valor:  $\alpha_2 = 1.324555$ ), y si se prueba con un grado de rugosidad de  $k = 1.5$ , se tiene para la expresión de la pérdida continua unitaria de

carga que aquí se propone (ver Cap. 4, tabla 4.10 del manual antedicho) un valor de:

$$J = \frac{0.000845 \times V_m^2}{\alpha_2 \times D^{1.256}} = \frac{0.000845 \times 0.745^2}{1.324555 \times 0.1^{1.256}} = 0.0064 \cong 0.0066 \text{ m/m},$$

por lo que se trataría de una tubería de rugosidad intermedia entre las de plástico ( $k = 1$ ) y las de fibrocemento ( $k = 2$ ). En cualquier caso, el diámetro interior comercial estricto de 100 mm únicamente existe para los tubos de este último material (FIB).

Así mismo, veamos que el régimen hidráulico es variable con la velocidad descendente que tiene lugar a lo largo del tubo, aunque para una temperatura media supuesta del agua de 20° C, con una viscosidad cinemática correspondiente de:  $\nu = 1.0164 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ( $1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ stokes}$ ), que se deduce de la aplicación de nuestro ajuste mínimocuadrático no lineal (Franquet, 2003):

$$\begin{aligned} \nu &= (1.7224 - 0.0461 \cdot t + 0.0006 \cdot t^2 - 0.000003 \cdot t^3) \times 10^{-6} = \\ &= (1.7224 - 0.922 + 0.24 - 0.024) \times 10^{-6} = 1.0164 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 1.0164 \text{ cSt}, \end{aligned}$$

y se obtiene un número de Reynolds medio de:

$$Re = \frac{V_m \times D}{\nu} = \frac{0.745 \times 0.1}{1.0164 \times 10^{-6}} = 73298,$$

que se corresponde, efectivamente, a un régimen hidráulico turbulento liso ( $4 \times 10^3 < Re < 10^5$ ). En tal caso, se tendrían los siguientes valores del coeficiente de fricción en base a las formulaciones generalmente empleadas al caso y la nuestra propia (Franquet, 2019):

- Según Blasius:  $f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} = \frac{0.3164}{73298^{0.25}} = 0.0192$
- **Según Franquet:**  $f = \frac{1.32556}{(0.875 \times \ln Re - 1.495647)^2} = 0.0192$
- Según Kozeny:  $f = \frac{2g}{(7.78 \times \log Re - 5.95)^2} = 0.0193$
- Según Colebrook – White:  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \cdot \log(Re \sqrt{f}) - 0.8$ , o mejor aún en su aproximación explícita:  $f = \frac{0.835}{(\log Re)^{2.38}} = 0.0193$ ,

hallándose las cuatro determinaciones anteriores muy próximas, por defecto, a la inicialmente supuesta de  $f = 0.020$ , dada en el enunciado del problema planteado, por lo que se considera completamente aceptable.

El estudio del régimen hidráulico de la tubería en cuestión exigiría el cálculo del nº Re en cada lugar de la misma. Para ello elaboraremos el siguiente cuadro y la gráfica correspondiente a los 6 valores siguientes:

$Q_0 \rightarrow 0.0100 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow V_0 = \frac{4 \times 0.01}{\pi \times 0.1^2} = 1.27 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re} = 124951$	}	R.T.I.
$Q_1 \rightarrow 0.0083 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow V_1 = \frac{4 \times 0.0083}{\pi \times 0.1^2} = 1.06 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re} = 104290$		
$Q_2 \rightarrow 0.0067 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow V_2 = \frac{4 \times 0.0067}{\pi \times 0.1^2} = 0.85 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re} = 83628$	}	R.T.L.
$Q_3 \rightarrow 0.0050 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow V_3 = \frac{4 \times 0.005}{\pi \times 0.1^2} = 0.64 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re} = 62967$		
$Q_4 \rightarrow 0.0033 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow V_4 = \frac{4 \times 0.0033}{\pi \times 0.1^2} = 0.42 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re} = 41322$		
$Q_5 \rightarrow 0.0017 \text{ m}^3/\text{s} \rightarrow V_5 = \frac{4 \times 0.0017}{\pi \times 0.1^2} = 0.21 \text{ m/s} \rightarrow \text{Re} = 20661$		

, siendo  $Q_5 = Q'$ , R.T.I. (Régimen Turbulento Intermedio) y R.T.L. (Régimen Turbulento Liso).

