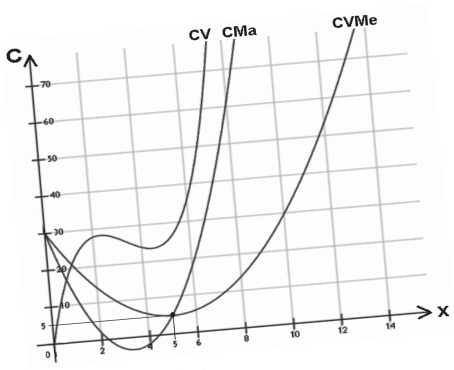
UNED TORTOSA

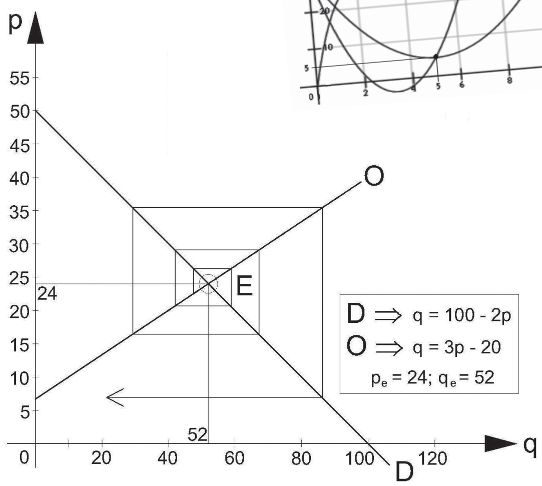
Cadup Estudios

Aplicaciones a la Economía de las ecuaciones infinitesimales y recurrentes

Josep Maria Franquet Bernis

CONTIENE CD





Economía y ADE

APLICACIONES A LA ECONOMIA DE LAS ECUACIONES INFINITESIMALES Y RECURRENTES

Economic applications of infinitesimal and recurrent equations

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
CENTRO ASOCIADO DE TORTOSA

APLICACIONES A LA ECONOMÍA DE LAS ECUACIONES INFINITESIMALES Y RECURRENTES

Economic applications of infinitesimal and recurrent equations

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

2014

Primera edición, octubre de 2014

e-mail: jfbernis@iies.es

ISBN-13: 978-84-938420-2-4
ISBN-10: 84-938420-2-8

Depósito Legal: T-1.417-2014

Edita: UNED-Tortosa. C/ Cervantes, 17 - 43500 TORTOSA
Imprime: **Gráfica Dertosense, S.L.**
C/ Cervantes, 21 - 43500 Tortosa.
Tel. 977 44 00 28
e-mail: graficadertosense@hotmail.com

Impreso en España
Printed in Spain

La publicación de este libro ha sido posible gracias al patrocinio de las siguientes instituciones:

Universidad Nacional de Educación a Distancia

Ajuntament de Tortosa

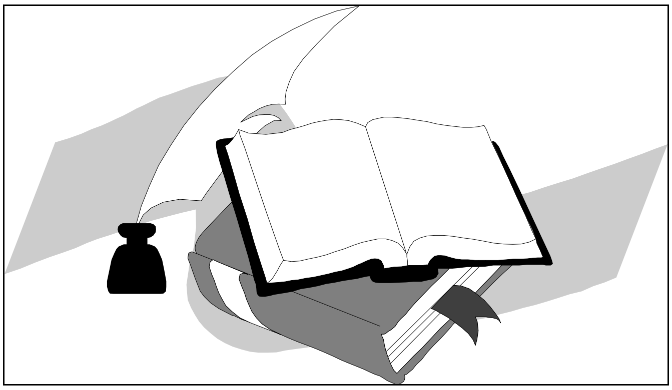
Diputació Tarragona

METROPOLIS SEGUROS

FUNDACIÓ CINCA-PIQUÉ TORTOSA

FUNDACIÓ PRIVADA DURAN&MARTÍ

How can it be that mathematics, being after all a product of human thought independent of experience, is so admirably adapted to the objects of reality? Albert Einstein (1879-1955).



PRÓLOGO

El libro que ahora te presentamos, amable lector o lectora, está pensado esencialmente para los programas de especialización en modelos matemáticos correspondientes a un curso anual de Master o Doctorado de las Facultades de Economía y Administración y Dirección de Empresas de nuestras Universidades, aunque también de Ingeniería, por lo que se refiere al estudio y resolución de las ecuaciones infinitesimales y en diferencias finitas o recurrentes, ambas de provechosas aplicaciones en la ciencia económica, así como el cálculo variacional. Los métodos matemáticos avanzados que se emplean en este libro son también muy útiles en otras áreas del Análisis Económico y su manejo resultará especialmente interesante a la hora de cursar otras disciplinas propias de aquellas carreras, como por ejemplo la Teoría Económica y la Econometría.

Desde luego, tanto las ecuaciones diferenciales e integrales o integro-diferenciales como las recurrentes tienen una amplia aplicación en la Economía, así como sus sistemas o conjuntos de ecuaciones simultáneas. Se utilizan tanto para determinar las condiciones de estabilidad dinámica en modelos microeconómicos de equilibrios de mercado como para trazar la trayectoria de tiempo de crecimiento, en diversas condiciones macroeconómicas. Dado el índice de crecimiento de una función, las ecuaciones diferenciales permiten, por ejemplo, encontrar la función cuyo crecimiento se describe; a partir de la elasticidad de un punto, permiten también estimar la función de la demanda.

La teoría de la perturbación o la de la estabilidad estructural están enfocadas al análisis de los cambios que se producen en las soluciones cuando se modifica la estructura del problema. Del mismo modo que los métodos de resolución para las ecuaciones en diferencias guardan una gran similitud con los existentes para ecuaciones diferenciales, la teoría de la estabilidad transcurre en ambos contextos por cauces paralelos. Y así, la condición de Schur constituye una réplica para las ecuaciones en diferencias finitas de la condición de Routh-Hurwitz introducida previamente para las ecuaciones diferenciales.

Conceptualmente hablando, sin embargo, la teoría de las ecuaciones diferenciales está más desarrollada que la de las ecuaciones en diferencias. Las relaciones existentes entre estos dos tipos de ecuaciones permiten exponer las teorías correspondientes siguiendo una línea similar para los dos tipos de análisis, continuo y discreto. En el caso lineal, se busca seguir un desarrollo paralelo entre los conceptos relativos a las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales. En el caso no lineal, el análisis de los sistemas discretos, por ejemplo, resulta mucho más complejo que el de los continuos.

Un problema que típicamente se presenta en Economía, y que resulta extensamente tratado en nuestra monografía, es el del análisis de la dinámica del precio de mercado, que puede efectuarse tanto desde la óptica de las ecuaciones diferenciales ordinarias como de las ecuaciones en diferencias finitas. En efecto, cuando partimos de un precio inicial de mercado $P(0)$ que no coincide con el precio de equilibrio P^*, se produce un proceso de ajuste que lleva el precio hacia su posición de equilibrio P^* a lo largo del tiempo. Pues bien, con frecuencia se plantea el siguiente problema: si el proceso de ajuste actúa un tiempo suficientemente grande ¿bajo qué condiciones tenderá dicho proceso a llevar el precio a su nivel de equilibrio? Resolveremos este problema planteando un modelo de ajuste temporal del precio que denominaremos "modelo de ajuste intertemporal walrasiano". La hipótesis básica en que descansa este modelo es que la tasa de cambio del precio, en cada instante, es proporcional al exceso de demanda. En este caso el proceso de ajuste implica que la demanda excedente hace subir los precios mientras que el exceso de oferta los hace bajar, por tanto, a largo plazo parece plausible que el precio alcance su valor de equilibrio. Una cualidad importante del precio de equilibrio, en fin, es su estabilidad, propiedad que indica cómo los precios convergen hacia el precio de equilibrio con independencia de las condiciones iniciales de que partan. Pues bien, ejemplos como éste se repiten, a menudo, en la ciencia económica y es preciso conocer las herramientas matemáticas necesarias para su correcta resolución.

Desde luego, tanto las ecuaciones infinitesimales (diferenciales, integrales e integro-diferenciales) y el cálculo de variaciones como las ecuaciones en diferencias poseen una amplia aplicación en la Economía. Así, en el primer caso señalamos como ejemplos más paradigmáticos el modelo de Harrod-Domar-Hicks, el análisis dinámico del modelo de Leontief, la teoría de los ciclos económicos, el modelo de Solow, los modelos poblacionales, el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio, etc. Por otra parte, entre los numerosos modelos en donde intervienen ecuaciones en diferencias finitas, de extendido uso en la Economía, podemos señalar el modelo de la telaraña, el modelo de Samuelson para la interacción multiplicador-acelerador, el modelo dinámico de Leontief en el caso discreto, las aplicaciones en el análisis de la estabilidad y convergencia al equilibrio, las aplicaciones en las matemáticas financieras, etc.

Una característica fundamental del análisis dinámico de la economía es la intervención de la variable tiempo. El tiempo puede intervenir en forma continua o discreta utilizándose diferentes herramientas matemáticas según sea el caso respectivo (ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias). Desde el punto de vista matemático, si el tiempo es considerado como variable continua, la expresión del cambio temporal constituye una ecuación diferencial. Su resolución e imposición de condiciones de contorno permite obtener la función correspondiente. A partir del análisis de la teoría de las ecuaciones diferenciales se da respuesta a modelos de la teoría económica que requieren un análisis dinámico y se fundamenta la interpretación económica de los modelos a la luz de la teoría matemática. Otro tanto podríamos afirmar acerca de las ecuaciones recurrentes.

Hay que observar que en el análisis económico se utiliza el término "dinámico" para hacer referencia a un tipo de análisis cuyo objeto general es determinar las trayectorias temporales de ciertas variables y estudiar su convergencia a ciertos valores. Este tipo de análisis permite investigar la accesibilidad del estado de equilibrio, la cual se da por supuesta cuando se aplica un análisis estático o estático-comparativo. Mediante un análisis dinámico se estudia la trayectoria temporal de alguna variable en base a una forma conocida de cambio en el tiempo. Esta trayectoria queda perfectamente determinada a partir de unas condiciones iniciales o de contorno**.** Desde el punto de vista económico, que el tiempo sea una variable discreta quiere decir que sólo nos interesa lo que sucede al final de cada período de manera que toda la actividad económica relevante estará concentrada en un determinado instante temporal, al final de un período que es también el comienzo del siguiente. Si el tiempo actúa como una variable continua indica que "sucede algo" en cada instante.

Cada capítulo práctico viene precedido por otros con una serie de conocimientos teóricos, relativamente escuetos, que, a guisa de recordatorio, proporcionan al lector una referencia sucinta de todos aquellos conceptos, definiciones, proposiciones, lemas, teoremas, demostraciones, formulaciones y demás elementos teóricos indispensables -aunque no siempre suficientes- para la correcta resolución de los ejercicios prácticos que se proponen. Con ello, el lector podrá comprobar, de forma inmediata, que los ejercicios poseen un elevado nivel de detalle en su desarrollo resolutivo, pretendiéndose con ello patentizar la necesaria relación existente entre éstos y los conocimientos teóricos aludidos, puesto que dichos ejercicios constituyen un medio poderoso de adquisición y de consolidación de los expresados conocimientos. Eso sí, como siempre, todos aquellos errores que puedan aparecer en el texto serán de responsabilidad exclusiva de este autor.

De cualquier manera, y pese al elevado número de ejemplos que se ha pretendido cubrir, es sin duda la práctica profesional la que hará surgir problemas nuevos a los que habrá que enfrentarse y resolver con rigor científico a través de nuestros propios conocimientos. Esa labor se verá facilitada, en gran medida, merced al esfuerzo llevado a cabo para resolver el mayor número posible de ejercicios de cada tema; por esa razón no hemos querido tampoco escatimar su cantidad y diversidad. Y es que el cultivo del mecanismo abstracto no deja huella útil alguna si no va acompañado del ejercicio de las facultades de abstracción y concreción a los problemas reales y de interpretación práctica de sus resultados. Tal es el carácter que no hemos querido obviar, en ningún momento, en la presente monografía matemática.

Por otra parte, en aquellas cuestiones que, a juicio de este autor entrañan alguna mayor utilidad o dificultad, se insiste mediante ejercicios sucesivos con el objetivo de conseguir, de tal suerte, que el estudioso termine por conocer bien la materia pertinente. Algunos ejercicios se ilustran con una pequeña exposición teórica para facilitar su resolución, mientras otros tienen como finalidad el demostrar alguna propiedad relevante. Hay que tener en cuenta también que, en los últimos años, la aparición de computadoras de bajo costo y alta velocidad, con el *software* adecuado, ha dado lugar a nuevas técnicas de resolución que permiten modelar y resolver problemas complejos basados en sistemas de ecuaciones. Concretamente, algunas de las numerosas representaciones gráficas que aparecen en el libro, como reflejo visual de la resolución de los ejercicios, han sido elaboradas con la ayuda del excelente sistema computerizado de álgebra *Wolfram Alpha Mathematica* fabricado por *Wolfram Research, Inc*. (http://www.wolfram.com/). Con este paquete, los usuarios "interactúan" de modo robusto. Entre sus muchas habilidades cuenta con una notable biblioteca de funciones clásicas (polinomios de Hermite, polinomios de Laguerre, …), resuelve integrales y ecuaciones diferenciales y en diferencias lineales así como sus sistemas, y sus gráficas ilustran poderosamente tanto curvas como superficies.

Al final del trabajo se incluye una lista de referencias bibliográficas de la que debo advertir, como suele suceder, que son todos los que están pero, evidentemente, que no están todos los que son. La selección ha sido hecha por gusto personal del autor y por aproximación al nivel del texto. Algunas de ellas, sin duda, serían la continuación natural de estas lecciones. Por cierto que, desde estas líneas, y en el marco limitado de estas reflexiones, quiero rendir tributo sincero de admiración y agradecimiento a los excelentes libros de texto y consulta existentes, citados en la bibliografía, sobre las materias objeto de tratamiento, habiendo sido influido notablemente, en mis estudios, por el brillante trabajo de sus autores.

Observarán, en fin, que algunas notas a pie de página han sido escritas en lengua inglesa. Con ello deseamos contribuir (¡también desde las matemáticas aplicadas a la Economía!) a las nuevas tendencias de la educación, y cuya justificación ya fue realizada extensamente en el Prólogo de nuestro anterior libro titulado *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas (curso práctico)*, editado también bajo los auspicios del Centro Asociado en Tortosa de la UNED, del cual el que ahora presentamos constituye la continuación natural desde el punto de vista de las aplicaciones económicas.

A lo largo de cualquier trabajo científico, como el que ahora ofrecemos, se acumula toda una serie de débitos intelectuales y profesionales que resulta harto difícil describir en toda su extensión; pese a ello, algunos me parecen especialmente relevantes. Tampoco olvida, quien esto escribe, la formidable deuda de gratitud contraída con los que fueron sus guías y maestros, algunos de ellos ya desaparecidos. Mi reconocimiento, en fin, a las diversas instituciones que han apoyado la edición del presente libro y, particularmente, al Patronato del Centro Asociado en Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), a la imprenta Gráfica Dertosense, S.L. por el cuidadoso esmero puesto en la edición de la obra, a mi competente compañera en las tareas docentes universitarias, Mª Teresa Sancho, por la traducción al inglés del presente prólogo, al Dr. Jordi Sardà por sus acertadas observaciones y, en general, a todos cuantos se han interesado por la elaboración de esta monografía, aportando sugerencias y valiosos consejos dirigidos a la mejor consecución de nuestro empeño. Muy particularmente, quisiera agradecer a José María Franquet Jr. (¡cuántas horas!) su farragoso trabajo de composición y tratamiento del texto, labor ésta no siempre fácil cuando se trata del manejo del lenguaje matemático.

Tortosa, agosto de 2014
EL AUTOR

PRÒLEG

El llibre que ara et presentem, amable lector o lectora, està adreçat essencialment als programes d'especialització en models matemàtics corresponents a un curs anual de Màster o Doctorat de les Facultats d'Economia i Administració i Direcció d'Empreses de les nostres Universitats, encara que també d'Enginyeria, pel que es refereix a l'estudi i resolució de les equacions infinitesimals i en diferències finites o recurrents, ambdues de profitoses aplicacions a la ciència econòmica, així com el càlcul variacional. Els mètodes matemàtics avançats que s'empren en aquest llibre són també molt útils en altres àrees de l'Anàlisi Econòmic i el seu maneig resultarà especialment interessant a l'hora de cursar altres disciplines pròpies d'aquelles carreres, com per exemple la Teoria Econòmica i l'Econometria.

Per descomptat, tant les equacions diferencials i integrals o integro-diferencials com les recurrents tenen una àmplia aplicació a l'Economia, així com llurs sistemes o conjunts d'equacions simultànies. S'empren tant per determinar les condicions d'estabilitat dinàmica en models microeconòmics d'equilibris de mercat com per traçar la trajectòria de temps de creixement en diverses condiciones macroeconòmiques. Donat l'índex de creixement d'una funció, les equacions diferencials permeten, per exemple, trobar la funció que descriu el seu creixement; a partir de l'elasticitat d'un punt, permeten estimar la funció de la demanda.

La teoria de la pertorbació o la de l'estabilitat estructural estan enfocades a l'anàlisi dels canvis que es produeixen en les solucions quan es modifica l'estructura del problema. De la mateixa manera que els mètodes de resolució per a les equacions en diferències finites guarden una gran similitud amb les existents per a equacions diferencials, la teoria de l'estabilitat transcorre en ambdós contexts per lleres paral·leles. I així, la condició de Schur constitueix una rèplica per a les equacions en diferències finites de la condició de Routh-Hurwitz introduïda prèviament per a les equacions diferencials.

Conceptualment parlant, no obstant això, la teoria de les equacions diferencials està més desenvolupada que la de les equacions en diferències. Les relacions existents entre aquests dos tipus d'equacions permeten exposar les teories corresponents tot seguint una línia similar per als dos tipus d'anàlisis, continu i discret. En el cas lineal, es busca seguir un desenvolupament paral·lel entre els conceptes relatius a les equacions en diferències i les equacions diferencials. En el cas no lineal, l'anàlisi dels sistemes discrets, per exemple, resulta molt més complex que els continus.

Un problema que típicament es presenta a l'Economia, i que resulta extensament tractat a la nostra monografia, és el de l'anàlisi de la dinàmica del preu de mercat, que pot efectuar-se tant des de l'òptica de les equacions diferencials ordinàries com de les equacions en diferències finites. En efecte, quan partim d'un preu de mercat $P(0)$ que no coincideix amb el preu d'equilibri P^*, es produeix un procés d'ajustament que porta el preu cap a la seva posició d'equilibri P^* al llarg del temps. Doncs bé, amb força freqüència es planteja el següent problema: si el procés d'ajustament actua un temps suficientment gran ¿sota quines condicions tendirà aquest procés a portar el preu al seu nivell d'equilibri? Resoldrem aquest problema plantejant un model d'ajustament temporal del preu que denominarem "model d'ajustament intertemporal walrasià". La hipòtesi bàsica en què descansa aquest model és que la taxa de canvi del preu, a cada instant, és proporcional a l'excés de demanda. En aquest cas, el procés d'ajustament implica que la demanda excedent fa pujar els preus mentre que l'excés d'oferta els fa baixar; per tant, a llarg termini sembla plausible que el preu assoleixi el seu valor d'equilibri. Una qualitat important del preu d'equilibri, a la fi, és la seva estabilitat, propietat que indica com els preus convergeixen cap el preu d'equilibri amb independència de les condicions inicials de què parteixin. Doncs bé, exemples como aquests es repeteixen, sovint, a la ciència econòmica i és precís conèixer les eines matemàtiques necessàries per la seva correcta resolució.

Per descomptat, tant les equacions infinitesimals i el càlcul de variacions com les equacions en diferències posseeixen una àmplia aplicació en l'Economia. Així, en el primer cas assenyalem, com a exemples més paradigmàtics, el model de Harrod-Domar-Hicks, l'anàlisi dinàmic del model de Leontief, la teoria dels cicles econòmics, el model de Solow, els models poblacionals, l'estudi de l'estabilitat dels punts d'equilibri, etc. D'altra banda, entre els nombrosos models on intervenen equacions en diferències finites, d'ampli ús a l'Economia, podem assenyalar el "model de la teranyina", el model de Samuelson per a la interacció multiplicador-accelerador, el model dinàmic de Leontief en el cas discret, les aplicacions en l'anàlisi de l'estabilitat i convergència a l'equilibri, les aplicacions en les matemàtiques financeres, etc.

Una característica fonamental de l'anàlisi dinàmic de l'economia és la intervenció de la variable temps. El temps pot intervenir en forma continua o discreta utilitzant-se diferents eines matemàtiques segons quin sigui el cas respectiu (equacions diferencials i equacions en diferències). Des del punt de vista matemàtic, si el temps es considera com a variable continua, l'expressió del canvi temporal constitueix una equació diferencial. La seva resolució i imposició de condicions de contorn permet d'obtenir la funció corresponent. A partir de l'anàlisi de la teoria de les equacions diferencials es dona resposta a models de la teoria econòmica que requereixen una anàlisi dinàmica i es fonamenta la interpretació econòmica dels models a la llum de la teoria matemàtica. Altrament podríem afirmar sobre les equacions recurrents.

Cal observar que en l'anàlisi econòmic s'utilitza el terme "dinàmic" per fer referència a un tipus d'anàlisi l'objecte general del qual és determinar les trajectòries temporals de certes variables i estudiar la seva convergència a certs valors. Aquest tipus d'anàlisi permet investigar l'accessibilitat de l'estat d'equilibri, la qual es dona per suposada quan s'aplica un anàlisi estàtic o estàtic-comparatiu. Mitjançant un anàlisi dinàmic s'estudia la trajectòria temporal d'alguna variable en base a una forma coneguda de canvi en el temps. Aquesta trajectòria queda perfectament determinada a partir d'unes condicions inicials o de contorn**.** Des del punt de vista econòmic, que el temps sigui una variable discreta vol dir que només ens interessa allò que succeeix al final de cada període, de manera que tota l'activitat econòmica rellevant estarà concentrada en un determinat instant temporal, al final d'un període que és també el començament del següent. Si el temps actua com una variable continua indica que "succeeix alguna cosa" a cada instant.

Cada capítol pràctic ve precedit per altres amb una sèrie de coneixements teòrics, relativament escarits que, a tall de recordatori, proporcionen al lector una referència succinta de tots aquells conceptes, definicions, proposicions, lemes, teoremes, demostracions, formulacions i endemés elements teòrics indispensables -encara que no sempre suficients- per a la correcta resolució dels exercicis pràctics que es proposen. Amb això, el lector podrà comprovar, de forma immediata, que els exercicis posseeixen un elevat nivell de detall en el seu desenvolupament resolutiu, pretenent-se amb això patentitzar la necessària relació existent entre aquests i els coneixements teòrics al·ludits, ja que aquests exercicis constitueixen un mitjà poderós d'adquisició i de consolidació dels expressats coneixements. Això sí, com sempre, tots aquells errors que puguin aparèixer en el text seran de responsabilitat exclusiva d'aquest autor.

De qualsevol manera, i malgrat l'elevat nombre d'exemples que s'ha pretès cobrir, és sense dubte la pràctica professional la que farà sorgir problemes nous als que haurà que enfrontar-se i resoldre amb rigor científic a través dels nostres propis coneixements. Aquesta labor es veurà facilitada, en gran mesura, mercès a l'esforç portat a terme per resoldre el major número possible d'exercicis de cada tema; per aquesta raó no hem volgut tampoc escatimar la seva quantitat i diversitat. I és que el cultiu del mecanisme abstracte no deixa petjada útil si no va acompanyat de l'exercici de les facultats d'abstracció i concreció als problemes reals i d'interpretació pràctica dels seus resultats. Tal és el caràcter que no hem volgut obviar, en cap moment, a la present monografia matemàtica.

D'altra banda, en aquelles qüestions que, a judici d'aquest autor comporten alguna major utilitat o dificultat, s'insisteix mitjançant exercicis successius amb l'objectiu d'aconseguir així que l'estudiós acabi per conèixer bé la matèria pertinent. Alguns exercicis s'il·lustren amb una petita exposició teòrica per tal de facilitar la seva resolució, mentre altres tenen com a finalitat el demostrar alguna propietat rellevant. Cal tenir en compte també que, en els últims anys, l'aparició de computadores de baix cost i alta velocitat, amb el *software* adequat, ha donat lloc a noves tècniques de resolució que permeten modelar i resoldre problemes complexos basats en sistemes d'equacions. Concretament, algunes de les nombroses representacions gràfiques que apareixen al llibre, com a reflex visual de la resolució dels exercicis, han estat elaborades amb l’ajuda de l’excel·lent sistema computeritzat d’àlgebra *Wolfram Alpha Mathematica* fabricat por *Wolfram Research, Inc.* (http://www.wolfram.com/). Amb aquest paquet, els usuaris “interactuen” de manera robusta. Entre les seves moltes habilitats compta amb una notable biblioteca de funcions clàssiques (polinomis de Hermite, polinomis de Laguerre, …), resol integrals i equacions diferencials i en diferències finites lineals així com llurs sistemes, i les seves gràfiques il·lustren poderosament tant corbes com superfícies.

Al final del treball s’inclou una llista de referències bibliogràfiques de la que cal advertir, com sol succeir, que són tots els que estan però, evidentment, que no estan tots els que són. La selecció ha estat feta per gust personal de l’autor i per aproximació al nivell del text. Algunes d’elles, sens dubte, serien la continuació natural d’aquestes lliçons. Per cert que, des d’aquestes línies, i en el marc limitat d’aquestes reflexions, vull rendir tribut sincer d’admiració i agraïment als excel·lents llibres de text i consulta existents, citats a la bibliografia, sobre les matèries objecte de tractament, havent estat influït notablement, en els meus estudis, pel brillant treball dels seus autors.

Observem, a la fi, que algunes notes a peu de plana han estat escrites en anglès. Amb això desitgem contribuir (també des de les matemàtiques aplicades a l’Economia!) a las noves tendències de l’educació; la justificació d’aquesta decisió ja fou realitzada al Pròleg del nostre anterior llibre titulat *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas (curso práctico)*, editat també amb el patrocini del Centre Associat a Tortosa de la UNED, i el que ara mateix publiquem n’és la continuació natural des del punt de vista de les seves aplicacions econòmiques.