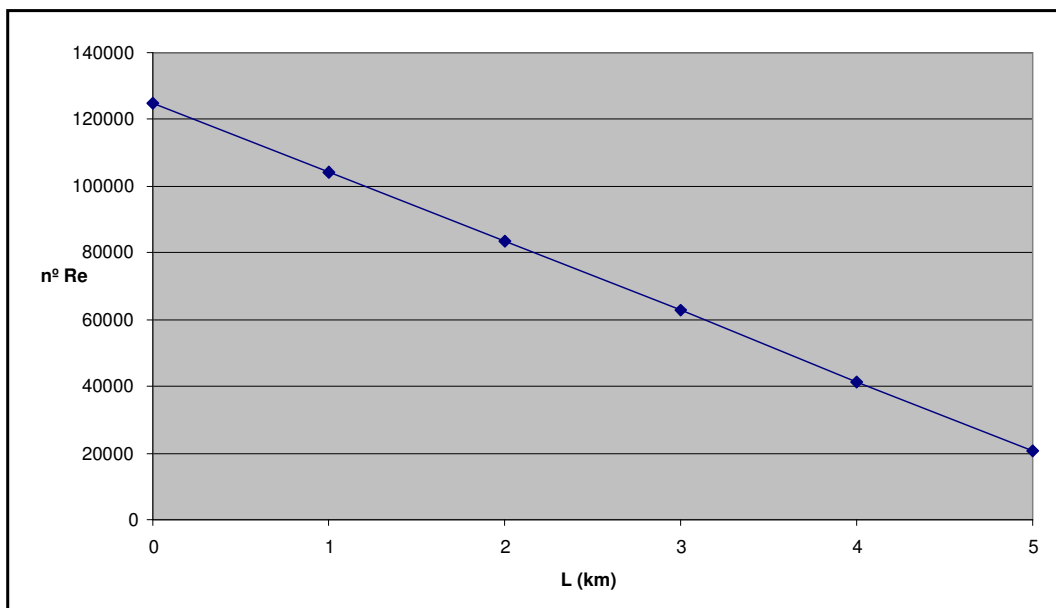


Fig. 5. Función  $\text{Re} = f(L)$ .

Del mismo modo, también se podría estudiar la función tridimensional del tipo:  $\text{Re} = f(t, L)$ .

Veamos ahora que, como consecuencia de las tablas correspondientes de disminución de la capacidad portante (ver Apéndice del manual antedicho de Franquet, tablas 2.5. y 2.6. del Anexo nº: 3) para cada material constitutivo de ambos tipos de tubería, tendremos que, en el caso de la tubería de fibrocemento, la trayectoria temporal del caudal considerando una vida útil de  $t_u = 50$  años será:



Tabla 3. Evolución de la pérdida del caudal (fibrocemento).

t (años)	Q <sub>0</sub>	Q'	q·l	Δ = Q <sub>0</sub> - Q <sub>t</sub>
0	10.00	1.67	8.33	0
5	10.00	1.67	8.33	0
10	10.00	1.67	8.33	0
15	10.00	1.67	8.33	0
20	9.42	1.57	7.85	0.58
25	8.86	1.48	7.38	1.14
30	8.30	1.38	6.92	1.70
35	7.74	1.29	6.45	2.26
40	7.17	1.20	5.97	2.83
45	6.61	1.10	5.51	3.39
50	6.05	1.01	5.04	3.95

Fuente: elaboración propia.

, a la que corresponde el siguiente gráfico:

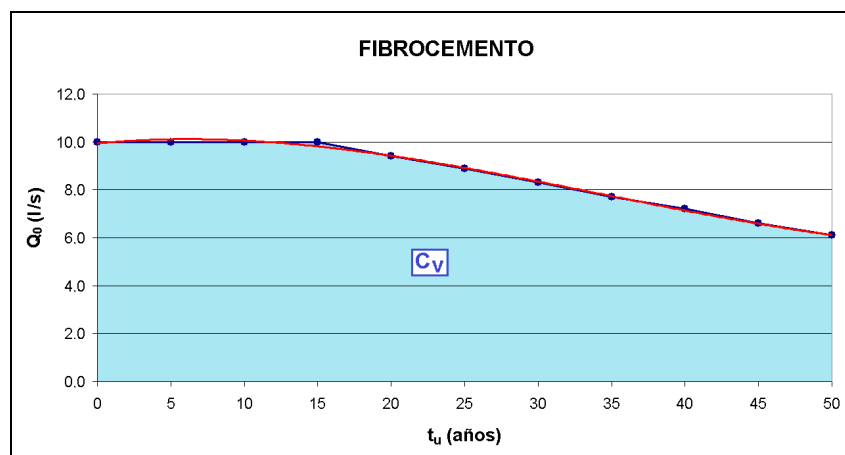


Fig. 6. Función de envejecimiento y C<sub>v</sub> (fibrocemento).

, con una capacidad volumétrica (Franquet, 2019) de:

$$C_{v1} \cong 10.00 \times 15 + \frac{10.00 + 6.05}{2} \times 35 = 430.875,$$

y un caudal medio en el periodo analizado de:  $Q_m = \frac{430.875}{50} = 8.61751/s.$

Ello implica una capacidad volumétrica real de esta tubería de:

$C_{v1} = (8.6175/ l/s \times 50 \text{ años} \times 365.25 \text{ días/año} \times 24 \text{ h/día} \times 3600 \text{ s/h})/10^9 \cong$   
 $\cong 13.60 \text{ hm}^3 \text{ de agua. La eficiencia volumétrica de esta tubería (Franquet, 2019)}$   
 vendrá dada por la expresión:

$$E_{v1} = \frac{C_{v1}}{Q_0 \times t_u} \times 100 = \frac{430.875}{10 \times 50} \times 100 = 86.18\%$$

Por otra parte, en el caso de la tubería de plástico se tendrá:

Tabla 4. Evolución de la pérdida del caudal (plástico).

t (años)	Q <sub>0</sub>	Q'	q·l	Δ = Q <sub>0</sub> - Q <sub>t</sub>
0	10.00	1.67	8.33	0
5	10.00	1.67	8.33	0
10	10.00	1.67	8.33	0
15	10.00	1.67	8.33	0
20	10.00	1.67	8.33	0
25	9.49	1.58	7.91	0.51
30	8.89	1.48	7.41	1.11
35	8.29	1.38	6.91	1.71
40	7.69	1.28	6.41	2.31
45	7.08	1.18	5.90	2.92
50	6.48	1.08	5.40	3.52

Fuente: elaboración propia.