Al llarg de qualsevol treball científic, com el que ara presentem, s’acumula tota una sèrie de dèbits intel·lectuals i professionals que resulta prou difícil descriure en tota la seva extensió; malgrat això, alguns em semblen especialment rellevants. Tampoc oblida, qui això escriu, el formidable deute de gratitud contret amb els qui foren els seus guies i mestres, alguns d’ells ja desapareguts. El meu reconeixement, a la fi, a les diverses institucions que han recolzat l’edició del present llibre i, particularment, al Patronat del Centre Associat en Tortosa de la Universitat Nacional d’Educació a Distància (UNED), a l’impremta *Gráfica Dertosense, S.L.* per l’acurada cura posada en l’edició de l’obra, a la meva competent companya en les tasques docents universitàries, Ma. Teresa Sancho, per la traducció a l’anglès d’aquest pròleg, al Dr. Jordi Sardà per llurs encertades observacions i, en general, a tots els que s’han interessat per l’elaboració d’aquesta monografia, aportant suggeriments i valuosos consells adreçats al millor assoliment del nostre objectiu. Molt particularment, vull agrair a Josep Maria Franquet Jr. (quantes hores!) el seu treball feixuc de composició i tractament del text, tasca aquesta no sempre fàcil quan es tracta del maneig del llenguatge matemàtic.

Tortosa, agost de 2014
L’AUTOR

PREFACE

The book presented to you herein, dear reader, is essentially intended for programs of specialization in mathematical models corresponding to an annual course of Master or doctorate at the faculties of Economics and Administration and Business Management of our Universities, but also engineering, regarding the study and resolution of infinitesimal equations and equations in finite or recurrent difference, both with many useful applications in economic science, as well as also the calculus of variations. The advanced mathematical methods employed in this book are also of great value in other areas of economic analysis and it will be of particular interest to those studying other disciplines of the above-mentioned degrees, such as Economic Theory and Econometrics.

Certainly, both differential and integral (or integro-differential) equations and recurrent equations have a wide application in Economy, as well as systems of equations or simultaneous equation sets. They are used to determine the conditions of dynamic stability in microeconomic models of market balance and to trace the path of time growth in diverse macroeconomic conditions. Given the growth rate of a function, differential equations enable us, for instance, to find the function whose growth is being described, from the elasticity of a point, they also allow us to estimate the function of demand.

The perturbation theory and the structural stability theory are focused on the analysis of the changes produced in results when the structure of the problem is modified. In the same way that the methods of resolution for differential equations are very similar to those for differential equations, the stability theory runs through parallel channels in both contexts. Thus, the Schur condition constitutes a replica for the equations in finite difference of the condition of Routh-Hurwitz previously introduced for differential equations.

Conceptually speaking, however, the theory of differential equations is much more developed than that of difference equations. The relationship that exists between these two types of equations makes it possible to expose the corresponding theory following a similar line for both types of analysis, the continuous and the discrete. In the linear case, a parallel development between the concepts relative to difference equations and differential equations is sought. In the non-linear case, the analysis of discrete systems, for example, is much more complex than the analysis of continuous systems.

A problem typically found in economy and treated in depth in our monograph, is the analysis of the dynamics of the market price. This analysis can be made both from the perspective of ordinary differential equations and equations in finite difference. Indeed, when we start from an initial market price P(0), which doesn't coincide with the balance price P*, a process of adjustment is produced which leads the price to its position of balance P* over time. Often, the following problem arises: if the process of adjustment occurs for a sufficiently long period of time, under which circumstances, will that process tend to place the price at its level of balance? We will resolve this problem suggesting a model of temporal adjustment of the price that we will call the intertemporal walrasian adjustment model. The basic hypothesis on which this model rests is that the exchange rate of the price is proportional to the excess of demand. In this case, the process of adjustment implies that excess demand increases the prices whereas oversupply lowers them, therefore, in the long term, it seems plausible that the price will reach its balance value. An important quality of the equilibrium is its stability, a property which shows how prices converge towards the equilibrium price regardless of initial condition. Examples like this one occur repeatedly in economic science and it is essential to be aware of the mathematic tools necessary for its correct resolution.

Of course, both infinitesimal equations (differential and integral or integro-differential), the calculus of variations and difference equations are of great applicability in economy. Thus, in the first case, we note as the most paradigmatic examples the Harrod-Domar-Hicks model, the dynamic analysis of Leontief's model, the economic cycle theory, the Solow model, the population models, the study of stability of the points of balance, etc. Moreover, among the large number of models where equations in finite difference have an influence, of widespread use in economy, we can stress the spider web model, Samuelson's model for the interaction multiplier-accelerator, the dynamic model by Leontief in the discrete case, applications in the analysis of stability and convergence to the balance, applications in financial mathematics…

A fundamental feature of the dynamic analysis of economy is the influence of the time variable. Time can intervene in a continuous or discrete way using different mathematical tools according to the case (differential equations and difference equations). From the mathematical point of view, if time is considered as a continuous variable, the temporal change expression constitutes a differential equation. Its resolution and imposition of bounding conditions enable us to obtain the corresponding function. From the analysis of the theory of differential equations it is possible to respond to models of economic theory which require a dynamic analysis and the economic interpretation is based on mathematical theory.

It should be noted that in the economic analysis the term 'dynamic' is used to make reference to a type of analysis, the main objective of which is to determine the trajectory in time of certain variables and to study the convergence to certain values. This type of analysis allows us to investigate the accessibility of the state of equilibrium, which is considered a given when we apply a dynamic or a static comparative analysis. By means of dynamic analysis, it is possible to study the time path of a variable on the basis of a known manner of change in time. This trajectory remains perfectly determined from certain initial or contour conditions. From an economic point of view, considering time a discrete variable implies that we are only interested in what happens at the end of each period, so that any relevant economic activity will be focused on a given temporal instant, at the end of a period which is also the beginning of the next one. If time acts as a continuous variable, it shows that “something happens” at each moment.

Each practical chapter comes preceded by other chapters with a series of theoretical knowledge, relatively short, which, as a reminding, gives the reader a succinct reference of all those concepts, definitions, proposals, lemmas, theorems, formulations and other indispensable elements –not always sufficient though-for the correct resolution of the practicum exercises proposed. With this, the reader, will be able to realize instantly that a large part of the exercises possesses a high level of detail in the development of their solution, aiming at demonstrating the necessary relationship between those mentioned and the theoretical knowledge referred to, as such exercises constitute a powerful means for the acquisition and consolidation of the above mentioned knowledge. It goes without saying that, as usual, the author holds exclusive responsibility for those errors that might appear in the text.

In any case and despite the high number of examples we tried to deal with, the professional practice will undoubtedly give rise to new problems that will have to be faced and solved with scientific rigor through our own knowledge. This task will be made easier, to a large extent, thanks to the effort put into solving the greatest number of exercises in each unit; that’s why we did not want to spare on quantity or diversity. And this is because the cultivation of the abstract mechanism does not leave a useful trace if it is not accompanied by the exercise of abstraction and concretion faculties to the real problems and of practical interpretation of its results.

On the other hand and when the author judges so, those questions involving greater utility or difficulty will be insisted upon with a series of exercises that will be aimed at making the subject fully comprehensible for the scholar. Some exercises are illustrated with a short theoretical presentation to facilitate its solution, while others are meant to demonstrate a relevant property. We have to take into account that over the last years, the arrival of low cost high speed computers, with the right software, has provided us with new resolving techniques which allow for modeling and solving complex problems based on systems of equations. To be precise, some of the many graphic representations which appear in the text, as visual reflection for the solution of the exercises, have been produced with help from the excellent computerized system for algebra *Wolfram Alpha Mathematica*, *made by Wolfram Research, Inc*. (http://www.wolfram.com/). With this pack, the users ‘interact’ in a bold manner. Among its many abilities, it holds an outstanding library of classical functions (Hermite polynomials, Laguerre polynomials,…) it resolves integrals and differential equations, and at linear differentials and their systems and graphs illustrate powerfully curves as well as surfaces.

At the end of the work we include a list of biographical references about which I have to warn you that, as it usually happens, does not include the whole of possibilities. The selection is the author's personal choice and according to the level of the text. Some of them would be, no doubt, the natural continuation of the lessons. By the way, and from these lines here I would like to pay tribute, honorably and gratefully, to the excellent text and consult books, cited in the bibliography, about the subject matter herein that have notably influenced my study because of the outstanding work of their authors.

You will notice that some footnotes have been written in English. Thus, we would like to contribute (from the subject of maths applied to economics as well) to the new trends in education. This justification was widely discussed in the preface of our previous book entitled *Ordinary differential equations and in finite differences* (practical course) edited by the *Centro Asociado en Tortosa de la UNED*. The book which now we present you constitutes the natural continuation from the economical application point of view.

Any intellectual work as the one presented here, generates such a huge list of indebted intellectual and professional issues that is hard to cite completely herein, some relevant to me, though. Who that writes this does not forget either the enormous gratitude towards those who were his teachers or guides, some of them already gone. My appreciation to the institutions that have backed up the edition of this book, and particularly to the *Patronato del Centro Asociado en Tortosa de la Universidad Nacional de Educación a Distancia* (UNED), to the printing house Gráfica Dertosense, S.L. for their caring in the printing of this work, to our competent fellow University teacher, Mª Teresa Pons for the translation of this preface, to Dr. Jordi Sardà for his insightful comments and, in general, to those who have been involved in the production of this monograph, making suggestions and giving valuable advice for the best outcome. So much particularly I would like to thank José María Franquet III (how many hours!) his dense work in the composition and processing of the text, a task not that easy when it comes down to mathematical language.

Tortosa, August 2014
THE AUTHOR

Parte I:

Organización del libro.
Análisis dinámico.

- **Grafo del libro.**
- **Sistemas y modelos dinámicos en Economía.**

* * * * * * *

CAPÍTULO 0

GRAFO DEL LIBRO

1. DEFINICIONES BÁSICAS

La Teoría de Grafos constituye, sin duda, una parte importante de la Investigación Operativa de fecundas aplicaciones en la Economía y otras ciencias aplicadas. No obstante, su fundamentación teórica ya fue expuesta en nuestra anterior monografía titulada: *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas. Curso práctico* (UNED-Tortosa, 2013), por lo que nos remitiremos a dicho texto para la consecución de mayores especificaciones y detalles.

En matemáticas y en las ciencias de la computación, la teoría de grafos (también llamada teoría de las gráficas) estudia las propiedades de los grafos (también llamadas gráficas). Un grafo es un conjunto, no vacío, de objetos llamados vértices (o nodos) y una selección de pares de vértices, llamados aristas (*arcs* en inglés) que pueden ser orientados o no. Típicamente, un grafo se representa mediante una serie de puntos (los vértices) conectados por líneas (las aristas).

2. ORDENACIÓN EN NIVELES DEL GRAFO

2.1. CONCEPTUALIZACIÓN

A la hora de afrontar la construcción manual del grafo de un proyecto cualquiera resulta de gran utilidad ordenar las actividades por niveles. La ordenación por niveles permite construir el grafo en cuestión disponiendo los sucesos de forma tal que al trazar las actividades o prelaciones no aparezca un número excesivo de cruces, lo que dificultaría en grado sumo la interpretación del grafo del libro.

En nuestro caso, en que estamos manejando una monografía de extensión considerable que hace recomendable su sistematización, los vértices serán los diferentes capítulos constitutivos del mismo en número de trece (o catorce, considerando este mismo), y se entiende que los arcos denotan el tiempo necesario para llevar a cabo las actividades de estudio y comprensión necesarias para asimilar correctamente un capítulo determinado incidente, cuestión ésta que veremos más adelante, con lo que resultará, en definitiva, el siguiente grafo:

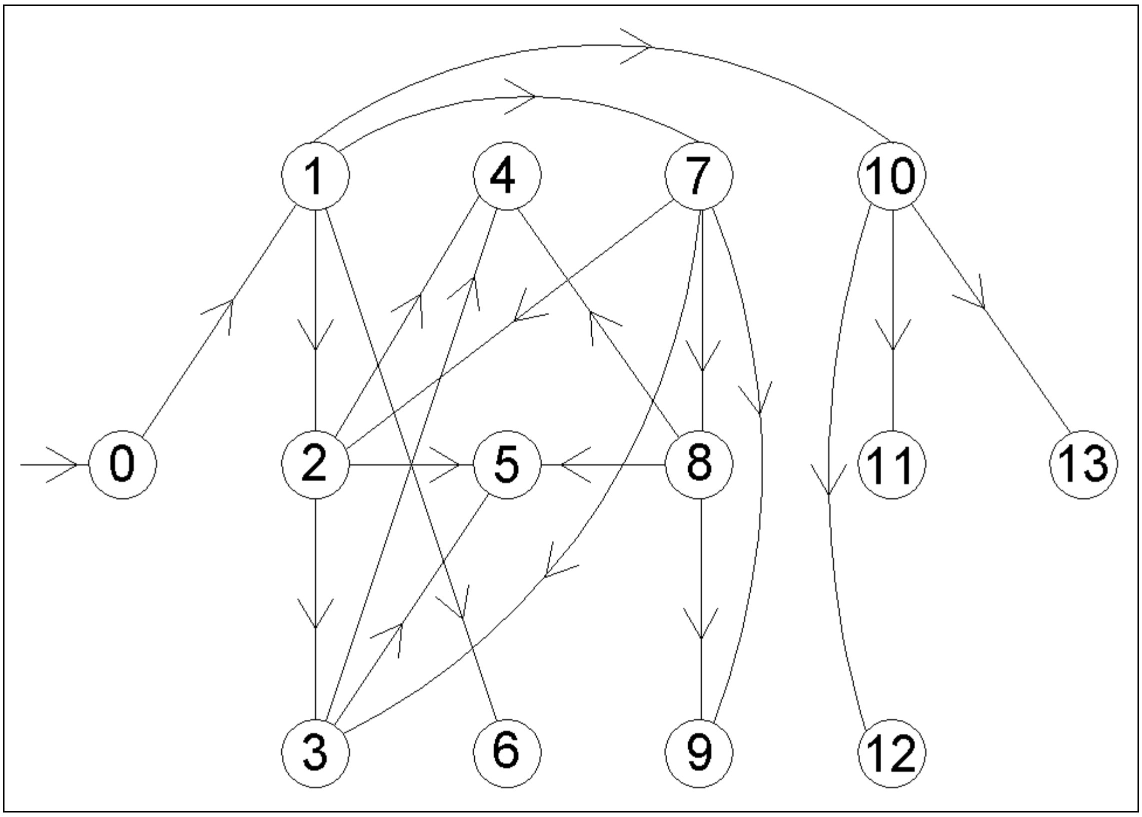


FIG. 0.1. Grafo del libro.

2.2. MÉTODO GRÁFICO

Para ello, se deberán seguir los siguientes pasos:

1.- Se busca en el grafo el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto constituye el último nivel del grafo.

2.- Seguidamente, suprimimos estos vértices y los arcos relacionados con ellos.

3.- En el subgrafo obtenido se vuelve a buscar el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto constituye el penúltimo nivel del grafo.

4.- A continuación, eliminamos estos vértices y los arcos relacionados con ellos.

5.- Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos el grafo ordenado en niveles.

6.- Nótese, en fin, que en la numeración de los vértices de una actividad, el número del suceso origen siempre es menor que el número del suceso final.

2.3. MÉTODO MATRICIAL

Es el que emplearemos en nuestro caso. Para ello, se deberán seguir los siguientes pasos (algoritmo de Democron[1]):

1.- Concepto de matriz asociada a un grafo: Es una matriz cuadrada de dimensión n, igual al número de vértices, en la que sus elementos a_{ij} son 1 ó 0 dependiendo de si existe o no arco entre el vértice i y el vértice j.

2.- Ampliamos la matriz asociada al grafo por medio de un cierto vector columna V_1. Los elementos de este vector son iguales a la suma de los elementos de cada fila de la matriz asociada.

3.- Los elementos de la columna que sean ceros, nos indican los vértices que constituyen el último nivel del grafo.

4.- Ampliamos la matriz asociada por un nuevo vector columna V_2. Los elementos de este nuevo vector se obtienen restando, a los elementos de V_1, los elementos homólogos de la(s) columna(s) que corresponden a los vértices que en dicho vector V_1 toman el valor cero. Cuando el minuendo y el sustraendo sean cero se coloca una aspa en el vector en lugar de un cero.

5.- Debajo de la columna correspondiente a cada vector se van colocando los números de los vértices con los que se obtienen elementos de valor cero en el vector. Los elementos de V_2 que sean cero serán los vértices del penúltimo nivel.

6.- Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos los vértices del resto de niveles, esto es, los demás vectores columna que representan la ordenación en niveles del grafo, hasta que aparezca el último vector en que todas sus componentes sean aspas.

Como puede verse, se trata en este caso de un grafo conexo y sin circuitos. De este modo, siguiendo el método matricial anteriormente expuesto que conduce a la ordenación de los vértices en niveles *hacia la antibase* por el método también conocido como de “eliminación de descendientes”, podemos formar el correspondiente algoritmo de Demoucron, a saber:

[1] There is an algorithm from 1964 by Demoucron, Malgrange and Pertuiset which computes a planar embedding for a planar graph G = (V, E). This is an incremental algorithm as the embedding is computed step by step, where a step is the embedding of a new cycle of the graph. Assume we have already computed a embedding of a subgraph G’ of G we have to look at the so called *fragments*. (FRANQUET, 2013).

ALGORITMO DE DEMOUCRON

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		$\vec{v}_0$	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{v}_4$	$\vec{v}_5$	$\vec{v}_6$
0		I														1	1	1	1	1	0	X
1			I				I	I			I					4	3	2	1	0	X	X
2				I	I	I										3	1	0	X	X	X	X
3					I	I										2	0	X	X	X	X	X
4																0	X	X	X	X	X	X
5																0	X	X	X	X	X	X
6																0	X	X	X	X	X	X
7			I	I					I	I						4	3	1	0	X	X	X
8					I	I				I						3	0	X	X	X	X	X
9																0	X	X	X	X	X	X
10												I	I	I		3	0	X	X	X	X	X
11																0	X	X	X	X	X	X
12																0	X	X	X	X	X	X
13																0	X	X	X	X	X	X
Σ	0	1	2	2	3	3	1	1	1	2	1	1	1	1		4 5 6 9 11 12 13 nivel sup.	3 8 10	2	7	1	0	- nivel inf.

FIG. 0.2. Algoritmo de Demoucron.

MÉTODO:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 - 4 - 5 - 6 - 9 - 11 - 12 - 13$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 - 3 - 8 - 10$$
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - 2$$
$$\vec{v}_4 = \vec{v}_3 - 7$$
$$\vec{v}_5 = \vec{v}_4 - 1$$
$$\vec{v}_6 = \vec{v}_5 - 0$$

Ahora, el grafo ordenado del libro resulta ser el siguiente:

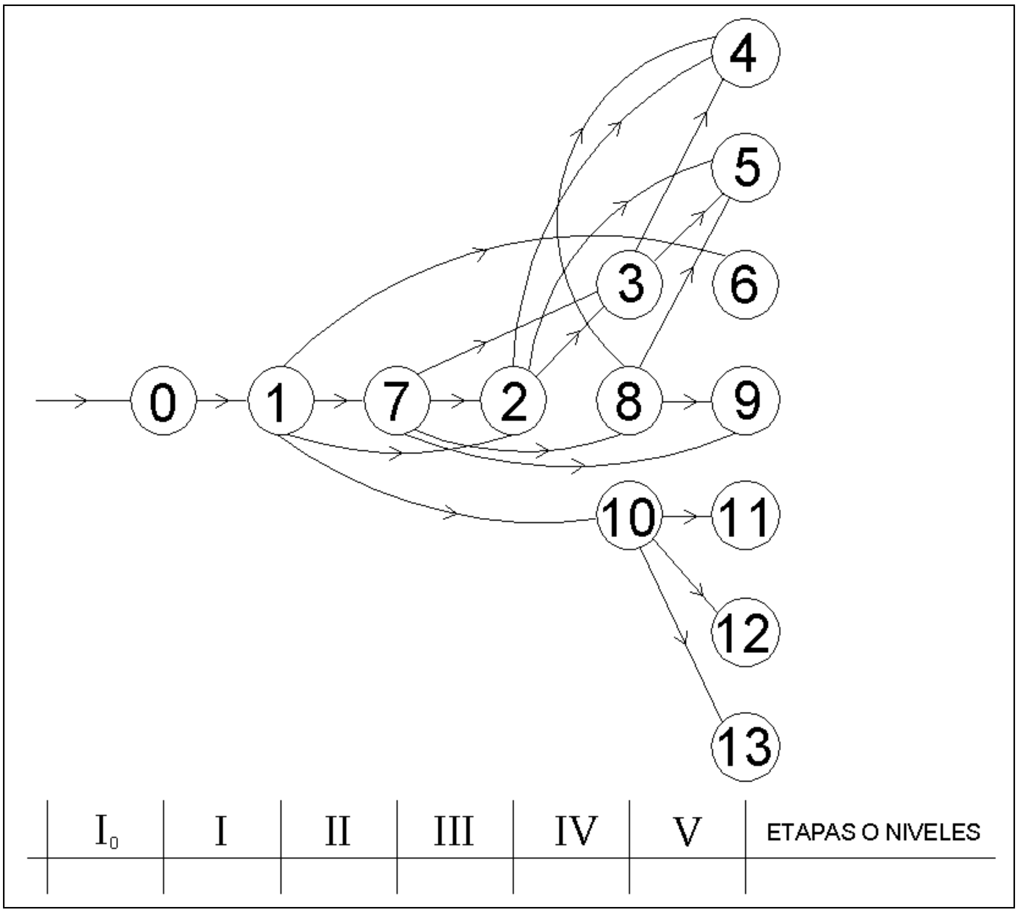


FIG. 0.3. Grafo ordenado en niveles del libro.

A través de la ordenación anterior, se ha puesto de manifiesto una prelación bien clara entre las diversas etapas del esquema aconsejable de estudio y asimilación de los contenidos del presente libro. En cualquier caso, debe cumplirse que:

1) Todos los capítulos del libro de un mismo nivel no deben poseer “ascendientes” en el nivel siguiente.

2) El orden de estudio de los vértices o capítulos de un mismo nivel es independiente.

3. PONDERACIÓN TEMPORAL DEL GRAFO

Por último, daremos a los arcos del grafo su correspondiente valor expresado en minutos. El tiempo que se tarda en desarrollar una actividad no se conoce con exactitud por lo que hay que realizar estimaciones de tiempo. El método PERT[2], por ejemplo, considera tres estimaciones de tiempo distintas, a saber:

- Estimación optimista (E_o): es el tiempo mínimo en que podría ejecutarse la actividad si no surgiera ningún contratiempo indeseable. A falta de otras determinaciones, le estableceremos aproximadamente aquí en 10’ por página impresa, con independencia de si es completa o no, por lo que vendrá dado por $(10 \cdot n)$ minutos, siendo *n* el número de páginas del capítulo en cuestión del libro.

- Estimación más probable o estimación modal (E_m): es el tiempo que se empleará en ejecutar la actividad en circunstancias normales; se supondrá, en este caso, un valor de $(25 \cdot n)$ minutos.

- Estimación pesimista (E_p): es el tiempo máximo de ejecución de la actividad si las circunstancias de estudio son muy desfavorables; se supondrá, en este caso, un valor de $(40 \cdot n)$ minutos.

El tiempo PERT (D) será la media aritmética ponderada o esperanza matemática de las estimaciones anteriores, esto es:

$$D = \frac{E_o + 4E_m + E_p}{6} = \frac{10 \cdot n + 100 \cdot n + 40 \cdot n}{6} = (25 \cdot n) \text{ minutos}.$$

Por otra parte, podría también tenerse en cuenta la varianza y/o la desviación típica o “standard” de una actividad cualquiera, que se define así:

$$V^2 = \frac{(E_o - E_p)^2}{36} = \frac{(10 \cdot n - 40 \cdot n)^2}{36} = 25 \cdot n^2 ,$$

[2] The **Program** (or **Project**) **Evaluation and Review Technique**, commonly abbreviated **PERT**, is a statistical tool, used in project management, that is designed to analyze and represent the tasks involved in completing a given project. First developed by the United States Navy in the 1950s, it is commonly used in conjunction with the critical path method (**CPM**). PERT is a method to analyze the involved tasks in completing a given project, especially the time needed to complete each task, and to identify the minimum time needed to complete the total project. PERT was developed primarily to simplify the planning and scheduling of large and complex projects. It was developed for the U.S. Navy Special Projects Office in 1957 to support the U.S. Navy's Polaris nuclear submarine project. It was able to incorporate uncertainty by making it possible to schedule a project while not knowing precisely the details and durations of all the activities. It is more of an event-oriented technique rather than start- and completion-oriented, and is used more in projects where time is the major factor rather than cost. It is applied to very large-scale, one-time, complex, non-routine infrastructure and Research and Development projects. An example of this was for the 1968 Winter Olympics in Grenoble which applied PERT from 1965 until the opening of the 1968 Games. This project model was the first of its kind, a revival for scientific management, founded by Frederick Taylor (Taylorism) and later refined by Henry Ford (Fordism). DuPont's critical path method was invented at roughly the same time as PERT. (FRANQUET, 2013).

siendo la desviación típica o “standard” de valor: V = 5·n. Las actividades con mayor varianza tienen, obviamente, un mayor riesgo de error en la estimación de su duración. Y así, resulta:

Capítulo	**n**	**D**	**V**	**t (h.)**	**%**	**% acum.**
0	10	250	50	4’17	1’16	1’16
1	32	800	160	13’33	3’71	4’87
2	17	425	85	7’08	1’97	6’84
3	16	400	80	6’67	1’86	8’70
4	110	2.750	550	45’83	12’76	21’46
5	10	250	50	4’17	1’16	22’62
6	20	500	100	8’33	2’32	24’94
7	36	900	180	15’00	4’18	29’12
8a,b	111 + 122	5.825	1.165	97’08	27’03	56’15
9a,b	104 + 66	4.250	850	70’83	19’72	75’87
10	40	1.000	200	16’67	4’64	80’51
11	94	2.350	470	39’17	10’90	91’41
12	26	650	130	10’83	3’02	94’43
13	48	1.200	240	20’00	5’57	100
TOTAL	862	21.550	4.310	359’17	100	---

Veamos el cuadro anterior con el número de páginas y la duración de cada actividad *D* según los diferentes capítulos del libro, así como su correspondiente desviación típica *V* y el tiempo *t* horario empleado en la asimilación de cada uno de ellos y el acumulado desde el inicio del estudio del libro. Obviamente, el coeficiente de variación de Pearson[3], que es una medida relativa de dispersión de los valores de la variable aleatoria estadística “duración de la actividad”, será del: $\frac{V}{D}\times 100=\frac{5n}{25n}\times 100=20\%$, en todos los casos. Obsérvese también que la asimilación de la totalidad de los capítulos del libro comportaría, según los supuestos ya expresados, una duración de 21.550 minutos (exactamente un tiempo de 359’17 horas). Sería posible, sin embargo, alcanzar la asimilación de los capítulos del último nivel (de interesar ello) sin necesidad de pasar necesariamente por el estudio de algunos otros, ya fuera recorriendo trayectos de duración máxima o mínima, como se verá a continuación. Por otra parte, la media aritmética de la duración de cada actividad (estudio y asimilación de cada capítulo) sería de

[3] *Karl Pearson* (27 March 1857 – 27 April 1936) (originally named *Carl*) was an influential English mathematician who has been credited with establishing the discipline of mathematical statistics. In 1911 he founded the world's first university statistics department at University College London. He was a proponent of eugenics, and a protégé and biographer of Sir Francis Galton. Pearson's work was all-embracing in the wide application and development of mathematical statistics, and encompassed the fields of biology, epidemiology, anthropometry, medicine and social history. In 1901, with Weldon and Galton, he founded the journal *Biometrika* whose object was the development of statistical theory. He edited this journal until his death. Among those who assisted Pearson in his research were a number of female mathematicians who included Beatrice Mabel Cave-Browne-Cave and Frances Cave-Browne-Cave. He also founded the journal *Annals of Eugenics* (now *Annals of Human Genetics*) in 1925. He published the *Drapers' Company Research Memoirs* largely to provide a record of the output of the Department of Applied Statistics not published elsewhere. (FRANQUET, 2013).