, a la que corresponde el siguiente gráfico:

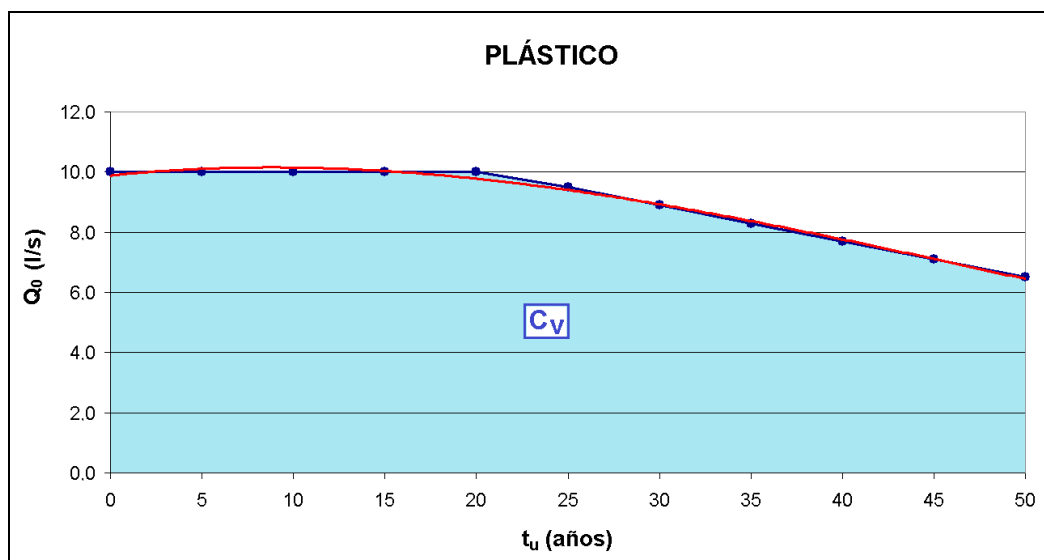


Fig. 7. Función de envejecimiento y C<sub>v</sub> (plástico).

, con una capacidad volumétrica de:

$$C_{v2} \cong 10.00 \times 20 + \frac{10.00 + 6.48}{2} \times 30 = 447.20,$$

y un caudal medio en el periodo analizado de:  $Q_m = \frac{447.2}{50} = 8.944 \text{ l/s}$ .

Ello implica una capacidad volumétrica real de esta tubería de:

$$C_{v2} = (8.944 \text{ l/s} \times 50 \text{ años} \times 365.25 \text{ días/año} \times 24 \text{ h/día} \times 3600 \text{ s/h})/10^9 \equiv \\ \equiv 14.11 \text{ hm}^3 \text{ de agua.}$$

La eficiencia volumétrica de esta tubería vendrá dada por:

$$E_{v2} = \frac{C_{v2}}{Q_0 \times t_u} \times 100 = \frac{447.2}{10 \times 50} \times 100 = 89.44\% .$$

La diferencia entre las eficiencias volumétricas de ambas tuberías resulta ser de 3.26% a favor de la de plástico.

Por otra parte, la diferencia entre las capacidades volumétricas reales de ambas funciones de envejecimiento será la siguiente:

$$\Delta(q_1, q_2) = |C_{v1} - C_{v2}| = |13.60 - 14.11| = 0.51 \text{ hm}^3 = 510000 \text{ m}^3 \text{ de agua.}$$

Como cabía esperar, en este caso el rendimiento volumétrico de la segunda tubería posible (plástico) resulta superior al de la primera (amianto-cemento) en un:  $\frac{14.11 - 13.60}{13.60} \times 100 = 3.75\%$ , lo que la hace algo más aconsejable de cara al diseño de la instalación, aunque este cálculo, como también se ha dicho antes, debería ser completado con la intervención de factores sanitarios y económicos de coste, tanto por lo que se refiere a la instalación inicial como en el mantenimiento ulterior, antes de tomar una decisión definitiva.

Por último, veamos que una “medida de la concentración” de la variable hidráulica en estudio (capacidad volumétrica  $C_v$ ) lo constituye el índice de Gini y la correspondiente curva poligonal de Lorenz, así como el “índice de Lorenz”, cuyo significado y operatoria se especifican en Franquet (2019). Cuanto menor sea el valor de dichos índices mejor y más uniforme será también la capacidad volumétrica de la tubería a lo largo de toda su vida útil, por lo que consideramos altamente interesante su determinación, como también lo es a efectos comparativos con otra clase de tubería que interese instalar en la fase de proyecto o de ejecución de la obra.

En base a ello, y teniendo en cuenta la disyuntiva aquí planteada entre la elección de la tubería de plástico y la de amianto-cemento, debemos elaborar las siguientes tablas:

Tabla 5. Auxiliar de cálculo (fibrocemento).

$t_i$	$Q_0$	$C_v$	$\Sigma C_v$	$\frac{t_i}{\Sigma t} \times 100$	$p_i(\%)$	$\frac{C_v}{\Sigma C_v} \times 100$	$q_i(\%)$	$ p_i - q_i $	
0	10.00	0	0	0	0	0	0	0	
5	10.00	50.00	50.00	10	10	11.61	11.61	1.61	
10	10.00	50.00	100.00	10	20	11.61	23.22	3.22	
15	10.00	50.00	150.00	10	30	11.61	34.83	4.83	
20	9.42	48.55	198.55	10	40	11.27	46.10	6.10	
25	8.86	45.70	244.25	10	50	10.61	56.71	6.71	
30	8.30	42.90	287.15	10	60	9.96	66.67	6.67	
35	7.74	40.10	327.25	10	70	9.31	75.98	5.98	
40	7.17	37.28	364.53	10	80	8.67	84.65	4.65	
45	6.61	34.45	398.98	10	90	8.00	92.65	2.65	
50	6.05	31.65	430.63	10	100	7.35	100	0	
$\Sigma$	275	-	430.63	$\cong$ 430.875	100 %	550	100 %	592.42	42.42

Fuente: elaboración propia.

Así pues, según la formulación dada por Pulido (Alcaide, 1973), el valor del índice de Gini, en este caso, será:

$$G_1 = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{K-1} p_i} = \frac{42.42}{450} = 0.0943 \cong 9.43 \%,$$

con su correspondiente representación gráfica:

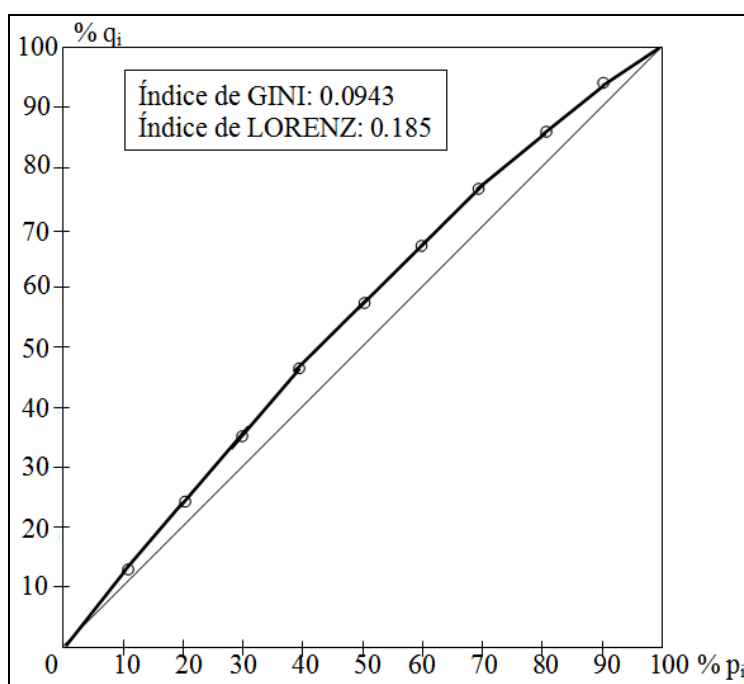


Fig. 8. Curva de Lorenz (fibrocemento).

Tabla 6. Auxiliar de cálculo (plástico).

$t_i$	$Q_0$	$C_v$	$\Sigma C_v$	$\frac{t_i}{\Sigma t} \times 100$	$p_i(\%)$	$\frac{C_v}{\Sigma C_v} \times 100$	$q_i(\%)$	$ p_i - q_i $	
0	10.00	0	0	0	0	0	0	0	
5	10.00	50.00	50.00	10	10	11.15	11.15	1.15	
10	10.00	50.00	100.00	10	20	11.15	22.30	2.30	
15	10.00	50.00	150.00	10	30	11.15	33.45	3.45	
20	10.00	50.00	200.00	10	40	11.15	44.60	4.60	
25	9.49	48.73	248.73	10	50	10.86	55.46	5.46	
30	8.89	45.95	294.68	10	60	10.25	65.71	5.71	
35	8.29	42.95	337.63	10	70	9.58	75.29	5.29	
40	7.69	39.95	377.58	10	80	8.91	84.20	4.20	
45	7.08	36.93	414.51	10	90	8.24	92.44	2.44	
50	6.48	33.90	448.41	10	100	7.56	100	0	
$\Sigma$	275	-	448.41	$\cong$ 430.875	100 %	550	100 %	584.60	34.60

Fuente: elaboración propia.

Así pues, según la formulación dada por Pulido (Alcaide, 1973), el valor del índice de Gini, en este caso, será:

$$G_2 = \frac{\sum_{i=1}^{K-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{K-1} p_i} = \frac{34.60}{450} = 0.0769 \cong 7.69 \%, \text{ correspondiéndole la gráfica:}$$

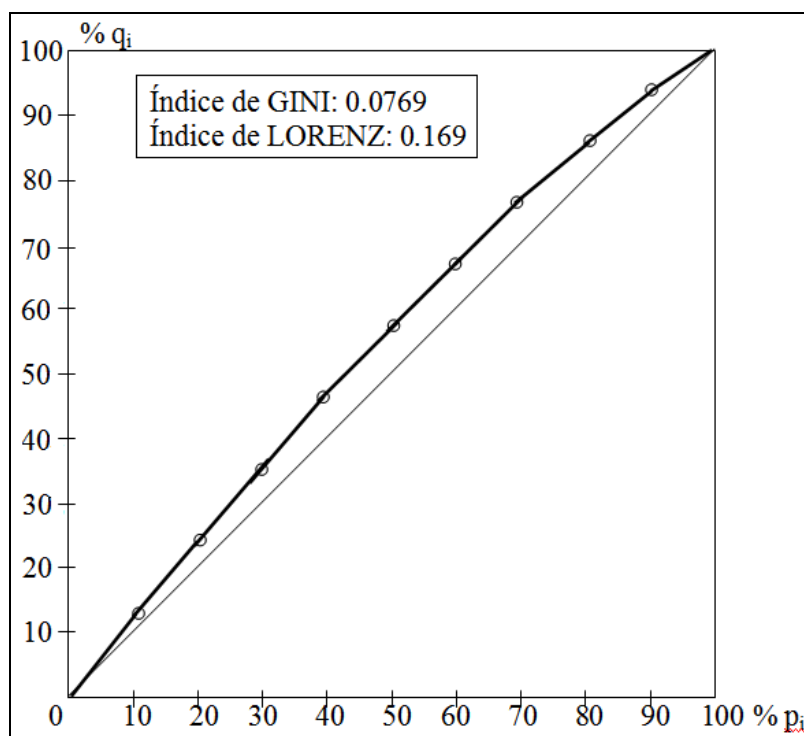


Fig. 9. Curva de Lorenz (plástico).