21.550/14 = 1.539’29 minutos = 25’65 horas/capítulo, y se alcanzarían los 3/4 del estudio completo del texto al finalizar el Cap. 9, esto es, con el estudio de la aplicación a la Economía de las ecuaciones infinitesimales (diferenciales ordinarias, integrales e integro-diferenciales).

En definitiva, bajo estas condiciones temporales, el grafo del libro en el cual se han buscado los caminos de valor máximo y se ha añadido el capítulo ficticio O’, quedará configurado del siguiente modo:

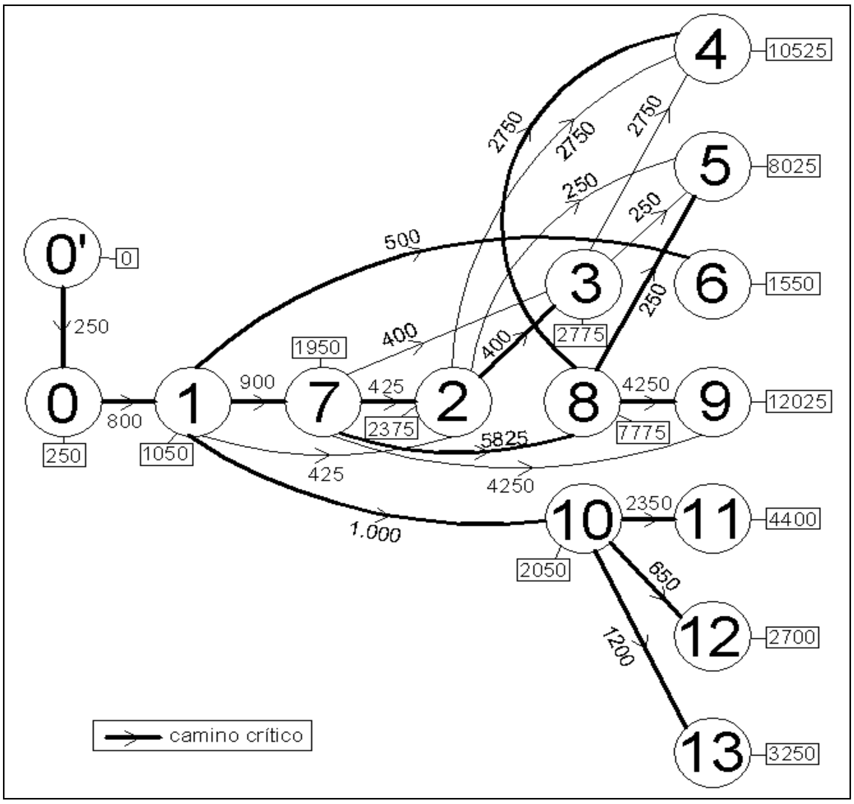


FIG. 0.4. Grafo con ponderación temporal de las actividades. Camino máximo.

Se han obtenido, pues, siete caminos de longitud o duración máxima, para alcanzar respectivamente los capítulos del último nivel o etapa, cuya traza ha sido remarcada convenientemente en la figura anterior, a saber:

$$\begin{cases} [0', 0, 1, 7, 8, 4] = 10.525 \text{ minutos (Cap. 4)} \\ [0', 0, 1, 7, 8, 5] = 8.025 \text{ minutos (Cap. 5)} \\ [0', 0, 1, 6] = 1.550 \text{ minutos (Cap. 6)} \\ [0', 0, 1, 7, 8, 9] = 12.025 \text{ minutos (Cap. 9)} \\ [0', 0, 1, 10, 11] = 4.400 \text{ minutos (Cap. 11)} \\ [0', 0, 1, 10, 12] = 2.700 \text{ minutos (Cap. 12)} \\ [0', 0, 1, 10, 13] = 3.250 \text{ minutos (Cap. 13)} \end{cases}$$

Del mismo modo, el grafo del libro en el cual se han buscado los caminos de valor mínimo, quedará configurado del siguiente modo:

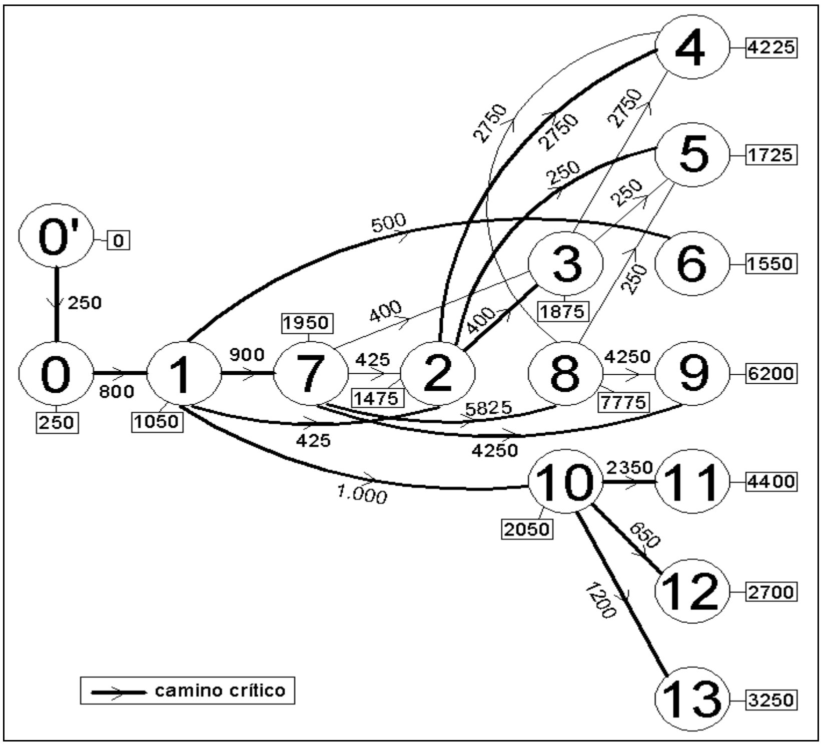


FIG. 0.5. Grafo con ponderación temporal de las actividades. Camino mínimo.

En nuestro caso podría emplearse una versión simplificada del *algoritmo de Dijkstra*, también llamado *algoritmo de caminos mínimos*, es un algoritmo para la determinación del camino más corto dado un vértice origen al resto de vértices en un grafo con pesos en cada arista. Su nombre se refiere a Edsger Dijkstra, quien lo describió por primera vez en el año 1959. Se han obtenido, en definitiva, siete caminos de longitud o duración mínima, para alcanzar respectivamente los capítulos del último nivel o etapa, cuya traza ha sido remarcada convenientemente en la figura anterior, a saber:

[0’, 0, 1, 2, 4] = 4.225 minutos (Cap. 4)
[0’, 0, 1, 2, 5] = 1.725 minutos (Cap. 5)
[0’, 0, 1, 6] = 1.550 minutos (Cap. 6)
[0’, 0, 1, 7, 9] = 6.200 minutos (Cap. 9)
[0’, 0, 1, 10, 11] = 4.400 minutos (Cap. 11)
[0’, 0, 1, 10, 12] = 2.700 minutos (Cap. 12)
[0’, 0, 1, 10, 13] = 3.250 minutos (Cap. 13)

Obsérvese, en fin, que según el objetivo de asimilación de conocimientos que persigamos, las anteriores consideraciones nos permitirán escoger el itinerario más adecuado y menos costoso en el estudio del presente libro, pudiendo ahorrar mucho tiempo y esfuerzo. Lo expuesto hasta aquí, por ejemplo, también resultaría de aplicación al estudio de los capítulos del penúltimo nivel (Caps. 3, 8 y 10) o de cualquier otro teniendo en cuenta, en cada caso, el camino de duración que resulte más conveniente a los intereses del lector/a.

4. CONSEJOS ELEMENTALES PARA EL ESTUDIO DEL LIBRO

Llegados a este punto, y una vez ordenados en niveles o etapas los diferentes capítulos del libro, así como presentadas las diferentes alternativas o itinerarios de su asimilación, me permito sugerir a nuestros lectores algunas ideas acerca de cómo enfocar más eficientemente el estudio y comprensión de nuestra monografía. Y así trataremos de:

- **Aumentar la rapidez y eficacia de la lectura:**

1. Se trata de aprender de manera inteligente a leer deprisa utilizando las técnicas adecuadas que permitan leer más y memorizar mayor cantidad de contenido en menos tiempo, y sacar más provecho de lo que se ha leído. Algunas de las aptitudes necesarias para una buena lectura son las siguientes:

    - Capacidad para leer y comprender a altas velocidades,
    - Capacidad para usar un ritmo variable en función de la finalidad y la dificultad del tema,
    - Capacidad para comprender las ideas principales o los pensamientos centrales del material de lectura,
    - Capacidad para comprender y retener los detalles, buena retención general,
    - Capacidad para apreciar la organización del material,
    - Capacidad para leer de manera crítica y valorativa.

2. Los lectores ineficaces leen todo a la misma velocidad, mientras que los lectores eficaces leen de tres a cinco veces más deprisa y comprenden mucho mejor las ideas principales del texto.

- **Mejorar la concentración:**

1. Evitar las distracciones externas e internas.
2. Localizar un lugar de estudio adecuado.
3. Eliminar las interrupciones planteadas.
4. Eliminar las distracciones sonoras como ruidos o música con canciones estridentes.
5. Encontrar el momento favorable.
6. Marcar objetivos acerca de cuando empezar, interrumpir y terminar.
7. Controlar las inquietudes mentales.
8. Descansar periódicamente 10 minutos cada 50 de lectura o estudio.

- **Establecer el ambiente adecuado, dedicarle el tiempo estipulado, cuidar la vista, etc.**

CAPÍTULO 1

SISTEMAS Y MODELOS DINÁMICOS EN ECONOMÍA

1. DEFINICIONES BÁSICAS

1.1. ECUACIONES DIFERENCIALES E INTEGRALES

Estos dos grandes tipos de ecuaciones las denominaremos "ecuaciones infinitesimales", con las siguientes especificaciones:

- ECUACIÓN DIFERENCIAL (E.D.) es toda aquella ecuación que contiene derivadas (parciales o totales) o diferenciales.

- ECUACIÓN INTEGRAL (E.I.) es aquella ecuación que contiene integrales en cuyo integrando aparece la función incógnita.

- ECUACIÓN INTEGRO-DIFERENCIAL (E.I.D.) es aquella ecuación que consta de operaciones diferenciales e integrales en su expresión.

- CLASIFICACIÓN DE LAS E.D.:

  E.D.
  - -Ordinaria (1 variable). Son las que veremos en el presente libro.
  - -En derivadas parciales (varias variables), que también se representan abreviadamente por E.D.P., y que no son objeto de tratamiento en el presente libro.

- CLASIFICACIÓN DE LAS E.I.:

  Puede verse en el apartado correspondiente del capítulo 8.

- ORDEN de una E.D. es el orden de la derivada de > orden que en ella figura.

- GRADO de una E.D. es el exponente de la derivada de > orden.

Una E.D. será lineal cuando es de 1er. grado en la función y en sus derivadas.

Expresión general de la ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) de orden **n** (función implícita):

$$\mathbf{F\ (x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0.}$$

El problema que se plantea reside en determinar la función (y) que dio origen a la E.D. y que, verificando dicha ecuación, contiene, en general, **n** constantes arbitrarias. Se le llama, a dicha función, **integral general** (I.G.), que tiene la forma: $y = \varphi\ (x, c)$.

Si en la I.G. se dan valores definidos a las constantes arbitrarias se obtiene una **integral particular** (I.P.).

Otro tipo de solución lo constituye la **integral singular** (I.S.), caso de las ecuaciones de Clairaut y otras. Éstas son aquellas soluciones que no pueden deducirse de la integral general dando valores determinados a las constantes; es decir, aquellas soluciones que no están comprendidas en la integral general.

Si $F(x, y, c) = 0$ es la integral general, eliminando la constante *c* entre ella y la $F'_c(x, y, c) = 0$, o también eliminando y' entre la ecuación diferencial dada $f(x, y, y') = 0$ y $f_y(x, y, y') = 0$, hallaremos las soluciones.

Las ecuaciones diferenciales e integrales pueden ser utilizadas provechosamente en todas las ramas de la Economía y de las ciencias Empresariales. Su uso también es común tanto en las ingenierías como en las restantes ciencias aplicadas o sociales (psicología, sociología) y en las ciencias fundamentales (física, química, biología, …). Existen numerosos fenómenos y situaciones de la vida cotidiana, que siendo diferentes, tanto en su comportamiento puntual como en su evolución a lo largo del tiempo, a la hora de analizarlos tienen, desde el punto de vista técnico, una característica común: el hecho de que pueden modelarse mediante un recurso matemático muy potente, como son las ecuaciones diferenciales e integrales. Por ejemplo, las leyes que determinan la economía, la evolución de determinados sistemas técnicos, etc. Por ello es necesario familiarizarse con el lenguaje matemático y con las actividades de abstracción y prepararse en técnicas y métodos de análisis que permitan conocer la estructura general de los diversos fenómenos económicos que se presentan en la vida real.

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales e integrales, como instrumento matemático, constituyen una herramienta necesaria tanto para el estudio de gran parte de otras materias -pues prácticamente todas ellas las contienen- como para abordar el propio trabajo profesional del economista, ya que dichas ecuaciones son fundamentales para poder desarrollar modelos matemáticos que van a servir para ayudar a comprender los diferentes fenómenos económicos que pueden plantearse.

1.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1.2.1. Existencia y unicidad

Existen diversos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de ellas con una forma de resolución distinta; para clasificarlas, hay que establecer la diferencia entre ecuaciones diferenciales de primer orden y ecuaciones de orden superior (ya que las primeras son, por lo general, de más fácil resolución).

El teorema de Peano-Picard garantiza la existencia de una solución y su unicidad para toda ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes continuos en un intervalo, que tiene una solución única en dicho intervalo. Para el caso de las ecuaciones diferenciales no-lineales no existen resultados análogos al de Peano-Picard.

El teorema de Peano-Picard concluye la existencia mediante una demostración constructiva, para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Puesto que toda ecuación diferencial lineal de orden arbitrario puede reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se sigue del teorema de Peano-Picard la existencia y unicidad de la solución. La idea del teorema es simple: construye una sucesión de Cauchy funciones cuyo límite es, precisamente, la solución del sistema. La demostración de la unicidad, por otra parte, resulta trivial. Aunque el teorema prueba la existencia y unicidad, el método constructivo puede no resultar un método práctico para encontrar una buena aproximación a la solución, y mucho menos la solución analítica.

En definitiva, sea la ecuación diferencial: $y' = f(x,y)$, donde la función $f(x,y)$ se halla definida en un rectángulo R del plano, esto es, para valores de *x* e *y* tales que: $|x - a| \leq \alpha$; $|y - b| \leq \beta$. Esta función verifica que: $|f(x,y)| \leq M$. Además, $f(x,y)$ verifica la denominada "condición de Lipschitz[1]" en el rectángulo R, a saber:

[1] **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** (1832 – 1903) was a German mathematician and professor at the University of Bonn from 1864. Peter Gustav Lejeune Dirichlet was his teacher. He supervised the early work of Felix Klein. While Lipschitz gave his name to the Lipschitz continuity condition, he worked in a broad range of areas. These included number theory, algebras with involution, mathematical analysis, differential geometry and classical mechanics. He wrote: *Lehrbuch der Analysis* (two volumes, Bonn 1877, 1880); *Wissenschaft und Staat* (Bonn, 1874); *Untersuchungen über die Summen von Quadraten* (Bonn, 1886); *Bedeutung der theoretischen Mechanik* (Berlin, 1876). Lipschitz discovered Clifford algebras in 1880, two years after William K. Clifford (1845–1879) and independently of him, and he was the first to use them in the study of orthogonal transformations. Up to 1950 people mentioned "Clifford-Lipschitz numbers" when they referred to this discovery of Lipschitz. Yet Lipschitz's name suddenly

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq H|y_2 - y_1|$$

que acota la razón del incremento de *f* con respecto a *y* y con relación a Δy, para dos puntos de la misma abscisa. De hecho, esta condición la cumple toda función *f* que en R admite derivada parcial con respecto a *y*, acotada.

Así pues, se cumplen las siguientes condiciones:

a) f(x,y) es una función continua en el rectángulo R.

b) la derivada parcial $\frac{\delta f}{\delta y}$ es continua en el rectángulo R.

Entonces, por cada punto del rectángulo pasa una y solo una solución de la ecuación diferencial. O sea, que cumplidas estas condiciones, se demuestra que existe una única función y = φ(x), definida y continua en un entorno simétrico de x = a, de radio $\varepsilon \leq \alpha$, que satisfaciendo la ecuación dada, es tal que: b = φ(a).

Análogo teorema se puede formular también para las ecuaciones diferenciales de orden superior al primero (que veremos en el capítulo 3 de nuestro libro), pero no insistiremos allí sobre el tema por razones obvias de espacio y oportunidad.

1.2.2. Soluciones analíticas y numéricas

Existen métodos de resolución generales para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales que permiten encontrar soluciones analíticas. En particular si los coeficientes de la ecuación lineal son constantes o periódicos la solución resulta casi siempre fácil de construir. Para coeficientes no constantes o no periódicos, pero que son desarrollables en serie de Taylor[2] o serie de Laurent[3] es aplicable con

---

disappeared from the publications involving Clifford algebras; for instance Claude Chevalley (1909–1984) gave the name “Clifford group” to an object that is never mentioned in Clifford’s works, but stems from Lipschitz’s. Pertti Lounesto (1945–2002) contributed greatly to recalling the importance of Lipschitz’s role. (FRANQUET, 2013).

[2] A **Taylor series** is a representation of a function as an infinite sum of terms that are calculated from the values of the function's derivatives at a single point. The concept of a Taylor series was formally introduced by the English mathematician Brook Taylor in 1715. If the Taylor series is centred at zero, then that series is also called a **Maclaurin series**, named after the Scottish mathematician Colin Maclaurin, who made extensive use of this special case of Taylor series in the 18th century. It is common practice to approximate a function by using a finite number of terms of its Taylor series. Taylor's theorem gives quantitative estimates on the error in this approximation. Any finite number of initial terms of the Taylor series of a function is called a Taylor polynomial. The Taylor series of a function is the limit of that function's Taylor polynomials, provided that the limit exists. A function may not be equal to its Taylor series, even if its Taylor series converges at every point. A function that is equal to its Taylor

ciertas restricciones el método de Frobenius[4]. Otra posibilidad consiste en reducir una ecuación diferencial lineal de orden *n* a un sistema de *n* ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales no existen métodos generales.

Veamos, en fin, que algunos de los métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales son el método de Runge-Kutta[5], los de Euler o Heun, los métodos multipaso, el del punto medio y los métodos de extrapolación.

1.3. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

Las ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes (campo discreto) pueden considerarse las hermanas de las ecuaciones diferenciales en el campo continuo. Aparecen ligadas a la descripción matemática de los fenómenos dinámicos o cronológicos, es decir, que varían con el tiempo (t). Muchos modelos matemáticos que se plantean en campos científicos como la física, la biología, la sociología y la misma economía, incluyen ecuaciones en diferencias finitas en su formulación (trayectorias temporales del precio, de la renta, etc.). No es de extrañar, por tanto, que éstas, junto con otras herramientas matemáticas propias de la Investigación Operativa[6] (como los procesos de Poisson o las

---

series in an open interval (or a disc in the complex plane) is known as an analytic function. (FRANQUET, 2013).

[3] The **Laurent series** of a complex function *f*(*z*) is a representation of that function as a power series which includes terms of negative degree. It may be used to express complex functions in cases where a Taylor series expansion cannot be applied. The Laurent series was named after and first published by Pierre Alphonse Laurent in 1843. Karl Weierstrass may have discovered it first in 1841 but did not publish it at the time. (FRANQUET, 2013).

[4] **Ferdinand Georg Frobenius** (October 26, 1849 – August 3, 1917) was a German mathematician, best known for his contributions to the theory of elliptic functions, differential equations and to group theory. He is known for the famous determinantal identities, known as Frobenius-Stickelberger formulae, governing elliptic functions, and for developing the theory of biquadratic forms. He was also the first to introduce the notion of rational approximations of functions (nowadays known as Pade approximants), and gave the first full proof for the Cayley–Hamilton theorem. He also lent his name to certain differential-geometric objects in modern mathematical physics, known as Frobenius manifolds. (FRANQUET, 2013).

[5] In numerical analysis, the Runge–Kutta methods are an important family of implicit and explicit iterative methods for the approximation of solutions of ordinary differential equations. These techniques were developed around 1900 by the German mathematicians C. Runge and M.W. Kutta. One member of the family of Runge–Kutta methods is often referred to as "RK4", "classical Runge–Kutta method" or simply as "*the* Runge–Kutta method". (FRANQUET, 2013).

[6] In a nutshell, operational research (OR) is the discipline of applying advanced analytical methods to help make better decisions. By using techniques such as mathematical modelling to analyze complex situations, operations research gives executives the power to make more effective decisions and build

cadenas de Markov[7] en la denominada “Programación dinámica”) constituyan uno de los pilares fundamentales de la matemática aplicada al estudio de los fenómenos de evolución en el tiempo.

En líneas generales, hablamos de recurrencia cuando cada estado de un fenómeno determinado puede explicarse en términos de algún o algunos de los estados anteriores. Las ecuaciones recurrentes o en diferencias finitas, en tales casos, constituyen las expresiones matemáticas de esta explicación de cada estado del sistema en función de otros anteriores. En los capítulos correspondientes de nuestro libro (Caps. 11, 12 y 13) tendremos ocasión de contemplar numerosos ejemplos y ejercicios de lo aquí expuesto.

2. LA TEORÍA DE MODELOS

2.1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS PREVIOS

2.1.1. Síntesis histórica del concepto de "modelo"

Sería conveniente comenzar nuestra exposición definiendo lo que pudiera ser el concepto propio de "modelo".

Se habrá notado la aparición, en varias ocasiones, de la noción de "modelo" o de "interpretación" de una teoría matemática por medio de otra. No se trata, en absoluto, de una idea reciente o novedosa y, sin duda, puede verse en ella una manifestación permanente del sentimiento

---

more productive systems based on: a) More complete data, b) Consideration of all available options, c) Careful predictions of outcomes and estimates of risk, and d) The latest decision tools and techniques. Operational research encompasses a wide range of problem-solving techniques and methods applied in the pursuit of improved decision-making and efficiency, such as simulation, mathematical optimization, queuing theory and other stochastic-process models, Markov decision processes, econometric methods, data envelopment analysis, neural networks, expert systems, decision analysis, and the analytic hierarchy process. Nearly all of these techniques involve the construction of mathematical models that attempt to describe the system. Because of the computational and statistical nature of most of these fields, OR also has strong ties to computer science and analytics. Operational researchers faced with a new problem must determine which of these techniques are most appropriate given the nature of the system, the goals for improvement, and constraints on time and computing power. (FRANQUET, 2013).

[7] A *Markov chain*, named after Andrey Markov, is a mathematical system that undergoes transitions from one state to another, between a finite or countable number of possible states. It is a random process usually characterized as memoryless: the next state depends only on the current state and not on the sequence of events that preceded it. This specific kind of "memorylessness" is called the Markov property. Markov chains have many applications as statistical models of real-world processes. Formally, a Markov chain is a random process with the Markov property. Often, the term "Markov chain" is used to mean a Markov process which has a discrete (finite or countable) state-space. Usually a Markov chain is defined for a discrete set of times (i.e., a discrete-time Markov chain) although some authors use the same terminology where "time" can take continuous values. The use of the term in Markov chain Monte Carlo methodology covers cases where the process is in discrete time (discrete algorithm steps) with a continuous state space. The following concentrates on the discrete-time discrete-state-space case. (FRANQUET, 2013).

profundo de la unidad de las distintas "ciencias matemáticas". Respecto a ello, decía Descartes[8] que "no por ello dejan de acordarse en tanto que no tienen en cuenta otra cosa que las relaciones o proporciones que se encuentran en dichas ciencias".

Precisando el "acuerdo" del que hablaba Descartes, parece entreverse, por vez primera, la noción general de isomorfismo (que él llamaba "semejanza") y la posibilidad de "identificar" relaciones u operaciones isomorfas, dando, como ejemplos de ello, el de la adición y el de la multiplicación. No obstante, tan audaces ideas no tuvieron ningún eco entre sus contemporáneos, y habrá que esperar hasta el gran desarrollo del álgebra de mediados del siglo XIX para vislumbrar siquiera el comienzo de la materialización de los sueños leibnizianos (FRANQUET, 1990/91).

Es, precisamente, en este momento histórico, cuando los modelos se multiplican y se acostumbra a pasar de una teoría a otra mediante un simple cambio de lenguaje; el ejemplo más claro de lo que antecede es, seguramente, el de la dualidad en geometría proyectiva, donde la costumbre, muy frecuente en la época, de escribir en columnas contiguas los teoremas "duales", tuvo mucho que ver con la toma de conciencia de la noción de isomorfia. Por otra parte, mediante el descubrimiento de las coordenadas homogéneas -junto con Feuerbach y Plücker- A. F. Möbius no solo pudo entender, en términos puramente algebraicos, las nociones fundamentales de puntos impropios y de puntos imaginarios introducidos por Poncelet (1788-1867)[9] y apreciar en todo su valor (junto con Poncelet, Gergonne[10], Plücker[11] y Chasles[12]) el principio de dualidad,

[8] Como científico, R. Descartes produjo al menos dos importantes revoluciones. En matemáticas simplificó la notación algebraica y creó la geometría analítica. Fue el creador del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, lo cual abrió el camino al desarrollo del cálculo infinitesimal (diferencial e integral) por parte del matemático y físico inglés Isaac Newton y el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz, con curiosa simultaneidad. Inventó la regla del paralelogramo, que permitió combinar, por primera vez, fuerzas no paralelas. En química, el sistema propuesto por Descartes consiguió desplazar al aristotélico, al proporcionar una explicación unificada de innumerables fenómenos de tipo magnético y óptico, en astronomía y en fisiología orgánica. De este modo, sentó los principios del determinismo físico y biológico, así como de la psicología fisiológica.