Ello pone de manifiesto la más uniforme distribución de los valores de la  $C_v$  a lo largo del tiempo de su vida útil en el caso de la tubería de plástico (como era de esperar), puesto que:  $G_2 < G_1$ .

Otro índice de aplicación al caso (Franquet, 2019) es el denominado “índice de concentración de Lorenz”, que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que se emplea comúnmente en los trabajos prácticos de Economía, relacionada también en el siguiente capítulo de esta misma obra. Aquí, con  $n = 11$  y  $q_n = 100$ , sucederá que:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=0}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{10} \times \frac{\sum_{i=0}^{10} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{10} q_i}{500} .$$

El resultado que ofrece la aplicación de la fórmula anterior es el siguiente, teniendo en cuenta que resulta necesario ordenar los valores de la variable hidráulica en estudio ( $C_v$ ) de menor a mayor, para la aplicación correcta de la fórmula, así:

Tabla 7. Auxiliar de cálculo (índice de Lorenz).

<b>FIBROCEMENTO</b>		<b>PLÁSTICO</b>	
$X_i$	$q_i$	$X_i$	$q_i$
0	0	0	0
7.35	7.35	7.56	7.56
8.00	15.35	8.24	15.80
8.67	24.02	8.91	24.71
9.31	33.33	9.58	34.29
9.96	43.29	10.25	44.54
10.61	53.90	10.86	55.40
11.27	65.17	11.15	66.55
11.61	76.78	11.15	77.70
11.61	88.39	11.15	88.85
11.61	100.00	11.15	100.00
$\Sigma$	100.00	100.00	515.40

Fuente: elaboración propia.

A estas distribuciones de probabilidad les corresponden, respectivamente, los siguientes índices de Lorenz:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_F = 1 - \frac{407.58}{500} = 0.185 \text{ (fibrocemento)} \\ L_P = 1 - \frac{415.40}{500} = 0.169 \text{ (plástico)} \end{array} \right.$$

cuyos resultados ( $L_P < L_F$ ) vienen a confirmar las determinaciones anteriormente efectuadas sobre el grado de concentración de la variable  $C_v$  en estudio para cada tubería alternativa<sup>4</sup>.

## 2. Tubería con pérdida discreta de caudal

El siguiente ejercicio, tomado de Cabrera *et al.* (1996), vol. II, p. 713 y ss., creemos resulta ilustrativo para contrastar algunos de los conceptos aquí expresados.

*Enunciado:*

Se pide diseñar, desde un punto de vista económico, el sistema de tres tuberías en serie de la figura siguiente para los caudales indicados en la misma, que constituye una conducción general, sabiendo que la presión mínima de servicio requerida en el extremo es de 23 m.c.a., suponiendo un factor de fricción constante<sup>5</sup>  $f = 0.015$ , común a todas las tuberías.

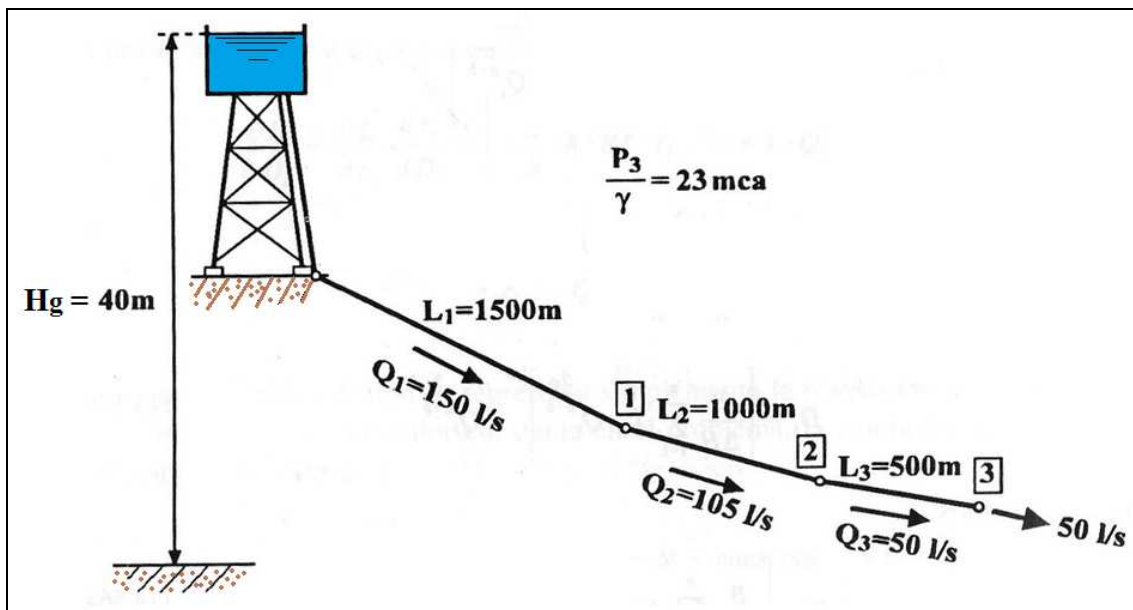


Fig. 10. Serie de tuberías a dimensionar.

*Solución:*

En primer lugar calcularemos de forma separada cada uno de los factores que aparecen en la expresión de la constante  $K$ . Consideremos el siguiente cuadro de precios de la tubería instalada y determinemos el exponente  $a$  de la

<sup>4</sup> En el presente ejercicio se ha tenido en cuenta que los diámetros interiores de los tubos resultan poco sensibles a pequeñas variaciones del factor de fricción  $f$ , a la vista del diagrama de Moody (1947). Por ello es posible tomar un valor intermedio para toda esta tubería de servicio en ruta que, según el enunciado, es de  $f = 0.020$ .