[9] Matemático francés nacido en Moselle y fallecido en París. Participó en el intento de invasión de Rusia por parte de Napoleón, donde fue abandonado por muerto en el campo de batalla. Durante su año y medio de prisión, ya en Francia, meditó sobre geometría. Sus pensamientos vieron la luz en 1822 cuando publicó su libro sobre geometría proyectiva, de forma que una serie de problemas difícilmente resolubles por procedimientos de la antigua geometría de las formas eran ahora fácilmente resueltos aplicando los nuevos métodos.

[10] Joseph Diaz Gergonne (19 de junio de 1771 en Nancy, Francia - 4 de mayo de 1859, Montpellier, Francia) fue un matemático y lógico francés. En 1791, Gergonne fue capitán del ejército francés. Participó en la Batalla de Valmy el 20 de septiembre de 1792. Más adelante, se reintegró al ejército para participar en 1794 en la invasión francesa de España. Al pasar a la vida civil fue profesor en la recién creada *École Centrale* como profesor de "matemáticas trascendentales". En 1810, Gergonne funda la revista *Annales de mathématiques pures et appliquées* que en la época fue conocida como los *Annales de Gergonne* la publicación se mantuvo por 22 años hasta su retiro. Fue también profesor y más tarde rector

sino que pudo dar un tratamiento completo y moderno del invariante fundamental de la geometría proyectiva: la "razón doble" de cuatro puntos alineados.

El empleo, cada vez más extendido, de la noción de "modelo", permitiría también al siglo XIX llevar a cabo la unificación de las Matemáticas soñada por los pitagóricos. A principios del expresado siglo, los números enteros y las magnitudes continuadas parecían tan incompatibles entre sí como en la antigüedad; los números reales continuaban estando ligados a la noción de magnitud geométrica (longitud, superficie, volumen), a la que se había recurrido para obtener "modelos" de los números negativos e imaginarios puros y mixtos. Incluso, los números racionales estaban tradicionalmente relacionados con la idea de la división de una magnitud en partes iguales. Solo quedaban aparte los números enteros, como "productos exclusivos de nuestro espíritu", tal como decía Gauss en 1832, oponiéndolos a la noción de espacio.

Los primeros esfuerzos para aproximar la Aritmética y el Análisis Matemático se refirieron a los números racionales, positivos y negativos, y fueron debidos a Martin Ohm en 1822, siendo continuados hacia 1860 por varios autores, fundamentalmente Grassmann[13], Hankel[14] y

de la Universidad de Montpellier. Gergonne introdujo la terminología de las coordenadas polares. Descubrió el principio de dualidad en Geometría proyectiva, cuando notó que cada teorema en el plano conectando puntos y líneas tenía un correspondiente con puntos y líneas intercambiados, siempre que el teorema no hiciera intervenir nociones métricas. En 1816, encontró una solución elegante al problema clásico de Apolonio consistente en hallar una circunferencia que toque otras tres circunferencias dadas.

[11] Julius Plücker (1801-1868), natural de Elberfeld, estudió física y matemáticas en varias universidades alemanas, y desde 1836 fue profesor de la de Bonn. Sus primeros trabajos matemáticos fueron de geometría sintética, pero en cuanto entró de lleno en la famosa polémica que enfrentaba a los geómetras analíticos con los sintéticos, se decantó por los primeros. En 1846, quizás harto de tanta controversia, abandonó las matemáticas para volver a la física, en la que hizo notables descubrimientos. En contra de lo que hubiera podido esperarse de él, se interesó más por la física experimental que por la física matemática. Según Clebsch, la contradicción expresada es solo aparente: Plücker tendía más a crear que a analizar, y esta tendencia era la fuente común de sus descubrimientos en física y en geometría.

[12] (Epernon, 1793-París, 1880). Matemático francés. Profesor en la Universidad de París, sus trabajos versaron sobre temas de geometría proyectiva y descriptiva; en especial sobre las secciones cónicas.

[13] Hermann Grassmann fue un matemático brillante cuyas creaciones en el análisis vectorial solo pueden compararse con las de Hamilton. Grassmann presentó su sistema en numerosas formas diferentes; de hecho escribió cuatro libros en los que presentó su sistema y los cuatro difieren substancialmente entre ellos. Hermann Grassmann nació en Stettin, cerca del Báltico. Su padre Justus Günther Grassmann, a pesar de ser un teólogo y estudioso en las ciencias físicas y matemáticas, insistía en que él sería felíz si Hermann se convirtiera en jardinero o en carpintero. A pesar de esto, Grassmann ingresa en 1827 en la Universidad de Berlín donde por seis semestres estudió principalmente filología y teología, pero de manera autónoma, leyó algunos escritos matemáticos de su padre. A su regreso a Stettin, inició sus estudios en matemáticas, física, historia natural, teología y filología, preparándose solo para presentar el examen estatal requerido para ser maestro. En 1839 escribió al comité examinador científico de Berlín sobre su deseo de escribir un trabajo que probara su competencia. Entonces, él inicia su trabajo en el estudio de la marea titulándolo *Theorie der Ebbe und Flut*. Este estudio lo completó en 1840 y es importante porque contenía la presentación de un sistema de análisis espacial basado en vectores. La

Weierstrass[15] (en sus cursos no publicados). A este último, parece deberse la idea de obtener un "modelo" de los números racionales positivos y de los enteros negativos considerando clases de pares de números naturales o enteros positivos. Pero faltaba realizar, sin duda, la tarea más importante: la de obtener un modelo de los números irracionales o inconmensurables dentro de la teoría de los números racionales; hacia el año 1870, la solución de este problema era realmente urgente a la vista de la perentoriedad -surgida después de la aparición de fenómenos "patológicos" en Análisis- de prescindir del uso de cualquier intuición geométrica vaga de "magnitud" para definir el cuerpo de los números reales. Como sabemos, este problema fue resuelto en esta época, y casi simultáneamente, por Cantor[16],

información concerniente al origen de este trabajo puede encontrarse en una carta escrita por Grassmann en 1847 a Saint-Venant acerca del documento publicado a finales de 1845, en el cual Saint-Venant comunicó resultados idénticos a los resultados descubiertos con anterioridad por Grassmann. Éste presentó en su trabajo una parte sorprendente del análisis vectorial: adición y sustracción de vectores, las dos principales formas de producto vectorial, la diferencial en vectores y los elementos de la función vectorial lineal, todo ello expuesto de manera equivalente con sus homólogos modernos. Este trabajo fue algo más que el primer sistema importante del análisis vectorial; fue también el más grande trabajo en la nueva álgebra de su tiempo que puede compararse con la geometría no-euclidiana. Hacia el otoño de 1843, Grassmann había terminado de escribir otra de sus grandes obras; su *Ausdehnungslehre*, que se convirtió en un clásico. Es un libro difícil de leer y contiene una gran parte del análisis vectorial moderno y hecho de tal forma que difícilmente puede resumirse. En el periodo de 1844 a 1861, Grassmann publicó 17 documentos científicos en los que se incluyen importantes documentos de física, varios sobre lenguas y libros de texto matemáticos. Editó un documento sobre política y también materiales sobre la evangelización de China. Este periodo de su vida terminó con su segundo *Ausdehnungslehre*. Después de 1862, Grassmann publicó un libro de texto en alemán y en latín sobre matemáticas, además de varios escritos sobre religión y sobre música así como un libro sobre terminología botánica alemana. También inventó el “Heliostat” de Grassmann. Esta combinación de actividades se debió a su creciente desacuerdo con la poca atención que recibían sus creaciones matemáticas.

[14] (Halle, 1839-Schramberg, 1873). Matemático alemán. Sus trabajos versaron sobre geometría proyectiva y sobre la teoría de funciones de variable compleja. Estableció una representación de la función gamma por medio de una integral compleja y obtuvo soluciones a la ecuación diferencial de Bessel.

[15] Las ideas de Riemann (1826-1866) concernientes a la geometría del espacio tuvieron profundos efectos en el desarrollo de la teoría física moderna. Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados fueron incorporados dentro de la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein. Influyó notablemente en el desarrollo de la teoría física moderna y proveía los conceptos y métodos usados después en la Teoría de la Relatividad. Era un original pensador y un anfitrión de numerosos métodos, teoremas y conceptos que hoy en día llevan su nombre.

[16] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, nacido en Mar. 3, 1845, muerto en Ene. 6, 1918, era un matemático ruso-alemán mejor conocido como el creador de la TEORIA CONJUNTISTA y por su descubrimiento de los números transfinitos. También adelantó el estudio de las series trigonométricas, fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales e hizo contribuciones significantes a la teoría de la dimensión. Cantor recibió su doctorado en 1867 y aceptó una posición en la Universidad de Halle en 1869, donde permaneció. Estrechamente relacionado al trabajo de Cantor en la teoría de los conjuntos transfinitos estuvo su definición del continuo como un conexo, conjunto perfecto. Nunca dudó de su absoluta confianza en su trabajo, pero seguidamente del descubrimiento de las paradojas de la teoría de conjuntos, dejó la teoría de los conjuntos transfinitos a matemáticos más jóvenes tales como David Hilbert, Bertrand Russell y Ernst Zermelo.

Dedekind[17], Méray[18] y Weierstrass, siguiendo, por cierto, métodos bastante diferentes.

A partir de este momento, los números enteros pasan a ser el fundamento de todas las matemáticas clásicas. Además, los "modelos" basados en la Aritmética van adquiriendo cada vez más importancia con la extensión del método axiomático y la concepción de los objetos matemáticos como creaciones libres, prodigiosas y admirables del espíritu humano.

2.1.2. Definición y clases de modelos

Realizada una pequeña síntesis histórica del problema, veamos que en toda aplicación de la Matemática a los estudios de los fenómenos reales, se presenta un triple proceso, a saber:

a) Conceptualización.
b) Razonamiento lógico.
c) Desconceptualización.

, y debemos advertir, y lo haremos con palabras del profesor Richardson[19], que: "matematizar la teoría de un fenómeno no consiste simplemente en introducir ecuaciones y fórmulas en él, sino en moldearlo y fundirlo en un todo coherente, con sus postulados claramente enunciados, sus definiciones establecidas, sin fallos y con sus conclusiones rigurosamente obtenidas".

[17] (Brunswick, actual Alemania, 1831-id., 1916). Matemático alemán. Estudió en la Universidad de Gotinga, donde tuvo como profesor a Gauss. Mientras trabajaba como *privatdozent* en dicha institución (1854-1858), entró en contacto con la obra de Dirichlet y se percató de la necesidad de abordar una redefinición de la teoría de los números irracionales en términos de sus propiedades aritméticas. En 1872 desarrolló el método denominado “corte de Dedekind”, mediante el cual definió un número irracional en función de las propiedades relativas de las dos particiones de elementos en que éste dividía el continuo de los números reales. Siete años más tarde propuso el concepto de «ideal», un conjunto de enteros algebraicos que satisfacen ecuaciones polinómicas que tienen como coeficientes números enteros ordinarios; así, el ideal principal de un entero «a» es el conjunto de múltiplos de dicho entero. Esta teoría posibilitó la aplicación de métodos de factorización a muchas estructuras algebraicas anteriormente descuidadas por el análisis matemático.

[18] Charles Méray nació el 12 de noviembre de 1835 en Chalon-sur-Saône, Francia. Inició sus estudios en la Escuela Normal Superior en París en 1854, a la edad de dieciocho años y se graduó en 1857. Luego de su graduación, comenzó a enseñar en el Liceo de St. Quentin, durante dos años, después de los cuales dejó la enseñanza durante siete. Posteriormente, regresa a dar lecciones en 1856, en la Universidad de Lyon, para ser más tarde nombrado, en 1867, Profesor de Matemáticas en la Universidad de Dijon, en donde trabajó por el resto de su vida. Méray pudo haber sido un reconocido matemático alrededor del mundo por sus ideas, pero la suerte no estuvo de su lado. En 1869, publicó el primer estudio de teoría aritmética acerca de los números irracionales; su base fue el trabajo de Lagrange. Esta fue la primera teoría coherente y rigurosa sobre números irracionales que se vio impresa. Murió el 2 de febrero de 1911 en Dijon, Francia.

[19] *Vide* H.W. RICHARDSON en *Economía regional*, Ed. Vicens-Vives, Barcelona, 1973, citado en la bibliografía.

De este modo, podríamos definir el "modelo" como *una representación objetiva de algún aspecto de un problema por medio de una estructura, facilitando el tratamiento teórico y subjetivo, dirigido a resolver algunas cuestiones del problema.* Se trata, pues, de un esquema teórico de un sistema o realidad más o menos compleja que se elabora para facilitar cu comprensión y estudio.

Por tanto, cuando se van a aplicar las Matemáticas, la Estadística o la Investigación Operativa a una situación cualquiera de la Economía real o financiera, una labor previa que debe realizar el investigador es la recogida de datos mediante observaciones y medidas, por lo que induce relaciones y, a través de un proceso más o menos complicado de abstracción, construye un modelo o teoría. En esto consiste precisamente la fase de "conceptualización".

Sobre estos modelos, el investigador trabaja obteniendo teoremas y consecuencias; es la fase conocida como "razonamiento lógico" y puesta en marcha del modelo. Por último, mediante la fase de "desconceptualización", se interpretan estos resultados y se aplican a la situación real.

De un modo muy general, podemos clasificar los modelos utilizados en tres grandes tipos:

a) Modelos pictóricos o icónicos*:*

Son representaciones de estados, objetos o sucesos. En ellos, se representan las propiedades más interesantes de la situación real por medio de una transformación de escala. Por ejemplo, un mapa de carreteras representa la posición relativa de las distintas ciudades y las carreteras que las unen. En este último caso, se habrá recalcado la anchura de la vía de comunicación a una escala gráfica improcedente, dotándola, incluso, de un atractivo colorido.

b) Modelos analógicos:

Consisten en hacer una substitución adecuada de una propiedad de la situación real por otra en el modelo asociado, de acuerdo con ciertas reglas. Por ejemplo, las distintas alturas de una cadena montañosa quedan delimitadas por las curvas de nivel que, como es sabido, constituyen el lugar geométrico de los puntos del terreno que tienen idéntica altitud o cota taquimétrica con respecto al nivel medio del mar o a cualquier otro plano relativo de comparación. Y sin embargo, es obvio que en la realidad del terreno no aparecen las curvas de nivel surcando valles y montañas o serpenteando por las llanuras a la vista arrobada del observador.

c) Modelos simbólicos:

Consisten en expresar las magnitudes que intervienen en el problema de un modo abstracto (FRANQUET, 2008). A este último grupo pertenecen los modelos matemáticos. Generalmente, en su formulación, se siguen las siguientes etapas:

1.ª Se definen las variables que se consideran como más importantes en la explicación del proceso considerado.
2.ª Se establecen relaciones analíticas entre estas variables, como consecuencia de relaciones lógicas plausibles entre las mismas.
3.ª Se estudia la bondad del ajuste del modelo a los datos u observaciones realizados mediante la experimentación.
4.ª En caso de ser aceptado el modelo, se resuelve.
5.ª Se interpretan los resultados y se estudia su relación con la realidad.
6.ª Se hacen previsiones y proyecciones, que constituyen, en definitiva, el objetivo final de la formulación y estudio del modelo.

Respecto de la aplicabilidad de la metodología de los modelos matemáticos en los diferentes campos de las ciencias puras y sociales y de la técnica y la tecnología, podemos señalar tres modalidades principales, a saber:

1.ª Se relacionan magnitudes mediante el empleo de ecuaciones en diferencias finitas y sistemas de las mismas.
2.ª Se relacionan los flujos de entradas y salidas de un sistema a través de matrices y determinantes.
3.ª Se construyen simulaciones de las unidades más elementales que van integrándose en niveles más altos con sus iteraciones recíprocas, hasta llegar a la simulación global.

2.2. MODELOS PARA EL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO

Siguiendo a Angel Alcaide[20], veamos que el método científico se basa muchas veces, en la utilización de *modelos* que, mediante un proceso de abstracción, simplifican la realidad que se quiere estudiar. Cuando en la Geometría elemental se establece el concepto de "línea", se debe pensar en una figura con una sola dimensión (la longitud), sin que pueda encontrarse en la realidad una línea -por fina que sea- que carezca de anchura e, incluso de altura o "grosor".

Aunque la creación de los modelos supone, en general, un meritorio trabajo científico, la tarea no se concluye hasta contrastar el modelo con la realidad y ello exige disponer de los datos adecuados.

[20] *Vide* ALCAIDE INCHAUSTI, Ángel: *Estadística (Introducción). Unidades Didácticas*. Citado en la bibliografía.

Bross[21], en su libro sobre *La decisión estadística* apunta que el empleo de los modelos presenta las siguientes *ventajas*:

a) Es el procedimiento seguido en los sistemas de predicción que ha tenido más éxito.

b) El modelo proporciona una estructura de referencia para la consideración del problema: los "fallos" del modelo señalan a veces una pista sobre las deficiencias de aquél; estos "fracasos" en el modelo del éter, por ejemplo, hicieron posible el formidable trabajo de Albert Einstein[22] referente a la relatividad general.

c) El modelo pone de manifiesto el problema de la abstracción, decidiendo su elaborador qué atributos del mundo real tienen que incorporarse al propio modelo.

d) Al expresar un problema en lenguaje simbólico se tiene la ventaja de la facilidad de manipulación de dicho lenguaje.

e) Los modelos matemáticos, proporcionan el medio más barato para realizar la predicción.

Pero frente a estas ventajas señala también Bross algunas *desventajas*, a saber:

A) Un modelo matemáticamente factible puede exigir grandes simplificaciones, lo que puede restarle exactitud.

B) El lenguaje simbólico está sujeto también a limitaciones de diversa índole.

C) Un científico puede aficionarse tanto a su modelo que, incluso podría llegar a insistir en que dicho modelo es el mundo real, perdiendo, precisamente, la noción de la realidad.

---

[21] *Vide* BROSS, Irwin D.J.: *La decisión estadística*. Ed. Aguilar. Madrid, 1958. Citado en la bibliografía.

[22] He was daring, wildly ingenious, passionately curious. He saw a beam of light and imagined riding it; he looked up at the sky and envisioned that space-time was curved. Albert Einstein reinterpreted the inner workings of nature, the very essence of light, time, energy and gravity. His insights fundamentally changed the way we look at the universe and made him the most famous scientist of the 20th century. Einstein's gifts inevitably resulted in his dwelling much in intellectual solitude and, for relaxation, music played an important part in his life. He married Mileva Maric in 1903 and they had a daughter and two sons; their marriage was dissolved in 1919 and in the same year he married his cousin, Elsa Löwenthal, who died in 1936. Einstein published more than 300 scientific papers along with over 150 non-scientific works. His great intellectual achievements and originality have made the word "Einstein" synonymous with genius. He died on April 18, 1955 at Princeton, New Jersey. (FRANQUET, 2013).

2.3. MODELOS DE SIMULACIÓN

Veamos ahora, dado que le hemos mencionado, unas ideas aclaratorias sobre el concepto de SIMULACIÓN.

Hasta hace relativamente pocos años, algunas disciplinas sociales como la Economía no se han prestado a un desarrollo científico experimental. Faltaba el equivalente a los laboratorios donde se pueden hacer repetidas pruebas y comprobar hipótesis científicas (como, por ejemplo, el sometimiento de un circuito electrónico, de un metal, de un ácido, ... a diversos usuarios o "inputs" y posterior observación de sus reacciones).

De forma muy general, entendemos por SIMULACIÓN la creación de un modelo que reproduce fielmente una estructura, sus relaciones con el mundo circundante y la forma de reaccionar ante ciertos usuarios o "inputs". Una vez construido el Modelo, se pretende medir la eficacia de diversos usuarios, sin necesidad de recurrir a experiencias reales, sino basándose en experiencias "simuladas".

Las políticas a las que someteremos nuestro modelo están representadas por los "inputs" de la figura siguiente, mientras que su eficacia podrá ser evaluada a través de los correspondientes "outputs".

Fijémonos en que esta forma de proceder ha sido ya utilizada en diversos campos de la ciencia y de la ingeniería. Por ejemplo, la industria aeronáutica, antes de lanzar un nuevo avión al mercado, construye un Modelo o prototipo que se somete en un túnel de viento a distintas condiciones simuladas de presión, turbulencias, temperatura, etc. Lo mismo sucede con los modelos económicos. Observando las reacciones del modelo a estos "inputs" se obtienen conclusiones acerca de su futuro comportamiento en condiciones reales de trabajo (vuelo, conducción, irrigación, evolución del PIB). De esta forma se determina si el modelo es satisfactorio y cuáles son las condiciones que ofrecen mejor rendimiento. De la misma manera, se pretende que el experimentador llegue a conclusiones fidedignas sobre la eficacia de las distintas medidas a aplicar.

Al simular el sistema o alguna de sus partes, es preciso llegar a un compromiso entre Realidad y Simplicidad. En general, el estudio de nuestro universo o de cualquier fenómeno muy complejo con el relacionado requiere cierta labor de simplificación por parte del investigador, labor consistente en trasladar un fenómeno real a un Modelo de Estructura más simple, pero que ponga de relieve sus aspectos más importantes.

El método científico ayuda a analizar los problemas desde una óptica tanto cualitativa como cuantificativa. La aceptación o nueva elaboración de hipótesis de trabajo se hallan sujetas a la validez en cada aplicación de las tesis que se deriven de ellas. Realidades más complejas exigen también la elaboración de modelos cada vez más sofisticados. Pero suponiendo que fuera posible construir un modelo tan complicado como el mismo fenómeno que se pretender analizar, nada se habría adelantado, ya que sería difícil de manipular y comprender como la propia realidad.

La simulación se puede aplicar, en principio, a todo problema relativo a un sistema cualquiera. Ahora bien, para poder simular correctamente el comportamiento de dicho sistema, será necesario:

a) Precisar unos objetivos que exijan acrecentamiento del conocimiento.

b) Establecer una maqueta con flujos físicos o informáticos.

c) Definir las transformaciones de cada bloque o subsistema físico.

d) Disponer de series fiables de valores para actuar como VE ("Variables de entrada") en el sistema contemplado.

La simulación exige, pues, partir de un pre-modelo con el triple objetivo de:

1) Contribuir a la elaboración de un modelo.
2) Validar las hipótesis de trabajo.
3) Medir las consecuencias de ciertas acciones correctoras del sistema y buscar -por acrecentamiento del conocimiento- su transformación en modelo.

Para simular el sistema es preciso expresar la transformación que se opera en cada uno de sus bloques. Veamos, como características más importantes de este proceso, las siguientes:

a) Se observa cómo la simulación de un gran sistema puede apoyarse en *investigaciones de optimización local*, que "ponen en cuestión" las prácticas actuales. La utilidad de la simulación es muy grande, en este caso, puesto que de otra forma resulta imposible prever las consecuencias, sobre el sistema global, de la combinación de un conjunto de acciones modificadora de diversos bloques.

b) Permite una *visión dinámica* de la evolución de un sistema económico, al reproducir ficticiamente el recorrido de varias trayectorias:

en pocos minutos, con ordenadores suficientemente potentes, se pueden simular varios meses o años de funcionamiento de un sistema económico en condiciones diversas. No hay, por tanto, dificultad alguna en introducir transformaciones aleatorias complejas que, de otro modo, sería prácticamente imposible calcular.

c) Montar una gran simulación resulta caro en estudios, en programación y en duración de paso por ordenador; además, la interpretación de los resultados es delicada. Sin embargo, la simulación es un *instrumento potente y útil*, que permite "empujar" la modelización lo más lejos posible hasta la consecución de condiciones simples, sintéticas y generales, pudiéndose llegar al establecimiento de un bloque único, el MODELO, que recubre al sistema global cuya maqueta se ha expuesto, expresando las relaciones existentes entre las VE, VS, VI, VA y VES (respectivamente, las variables de entrada, salida, internas, de acción y esenciales, según el esquema melesiano).

d) Veamos, en fin, que la simulación constituye una *técnica didáctica* excelente, que permite visualizar el comportamiento de un sistema económico y controlar hipótesis sobre datos ya conocidos. Con ello, se facilita grandemente la comunicación entre los "especialistas" y los "prácticos".

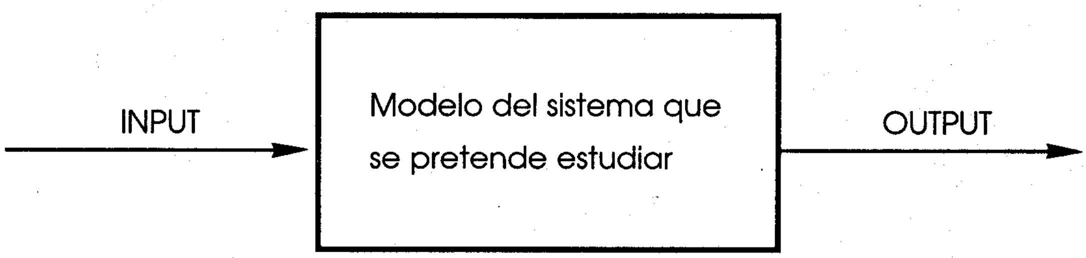


FIG. 1.1. Modelo del sistema económico en estudio.

La diferencia entre un modelo estático y un modelo dinámico (en el que se empleen justamente las ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas que son objeto de estudio en el presente libro) se encuentra en la presencia de “variables con retardos” (“lags”, en inglés), o que vienen referidas a distintos momentos del tiempo, en alguna o algunas de las ecuaciones que constituyen el modelo dinámico. Algunos modelos económicos son un buen ejemplo de ello. Como estas variables con “lags” (retrasos, demoras, retardos o desplazamientos en el tiempo) son endógenas, aplicando el principio locacional, pero se comportan como exógenas, los miembros de la *Cowles Commission* han optado por denominarlas *predeterminadas,* e incluyen en este término tanto a las variables endógenas “desplazadas” como a las exógenas, desplazadas o no. De hecho, pueden considerarse como “variables explicativas” al conjunto de las exógenas y las predeterminadas.

Tanto los modelos estáticos como los dinámicos pueden ser "históricos", siempre y cuando en sus ecuaciones figure explícita la variable independiente "tiempo".

El ejemplo del modelo económico causal de la "telaraña" (R. Risco: "Curso elemental de Econometría") permite aclarar la terminología empleada por Ragnar Risco[23] en su definición del sistema dinámico. En efecto, las ecuaciones que definen el modelo son "ecuaciones funcionales", al ser del tipo de las denominadas "ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes" en la terminología clásica del Análisis Matemático, y su solución general no es un valor determinado, sino un conjunto de ellos.

La presencia de variables origina las ecuaciones funcionales y a ellas se refiere Risco cuando dice que "las variables en diferentes momentos del tiempo se incluyen de una manera esencial". Si en lugar de variables con retardos a desplazamientos finitos de tiempo figuran, en el modelo en cuestión, variables con desplazamientos infinitesimales (esto es, si en lugar de diferencias finitas figuraran derivadas), las ecuaciones funcionales o recurrentes antedichas se convertirían entonces en "ecuaciones diferenciales", pasando del campo discreto al continuo.