<sup>5</sup> Lo mismo puede afirmarse en este segundo ejercicio, en el que se considera un valor de  $f = 0.015$ .

ecuación de costes. Para cada tipo de tubería deberá establecerse la correspondiente ecuación de costes. Así, se ha determinado la siguiente tabla de precios unitarios de la tubería instalada de PVC de una presión de timbraje de 1 MPa (10 bar), incluida en la Fig. 11, para el abastecimiento de agua potable, con su correspondiente trazado:

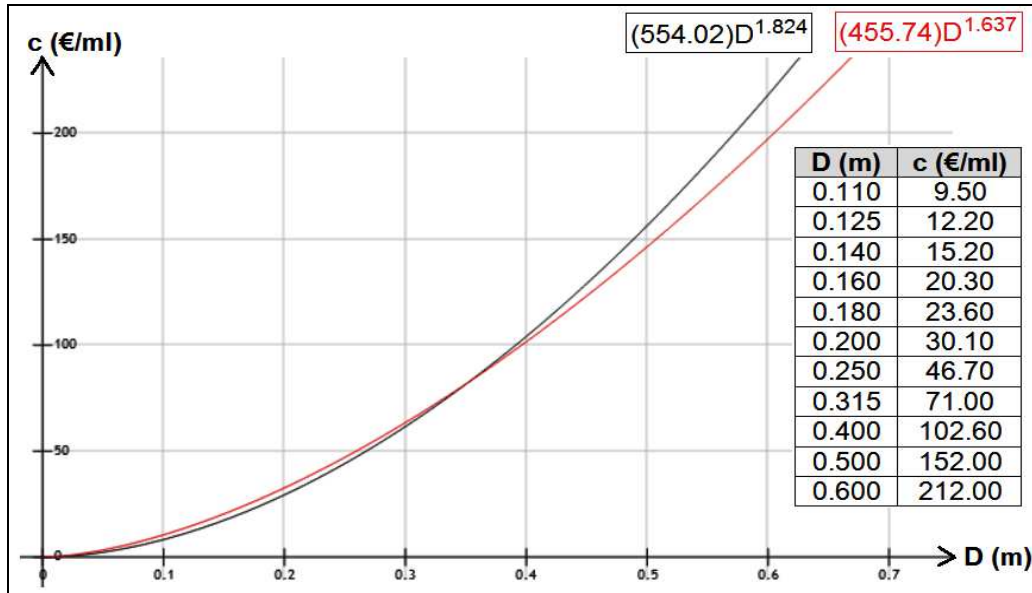


Fig. 11. Representaciones gráficas de las funciones  $c(D)$ .

habiéndose obtenido, en este caso, la ecuación potencial de costes por regresión mínimo cuadrática no lineal:  $c$  (€/ml) =  $554.02 \times D^{1.824}$  (el DN 600 mm es un promedio entre los comerciales DN 560 mm y DN 630 mm) con un coeficiente de correlación  $r = 0.999432$ , elevadísimo, por lo que pueden considerarse ambas correlaciones prácticamente perfectas.

En efecto, el estudio de otro caso más general, ha conducido a la siguiente determinación, de gran coincidencia con la anterior:

D (m)	0.150	0.175	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400
c (ptas/ml)	3392	4352	5546	7712	10670	13152	17342
c (€/ml)	20.39	26.16	33.33	46.35	64.13	79.05	104.23

de modo que la ecuación de costes ajustada por regresión no lineal (potencial) es:  $c = 75829 \times D^{1.637}$  ptas/ml, o bien:  $c = 455.74 \times D^{1.637}$  €/ml, con el coeficiente de correlación  $r = 0.999427$  (elevadísimo, como el anterior) de donde se deduce también que el valor:  $a = 1.637 > 1$ , por lo que los diámetros mayores son más caros relativamente. Ambos casos se han representado en la Fig. 11.

Por otro lado, de la ecuación de pérdidas se tiene:

$$B = \frac{8f}{\pi^2 g} = \frac{8 \times 0.015}{\pi^2 \times 9.807} = 0.00124 \quad ; \quad b = 5 \quad ;$$



mientras que la pérdida máxima admitida es:  $\Delta H = H_g - \frac{P_3}{\gamma} = 40 - 23 = 17$  m.c.a.

Finalmente obtenemos el valor del sumatorio:

$$\frac{2 \cdot a}{a + b} = \frac{2 \cdot 1.64}{1.64 + 5} = 0.5, \text{ y entonces:}$$

$$\sum_j L_j Q_j^{2a/(a+b)} = 1500 \cdot 0.15^{0.5} + 1000 \cdot 0.105^{0.5} + 500 \cdot 0.05^{0.5} = 1017.$$

Substituyendo ahora todo ello en la expresión K, resulta:

$$K = \left( \frac{B}{\Delta H} \sum_j L_j \cdot Q_j^{2a/(a+b)} \right)^{1/b} = \left( \frac{0.00124}{17} \times 1017 \right)^{1/5} = 0.594,$$

con lo que podemos proceder ya a efectuar el dimensionado. A la derecha de cada diámetro calculado figura el diámetro comercial normalizado definitivo.