Veamos, pues, que las ecuaciones en diferencias finitas y diferenciales ordinarias, así como las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o las ecuaciones integrales, son herramientas matemáticas que podemos implementar de modo de análisis en diferentes situaciones comunes en las ciencias económicas y empresariales. Constituyen una excelente representación de un gran número de situaciones dinámicas de la vida real y su teoría asociada es suficiente como para suministrar elementos útiles para su mejor comprensión.

En muchas situaciones importantes que se presentan en diferentes campos del estudio del ser humano se requieren sistemas matemáticos elaborados para su simplificación o solución. Estos sistemas están, en gran parte, constituidos principalmente por ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias finitas.

[23] Economista noruego (1895-1973). Obtuvo el primer Premio Nobel de Economía que se concedió, en 1969, compartido con Jan Tinbergen, por haber desarrollado y aplicado modelos dinámicos al análisis de los procesos económicos. Estudió y enseñó en la Universidad de Oslo. Fue un miembro destacado de la llamada Escuela Sueca, fundada por K. Wicksell. Él puso nombre a la "Econometría" la rama que aúna el análisis estadístico y el aparato matemático con la economía. En 1930 fundó la *Econometric Society* junto con Irving Fisher y otros. Fue director de la prestigiosa revista *Econometrica* de 1933 a 1935.

A los modelos estáticos no históricos los denomina Samuelson[24] “modelos estacionarios” y a los dinámicos no históricos “modelos causales”.

2.4. LOS MODELOS Y LA TEORÍA DE SISTEMAS

2.4.1. La modelización

El profesor Lorenzo Ferrer Figueras, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Valencia, desarrolla una interesante teoría acerca de las posibilidades del conocimiento y de la acción, donde se pone de manifiesto la importancia de la modelización y de la posterior experimentación sobre la realidad o sobre el propio modelo (simulación).

Una maqueta es una representación estática del individuo F observado, que no explica como éste funciona o evoluciona. Sin embargo, la modelización es una representación dinámica, en cuanto explica cómo funciona y/o evoluciona dicho sistema. Por ello, la explicación puede tener diversos niveles, de los que consideramos los tres siguientes:

1. Análisis de los factores del Sistema.

2. Conocimiento del funcionamiento de un bloque o subsistema.

3. Estudio del comportamiento dinámico de un gran sistema.

El modelo, entendido como una estructura explicativa de un fenómeno, tiene las siguientes características: A) Constituye una representación simplificada de la realidad. B) Es prospectivo, en tanto que explica el comportamiento futuro del Sistema (FERRER, 1972).

Según Minsky[25], “para un operador O, un objeto M es un modelo de un objeto A, en la medida en que O puede utilizar a M para responder

[24] Paul Anthony Samuelson es un economista estadounidense, nacido en Gary, Indiana, de ascendencia judía, el 15 de mayo de 1915. Obtuvo el Premio Nobel de Economía en 1970, por el trabajo científico a través del cual ha desarrollado la teoría económica estática y dinámica y haber contribuido activamente a elevar el nivel del análisis en la ciencia económica. Es autor del manual "Curso de economía moderna", publicado por vez primera en 1945 y que es el libro de texto de Economía para estudiantes universitarios más vendido de la historia. En dicho manual, Samuelson señala las tres preguntas básicas que tiene que responder todo sistema económico: qué bienes y servicios (y en qué cantidad) se van a producir; cómo se van a producir esos bienes (utilizando los factores clásicos de producción: tierra, trabajo y capital); y para quién son dichos bienes y servicios. Además de pedagogo y divulgador, tiene muchas aportaciones originales. Está especialmente interesado en los aspectos dinámicos de la economía. Entre sus principales méritos figuran el desarrollo de las curvas de indiferencia, que permitieron evaluar la utilidad marginal decreciente de un bien sin recurrir a su cuantificación y el haber realizado aportaciones, entre otros economistas reconocidos, a la llamada "síntesis neoclásica", es decir, la fusión en un conjunto coherente de la economía de Keynes con la de sus predecesores.

a las cuestiones que le interesen respecto a A". De acuerdo con esta definición, cualquier razonamiento o decisión están basados en modelos; a veces explícitos y, otras veces, implícitos (FERRER, 1972).

El modelo es un sistema homomorfo del sistema que representa. Por tanto, modelo y sistema tienen el mismo comportamiento. El modelo en fin, será útil y eficaz en la medida que sea:

- simple y elegante (facilita la comprensión).
- general (suscitará asociaciones, analogías).
- formalizado (facilita la simplicidad y posibilita la aplicación de diferentes técnicas de resolución).

2.4.2. Modelos matemáticos y modelos económicos

2.4.2.1. Introducción

En los análisis para la elaboración de teorías, muchos casos pueden ser cuantificados y expresados en el lenguaje formalizado de las matemáticas. La razón de ello es doble: de un lado, se debe al hecho de que gran parte de las magnitudes socioeconómicas son susceptibles de cuantificación, pudiendo ser expresadas como variables que toman valores dentro del conjunto (cuerpo o campo) de los números reales. De otro lado, las variables están interrelacionadas, pudiendo ser expresadas estas relaciones mediante funciones matemáticas adecuadas. Pues bien, las teorías, expresadas en lenguaje matemático, reciben la denominación de "modelos matemáticos".

Los antiguos griegos fueron los primeros en tratar de comprender la naturaleza a partir del análisis lógico. Eratóstenes[26], sin moverse un

[25] Hyman Philip Minsky, uno de los más destacados "post-keynesianos americanos", nació en Chicago y estudió en la *George Washington High School* de New York. Se licenció en matemáticas por la *University of Chicago* en 1941, pero se interesó posteriormente por la Economía y obtuvo el doctorado en Harvard en 1954, especializándose en finanzas.

[26] Eratóstenes nació en Cyrene (Libia) en el año 276 a.C. Fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Estudió en Alejandría y Atenas. Alrededor del año 255 a. C. fue el tercer director de la Biblioteca de Alejandría. Trabajó con problemas de matemáticas, como la duplicación del cubo y los números primos. Escribió muchos libros de los cuales sólo se tienen noticias por referencias bibliográficas de otros autores. Una de sus principales contribuciones a la ciencia y a la astronomía fue su trabajo sobre la medición de la tierra. Eratóstenes en sus estudios de los papiros de la biblioteca de Alejandría, encontró un informe de observaciones en Siena, unos 800 Km. al sureste de Alejandría, en el que se decía que los rayos solares al caer sobre una vara el mediodía del solsticio de verano (el actual 21 de junio) no producía sombra. Eratóstenes entonces realizó las mismas observaciones en Alejandría el mismo día a la misma hora, descubriendo que la luz del Sol incidía verticalmente en un pozo de agua el mismo día a la misma hora. Asumió de manera correcta que si el Sol se encontraba a gran distancia, sus rayos al alcanzar la Tierra debían llegar en forma paralela, si ésta era plana como se creía en aquellas épocas, y no se deberían encontrar diferencias entre las sombras proyectadas por los objetos a la misma hora del mismo día, independientemente de donde se encontraran. Sin embargo, al demostrarse que sí lo hacían (la sombra dejada por la torre de Siena formaba 7 grados sexagesimales con la vertical),

centímetro de Alejandría, mediante supuestos y hábiles simplificaciones, generó un espacio matemático donde la geometría aplicada le permitió encontrar una medida equivalente a la circunferencia de la Tierra, demostrando la teoría de Aristóteles[27] de que el mundo no era plano sino esférico.

El uso de las matemáticas a base de un orden lógico, que va desde las premisas de una cierta teoría hasta las implicaciones de una hipótesis, nos permite la configuración de los "modelos matemáticos", entendidos como la simplificación y abstracción de la realidad, donde se identifican variables y parámetros a partir de los cuales se proponen relaciones entre ellos en forma de leyes que nos ofrecen representar la realidad.

En Economía se plantean los problemas de tal modo que puedan responderse matemáticamente y que dichas respuestas puedan generalizarse. Cuanto más sencillo sea el modelo económico propuesto, más fácil será también usarlo para dar respuestas de tipo general. La validez del mismo dependerá de la validez de las consecuencias que de él se deducen.

Como no es posible controlar todas las variables del problema, es frecuente introducir la condición de "*ceteris paribus*" (nos permite suponer que todo lo demás permanece constante temporalmente, excepto la variable que estamos estudiando). Por ejemplo, cuando analizamos cómo varía la demanda de la carne de vacuno al variar su precio, estamos dejando de considerar otros factores que influyen en la toma de decisión del consumidor, como son el precio de los productos

---

dedujo que la tierra no era plana y, utilizando la distancia conocida entre las dos ciudades y el ángulo medido de las sombras, calculó la circunferencia de la tierra en aproximadamente 250.000 estadios (unos 40.000 kilómetros) lo que sin duda resulta sorprendentemente exacto para la época y sus recursos.

[27] En torno al año 340 a.C., Aristóteles afirma que *la Tierra es redonda*, no plana, y da tres argumentos a favor de esta tesis, a saber:

-En los eclipses lunares siempre se observa que la sombra de la Tierra sobre la Luna tiene forma de arco de circunferencia.
-La diferencia en la posición aparente de la estrella polar entre Grecia y Egipto, que incluso le permite hacer un cálculo del tamaño de la Tierra en 400.000 estadios, aproximadamente unos 80.000 km. de circunferencia (el doble del tamaño real).
-En el mar, cuando un barco aparece en el horizonte, se ven primero las velas y posteriormente el casco del barco.

Además, establece que la Tierra está quieta y el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas se mueven en órbitas circulares y con velocidad uniforme alrededor de ella, ya que el movimiento circular, al ser el más perfecto que existe, es el que debe gobernar los cielos. Sus argumentos sobre la condición y posición de la Tierra le llevan a pensar que no pueden ser simple consecuencia del movimiento de los cielos: la circunferencia de un círculo determina las propiedades de su centro; el cosmos es esférico, luego la tierra había de ser esférica.

substitutivos (carne de pollo, de cerdo o de pescado), el gusto o preferencia de los consumidores por otras carnes, y el ingreso o la renta disponible del consumidor en el mismo período de tiempo. Ningún valor describe toda la información requerida, ya que la cantidad demandada de carne de vacuno dependerá, entre otras cosas, de su precio.

La expresión analítica de un modelo económico se realiza a través de una o varias funciones que nos indican las relaciones existentes entre las variables, designadas literalmente por X, Y, Z. Generalmente, trataremos modelos económicos simples, formados en su mayoría por una sola función que relaciona dos variables. Así en la "Función Oferta" las cantidades ofrecidas de un bien dependerán del precio del mismo, o en la "Función Demanda", donde las cantidades demandadas de un bien también dependerán de su precio.

En Economía, es común hablar de las leyes de la oferta y la demanda. La ley de la oferta se refiere a la cantidad disponible de un producto que se lleva al mercado para su consumo. La de la demanda nos habla de la cantidad que un cierto público compra de ese mismo producto. La relación que se establece entre estas dos variables es una función económica.

Así pues, para expresar un modelo económico utilizaremos el concepto matemático de función, entendiendo por tal a la relación de dependencia e interdependencia existente entre las diferentes variables económicas en estudio. Una función económica es, pues, una función continua y biyectiva con dominio y condominio en los números reales no negativos, que representa a un modelo económico.

También en Economía, las funciones pueden adoptar tanto formas teóricas muy complejas como muy simples, pero aquí trabajaremos fundamentalmente con funciones económicas de una sola variable y principalmente de tipo lineal, que resultan ser las más comunes. Las funciones económicas se grafican en el primer cuadrante del círculo de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, como tendremos ocasión de comprobar a lo largo del presente libro, en multitud de ejemplos resueltos.

Los valores que asumen las variables deben tener sentido económico, y como tal estarán restringidos a números reales positivos, tal como se ha dicho. Si nos referimos a precios o cantidades no podremos hablar de valores negativos; por ejemplo, producir (-5) litros de leche de vaca, o vender a (-7) € el kg. de carne de conejo carece de significado.

2.4.2.2. Variables exógenas y endógenas

Para poder profundizar más en la idea de "modelo matemático" es necesario no perder de vista que al ser el modelo la expresión formal de un análisis (o bien de una teoría) de carácter deductivista y que en dicho análisis se cumplen unos supuestos de partida, el modelo matemático consiste en la expresión de tales supuestos en lenguaje matemático a través de un conjunto de ecuaciones (a veces también de inecuaciones). Una vez construidos, ciertos modelos se pueden usar para predecir muchas situaciones físicas, como el pronóstico del tiempo climatológico, el crecimiento de un tumor cancerígeno o el resultado de la rueda de una ruleta; todos esos ejemplos pueden conectar con alguna forma de modelos matemáticos.

El conjunto de aquellas ecuaciones constituyen la "formulación" del modelo. Estas ecuaciones son las relaciones que, según los supuestos de partida, se dan entre las variables socioeconómicas. De estas variables, unas se suponen conocidas (variables exógenas o datos), y las demás son las incógnitas (variables endógenas) cuyos valores han de ser calculados en función de las exógenas.

Dicho lo anterior, veamos qué problemas se nos plantean al utilizar el modelo matemático y qué recursos matemáticos serán necesarios para resolverlos.

2.4.2.3. Problemas que se plantean

A) Primer problema

El primer problema con que nos enfrentamos es el de expresar los conceptos, y los supuestos de la respectiva teoría, en lenguaje matemático. En las teorías socioeconómicas de enfoque marginalista[28], la resolución de un problema viene facilitada porque en dicho enfoque se admiten los siguientes extremos:

[28] El término "marginal" resulta de gran relevancia al momento de estudiar los principios principales que se estudian en la microeconomía Así, para poder hablar sobre el análisis marginal en la economía, es necesario tener conocimientos previos, como son los que a continuación siguen: Historia de la corriente de marginalidad, Costo marginal, producto marginal e ingreso marginal, Utilidad marginal y maximización de la utilidad, etc. En la segunda mitad del siglo XIX (inicios del año 1870) tres economistas: Stanley Jevons, Carl Menger y Leon Walras, publicaron trabajos muy similares, los cuales son base del marginalismo, escuela que predominó hasta el advenimiento del keynesianismo ya entrado el siglo XX. El análisis marginal nace del análisis de la utilidad marginal decreciente de los bienes, concepto que posteriormente se generalizó. El enfoque marginal de la microeconomía observa la maximización de variables económicas considerando un margen (última unidad del bien consumido, producido, intercambiado o retenido).

a) Que las variables socioeconómicas son susceptibles de ser expresadas por números reales y que admiten variaciones infinitamente pequeñas. Es decir, son variables reales continuas.

b) Que las relaciones existentes entre las variables socioeconómicas pueden ser expresadas por funciones reales de diversos tipos, que suelen ser continuas y derivables repetida o iterativamente.

De hecho, la expresión de los conceptos en forma matemática está posibilitada por las dos características anteriores. Pero las dos características que admite el enfoque marginalista no solamente posibilitan la expresión de los conceptos en términos matemáticos sino que, además, permiten expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones (o inecuaciones) que forman el modelo matemático. Los supuestos de la teoría especifican cuáles son las relaciones que existen entre las variables socioeconómicas, y al ser estas relaciones expresables por medio de funciones reales, basta con utilizar el gran arsenal de funciones reales de que dispone la Matemática para poder expresar los supuestos de la teoría en forma de ecuaciones o inecuaciones. De este modo, queda la teoría expresada como un sistema de ecuaciones que constituyen la formulación del modelo matemático de la teoría en cuestión. Además, en muchos casos puede hacerse una representación gráfica del modelo, lo que le hace mucho más intuitivo.

Construir un modelo puede resultar un proceso prolongado y difícil que suele llevar varios años de investigación. Una vez formulados, quizás sea virtualmente imposible resolver los modelos de modo analítico. En este punto, el investigador cuenta con dos opciones: a) Simplificar, esto es, hacer pequeños cambios al modelo con el fin de mejorarlo y hacerlo más manejable; éste es un enfoque válido siempre y cuando la simplificación antedicha no comprometa excesivamente la conexión con el mundo real y, por lo tanto, su utilidad, y b) Dejar el modelo tal como está, y usar otras técnicas, tales como métodos gráficos o numéricos, lo que representa un enfoque cualitativo; en tanto que no tengamos una solución exacta, analítica, de algún modo obtenemos algo de información que puede arrojar cierta luz sobre el modelo y su aplicación (las herramientas tecnológicas pueden servir de gran ayuda en este enfoque).

Supongamos ahora que tenemos una situación de la vida real en que queremos encontrar la cantidad de material radiactivo existente en cierto elemento. La investigación debe ser capaz de construir un modelo para esta situación bajo la forma de una ecuación diferencial que parece "muy difícil" de entrada. Se puede usar la tecnología para ayudarnos a resolver la ecuación, puesto que los programas de computación nos dan una respuesta adecuada. Las respuestas tecnológicas son luego interpretadas o comunicadas a la luz de la situación de la vida real (en este caso, la cantidad de material radioactivo). La figura siguiente ilustra este ciclo.

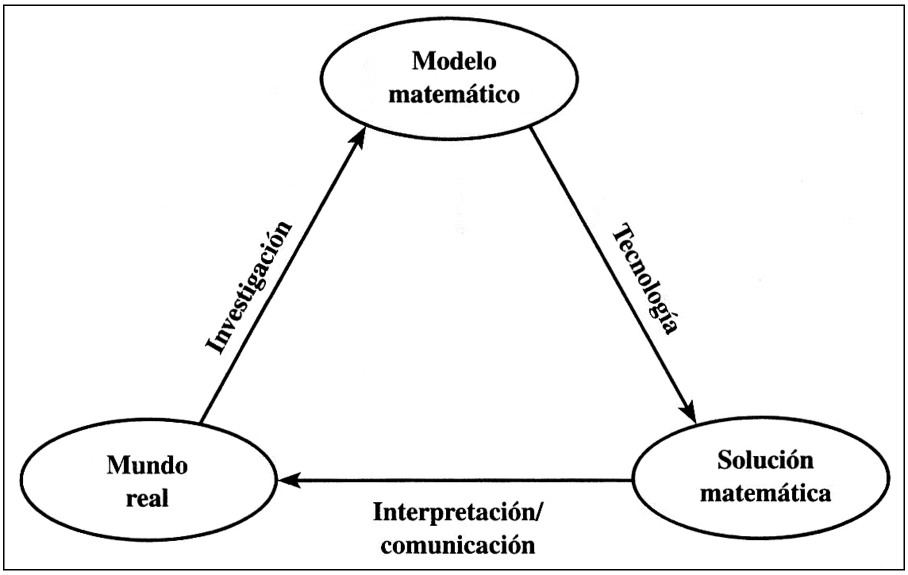


FIG. 1.2. Ciclo de un modelo matemático.

B) Segundo problema

El segundo problema que se nos plantea, una vez ya formulado el modelo, es el de deducir las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros que pueden figurar en las relaciones que forman el modelo.

Si se tiene en cuenta que un modelo matemático no es otra cosa que un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son las variables endógenas, se comprende fácilmente que el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros, requiere la utilización de “técnicas matemáticas” para resolver sistemas de ecuaciones. Estas técnicas son muy variables dependiendo de la naturaleza de las ecuaciones que forman el modelo.

Las más usuales, en cualquier caso, son las siguientes:

- Cuando el modelo consiste en un sistema de ecuaciones lineales, ha de recurrirse a las “técnicas de resolución de sistemas lineales”, donde la discusión del conocido teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker adquiere singular relevancia. Si el número de ecuaciones es elevado, resulta preciso recurrir a los Métodos Matriciales, que presentan la gran ventaja de ser resueltos hoy en día con el auxilio del ordenador y el software adecuado.

- Cuando el modelo consista en optimizar (maximizar o minimizar) una función cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por igualdades, la resolución del modelo requiere el empleo de las técnicas matemáticas propias del "Cálculo de Extremos Relativos" (máximos y mínimos locales) propias del Cálculo Infinitesimal clásico, como el método de los multiplicadores u operadores de Lagrange (caso condicionado). Si no hay restricciones se emplean también técnicas propias del Cálculo Diferencial.

- Cuando el modelo consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal cuyas variables estén sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales, ha de recurrirse a las técnicas de la "Programación lineal", que es una parte de la Investigación Operativa.

- Cuando el modelo consiste en optimizar una función no lineal cuyas variables están sometidas a restricciones dadas por desigualdades lineales o no lineales, la resolución del modelo ha de hacerse a través de las técnicas matemáticas de la "Programación no lineal", también propias de la Investigación de Operaciones, o bien a las condiciones necesarias de optimalidad de Kuhn-Tucker.

Mediante el empleo de las técnicas anteriores, o bien de otras varias no mencionadas, se resuelve el problema de deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros. Es precisamente en esta fase deductiva donde las Matemáticas colaboran en forma esencial con el análisis. La deducción matemática presenta la ventaja de su rapidez y de llegar allí donde la deducción verbal le es a veces imposible, como ya hemos señalado en la Introducción al presente libro. El dominio de las mencionadas técnicas matemáticas resulta de vital importancia si se quiere llegar a emplear el lenguaje matemático en los análisis a efectuar. Dicho dominio exige que, previamente, se conozcan las propiedades esenciales de las funciones reales, tanto de una variable como de varias.

C) Tercer problema

El tercero y último de los problemas que presenta un modelo matemático es el de deducir las conclusiones del modelo. Estas conclusiones suelen expresarse analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas, antes calculados, al producirse una alteración en una de las variables exógenas o en uno de los parámetros. Las variaciones que experimentan las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas o parámetros constituyen las "Predicciones del Modelo". Estas predicciones son las que deben servir de base a la hora de tomar decisiones por parte del experimentador. La deducción de las conclusiones del modelo suele requerir el uso de las derivadas parciales cuyo tratamiento específico no es objeto del presente libro. Para analizar cómo se ve afectado el valor de una de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas, basta con calcular la derivada parcial de la variable endógena respecto a la exógena.

La exposición efectuada hasta aquí ha pretendido resaltar dos cuestiones, sin ánimo de dejarlas resueltas:

- La primera de ellas es un intento de clarificar de qué manera las Matemáticas van a servir a las teorías al uso.

- La segunda de las cuestiones es la de anticipar cuáles van a ser las necesidades matemáticas, o parte de dichas necesidades, que demandan los análisis de enfoque marginalista.

Resumiendo todo lo expuesto hasta ahora, cabe destacar lo siguiente:

- Que muchas de las teorías de carácter deductivista pueden ser expuestas en forma matemática a través de los modelos matemáticos.
- Que el manejo de un modelo matemático presenta tres problemáticas diferenciadas temporalmente, a saber:

1. Formulación del modelo.

2. Deducción de los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.

3. Deducción de las conclusiones del modelo, analizando cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración en una de las variables exógenas o parámetros.

- Que la resolución de las anteriores disyuntivas requiere, desde el lado matemático, conocer las siguientes cuestiones:

a) Las propiedades generales de las funciones reales, tanto de una como de varias variables reales, así como los conceptos matemáticos de las mismas, orientado este estudio a exponer los conceptos en forma matemática y a expresar los supuestos de la teoría en la forma de un sistema de ecuaciones o inecuaciones que constituyen la formulación del modelo.

b) El desarrollo de técnicas matemáticas diversas (resolución de sistemas lineales, cálculo de extremos relativos, programación lineal y lineal paramétrica, programación no lineal, cuadrática, dinámica, en números enteros, hiperbólica, etc.) con las que se haga posible deducir los valores de las variables endógenas en función de las exógenas y de los parámetros.

c) El cálculo de derivadas parciales, tanto de funciones simples o explícitas como de funciones compuestas o implícitas, con las que se haga posible la deducción de las conclusiones del modelo cuando se analicen cómo se ven afectados los valores de las variables endógenas ante una alteración de una de las variables exógenas o parámetros.

2.4.2.4. Formulación de los modelos matemáticos

Una vez resuelto el problema de saber expresar matemáticamente las relaciones de los modelos especificados en la teoría, estamos en condiciones de abordar la "formulación de los modelos". No obstante creemos necesario hacer antes algunas puntualizaciones en forma de preguntas, a saber:

a) ¿Cuáles son las variaciones endógenas y exógenas?

En primer lugar, para formular el modelo matemático de una cierta teoría, es necesario conocer qué es lo que trata de determinar dicha teoría. O dicho en otros términos: conocer cuáles son las variables endógenas y cuáles las exógenas. Las primeras son las que la teoría trata de determinar en términos de las exógenas.

b) ¿Aparecen explicitadas todas las relaciones?

Una vez aclarado este punto, es necesario fijarse en las especificaciones contenidas en los supuestos de la teoría e ir expresándolas en términos matemáticos. Ahora bien, ocurre que las Relaciones de Definición y de Condición no suelen venir explicitadas, y sin embargo han de aparecer en la formulación del modelo. Por ello, al formular un modelo debe tenerse sumo cuidado con las Relaciones de Definición y de Condición. Las Relaciones de Comportamiento siempre vienen especificadas en los supuestos de la teoría.

c) ¿Es el modelo completo?

Después de haber expresado en forma matemática las Relaciones que forman el modelo, debe procederse, a modo de comprobación, a observar si el modelo es completo. Para ello, ha de suceder que el número de ecuaciones sea igual al número de variables endógenas (incógnitas). De lo contrario, lo más probable es que falten ecuaciones (tal vez alguna de las Relaciones de Definición o de Condición no explicitadas) aunque también puede ser que se trate de un sistema compatible indeterminado en los términos definidos por el teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker, es decir un modelo en el que haya más variables endógenas que ecuaciones y por tanto con infinitas soluciones para las variables endógenas. También podríamos encontrarnos con sistemas incompatibles (sin solución).

Veamos, en fin, que una de las características fundamentales de los modelos de análisis puede ser la aparición de la variable temporal que, según su presencia o no, se clasifican en dinámicos (no inerciales o inerciales) y estáticos. No nos extenderemos más en este tipo de modelos, cuyo estudio sería más propio de otra investigación.

2.4.3. Otra clasificación de los modelos

Pueden esquematizarse del siguiente modo:

MODELO DE REFERENCIA
- Modelo de información creciente
- Modelo de conocimiento
  - Modelo de análisis
  - Modelo funcional
  - Modelo de comportamiento dinámico del sistema

, cuyas definiciones respectivas son las siguientes:

- **Modelos de referencia**: son estructuras lógicas, proyectadas sobre la maqueta de un F (individuo observado o sujeto a experimentación) real, que permiten ampliar el proceso de acrecentamiento del conocimiento. Enriquecen y desarrollan los modelos implícitos a través de los cuales se ordenan y estructuran nuestras percepciones; para ello, explicitan las hipótesis de base o de partida, los objetivos finales, los factores en juego y sus interacciones.

- **Modelo de información creciente**: es una estructura de acogida e interpretación progresiva de la información. Debe tener las propiedades de un sistema: ser adaptativo y ser capaz de aprender.