$$\frac{2}{a + b} = \frac{2}{1.64 + 5} \approx 0.30, \text{ y entonces como: } D_j = K \times Q_j^{2/(a+b)}, \text{ se tiene que:}$$

$$\begin{cases} D_1 = K \cdot Q_1^{0.3} = 0.594 \cdot 0.15^{0.3} = 0.336 \text{ m} \Rightarrow D_1 = 350 \text{ mm.} \\ D_2 = K \cdot Q_2^{0.3} = 0.594 \cdot 0.105^{0.3} = 0.302 \text{ m} \Rightarrow D_2 = 300 \text{ mm.} \\ D_3 = K \cdot Q_3^{0.3} = 0.594 \cdot 0.05^{0.3} = 0.242 \text{ m} \Rightarrow D_3 = 250 \text{ mm.} \end{cases}$$

Para concluir, comprobemos la pérdida de carga real en la conducción correspondiente a los diámetros normalizados:

$$\Delta H = \sum_i R_i L_i Q_i^2 = B \sum_i L_i D_i^{-5} Q_i^2 = 0.00124 (1500 \cdot 0.35^{-5} \cdot 0.150^2 + 1000 \cdot 0.3^{-5} \cdot 0.105^2 + 500 \cdot 0.25^{-5} \cdot 0.05^2) = 15.18 \text{ m.c.a.,}$$

lo que nos da una presión residual de servicio real:

$$\frac{P_3^1}{\gamma} = H_g - \Delta H^1 = 40 - 15.18 = 24.82 \text{ m.c.a.} > 23 \text{ m.c.a.,}$$

que resulta ligeramente superior a la requerida, lo que resuelve eficazmente el problema planteado.

Otra manera de resolverlo en la práctica, prescindiendo del coste unitario de la tubería, sería la siguiente, considerando el cálculo para tubería de PVC en servicio, con un 15% de pérdidas accidentales de carga y un timbraje de 6 bar. Aplicando la fórmula o criterio conservador de Weyrauch (1915) a cada tramo, pasaría lo siguiente:

$$\begin{cases} \text{Tramo 1} \rightarrow D_1 = 1.04 \times \sqrt{Q_1} = 1.04 \times \sqrt{0.15} = 0.403 \text{ m (400} \times 11.7 \text{ mm)} \\ \text{Tramo 2} \rightarrow D_2 = 1.04 \times \sqrt{Q_2} = 1.04 \times \sqrt{0.105} = 0.337 \text{ m (355} \times 10.4 \text{ mm)} \\ \text{Tramo 3} \rightarrow D_3 = 1.04 \times \sqrt{Q_3} = 1.04 \times \sqrt{0.05} = 0.233 \text{ m (250} \times 7.3 \text{ mm)} \end{cases}$$

, y resultan tuberías de parecidos diámetros interiores, aunque no exactamente iguales (por resultar algo mayores), que las que se deducen del cálculo primeramente efectuado. La velocidad de cada tramo será:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{4 \times Q_1}{\pi \times D_1^2} = \frac{4 \times 0.15}{\pi \times 0.3766^2} = 1.35 \text{ m/s.} \\ V_2 = \frac{4 \times Q_2}{\pi \times D_2^2} = \frac{4 \times 0.105}{\pi \times 0.3342^2} = 1.20 \text{ m/s.} \\ V_3 = \frac{4 \times Q_3}{\pi \times D_3^2} = \frac{4 \times 0.05}{\pi \times 0.2354^2} = 1.15 \text{ m/s.} \end{cases}$$

y entonces, la pérdida de carga total, según la formulación aquí propuesta, considerando conjuntamente las pérdidas continuas y las singulares, será:

$$\begin{aligned} \Delta H' &= 1.15 \times 0.000743 (1.35^2 \times 0.3766^{-1.243} \times 1500 + 1.2^2 \times 0.3342^{-1.243} \times 1000 + \\ &+ 1.15^2 \times 0.2354^{-1.243} \times 500) = 1.15 \times 0.000743 (9203 + 5624 + 3992) = \\ &= 16.08 \text{ m.c.a.,} \end{aligned}$$

con lo que en el extremo de la tubería habrá una presión de servicio de:

$$H = H_g - \Delta H' = 40.00 - 16.08 = 23.92 > 23.00 \text{ m.c.a., luego es aceptable.}$$

La presunción -que figura en el enunciado- de un factor de fricción común en toda la tubería de  $f = 0.015$  constituye, sin duda, una simplificación del problema (de hecho, como veremos a continuación, solo se cumple en el tercer tramo de la misma). En efecto, suponiendo una temperatura media del agua de 20°C, se tendrá una viscosidad cinemática de:

$$\begin{aligned} \nu &= (1.7224 - 0.0461 \cdot t + 0.0006 \cdot t^2 - 0.000003 \cdot t^3) \times 10^{-6} = \\ &= (1.7224 - 0.922 + 0.24 - 0.024) \times 10^{-6} = 1.0164 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 1.0164 \text{ cSt.} \end{aligned}$$

- Tramo 1: 
$$Re = \frac{V_1 \times D_1}{\nu} = \frac{1.35 \times 0.3766}{1.0164 \times 10^{-6}} = 500207,$$

luego se trata de un régimen turbulento intermedio o de transición. Como aquí se tiene  $Re < 10^6$ , aplicaremos la fórmula aquí propuesta, con lo que:

$$f = 0.0028 + \frac{0.25 + 0.0905 \times 500207^{0.12}}{500207^{0.32}} = 0.013.$$

- Tramo 2: 
$$\text{Re} = \frac{V_2 \times D_2}{\nu} = \frac{1.20 \times 0.3342}{1.0164 \times 10^{-6}} = 394569 ,$$

luego se trata de un régimen turbulento intermedio o de transición. Como aquí se tiene  $\text{Re} < 10^6$ , aplicaremos la fórmula aquí propuesta, con lo que se tendrá un coeficiente de fricción de:

$$f = 0.0028 + \frac{0.25 + 0.0905 \times 394569^{0.12}}{394569^{0.32}} = 0.014 .$$