- **Modelo de conocimiento**: reducen la indeterminación y explican las transformaciones.

- **Modelo de análisis**: reduce la variedad de un conjunto de elementos (serie de observaciones estadísticas sobre los factores) y halla clasificaciones explicativas (modelos de segmentación con técnicas matemáticas, estadísticas e informáticas).

- **Modelo funcional**: explica satisfactoriamente el comportamiento de las estructuras funcionales, define la naturaleza de las variables en juego (VE, VS, VI, VES, VA), así como su articulación lógica. Por último, permite comprender el funcionamiento de los bloques o subsistemas. Desde luego, la elaboración de estos modelos será necesaria para preparar la acción sobre el sistema.

- **Modelo de comportamiento dinámico de un sistema**: con gran frecuencia, el sistema aparece en régimen transitorio. Forrester[29] ha presentado un modelo de dinámica, basado en el mecanismo de "feedback" o retroalimentación industrial, que permite explorar los regímenes transitorios de un gran sistema y el establecimiento de curvas de respuesta de las VES (variables esenciales) para ciertas categorías de perturbaciones en las VE (variables de entrada). El modelo tiene en cuenta las interacciones entre los flujos que circulan. En cada red se tienen en cuenta los siguientes conceptos: los niveles, las tasas de flujos, las funciones de decisiones y los canales de información.

Con relación a esto último, conviene aclarar que los niveles son los puntos de acumulación de los flujos y resultan de la diferencia entre los flujos de entrada y de salida. Las tasas definen el flujo instantáneo entre los niveles, y corresponden a la actividad. Los niveles miden el estado que llega del sistema, a causa de la actividad. La fijación de las tasas, que corresponde al Sistema Gestor, viene dada por las VA (variables de acción), resultando funciones de decisión que representan elecciones o acciones programadas basadas en el valor de los niveles (FERRER, 1972).

En particular, la dinámica de un bloque de un sistema económico vendrá dada por la siguiente formulación:

[29] En la década de los años 70 del siglo XX, hubo un avance decisivo en el campo de la computación y, como consecuencia, se desarrollaron programas para realizar simulaciones por ordenador. También se propusieron modelos con la intención de prever la evolución de la economía mundial. En el año 1972, se presentó el *Primer Informe del Club de Roma* titulado *The Limits to Growth*. Fue obra de Jay Forrester y Dennis Meadow, del MIT y en él, los autores desarrollaron el modelo **World2** formulado desde la perspectiva de la Dinámica de Sistemas. Este modelo fue uno de los primeros *Modelos Globales* que se han utilizado y también, junto con sus revisiones, uno de los más importantes. El modelo atrajo la atención de la comunidad dedicada a realizar prospecciones del futuro e impulsó el desarrollo de muchos modelos posteriores. Su característica principal era la habilidad para unir y combinar elementos, como la producción industrial, la población, cuestiones medioambientales, la alimentación y la energía en un mundo a escala aunque de forma agregada, es decir, sin considerar diferencias de desarrollo entre las distintas zonas geográficas. Mesarovic y Pestel desarrollaron el modelo **World Interdependence Model (WIM)**, que considera el mundo divido en regiones y con el que se preparó el *Segundo Informe del Club de Roma* en el año 1974 bajo el título *Mankind at the Turning Point*. Este tipo de modelos se denominan *Modelos Globales* y están caracterizados por los siguientes puntos:
- El modelo pretende hacer prospecciones del futuro.
- El modelo abarca todo el mundo o, al menos, las influencias recíprocas entre zonas amplias del planeta.
- El modelo intenta unir áreas diferentes pero relacionadas como la economía, la alimentación, el medio ambiente,...

$$E \rightarrow \boxed{\phi} \rightarrow S$$

$$\frac{d\phi}{dt} = S - E, \text{ de donde: } \phi = \int (S - E)dt = S \cdot T, \text{ y : } \frac{\phi}{T} = S; \text{ siendo:}$$

$$\begin{cases} \phi = \text{nivel de flujo (corresponde al estado del sistema).} \\ S = \text{tasa de flujo de salida = flujo instantáneo (corresponde a la actividad).} \\ E = \text{tasa flujo de entrada = ídem anterior.} \\ T = \text{demora (constante).} \end{cases}$$

De las expresiones anteriores, se deduce que:

$$\frac{d\phi}{dt} = T\frac{dS}{dt};$$

de donde, substituyendo en la ecuación inicial, se tiene:

$$S - T\frac{dS}{dt} = E,$$

o lo que es lo mismo, se llega a la denominada "ecuación de transferencia":

$$(1 - T\frac{d}{dt})S = E .$$

El modelo de dinámica industrial está constituido, en definitiva, por el conjunto de todas las ecuaciones que ligan las tasas y los niveles de flujo de los diferentes bloques del sistema. Así:

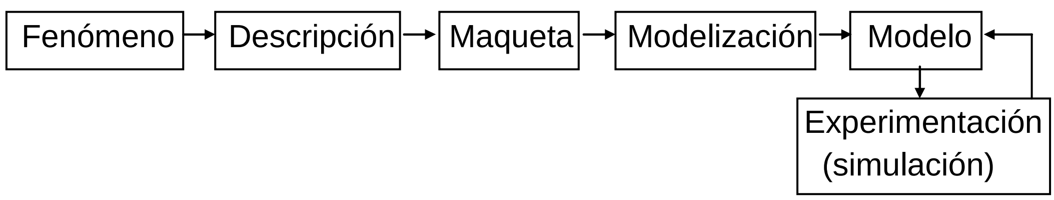


FIG. 1.3. Diagrama funcional de un modelo dinámico.

3. LOS MODELOS DINÁMICOS: CONCEPTUALIZACIÓN

Ya con anterioridad hemos introducido el concepto de *modelo dinámico* en contraposición conceptual al de *modelo estático*. Pues bien, los análisis dinámicos o estructurales son aquellos que van referidos a lo largo de un horizonte temporal durante el cual no cabe admitir que los factores seleccionados en la modelización permanezcan invariables, sino, por el contrario, se consideran como funciones del tiempo f(t), describiendo trayectorias temporales que, para las variables exógenas, se suponen determinadas fuera del análisis. Las trayectorias temporales de los precios de mercado (microeconomía) o de la renta nacional (macroeconomía) constituyen relevantes ejemplos de ellos que tendremos ocasión de contemplar en nuestro libro mediante la resolución de numerosos ejercicios.

La ubicación de las variables en el tiempo es un rasgo relevante de los análisis dinámicos. Introduce en nuestro panorama una consideración temporal que puede hacerse de dos formas: considerar el tiempo como una variable continua o como una variable discreta. En el primer caso, en cada punto o instante del tiempo "le pasa algo" a la variable, en tanto que en el segundo la variable experimenta un cambio solo una vez en cada período. Cabe citar, como ejemplos en el análisis financiero, la capitalización continua (ecuación diferencial) y la capitalización anual (ecuación en diferencias finitas), respectivamente.

El objetivo de un análisis dinámico es el estudio de la trayectoria temporal específica de alguna variable, sobre la base de una forma conocida de cambio temporal. Fijado este último y el valor que toma la variable y en un instante del tiempo, queda determinada la trayectoria temporal específica, y(t).

El valor de la variable para t = 0, $y(0) = y_0$ se conoce por "condición inicial" del problema; al respecto solucionaremos algunos problemas de ecuaciones diferenciales y recurrentes aplicadas a la economía que incluyen precisamente estas condiciones; son los denominados "problemas de valor inicial" (PVI).

El cambio temporal puede adoptar muchas formas. La más simple es expresando la "tasa de cambio por unidad de tiempo" en función del tiempo y de la propia variable. Así:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f(t, y) .$$

En la versión de tiempo continuo, la unidad de tiempo se puede tomar infinitamente pequeña (dt), y la tasa de cambio por unidad de tiempo va a asociada a la primera derivada:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} .$$

Pues bien, dada la relación:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \,,$$

y la condición inicial $y(0) = y_0$, queda ya determinada la trayectoria temporal y(t) cuyo estudio se pretende. La ecuación anterior:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \,,$$

es una “ecuación diferencial de primer orden”. Su solución general se obtiene por integración y da como resultado una familia o haz de trayectorias, debido a la constante arbitraria que aparece al integrar. La condición inicial $y(0) = y_0$ permite precisamente determinar el valor de la constante de integración, quedando así conocida la trayectoria temporal específica de la variable, y(t), lo que constituye una solución o integral particular del problema planteado. Algo parecido sucede también con las ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes, como tendremos ocasión de comprobar oportunamente en los capítulos siguientes de nuestro libro.

Parte II:

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

- EDO de primer orden.
- EDO de orden *n*.
- Aplicaciones de las EDO a la Microeconomía.
- Otras aplicaciones económicas de las EDO.
- Resolución de las EDO por series de potencias y operadores.
- La transformación de Laplace.

* * * * * * *

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

En líneas generales, resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden consiste en encontrar la "familia o haz de curvas" $y = y(x,c)$ que satisfaga la susodicha ecuación, es decir, tal que: $y'(x,c) = f[x, y(x,c)]$, $\forall c$. Este haz de curvas se denomina *haz integral, integral general o solución general* de la ecuación diferencial, y cada una de las curvas que lo componen son *soluciones o integrales particulares* de esta ecuación. En general, las soluciones particulares las podemos hallar dando valores a la constante *c* en la solución general, como veremos en el ejemplo siguiente.

Pues bien, si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se puede escribir en la forma:

$$f_1(x)\cdot dx = f_2(y)\cdot dy,$$

recibe el nombre de ecuación de *variables separables* o *separadas*. En definitiva, en este tipo de ecuaciones los factores que multiplican a *dx* y *dy* son, respectivamente, funciones solamente de *x* o de *y*.

La integral general se obtiene mediante una cuadratura (se entiende por "cuadratura" la obtención de una primitiva); siendo $F_1(x)$ y $F_2(y)$, respectivamente, las primitivas de $f_1(x)$ y $f_2(y)$, se tendrá:

$$\int f_1(x)\cdot dx = \int f_2(y)\cdot dy,$$

de donde, se obtiene la integral general, dependiendo de una única constante arbitraria:

$$F_1(x) = F_2(y) + c.$$

Si nos hubieran dado alguna condición inicial, por ejemplo, "pasar por un punto determinado", la constante se determina imponiendo la referida condición.

Algunas ecuaciones diferenciales no son de variables separadas, pero pueden reducirse a ellas mediante cambios de variables adecuados. Esto ocurre con las ecuaciones de la forma:

$$\boxed{y' = f(ax + by + c)}\ ,$$

que se reducen a variables separadas con el cambio: $z = ax + by + c$.

Entonces, $z' = a + by'$, lo que transforma la ecuación planteada en:
$\frac{z'-a}{b} = f(z)$, que ya es de variables separadas.

Si las ecuaciones se presentan bajo la forma:

$f(x)\cdot f_1(y)\cdot dx + \varphi(x)\cdot\varphi_1(y)\cdot dy = 0$, se deduce que:

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{f_1(y)}dy = c\ ,$$

se transforman en el tipo de variables separadas dividiendo por el producto $f_1(y)\cdot\varphi(x)$.

Veamos, en fin, que las EDO del tipo: $y' + y\cdot f(x) = 0$ son también ecuaciones de variables separables, puesto que se pueden escribir en la forma:
$\frac{dy}{y} = -f(x)\cdot dx$. Integrando: $\ln y = -\int f(x)\cdot dx + C$, y resulta la I.G.:
$\boxed{y = e^{-\int f(x)\cdot dx + C} = K\cdot e^{-\int f(x)\cdot dx)}}$, donde se ha hecho: $K = e^C$.

2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Son de la forma: $y' = dy/dx = f(y/x)$.

Escrita la ecuación diferencial de primer orden en la forma:

$$M(x, y)\cdot dx + N(x, y)\cdot dy = 0,$$

se dice que dicha ecuación es “homogénea” si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas y del mismo grado *n* en *x* e *y*, esto es si:

$$M(tx, ty) = t^n\cdot M(x, y) \quad \text{y} \quad N(tx, ty) = t^n\cdot N(x, y).$$

Efectuando el cambio de variable: $y = t\cdot x$ ($t = y/x$), de donde:

$$\frac{dy}{dx} = t + \frac{dt}{dx}\cdot x\ ;$$

la ecuación anterior se convierte en: $M(x,tx) + N(x,tx)(t + \frac{dt}{dx} \cdot x) = 0$,

y simplificando por $x^n = x' = x$; $M(1,t) + N(1,t)(t + x\frac{dt}{dx}) = 0$, o bien:

$$M(1,t) + tN(1,t) = -N(1,t)x\frac{dt}{dx}\text{, de donde:}$$

$$\boxed{\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,t)dt}{M(1,t) + tN(1,t)}}$$

, que es una ecuación de variables *x* y *t* separables, cuya integración resulta conocida mediante una cuadratura.

De manera alternativa, la solución buscada se puede obtener volviendo a escribir la ecuación diferencial como:

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$, y luego substituyendo: x = y·u, con la derivada correspondiente: $\frac{dx}{dy} = u + \frac{du}{dy} \cdot y$, en la ecuación anterior. Después de simplificar, la ecuación diferencial resultante será una con variables separables (esta vez, *u* e *y*). Comúnmente, resulta indistinto qué método de resolución se use. Sin embargo, algunas veces una de las substituciones resulta definitivamente superior a la otra; en tales casos, la mejor substitución a efectuar, por lo general, es evidente a partir de la forma de la propia ecuación diferencial problema.

Por otra parte, hay ciertas ecuaciones que son reducibles a homogéneas, y que presentan la configuración:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Para transformarlas en homogéneas trasladamos el origen al punto de intersección de las rectas de las siguientes ecuaciones que resolvemos como sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

y si la solución es el par (x_0, y_0) realizamos el siguiente cambio de variables:

$$\left.\begin{array}{l} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{array}\right\}$$

donde *u* es la nueva variable independiente o explicativa y *v* la nueva variable dependiente o funcional.

3. ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una ecuación de primer orden y lineal, esto es, de primer grado en la función y en sus derivadas, solo puede tener términos en y, en y' además de aquellos independientes de y. Adoptará, por tanto, la forma general:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + X \cdot y + X_1 = 0},$$

donde X y X_1 representan funciones de la única variable independiente x.

Si $X_1 = 0$, la ecuación recibe el nombre de "homogénea"; empezaremos por la integración en este caso particular.

Sea, por tanto, la ecuación lineal de primer orden y homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + X \cdot y = 0 \,.$$

Su integración resulta inmediata, puesto que se trata de una ecuación de variables separables, así:

$\frac{dy}{y} = -X \cdot dx$. Integrando: ln y – ln C = $-\int X \cdot dx$; ln(y/C) = $-\int X \cdot dx$,

de donde: $\boxed{y = - C \cdot e^{-\int X \cdot dx}}$ $\Rightarrow$ I. G.

Para la integración de la ecuación completa, seguiremos un procedimiento muy utilizado en la resolución de las ecuaciones diferenciales, denominado "variación de constantes". Consiste el método en substituir la constante C, hallada anteriormente, por una función desconocida que designaremos por C(x), de forma tal que:

$$y = - C(x) \cdot e^{-\int X \cdot dx} \quad [I]$$

verifique a la ecuación completa, esto es, a la ecuación:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0} \quad [II]$$

Derivando en [I], se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dC}{dx} e^{-\int X \cdot dx} + C \cdot X e^{-\int X \cdot dx} .$$

Substituyendo en [II] los valores de y e y', se tendrá que:

$$-\frac{dC}{dx} e^{-\int X \cdot dx} + C \cdot X \cdot e^{-\int X \cdot dx} - X \cdot C e^{-\int X \cdot dx} + X_1 = 0 ,$$

o sea: $\frac{dC}{dx} e^{-\int X \cdot dx} = X_1$, de donde: $dC = X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx$.

Seguidamente, una cuadratura proporciona: $C + K = \int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx$, donde por K se representa la nueva constante. Substituyendo en [I] C por su valor, se obtiene, en definitiva, la fórmula [III]:

$$\boxed{y = e^{-\int X \cdot dx} [K - \int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx]} \Rightarrow \text{I. G.}$$

que es la integral general de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

Veamos, a continuación, el siguiente ejemplo ilustrativo:

Se trata de resolver la ecuación diferencial genérica: $y' + y \cdot f(x) + g(x) = 0$, siendo y una función económica cualquiera.

Solución:

Para integrar esta ecuación, conocida con la denominación de "ecuación lineal de primer orden", se empieza por resolver la ecuación homogénea:
$y' + y \cdot f(x) = 0$, cuya integral general, obtenida en la teoría anterior, es:

$y_1 = K \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}$. A continuación, se supone que la constante K es una función K(x), que se determina con la condición de que:

$y_1 = K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}$, verifique la ecuación propuesta. Como:

$y_1' = K'(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} - K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} \cdot f(x)$, substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$K'(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} - K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} \cdot f(x) + K(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} \cdot f(x) + g(x) = 0 ,$$

o bien: $K'(x) \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx} + g(x) = 0$, de donde: $K'(x) = -g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx}$, e integrando mediante una cuadratura, se obtiene que: $K(x) = C - \int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx$, donde C es la nueva constante de integración.

Por lo tanto, la integral general de la ecuación propuesta, coincidente con la expresión [III] anterior, es la siguiente:

$$\boxed{y = \left[C - \int g(x) \cdot e^{\int f(x) \cdot dx} \cdot dx \right] \cdot e^{-\int f(x) \cdot dx}}$$

, que constituye la formulación teórica válida para la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias, como ya hemos tenido ocasión de resaltar en la introducción teórica, en que se ha hecho:
$g(x) = X_1(x)$ y $f(x) = X(x)$.

4. ECUACIÓN DE BERNOUILLI

Entre las numerosas ecuaciones diferenciales que mediante un adecuado cambio de variable se pueden reducir a lineales de primer orden, se encuentra la conocida como ecuación de Bernouilli[1], que se presenta al resolver diversos problemas de la ciencia y de la técnica. Su forma general es:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + X \cdot y + X_1 \cdot y^n = 0} \quad (\forall n \in \Re \neq 0),$$

donde X y X_1 representan funciones de la única variable independiente x.

Obsérvese que la ecuación de Bernouilli es de primer orden y de primer grado, pero sin embargo, no es lineal. Para su resolución basta dividir por y^n, efectuando a continuación el cambio,

$$\frac{1}{y^{n-1}} = t \,; \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{-(n-1) \cdot y^{n-2} \cdot \frac{dy}{dx}}{y^{2n-2}} \,; \text{ de donde:}$$

$$-\frac{(n-1)}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dt}{dx} = \frac{1-n}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx}},$$

[1] **Daniel Bernouilli (**8 February 1700 – 17 March 1782) was a Swiss mathematician and physicist and was one of the many prominent mathematicians in the Bernouilli family. He is particularly remembered for his applications of mathematics to mechanics, especially fluid mechanics, and for his pioneering work in probability and statistics. Bernouilli's work is still studied at length by many schools of science throughout the world. (FRANQUET, 2013).

quedando la ecuación convertida en una lineal de primer orden cuya integral general viene dada, como hemos visto, por la expresión:

$$\boxed{y^{1-n} = (1-n)\cdot e^{-\int (1-n)\cdot X\cdot dx}\left[C - \int e^{\int (1-n)\cdot X\cdot dx} X_1\cdot dx\right]}$$

, o bien por:

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{(1-n)\cdot e^{-\int (1-n)\cdot X\cdot dx}\left[C - \int e^{\int (1-n)\cdot X\cdot dx} X_1\cdot dx\right]}}}$$

5. ECUACIÓN DE RICCATI

El conocimiento de una integral o solución particular de una ecuación diferencial, simplifica, en general, el proceso resolutivo de la ecuación mediante el cambio $y = y_p + u$, donde por y_p representamos una solución particular de la ecuación dada y por *u* una nueva función. En otras ocasiones, el conocimiento de una solución particular se debe aprovechar mediante la substitución: $y = y_p \cdot u$.

Como ejemplo de aplicación, presentamos la denominada ecuación de Riccati[2] que adopta la forma:

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0 \ ,$$

donde X, X_1 y X_2 representan funciones de la única variable independiente x. Si falta X resulta una ecuación lineal, y si se anula X_2 resulta una ecuación del tipo Bernouilli anteriormente estudiada, aunque sus diferencias con ellas son notables. Esta ecuación no puede ser integrada, en general, por cuadraturas, pero basta el conocimiento de una solución particular para, mediante el cambio de variable indicado, reducirla a un tipo ya conocido y, por tanto, que ya sea integrable por simples cuadraturas.

6. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Dada una ecuación diferencial de primer orden, escrita en la forma: du(x,y) = 0, o sea:

$$M(x, y)\cdot dx + N(x, y)\cdot dy = 0 \qquad [I]$$

[2] The *Riccati equation* is one of the most interesting *nonlinear differential equations of first order*. The Riccati equation is used in different areas of mathematics (for example, in algebraic geometry and the theory of conformal mapping), and physics. It also appears in many applied problems. (FRANQUET, 2013).

y M(x,y) y N(x,y) son funciones continuas y poseen primeras derivadas parciales continuas sobre algún rectángulo del plano OXY, se llama diferencial exacta, si su primer miembro es la diferencial total de una cierta función u(x, y), esto es, si existe una tal función que cumpla:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \;\; ; \;\; M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}; \;\; N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Derivando las igualdades anteriores respecto a “y” y a “x” tendremos que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} ,$$

y recordando el teorema de Schwarz de la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, resultará que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} ,$$

que expresa la condición *necesaria y suficiente* para que [I] sea una ecuación diferencial exacta. Supuesto que [I] sea una ecuación diferencial exacta, su integración se consigue teniendo en cuenta que:

$$u(x, y) = \int M(x, y)\cdot dx + \varphi(y) = \int N(x, y)\cdot dy + \varphi(x) \quad [II]$$

puesto que la integral indefinida $\int M(x,y)\cdot dx$, contendrá todos los términos de u(x,y) dependientes de x; luego solo faltarán los términos no dependientes de x que figuran en $\varphi(y)$, que puede considerarse la “constante” de integración que depende únicamente de *y*. Alternativamente, lo mismo puede afirmarse de $\varphi(x)$.

Para determinar aquella función, derivaremos [II] con respecto a y, con lo que:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + \varphi'(y) ,$$

de donde se deduce que: $\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$, lo que permite calcular $\varphi(y)$ y por tanto también u(x, y). La integral general adoptará, en definitiva, la forma:

$$\boxed{u(x, y) = C} \;\Rightarrow \text{I.G.}$$

7. ECUACIÓN DIFERENCIAL NO EXACTA. FACTOR INTEGRANTE

7.1. DEFINICIÓN

En ciertas ocasiones, aunque $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0$ no sea diferencial exacta, multiplicada por una cierta función $\mu(x, y)$ se puede convertir en diferencial exacta; entonces, se dice que $\mu(x, y)$ es un *factor integrante* y la ecuación diferencial exacta:

$$\boxed{\mu(x, y)\cdot M(x, y)\cdot dx + \mu(x, y)\cdot N(x, y)\cdot dy = 0}$$

, se integra por el método expuesto anteriormente.

Como debe verificarse que:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)\cdot M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)\cdot N(x,y)], \text{ o sea:}$$

$$\mu(x,y)\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}M(x,y), \qquad (1)$$

y el factor integrante buscado será la solución de esta ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP).

7.2. FORMA DEL FACTOR INTEGRANTE

La determinación de factores integrantes es un problema dificultoso, pues conduce, en general, a una ecuación en derivadas parciales. Sin embargo, su determinación es sumamente sencilla en algunos casos particulares en que el factor integrante adopta una forma tal que la EDO anterior se convierte en una ecuación ordinaria, de los cuales citaremos los siguientes:

a) *Cuando existe un multiplicador que depende de la única variable x (o de la única variable y).*

En este caso, la condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial ordinaria:

$$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = 0,$$

admita un factor integrante $\mu(x)$, que es función solamente de x, es que el cociente:

$$\frac{\frac{\delta M}{\delta y}-\frac{\delta N}{\delta x}}{N}=\frac{\mu'}{\mu} = \gamma(x), \text{ sea función solo de la variable x.}$$

Entonces, el factor integrante será: $\mu(x)=e^{\int \gamma(x)\cdot dx}$. En el caso de dependencia única de la variable *y*, dicha condición necesaria y suficiente vendrá dada por que el cociente:

$$\frac{\frac{\delta N}{\delta x}-\frac{\delta M}{\delta y}}{M}=\frac{\mu'}{\mu} = \lambda(y), \text{ sea función solamente de la variable } y.$$

Entonces, el factor integrante será: $\mu(y)=e^{\int \lambda(y)\cdot dy}$. En ambos casos se multiplicará por el factor integrante μ y se procederá como antes. Es decir, que después de efectuada la multiplicación deberá cumplirse que:

$$\frac{\delta(\mu\cdot M)}{\delta y}=\frac{\delta(\mu\cdot N)}{\delta x}.$$

b) *Cuando existe un multiplicador que depende únicamente de t = x $\pm$ y.*

Haciendo $t=x\pm y, \frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}, \frac{\partial\mu}{\partial y}=\pm\frac{d\mu}{dt}$ y en este caso, de la expresión (1) anterior se deduce que:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\mp M}dt=f(t)dt.$$

Integrando la expresión anterior, ln μ(t) = $\int$f(t)$\cdot$dt = φ(t)+C $\Rightarrow$

$$\mu(x \pm y) = k\cdot e^{\varphi\,(x\pm y)}.$$

c) *Cuando existe un multiplicador que depende de la única variable t = x · y.*

Se hace $t=x\cdot y, \frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}y, \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}x.$ La ecuación (1) quedará así:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}dt=f(t)\cdot dt.$$

Integrando mediante una cuadratura se obtiene:

$$\ln \mu(t) = \int f(t)\cdot dt = \varphi(t)+C \;\Rightarrow\; \mu(x \cdot y) = k\cdot e^{\varphi (x \cdot y)}.$$

d) Cuando existe un multiplicador que depende de la única variable t = y/x.

Haciendo $t=\frac{y}{x}$, se tiene: $\frac{\partial \mu}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\frac{d\mu}{dt},\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{d\mu}{dt}$, que llevados a (1), queda:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{x^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{yN+xM}dt=f(t)\cdot dt\,.$$

Integrando mediante una cuadratura se obtiene que:

$$\ln \mu(t) = \int f(t)\cdot dt = \varphi(t)+C \;\Rightarrow\; \mu\left(\frac{y}{x}\right)=k\cdot e^{\varphi(y/x)}.$$

e) Cuando existe un multiplicador que depende de la única variable t = $x^2 \pm y^2$.