- Tramo 3: 
$$\text{Re} = \frac{V_3 \times D_3}{\nu} = \frac{1.15 \times 0.2354}{1.0164 \times 10^{-6}} = 266342 ,$$

luego se trata de un régimen turbulento intermedio o de transición. Como aquí resulta que  $\text{Re} < 10^6$ , aplicaremos la fórmula propuesta, con lo que:

$$f = 0.0028 + \frac{0.25 + 0.0905 \times 266342^{0.12}}{266342^{0.32}} = 0.015 .$$

## Conclusiones

El problema del estudio de una tubería a presión con toma intermedia y salida libre por su extremo aparece frecuentemente en los tratados y en las instalaciones hidráulicas. Se ha aplicado la teoría de la optimización clásica de funciones para la mejor comprensión del análisis efectuado. El tratamiento específico y generalizado cuando el número de salidas aumenta indefinidamente es objeto del presente trabajo, que también pone de manifiesto la utilidad de la función aproximada de Christiansen para la determinación de la pérdida de carga continua en este tipo de conducciones con servicio en ruta, salidas equidistantes y agotamiento del caudal. El trabajo culmina con la resolución de sendos casos prácticos de tuberías con tomas intermedias que se juzgan ilustrativos para contrastar algunos de los conceptos expresados.

## Referencias bibliográficas

- 1) ALCAIDE, A. (1973). *Estadística Económica*. Ed. SAETA. Madrid, 370 p.
- 2) CABRERA, E., ESPERT, V., GARCÍA-SERRA, J. y MARTÍNEZ, F. (1996). *Ingeniería Hidráulica (Aplicada a los Sistemas de Distribución de Agua). Volumen I y II*. Unidad Docente Mecánica de Fluidos. Ed. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 1168 p.
- 3) CHRISTIANSEN, J.E. (1942). "Irrigation by Sprinkling". *Bulletin* 670. University of California. College of Agriculture. Agricultural Experimental Station. Berkeley, California, 124 p. Recuperado de: <https://archive.org/details/irrigationbyspri670chri>
- 4) DARCY, H. y BAZIN, H. (1865). *Recherches hydrauliques entreprises par M. Henry Darcy continuées par M. Henri Bazin. Deuxième partie. Recherches expérimentales relatives au remous et à la propagation des ondes*. Tomo II. Paris, Imprimerie impériale.
- 5) FORCHHEIMER, P. (1935). *Tratado de hidráulica*. Ed. Labor, S.A. Barcelona, 1935-1950. 628 p.
- 6) FRANQUET BERNIS, J.M. (2003). *Cinco temas de hidrología e hidráulica*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya (UIC). Tortosa. 594 p.
- 7) FRANQUET BERNIS, J.M. (2005). *Cálculo hidráulico de las conducciones libres y forzadas (Una aproximación de los métodos estadísticos)*. Ed. Bibliográfica Internacional, S.L. – Universitat Internacional de Catalunya (UIC). Tortosa. 590 p.
- 8) FRANQUET BERNIS, J.M. (2019). *Dimensionamiento y distribución de las conducciones hidráulicas. Una contribución de la ingeniería matemática*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) – Centro Asociado de Tortosa (Campus del NE). Colección CADUP-Estudios. Tortosa. 964 p.
- 9) HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, J. y CRESPO MARTÍNEZ, A. (1996). *Problemas de mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*. UNED. Madrid.
- 10) MOODY, L.F. (1947). "An approximate formula for pipe friction factors". *Trans. ASME* 69(12), pp. 1005–1011.

11) TORRES SOTELO, J.E. (1970). *Apuntes de hidráulica general y agrícola. Primera y Segunda Parte*. Universidad Politécnica de Valencia. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Valencia.

12) WEYRAUCH, R. (1915). *Hydraulic Computation*. Stuttgart. Recuperado de: <https://www.dora.lib4ri.ch/eawag/islandora/object/eawag%3A13205/datastream/PDF/view>

\*\*\*\*\*

#### Relación de Tablas y Figuras:

- Tabla 1. Exponente del diámetro en  $J(Q,D)$  según diferentes autores.
- Tabla 2. Valor del exponente de  $D$  aplicable según las categorías de rugosidad adoptadas.
- Tabla 3. Evolución de la pérdida del caudal (fibrocemento).
- Tabla 4. Evolución de la pérdida del caudal (plástico).
- Tabla 5. Auxiliar de cálculo (fibrocemento).
- Tabla 6. Auxiliar de cálculo (plástico).
- Tabla 7. Auxiliar de cálculo (índice de Lorenz).

- Figura 1. Esquema del problema.
- Figura 2. Tubería con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal constante.
- Figura 3. Trayectoria de  $F$  según la formulación.
- Figura 4. Gráfico ( $Q_x - x$ ) en una cinta de riego.
- Figura 5. Función  $Re = f(L)$ .
- Figura 6. Función de envejecimiento y  $C_v$  (fibrocemento).
- Figura 7. Función de envejecimiento y  $C_v$  (plástico).
- Figura 8. Curva de Lorenz (fibrocemento).
- Figura 9. Curva de Lorenz (plástico).
- Figura 10. Serie de tuberías a dimensionar.
- Figura 11. Representaciones gráficas de las funciones  $c(D)$ .

#### **Dirección institucional del autor:**

*José María Franquet Bernis*  
Dr. Ingeniero Agrónomo  
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)  
Centro Asociado de Tortosa (Campus NE)  
C/ Cervantes, 17. 43500 Tortosa (Tarragona)  
[info@tortosa.uned.es](mailto:info@tortosa.uned.es)