Si hacemos t = $x^2 \pm y^2$, resulta que: $\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}2x\,,\frac{\partial \mu}{\partial y}=\pm\frac{d\mu}{dt}2y$,valores estos que llevados a la expresión (1), ofrecen: $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2(xN\mp yM)}de=f(t)\cdot dt\,.$

Integrando ahora mediante una cuadratura, se obtiene que:

$$\ln \mu(t) = \int f(t)\cdot dt = \varphi(t) + C \;\Rightarrow\; \mu\left(x^2 \pm y^2\right)=k\cdot e^{\varphi\left(x^2\pm y^2\right)}.$$

f) Cuando existe un multiplicador de la forma t = $x^p \cdot y^q$.

Si es $t=x^p y^q$, $\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}px^{p-1}y^q$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}qx^p y^{q-1}$, que en la expresión (1), da:

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{x^{p-1}y^{q-1}(pyN-qxM)}dt=f(t)\cdot dt\,.$$

Integrando mediante una cuadratura, se obtiene que:

$$\ln \mu(t) = \int f(t)\cdot dt = \varphi(t) + C \;\Rightarrow\; \mu\left(x^p y^q\right)=k\cdot e^{\varphi\left(x^p y^q\right)}.$$

g) Cuando existe un multiplicador de la forma $\mu(x,y) = f(x)g(y)$.

Ahora se tiene que $\frac{\partial \mu}{\partial x} = g(y)\frac{df(x)}{dx}, \frac{\partial \mu}{\partial y} = f(x)\frac{dg(y)}{dy}$. Al substituir estos valores y dividir por f(x)g(y), se obtiene la expresión:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}N(x,y) - \frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}M(x,y).$$

Si ahora llamamos $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$ (2) y $\gamma(y) = \frac{1}{g(y)}\frac{dg(y)}{dy}$ (3), queda la expresión:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \phi(x)\cdot N(x,y) - \gamma(y)\cdot M(x,y).$$

Si es posible expresar el primer miembro de la igualdad anterior en la forma en que aparece el segundo miembro, una vez conocidas $\varphi(x)$, $\gamma(y)$, las funciones f(x), g(y) podrán determinarse resolviendo las ecuaciones diferenciales (2) y (3) anteriores y entonces se tendrá que:

$$\mu(x, y) = e^{\int \varphi(x)dx} e^{\int \gamma(y)dy}; \ \ln \mu(x, y) = \int \varphi(x)dx + \int \gamma(y)dy.$$

h) En la ecuación lineal: dy + M·dx = 0, en que M es de primer grado en y, el factor integrante a utilizar tiene la siguiente forma: $\mu = e^{\int \frac{\delta \rho}{\delta y}dx}$. En las ecuaciones homogéneas, el factor integrante es el de la expresión:

$$\mu = \frac{1}{Mx + Ny}.$$

i) Un método que permite, en algunos casos, descubrir el factor integrante consiste en descomponer la expresión dada en otra de la forma: G·du + H·dμ = 0, siendo G, H, u, μ, funciones de x e y. La expresión general de todo factor integrante de G·du = 0 será $\frac{f(u)}{G}$. La de H·dμ = 0 será $\frac{F(\mu)}{H}$. Para que puedan aprovecharse ambos factores en la ecuación G·du + H·dμ = 0, hay que admitir que: $\frac{f(u)}{G} = \frac{F(\mu)}{H} = \alpha$. Se hallará el factor integrante α determinando las funciones más sencillas f(u), F(μ), de tal suerte que verifique la relación anterior, atendiendo a los grados de u, μ. En general, los factores integrantes pueden no resultar de fácil descubrimiento. Si una ecuación diferencial no presenta una de las formas expuestas con anterioridad, entonces es probable que la búsqueda de un factor de integración no se vea coronada por el éxito, para lo cual se recomienda el recurso a otros métodos de solución.

En cualquier caso, algunos de los factores integrantes más comunes se muestran en la tabla siguiente:

Grupo de términos	**Factor de integración μ(x, y)**	**Diferencial exacta du(x, y)**
Y·dx – x·dy	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$
Y·dx – x·dy	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right)$
Y·dx – x·dy	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy-ydx}{xy}=d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$
Y·dx – x·dy	$-\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$
Y·dx + x·dy	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx+xdy}{xy}=d(\ln xy)$
Y·dx + x·dy	$\frac{1}{(xy)^n}$, $(\forall n>1)$	$\frac{ydx+xdy}{(xy)^n}=d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$
Y·dx + x·dy	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{ydy+xdx}{x^2+y^2}=d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$
Y·dx + x·dy	$\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$, $(\forall n>1)$	$\frac{ydy+xdx}{(x^2+y^2)^n}=d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right]$
Ay·dx + bx·dy (a, b constantes)	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(ay\cdot dx+bx\cdot dy)=d(x^ay^b)$

8. ECUACIÓN DE CLAIRAUT

Se llama así la ecuación diferencial ordinaria que tiene la siguiente forma: $y = y'\cdot x + \varphi(y')$. Se integra por un método de derivación, obteniéndose como haz integral general: $y' = c$, o sea: $y = c\cdot x + \varphi(c)$.

El haz integral de toda ecuación de Clairaut es, pues, un haz de rectas que se obtiene substituyendo y' por la constante *c* del haz. Si este haz tiene una curva envolvente ésta será una *solución singular* de la ecuación, puesto que en cada uno de sus puntos será tangente a una recta involuta y tendrá en él los mismos valores x, y e y’ que los de dicha recta, verificando, en su consecuencia, igualmente la primera ecuación del presente enunciado

La integral singular reseñada se halla eliminando *c* entre la general y su derivada respecto a c, que es x + φ’(c) = 0, o sea, la eliminante del sistema:

$$\begin{cases} y = c\cdot x + \varphi(c) \\ 0 = x + \varphi'(c) \end{cases}$$

La ecuación diferencial de Clairaut, así llamada en honor a su inventor, el físico francés Alexis-Claude Clairaut[3], es una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$y(x) = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

, donde f es una función continuamente diferenciable y constituye un caso particular de la ecuación de Lagrange que veremos a continuación, en que: f(y’) ≡ y’. Para resolver esta ecuación, diferenciamos respecto a *x*, quedando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2},$$

por tanto:

$$0 = \left(x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Y así:

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2}$$

, o bien:

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

[3] Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) nació en París, hijo de Jean-Baptiste, maestro de matemáticas de París y miembro de la Academia de Matemáticas de Berlín. Fue uno de los matemáticos más precoces, superando incluso a Blaise Pascal, y a la edad de diez años ya leía los libros de G.F. de L’Hôpital sobre secciones cónicas y cálculo infinitesimal. Con solo doce años, Clairaut presenta una memoria sobre cuatro curvas de cuarto grado a la Academia, la cual, y tras haberse asegurado que era el autor verdadero, se deshace en grandes elogios. Posteriormente, y con solo dieciocho años, publica la obra *Recherches sur les courbes à double courbure* (Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura, 1831) gracias a la cual fue admitido en la Academia de Ciencias, aunque hubo de hacerse una excepción con él, ya que el reglamento exigía una edad mínima de veinte. Otros campos de su interés fueron las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en derivadas parciales, la teoría de superficies, el cálculo en varias variables y las series trigonométricas. Por lo que respecta a las ecuaciones diferenciales, en 1734, Clairaut se interesó por la ecuación que actualmente lleva su nombre cuya solución general consiste en una familia de líneas rectas.

En el primer caso, $c = dy/dx$ para cualquier constante arbitraria c. Substituyéndolo en la ecuación de Clairaut, tenemos la familia de ecuaciones dadas por la expresión: $y(x) = c \cdot x + f(c)$, llamadas *soluciones generales* de la ecuación de Clairaut. El otro caso,

$$0 = x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

define solo una solución $y(x)$, llamada *solución singular*, cuyo gráfico es envolvente de las gráficas de las soluciones generales. La solución singular se representa normalmente usando notación paramétrica, como: $[x(p), y(p)]$, donde p representa dy/dx.

El interés que presenta este tipo de ecuación se debe al hecho de que tiene como solución a una familia de rectas, como ya se ha apuntado. Además, la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso una solución singular de la ecuación de Clairaut. Ésta fue una de las primeras ocasiones en la historia en que este tipo de solución (la solución *singular*) se puso de relieve.

Veamos, en fin, por lo que se refiere a su interpretación geométrica, que las isoclinas[4] de esta ecuación son rectas como también sucede en la ecuación de Lagrange, pero aquí la pendiente de los elementos de dirección del campo, a lo largo de cada isoclina, es la pendiente de la propia isoclina, es decir, son al mismo tiempo isoclinas y curvas integrales, a diferencia de la ecuación de Lagrange en que este hecho solo ocurre eventualmente en isoclinas excepcionales.

9. ECUACIÓN DE LAGRANGE

La ecuación diferencial de Lagrange[5] (o también llamada de D'Alambert-Lagrange o de Morge) es de primer orden pero no lineal, al

[4] Crear un campo de direcciones, por lo regular, resulta tedioso y cuesta demasiado tiempo, a menos que para esto programemos un ordenador con *software* adecuado para generar un campo de direcciones. Sin embargo, cuando queremos tener una idea de cómo luce el campo de direcciones correspondiente a alguna ecuación diferencial dada sin usar un ordenador, entonces dibujaremos elementos lineales a lo largo de ciertas curvas llamadas *isoclinas*. Para explicar esto, supongamos que tenemos la ecuación diferencial de primer orden: $y' = f(x,y)$. Una isoclina resulta ser el conjunto de todos los puntos (x,y) del plano tales que: $f(x,y) = k$, donde k es una constante dada (de modo que las isoclinas son curvas de nivel de $f(x,y)$). Por lo tanto, todo elemento lineal que se encuentre a lo largo de una isoclina deberá tener una pendiente igual a k.

[5] Joseph Louis de Lagrange (Turín, 1736 - París, 1813) fue un matemático francés de origen italiano. La lectura de una obra del astrónomo inglés Edmund Halley despertó en él un interés por las matemáticas y la astronomía. En su obra *Miscellanea taurinensia,* obtuvo, entre otros resultados, una ecuación diferencial general del movimiento y su adaptación para el caso particular del movimiento rectilíneo y la solución a muchos problemas de dinámica mediante el cálculo de variantes. Escribió, así mismo,

igual que la de Clairaut y constituye un caso particular de ecuación resoluble en *y* presentando la forma siguiente:

$$y = x \cdot f(y') + \varphi(y') \Rightarrow y = x \cdot f(p) + \varphi(p) \qquad (1\ DL)$$

, donde f(y') no puede ser igual a y', resolviéndose con la substitución y' = p, obteniéndose una solución general y una solución particular.

En efecto, si derivamos esta expresión respecto de x obtenemos:

$$\frac{dx}{dy'} + \frac{f'(y')}{f(y') - y'}x + \frac{\varphi'(y')}{f(y') - y'} = 0$$, cuya integral general es:

$$x = e^{-\int \frac{f'(y')}{f'(y')-y'}dy'}\left[C - \int e^{\frac{f'(y')}{f(y')-y'}dy'} \frac{\varphi'(y')dy'}{f(y') - y'}\right].$$

O lo que es igual:

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + x \cdot f_x'(p) \cdot \frac{dy}{dx} + \varphi_p'(p) \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \left[x \cdot f_x'(p) + \varphi_p'(p)\right] \cdot \frac{dp}{dx}$$

Tomando ahora *x* como variable dependiente o funcional, podemos poner:

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} - x \cdot f_x'(p) = \varphi_p'(p)$$

, que es una ecuación lineal en *x* integrable por métodos ya desarrollados en esta misma monografía.

Podemos recordar que en las ecuaciones lineales el factor integrante y la solución general vienen dados por la expresión:

$$\mu(p) = \frac{1}{P_0(p)} \cdot exp \int \frac{P_1(p)}{P_0(p)} \cdot dp \quad ; \quad x(p) = \frac{1}{\mu P_0} \int \mu R(p)\, dp + \frac{C}{\mu P_0}$$

De donde tenemos que:

$$\mu(p) = \frac{1}{p - f(p)} \cdot exp \int \frac{\varphi_p'(p)}{p - f(p)} \cdot dp = \frac{1}{p - f(p)} \cdot \exp \psi(p)$$

---

numerosos artículos sobre cálculo integral y las ecuaciones diferenciales generales del movimiento de tres cuerpos sometidos a fuerzas de atracción mutuas.

Y substituyendo el valor del factor integrante en la otra ecuación, se obtiene:

$$x(p) = \exp[-\psi(p)]\left[\int \frac{\varphi_p'(p)}{p-f(p)} \cdot \exp[\psi(p)]\, dp + C \cdot \exp[-\psi(p)]\right]$$

Obtenemos de ese modo una ecuación de la forma x = x(p, C) que, junto a la ecuación anterior (1 DL), nos permite llegar a una solución de la forma:

$$h(x, y, C) = 0.$$

Su interpretación geométrica explica que las isoclinas del campo de direcciones que define esta EDO son rectas dadas por la propia ecuación, considerando *p* como un parámetro. Toda isoclina excepcional cuya pendiente f(p) coincida con el valor *p* del parámetro correspondiente a dicha isoclina será evidentemente (si existe) una solución de la ecuación planteada, por estar constituida por elementos tangenciales del campo.

10. RESOLUCIÓN POR SUBSTITUCIÓN

El cambio de variable: z = ax + by + c, transforma una ecuación diferencial ordinaria del tipo: y’ = f(ax + by + c) en una ecuación de variables separables de fácil resolución, tal como ya se apuntó en su momento (véase el primer epígrafe del presente capítulo). En efecto, se tiene que:

$$y' = f\,(ax + by + c) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c). \text{ Sea ahora:}$$

$$z = ax + by + z\ (2), \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \Leftrightarrow \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f(z) \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b\cdot f(z) + a\,,\quad \frac{dz}{b\cdot f(z) + a} = dx\,,$$

que ya es una EDO con variables separables que podemos resolver finalmente mediante una cuadratura.

CAPÍTULO 3

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS DE ORDEN n

1. INTRODUCCIÓN

Habitualmente, las leyes que rigen los fenómenos económicos se pueden formular mediante el empleo de las ecuaciones diferenciales, como se ha visto en el capítulo anterior de nuestro libro y se continuará en el presente. De ahí el gran interés de su estudio.

Extensivamente, veamos que una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* es aquella cuya expresión general es:

$$F(x, y, y', \dots, y^{n}) = 0,$$

o bien, expresada en forma normal,

$$y^{n} = H(x, y, y', \dots, y^{n-1}),$$

en la que H es una función real definida en un subconjunto $A \subset R^{n+1}$. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria, cuyo **orden**, como ya sabemos, viene dado por la derivada de mayor orden, siendo su **grado** el mayor exponente o potencia con que figure elevada dicha derivada.

Una ecuación diferencial de la forma:

$$a_0(x)\cdot y^{n} + a_1(x)\cdot y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\cdot y^{n-i} = b(x),$$

donde $a_0(x)$, $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ y $b(x)$ son funciones reales y continuas de la variable independiente real *x* en un determinado intervalo (a, b), es una ecuación diferencial lineal de orden *n*.

Cuando $b(x) \equiv 0$, de la ecuación anterior se dice que es *homogénea o incompleta*; cuando no sucede así, se denomina *no homogénea o completa*, aunque también puede denominársele *inhomogénea o heterogénea*.

Si las funciones $a_i(x)$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$, son constantes, tendremos una “ecuación diferencial lineal de orden *n* con coeficientes constantes”.

Por el contrario, si dichas funciones son variables tendremos una "ecuación diferencial lineal de orden *n* con coeficientes variables".

Una función real y_1 de variable real y derivable hasta el orden n en el intervalo (a, b) es solución de la primera ecuación si en ese intervalo se verifica que:

$$a_0(x)\cdot y_1^{n} + a_1(x)\cdot y_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y'_1 + a_n(x)\cdot y_1 = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\cdot y_1^{n-i} \equiv b(x).$$

La integral general de la ecuación incompleta es de la forma:

$$y = c_1\cdot y_1 + c_2\cdot y_2 + \ldots + c_n\cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot y_i$$

siendo las y_i soluciones linealmente independientes de dicha ecuación incompleta y las c_i constantes arbitrarias.

Especial interés en la economía revisten las EDO de segundo orden, en que distinguiremos, para su resolución, los siguientes cinco tipos (ver también el epígrafe 2.5 "Otras clases de ecuaciones", de este mismo capítulo):

I) $y'' = f(x)$. *Solución:* $y = \int dx \int f(x)\cdot dx + C\cdot x + C_1$, o bien:

$$y = x\cdot\int f(x)\cdot dx - \int x\cdot f(x)\cdot dx + C\cdot x + C_1$$

II) $y'' = f(y)$. *Solución:* $x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int f(y)\cdot dy}} + C_1$

III) $y'' = f(y')$. *Solución:* se hace $y' = z$, e $y'' = z'$, con lo que resulta:

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + C, \text{ e } \; y = \int \frac{z\cdot dz}{f(z)} + C_1$$

y, a continuación, se obtiene la solución a la ecuación planteada por eliminación de z.

IV) $y'' = f(y',x)$. *Solución:* se hace $y' = z$, e $y'' = z'$, con lo cual resulta la EDO de primer orden: $z' = f(z,x)$, de cuya integración se obtiene:

$$y = \int z(x)\cdot dx + C$$

V) $y'' = f(y',y)$. *Solución:* se hace $y' = z$, e $y'' = z' = z\cdot\frac{dz}{dy}$, con lo cual se obtiene la EDO de primer orden siguiente: $z\cdot\frac{dz}{dy} = f(z,y)$, de cuya integración resulta que: $x = \int\frac{dy}{z(y)} + C$.

En ciertas ocasiones, los problemas de EDO se presentan en sentido inverso, esto es, se trata de formar la ecuación diferencial a partir del conocimiento de sus soluciones. Veámoslo mediante el siguiente ejemplo:

Se trata de eliminar las constantes en la expresión de la función económica: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x}$, deduciendo de ello la expresión de la EDO correspondiente. Pues bien, derivando tres veces sucesivamente, se obtiene:

$$\begin{cases} y' = 2C_1e^{2x} + C_2e^{x} - C_3e^{-x} \\ y'' = 4C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3e^{-x} \\ y''' = 8C_1e^{2x} + C_2e^{x} - C_3e^{-x} \end{cases}$$

Las tres ecuaciones obtenidas junto con la dada conforman un sistema de cuatro ecuaciones, donde tomando como incógnitas C_1, C_2 y C_3, se requiere, para su compatibilidad, que:

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{x} & e^{-x} \\ y' & 2e^{2x} & e^{x} & -e^{-x} \\ y'' & 4e^{2x} & e^{x} & e^{-x} \\ y''' & 8e^{2x} & e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = 0, \text{ que equivale a: } \begin{vmatrix} y & 1 & 1 & 1 \\ y' & 2 & 1 & -1 \\ y'' & 4 & 1 & 1 \\ y''' & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

de donde se deduce: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, que es la ecuación diferencial resultante de la eliminación. Efectivamente, su resolución implica la ecuación característica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$; una raíz inmediata de ella es: $\lambda_1 = 1$, con lo que operando para hallar las restantes según la regla de Ruffini se tiene que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1) & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0\,;\quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{array} \right. ;$$

con lo que la integral general buscada será:

$$\boxed{y(x) = C_1\cdot e^{x} + C_2\cdot e^{2x} + C_3\cdot e^{-x}}, \quad \text{c. s. q. d.}$$

2. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE ORDEN n Y COEFICIENTES CONSTANTES

2.1. GENERALIDADES

Estudiaremos ahora la ecuación diferencial:

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = 0,$$

en la que los coeficientes $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^n$.

El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y homogénea es un espacio vectorial de dimensión igual al orden de dicha ecuación. Para obtener su solución o integral general basta con hallar una base del referido espacio vectorial; esto es, necesitamos conocer n soluciones cualesquiera de la misma que sean linealmente independientes (sabemos que ello es posible).

En el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior, que son objeto del presente capítulo, se hace indispensable conocer si un conjunto de funciones son linealmente independientes o dependientes. El concepto del "wronskiano" aparece precisamente para solucionar ese problema. El wronskiano es, pues, un determinante de orden n (número de funciones).

Recordemos que un conjunto de *n* soluciones es linealmente independiente si y solo si su determinante funcional wronskiano[1] es no nulo, es decir, si se cumple que:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \cdot$$

[1] **Józef Maria Hoene-Wroński** (French: *Josef Hoëné-Wronski*; originally *Josef Hoëné*; 23 August 1776 – 9 August 1853) was a Polish Messianist philosopher who worked in many fields of knowledge, not only as philosopher but also as mathematician, physicist, inventor, lawyer, and economist. He was born Hoene but changed his name in 1815. Though during his lifetime nearly all his work was dismissed as nonsense, some of it has come in later years to be seen in a more favourable light. Although nearly all his grandiose claims were in fact unfounded, his mathematical work contains flashes of deep insight and many important intermediary results. Most significant was his work on series. He had strongly criticized Lagrange's use of infinite series, introducing instead a novel series expansion for a function. His criticisms of Lagrange were for the most part unfounded, but the coefficients in Wroński's new series were found to be important after his death, forming the determinants now known as the Wronskians (the name was given them by Thomas Muir in 1882). (FRANQUET, 2013).

Con ese fin, sea:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \lambda^{n-i} = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

la denominada “ecuación característica o modular” de la ecuación anterior, que puede ofrecer distintos tipos de *n* raíces distintas (λ_1, λ_2, …, λ_n), reales o imaginarias, que estudiaremos a continuación según los diferentes casos que se pueden presentar. Dicha ecuación característica solo está definida para ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

En teoría, siempre es posible factorizar la ecuación característica, pero en la práctica ello puede resultar extremadamente difícil, en especial para las ecuaciones diferenciales de orden elevado. En tales casos, se deben usar técnicas numéricas para aproximar las soluciones (como los métodos modificados de Euler, Heun, punto medio, Runge-Kutta, Adams-Bashforth-Moulton, Milne, aproximaciones sucesivas de Picard, etc.) que no son objeto de tratamiento en el presente manual por razones obvias de espacio.

2.2. RAÍCES REALES SIMPLES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

En este caso, la I.G. (Integral General) viene dada por la expresión:

$$\boxed{y = c_1 \times e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n \times e^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

2.3. RAÍCES REALES MÚLTIPLES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

En general, si λ_i es raíz múltiple de orden k de la ecuación característica, son integrales particulares las siguientes: $y_p = e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, x^2 \cdot e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}$. De este modo, la integral general posee la expresión:

$$\boxed{y = e^{\lambda_i x}(c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + \ldots + c_k \cdot x^{k-1}) = e^{\lambda_i x} \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot x^{i-1}} \rightarrow \text{I.G.}$$

Resulta inmediato comprobar la independencia lineal de las soluciones así obtenidas y, por tanto, la obtención de la integral general buscada.

2.4. RAÍCES COMPLEJAS DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

En este caso, la integral general viene dada por la expresión trigonométrica:

$$y = e^{\alpha x}\,(A\cdot\cos\beta x + B\cdot\sin\beta x),$$

en que la raíz de la ecuación característica es: $\lambda_i = \alpha \pm i\beta$, o sea, α y β son, respectivamente, los coeficientes de la parte real e imaginaria del anterior número complejo expresado en forma binomia o binómica.

Finalmente, indicaremos que si existen raíces complejas múltiples, basta combinar los métodos de los casos anteriores para obtener la integral general buscada. De este modo, su expresión general vendrá dada por la expresión:

$$y = e^{\alpha x}\,[\cos\beta x(c_1 + c_2\cdot x^{n-1} + \ldots + c_n\cdot x) + \sin\beta x(c_{n+1} + c_{n+2}\cdot x^{n-1} + \ldots + c_{2n}\cdot x)],$$

siendo **n** el grado de multiplicidad de la raíz en cuestión: $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$.

2.5. OTRAS CLASES DE ECUACIONES

Pueden ser, fundamentalmente, de los tipos siguientes:

a) Tipo $F(y^{(n)},y^{(n-1)}) = 0$. Contienen solamente dos derivadas consecutivas. Se opera del siguiente modo:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p \text{ , y queda: } F\left(\frac{dp}{dx},p\right) = 0 .$$

Se resuelve esta ecuación y obtendremos una relación del tipo: $\varphi(x, p, C_1) = 0$; si de aquí se puede despejar p, resultará que: $p = \psi(x,C_1) = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; luego:

$$y = \int^{(n-1)} dx \int dx \int dx \ldots \int \varphi(x,C_1)dx + C_2x^{n-2} + \ldots + C_n .$$

Si la ecuación $F\left(\frac{dp}{dx},p\right) = 0$ se puede poner bajo la forma $\frac{dx}{dp} = \varphi(p)$, se tendrá $dx = \varphi(p)\cdot dp$, y como:

$$p = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}; \quad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int p\cdot dx = \int p\cdot\varphi(p)\cdot dp ,$$

se hace la cuadratura y se vuelve a integrar, reemplazando siempre en el segundo miembro dx por $\varphi(p) \cdot dp$.

a) Tipo $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$: Contienen dos derivadas cuyos órdenes se diferencian en dos unidades. Se hace:

$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$, luego la ecuación dada se convierte en: $F\left(\frac{d^2p}{dx^2}, p\right) = 0$.

Si esta ecuación se puede poner bajo la forma: $\frac{d^2p}{dx^2} = \varphi(p)$, multiplicaremos ambos miembros por: $2\frac{dp}{dx} \cdot dx = 2 \cdot dp$, lo que ofrece la expresión:

$$2\frac{dp}{dx} \cdot \frac{d^2p}{dx^2} \cdot dx = 2 \cdot \varphi(p) \cdot dp \text{; o sea: } d\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2 \cdot \varphi(p) \cdot dp ,$$

e integrando ambos miembros de esta igualdad queda: $\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int \varphi(p) \cdot dp + C$; extrayendo la raíz cuadrada e integrando otra vez, se tiene una ecuación entre x y p, continuando ya como en el caso anterior, puesto que:

$$\frac{dp}{dx} = \pm\sqrt{2\int \varphi(p) \cdot dp + C}; \; p = \pm\sqrt{2} \int \sqrt{\int (\varphi(p) \cdot dp + C)} \cdot dx .$$

c) Consideremos, en fin, que existen ciertas ecuaciones diferenciales de orden *n* que admiten rebajamiento en su orden por tal de facilitar su resolución, que relacionamos a continuación en sus casos más típicos, a saber:

1. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p \cdot y$

$$y'' = y(p^2 + p')$$
$$y''' = y(p^3 + 3p \cdot p' + p'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

, y así sucesivamente, obteniéndose como consecuencia un sistema de *n* ecuaciones de 1er. orden.

2. Falta la *x*: $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p$.

3. Falta la *y*: $F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p$.

4. Faltan la *x* y la *y*: $E(y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y' = p$.

5. $E(y, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$; se efectúa el cambio: $y^{(k)} = p$.

3. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL NO HOMOGÉNEA DE ORDEN n Y COEFICIENTES CONSTANTES

3.1. GENERALIDADES

Estudiaremos aquí la ecuación diferencial del tipo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x),$$

donde, como ya indicamos, las a_i, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, son constantes y $b(x)$ es una función continua en un intervalo (a, b).

Podemos, por tanto, dar la siguiente expresión para la solución o integral general de la ecuación no homogénea o completa:

$$\boxed{y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot y_1 + \ldots + c_n \cdot y_n + y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i + y_p} \rightarrow \text{I.G.}$$

que es suma o adición de la solución general de la ecuación homogénea (y^*) y de una solución particular de la completa (y_p) cuya investigación se verá exhaustivamente en los epígrafes posteriores.

También para hallar la solución particular de la completa se puede utilizar el denominado *método de Cauchy*, en que se supone conocida la integral $y = z$ de la ecuación homogénea o incompleta; entonces, la ecuación dada quedará satisfecha poniendo: $y = \int_0^x z \cdot d\alpha$, para cuya determinación definiremos las m constantes de la integral general $y = z$, expresando que para $x = \alpha$, se verifica que: $z, z', z'' \ldots z^{(m-\alpha)}$ son iguales a cero y $z^{(m-1)} = f(\alpha)$. Siendo:

$$z = c_1 \cdot e^{\alpha_1(x-\alpha)} + c_2 \cdot e^{\alpha_2(x-\alpha)} + \ldots + c_m \cdot e^{\alpha_m(x-\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot e^{\alpha_i(x-\alpha)},$$

e imponiéndole las condiciones antedichas, se obtiene que:

$$c_1 = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_1)};\; c_2 = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_2)};\ldots;\; c_m = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_m)},$$

siendo $\varphi(a)$ el primer miembro de la ecuación característica.

La integral particular buscada es, entonces:

$$z=\frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_1)}e^{\alpha_1(x-\alpha)}+\frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_2)}e^{\alpha_2(x-\alpha)}+\ldots+\frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_m)}e^{\alpha_m(x-\alpha)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{f(\alpha)}{\varphi'(a_i)}\cdot e^{\alpha_i(x-\alpha)}\ ,$$

pero como $y=\int_0^x z\cdot d\alpha$, y para hallar la integral general de la ecuación dada hay que sumarle la solución de la incompleta u homogénea, tendremos, después de efectuada toda reducción:

$$y=e^{\alpha_1 x}\left[c_1+\frac{1}{\varphi'(a_1)}\int_0^x e^{-a_1\alpha}\cdot f(\alpha)\cdot dx\right]+e^{\alpha_2 x}\left[c_2+\frac{1}{\varphi'(a_2)}\int_0^x e^{-a_2\alpha}\cdot f(\alpha)\cdot dx\right]+\ldots+$$
$$+e^{\alpha_m x}\left[c_m+\frac{1}{\varphi'(a_m)}\int_0^x e^{-a_m\alpha}\cdot f(\alpha)\cdot dx\right]=\sum_{i=1}^{m}e^{\alpha_i x}\left[c_i+\frac{1}{\varphi'(a_i)}\int_0^x e^{-a_i\alpha}\cdot f(\alpha)\cdot dx\right]$$

, que constituye la integral general de la ecuación completa.

Las ecuaciones diferenciales cuya forma es la siguiente:

$$y^{(m)}+\frac{A}{ax+b}y^{(m-1)}+\ldots+\frac{T}{(ax+b)^{m-1}}y'+\frac{U}{(ax+b)^m}y=0\ ,$$

se integran poniendo y = (ax + b)$^{\alpha}$, valor que, substituido en la ecuación dada, conduce a una de grado m en α, siendo α_1, α_2 … α_m las raíces de la ecuación resultante, y la integral general buscada resulta ser, entonces:

$$y=c_1(ax+b)^{\alpha_1}+c_2(ax+b)^{\alpha_2}+\ldots+c_m(ax+b)^{\alpha_m}=\sum_{i=1}^{m}c_i(ax+b)^{\alpha_i}\ .$$

Veamos, en fin, que la expresión: $y^{(n)}$ = $\frac{d^n y}{dx^n}=f(x)$, posee como integral general:

$$y(x)=\int\int\ldots^{(n)}\ldots\int f(x)\cdot dx^n+g(x)\,,$$

en donde g(x) es una función arbitraria entera a lo más de grado (n-1). También esta I.G. puede escribirse bajo la forma empleada frecuentemente:

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)\cdot(x-t)^{n-1}\cdot dt+g(x)\,,$$

conocida *como fórmula de las integrales iteradas*, que constituye un importante resultado de Cauchy que recoge, en una sola integral, la generalización de este proceso, y que tendremos ocasión de aplicar en algún ejercicio.

3.2. MÉTODO DE VARIACIÓN DE CONSTANTES

De hecho, en la generalidad de los casos que se pueden presentar, la integral general de la ecuación completa puede obtenerse siguiendo el método denominado de “variación de constantes”, en contraposición al método de “tanteo de funciones” que veremos en los epígrafes siguientes, consistente el primero de ellos en tomar la integral de la incompleta u homogénea y hacer que ésta verifique la ecuación completa al dar a las constantes el carácter de variables. Así pues, se busca una solución particular a partir de la solución general de la homogénea considerando que las constantes son funciones de x.

Supongamos que la ecuación a estudiar es la siguiente:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{n-i} = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x),$$

y que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i .$$

Entonces, si $c_1, c_2, \dots, c_n$, son funciones de x, se tiene que:

$$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 + \dots + c_n y'_n + c'_1 y_1 + \dots + c'_n y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y'_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i .$$

Hagamos: $\sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i = c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \dots + c'_n y_n = 0$.

Ahora: $y'' = c_1 y''_1 + \dots + c_n y''_n + c'_1 y'_1 + \dots + c'_n y'_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y''_i + \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y'_i$.

Otra vez hacemos: $\sum_{i=1}^{n} c'_i\, y'_i = c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \dots + c'_n y'_n = 0$

, y así sucesivamente, con lo que llegaremos a tener:

$$y^n = c_1 y_1^n + c_2 y_2^n + \dots + c'_n\, y_1^{n-1} + \dots + c'_n\, y_n^{n-1} .$$

Al substituir en la ecuación, obtendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i^{n-1} = c'_1\, y_1^{n-1} + c'_2\, y_2^{n-1} + \dots + c'_n\, y_n^{n-1} = b(x) / a_0 .$$

Se tiene así un conjunto o sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i = c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_n y_n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y'_i = c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \ldots + c'_n y'_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} c'_i\, y_i^{n-1} = c'_1\, y_1^{n-1} + c'_2\, y_2^{n-1} + \ldots + c'_n\, y_n^{n-1} = b(x)/a_0 \end{cases}$$

que permite calcular c'_1, c'_2, c'_n. Tras integrar las funciones que obtengamos, se tendrá la solución particular buscada.

3.3. MÉTODO DE TANTEO DE FUNCIONES O DE SELECCIÓN

3.3.1. b(x) es un polinomio en x

En este caso, se ensayará un polinomio del mismo grado de b(x), pero si el primer miembro carece de y, aumentaremos el grado de cada término en una unidad; si careciese de y e y’ aumentaríamos el grado de cada término en dos unidades, etc.

3.3.2. b(x) es una función exponencial de la forma $k\cdot e^{ax}$

Entonces se ensaya una solución particular de la forma: $y_p = h\cdot e^{ax}$, en donde h se determina identificando coeficientes; pero si **a** es raíz de la ecuación característica, de orden o grado de multiplicidad **m**, la solución que se debe investigar es del tipo siguiente: $y_p = h\cdot x^m\cdot e^{ax}$.

3.3.3. b(x) es una función trigonométrica de la forma (a·cos bx + b·sin bx)

Entonces se ensaya una solución particular de la ecuación completa de la forma: $y_p = h\cdot \cos bx + k\cdot \sin bx$, pero si b_i es raíz de la ecuación característica de orden de multiplicidad **m**, se ensayará dicha solución multiplicada por x^m.

3.3.4. b(x) como combinación lineal

Finalmente, si el segundo miembro de la ecuación diferencial problema resulta ser una combinación lineal de los tipos o funciones anteriores, para obtener una solución particular basta con formar la suma de soluciones particulares correspondientes a cada uno de los sumandos. En cualquiera de los tipos anteriores, como en este, el método a seguir se denomina comúnmente “de los coeficientes indeterminados", pues así se obtiene, en definitiva, el valor de las constantes que definen la función del segundo miembro.

4. ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES VARIABLES

4.1. EL POLINOMIO P(D) SE PUEDE DESCOMPONER EN FACTORES LINEALES

Será útil, al respecto, proceder a su planteamiento y resolución mediante un ejemplo ilustrativo. Sea resolver la ecuación diferencial ordinaria: $\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 3x^2$.

Esta ecuación puede ser escrita en términos del operador diferencial D, cuya notoria aplicabilidad a la resolución de las EDO veremos en el capítulo 5 de este mismo libro, con lo que:

$$(D^2 - x\cdot D - 1)y = 3x^2.$$

Supongamos que P(D) sea descomponible: $(D - a)(D - b)y = 3x^2$, de donde: $(D - a)(Dy - by) = D^2y - b'y - bDy - aDy + aby$.

Para $a = 0$, $b = x$, se observa que: $D(D - x)y = D^2y - y - xDy$.

Luego la ecuación se puede escribir: $D(D - x)y = 3x^2$.

Haciendo $(D - x)y = z$, resulta: $Dz = 3x^2$, de donde: $z = x^3 + c_1$.

Substituyendo: $(D - x)y = z = x^3 + c_1$, o sea: $y' - xy - x^3 - c_1 = 0$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden ya estudiada en el capítulo anterior de nuestro libro y de resolución conocida.

4.2. ECUACIÓN DE EULER-CAUCHY

También existen otras ecuaciones diferenciales de coeficientes variables (como la ecuación de Euler-Cauchy[2], que es un caso particular

[2] Some of Euler's greatest successes were in solving real-world problems analytically, and in describing numerous applications of the Bernoulli numbers, Fourier series, Venn diagrams, Euler numbers, the constants π and e, continued fractions and integrals. He integrated Leibniz's differential calculus with Newton's Method of Fluxions, and developed tools that made it easier to apply calculus to physical problems. He made great strides in improving the numerical approximation of integrals, inventing what are now known as the Euler approximations. The most notable of these approximations are Euler's method and the Euler–Maclaurin formula. He also facilitated the use of differential equations, in particular introducing the Euler–Mascheroni constant: (FRANQUET, 2013).

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right).$$

de la ecuación de Lagrange), ya sean homogéneas o completas, que veremos a continuación.

Se conoce con este nombre una ecuación unidimensional (o aún mejor *equidimensional*) de la forma:

$$a_0(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(ax+b)^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots +$$
$$+ \ldots + a_{n-1}(ax+b)\frac{dy}{dx} + a_n y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (ax+b)^{n-i}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + a_n y = F(x)$$

, que se reduce a una EDO lineal de coeficientes constantes, mediante el cambio de variable: $ax + b = z = e^t$. En este caso extensivo, recibe el nombre de "ecuación de Legendre". Para $a = 1$ y $b = 0$ estaríamos hablando propiamente de la "ecuación de Euler-Cauchy" (E-C).

Se presenta, en la resolución de estas ecuaciones diferenciales, la conveniencia de llevar a cabo cambios de variable que faciliten, precisamente, este proceso. En cualquier caso, las fórmulas generales de aplicación de la regla de la cadena, hasta la cuarta derivada, pueden verse sintetizadas en el cuadro siguiente:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dg^2}\left(\frac{dg}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dg}\frac{d^2 g}{dx^2}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d^3 f}{dg^3}\left(\frac{dg}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2 f}{dg^2}\frac{dg}{dx}\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{df}{dg}\frac{d^3 g}{dx^3}$$

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{d^4 f}{dg^4}\left(\frac{dg}{dx}\right)^4 + 6\frac{d^3 f}{dg^3}\left(\frac{dg}{dx}\right)^2\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dg^2}\left\{4\frac{dg}{dx}\frac{d^3 g}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2 g}{dx^2}\right)^2\right\} + \frac{df}{dg}\frac{d^4 g}{dx^4}$$

....

Si ahora hacemos $f(x) = y(x)$; $g(x) = t(x)$ en el cuadro anterior, se deduce que efectuando el cambio de variable: $x = e^t$; $dx = e^t \cdot dt$; $t = \ln \cdot x$; se tendrán las siguientes expresiones que resultan de gran utilidad para la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias de orden *n* y coeficientes variables, como las de Euler-Cauchy que ahora nos ocupan. Esto es:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{e^t \cdot dt} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t};$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2t}{dx^2} =$$
$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$y'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{x^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{2}{x^3} =$$
$$= \frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{e^{3t}} - 3\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{e^{3t}} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{2}{e^{3t}} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dy}{dt}\right);$$

$$y^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4y}{dt^4} \cdot \frac{1}{x^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{d^2y}{dt^2}\left(4\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3} + 3\frac{1}{x^4}\right) - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{6}{x^4} =$$
$$= \frac{d^4y}{dt^4} \cdot \frac{1}{x^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{11}{x^4} - 6\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^4} =$$
$$= e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt}\right);$$

… y así sucesivamente.

5. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE FRONTERA

5.1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de las aplicaciones a las ciencias económicas se está interesado no precisamente en la obtención de la solución general de una ecuación diferencial, sino en el hallazgo de una solución particular que satisfaga ciertas condiciones dadas. Esto da origen a los problemas de valor inicial (PVI) o de frontera (PVF) que vamos a tratar a continuación, aunque la resolución de algunos de ellos ya se ha contemplado en epígrafes precedentes con motivo de la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales de órdenes diversos.

5.2. PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Un problema de valor inicial o de Cauchy consta de una ecuación diferencial de orden *n* y de *n* condiciones iniciales impuestas a la función desconocida y a sus (n-1) primeras derivadas en un valor de la variable independiente. Es decir:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n y}{dx^n} &= f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}) \\
y(x_0) &= y_0 \\
y^{(1)}(x_0) &= y_1 \\
y^{(2)}(x_0) &= y_2 \\
\vdots &= \vdots \\
y^{(n)}(x_0) &= y_{n-1}
\end{aligned}
$$

5.3. PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA

En este caso, un problema de valores en la frontera o de Dirichlet consta de una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* y de *n* condiciones de frontera impuestas sobre la función desconocida en *n* valores de la variable independiente. Es decir:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n y}{dx^n} &= f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}) \\
y(x_0) &= y_0 \\
y(x_n) &= y_1 \\
y(x_1) &= y_2 \\
\vdots &= \\
y(x_{n-1}) &= y_{n-1}
\end{aligned}
$$

En muchas áreas de las Ciencias Económicas existen problemas donde es necesario encontrar la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO). Éstas describen fenómenos que cambian frecuentemente con el tiempo. Comúnmente, una solución de interés está determinada especificando los valores de todas sus componentes en un punto concreto de abscisa: x = a. Esto es un Problema de Valor Inicial. Sin embargo, en muchas otras ocasiones, una solución está determinada en más de un punto. Un problema de este tipo es denominado como Problema de Valor de Frontera (PVF). Un PVF muy trabajado en la actualidad es el de segundo orden.

Los PVF de segundo orden suelen ser comunes en todas las ramas de las Ciencias Experimentales y Económicas. A lo largo de los años se han desarrollado diversas técnicas para encontrar la solución analítica a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y por ende, la solución de los PVF que surgen de los modelos anteriormente mencionados. Sin embargo, resulta habitual que en la mayoría de los casos no se conozca la solución analítica de las mismas, y solo estudios cualitativos de dichas ecuaciones son presentados en la literatura matemática existente al respecto. Debido a esto, en la práctica, resulta imperioso usar métodos numéricos para ofrecer aproximaciones numéricas de la solución (aproximaciones que pueden ser tan buenas como se quiera).

Hoy en día, en la literatura matemática, existen muchos métodos que ayudan a estimar la solución de un PVF de segundo orden, que se concentran en el estudio de cinco de ellos, a saber: el método del Disparo y el de las Diferencias Finitas, considerados ambos clásicos dentro de la literatura *ad hoc*; el método de los Elementos Finitos y el Galerkin Discontinuo, los cuales se fundamentan en resultados del Análisis Funcional, y, por último, el método Bvp4c, que usa la idea de superposición y se encuentra implementado en el lenguaje de cálculo técnico *Matlab*[3].

[3] **MATLAB** (**mat**rix **lab**oratory) is a numerical computing environment and fourth-generation programming language. Developed by MathWorks, MATLAB allows matrix manipulations, plotting of functions and data, implementation of algorithms, creation of user interfaces, and interfacing with programs written in other languages, including C, C++, Java, and Fortran. Although MATLAB is intended primarily for numerical computing, an optional toolbox uses the MuPAD symbolic engine, allowing access to symbolic computing capabilities. An additional package, Simulink, adds graphical multi-domain simulation and Model-Based Design for dynamic and embedded systems. In 2004, MATLAB had around one million users across industry and academia. MATLAB users come from various backgrounds of engineering, science, and economics. MATLAB is widely used in academic and research institutions as well as industrial enterprises. (FRANQUET, 2013).

CAPÍTULO 4

APLICACIONES DE LAS EDO A LA MICROECONOMÍA

1. INTRODUCCIÓN

La Microeconomía consiste en el estudio de las acciones económicas de los individuos y de grupos de ellos bien definidos. Y así, se ocupa de la teoría del comportamiento del consumidor y de la teoría de la empresa, que constituyen las dos unidades de decisión determinantes de la demanda y de la oferta de bienes y servicios. El equilibrio del mercado resuelve el problema de hacer compatibles los planes de los consumidores y de los empresarios. El principio de la maximización de los resultados proporciona una elegante uniformidad metodológica a la teoría microeconómica de la producción y del consumo. La morfología del mercado y la formación de los precios resultante configuran el armazón conceptual de la microeconomía, siempre que se mantengan las mismas constantes estructurales (preferencias del consumidor, población, técnica, recursos naturales, etc.).

El análisis dinámico supone, sin embargo, un cambio fundamental de parámetros y una alteración en la forma de las funciones que participan en el sistema. El enfoque normativo de la economía del bienestar supone todavía un cambio mayor, puesto que en lugar de explicar el comportamiento determina el grado de adecuación de la conducta a los objetivos perseguidos.

Estos ramas o subdisciplinas no pueden considerarse enteramente separadas porque los resultados de unos aspectos influyen sobre los otros (en particular la teoría del equilibrio general habla de la interacción entre ellas). Por ejemplo, las empresas no sólo ofertan bienes y servicios (*outputs*), sino que también demandan bienes y servicios (*inputs*) para poder producir los suyos. La microeconomía propone modelos matemáticos que desarrollan ciertos supuestos sobre el comportamiento de los agentes económicos. En este sentido, tanto la aplicación de las ecuaciones diferenciales como las recurrentes adquiere una singular importancia, como tendremos ocasión de comprobar en los ejercicios que siguen. Sin embargo, las conclusiones a las que se llegue usando esos modelos matemáticos solo serán válidas, en tanto en cuanto, se cumplan los supuestos de partida, cosa que no ocurre siempre, especialmente si se trata de supuestos o hipótesis muy fuertes o restrictivas.

2. LAS ELASTICIDADES

2.1. CONCEPTO

La *elasticidad*, es un concepto económico introducido por el economista neoclásico inglés Alfred Marshall (1842-1924)[1], procedente de la física, para cuantificar la variación experimentada por una variable al variar otra. Para entender el concepto económico de la elasticidad debemos partir de la existencia de dos variables, entre las que existe una cierta relación, como por ejemplo el número de automóviles vendidos y el precio de los automóviles, o el producto interior bruto (PIB) y el tipo de interés. La elasticidad mide la sensibilidad de la cantidad de automóviles vendidos ante la variación del precio de los mismos, o en el segundo caso la sensibilidad del PIB a las variaciones de los tipos de interés.

Es por ello que la elasticidad se puede entender o definir como la variación porcentual de una variable X en relación con una variable Y. Si la variación porcentual de la variable dependiente Y es mayor que la variable independiente X, se dice que la relación es *inelástica*, ya que la variable dependiente Y varía en mayor proporción que la de la variable X. Por el contrario, si la variación porcentual de la variable X es mayor que Y, la relación es *elástica*.

La elasticidad es uno de los conceptos más importantes utilizados en la teoría económica. Es empleada en el estudio de la demanda y para clasificar los diferentes tipos de bienes que existen en la teoría del consumidor, la incidencia de la fiscalidad indirecta, los conceptos marginales en la teoría de la empresa, y de la distribución de la riqueza. La elasticidad es también de importancia en el análisis de la distribución

[1] El resultado de los esfuerzos de este brillante economista fue la denominada «síntesis neoclásica», base de la teoría económica. En 1890 publicó su obra capital, *Principios de economía*, que durante muchos años fue el principal libro de economía de todo el mundo. En el primer volumen de la obra compaginó conceptos de la economía clásica como riqueza, producción, trabajo, capital o valor con aportaciones de la escuela marginalista como *utilidad* y *utilidad marginal*. A los agentes de la producción (tierra, trabajo, capital) añadió un nuevo factor, el de la organización industrial. En el segundo volumen realizó una exposición del funcionamiento de los mercados, un análisis de oferta y demanda y expuso su teoría del equilibrio parcial, de la formación de la oferta, la incidencia de los monopolios y la distribución de la riqueza nacional. Los problemas más destacados que analizó fueron el de la formación de los precios y la distribución de la renta. En el primer caso estableció como determinantes del valor de un bien tanto el coste de producción como la utilidad. A partir del valor del bien, la formación de los precios vendría dada por la confluencia de la oferta y la demanda; la primera, determinada por los costes de producción, y la segunda, por la utilidad marginal. También estableció una relación entre precio y cantidad demandada cuya sintaxis gráfica (curvas de oferta y de demanda) sigue vigente hoy día y es objeto de extenso tratamiento en los ejercicios que se desarrollan en el presente manual.

del bienestar, en particular, el excedente del consumidor y el excedente del productor.

La *elasticidad demanda(oferta)-precio* o simplemente elasticidad de la demanda (oferta) mide la variación relativa o porcentual que experimenta la cantidad demandada (ofertada) como consecuencia de una variación en el precio de un uno por ciento; en otras palabras, mide la intensidad con la que responden los compradores (vendedores) a una variación en el precio.

La elasticidad se usa con frecuencia respecto de la relación precio-demanda o de la relación precio-oferta, pero la aplicabilidad de este concepto no está restringida a ese único caso, sino que resulta más amplia, ya que la elasticidad se calcula en porcentajes ya que es la única forma de obtener una unidad de medida común. Al calcular la elasticidad en una relación se mantienen las unidades de medidas, por lo tanto, no miden un cambio proporcional, sino una propensión, como la conocida propensión al consumo keynesiana.

En una economía de mercado, si sube el precio de un producto o servicio, la cantidad demandada de éste bajará, y si baja el precio de ese producto o servicio, la cantidad demandada subirá. La elasticidad precio informa en qué medida se ve afectada la demanda por las variaciones en el precio. De esta manera pueden existir productos o servicios para los cuales el alza de precio produce una variación pequeña de la cantidad demandada; esto significa que los consumidores comprarán la misma cantidad, independientemente de las variaciones del precio, y la demanda de este producto es una demanda inelástica. El proceso inverso sucede cuando variaciones pequeñas en el precio modifican mucho la cantidad demandada y entonces se dice que la demanda de ese producto es elástica. Por ejemplo, el pan ha sido un producto típicamente inelástico en la cultura occidental, ya que es considerado un artículo de primera necesidad, de tal manera que, aunque el precio del mismo subiera drásticamente, la demanda no se modificaría en la misma medida (duplicar el precio de la barra de pan no provoca que la demanda baje a la mitad), mientras que bajar su precio no supondría un aumento de la demanda (que la barra de pan baje su precio a la mitad no provocará tampoco necesariamente que consumamos el doble de pan).

Conocer si nos encontramos ante un producto de alta o baja elasticidad es muy importante a la hora de tomar decisiones relativas a precios. Si nos encontramos ante un producto con una demanda inelástica, sabemos que tenemos un amplio margen de subida de precios, y que una bajada de precios no serviría de nada. Si nos encontramos ante un producto con demanda elástica, sabemos que una bajada de precios disparará la demanda, y por lo tanto dará mejores resultados globales, mientras que una subida de precios puede suponer una caída súbita en las ventas.

Los principales factores que pueden influir en la elasticidad-precio de la demanda son los siguientes:

- La existencia de bienes sucedáneos o sustitutivos recíprocos, en mayor o menor medida.
- La proporción del ingreso del consumidor que dedica al gasto del bien o servicio objeto de análisis.
- El carácter complementario de algunos bienes con relación a otros más caros o más baratos.
- La mayor o menor durabilidad del bien objeto de análisis (perecederidad).
- La extensión del periodo considerado en el análisis.
- Los gustos y preferencias del consumidor.

Por último, veamos que la "Elasticidad arco" es una magnitud que refleja la elasticidad-precio de la demanda entre dos puntos de la curva, utilizando el precio y la cantidad media entre esos dos puntos como referencia.

En definitiva, una modalidad o extensión del concepto de función derivada, tal como se estudia en el cálculo infinitesimal, de gran aplicación en el conjunto de la ciencia económica y particularmente en el análisis de las funciones de oferta y de demanda, es el de *elasticidad* de una función. Su conocimiento y manejo resultan altamente interesantes para enfocar y resolver ciertos tipos de problemas macroeconómicos referentes al equilibrio del mercado. En este caso, en lugar de utilizar un cociente incremental de las variaciones absolutas de la función y de la variable independiente o explicativa, se considera un cociente incremental de variaciones relativas o unitarias, de tal forma que la elasticidad de f(x) respecto de x venga dada por la expresión:

$$\frac{Ef(x)}{E(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x] - f(x)}{f(x)} \div \frac{\Delta x}{x} = f'(x)\frac{x}{f(x)} \ .$$

Pero esta expresión corresponde, de hecho, al cociente de la diferencial del logaritmo neperiano o natural de f(x) por la diferencial del logaritmo de x, es decir:

$$\frac{d\ln f(x)}{d\ln(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \div \frac{1}{x} = f'(x)\frac{x}{f(x)} \ .$$

Una interpretación práctica del concepto de elasticidad se puede conseguir mediante la primera expresión, escrita en la forma:

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \div \frac{\Delta x}{x} \equiv \frac{Ef(x)}{E(x)} = \mu \; .$$

Si la variable independiente x varía en un 1 por 100, esto es:

$$\frac{\Delta x}{x}100 = 1, \quad \frac{\Delta f(x)}{f(x)}100 = \mu \; ;$$

entonces, la elasticidad μ representa, aproximadamente, la variación porcentual de la función f(x) cuando la variable independiente sufre un cambio del 1 por 100.

En algunos tratados de Matemáticas se compilan propiedades y reglas para el cálculo de elasticidades y se hace también referencia al interesante concepto económico de "elasticidad de la demanda o de la oferta". A esto, justamente, nos referiremos a continuación.

2.2. ELASTICIDAD DEMANDA-PRECIO

Si se denomina *x* a la cantidad demandada de un bien o un servicio determinado X cuando es *p* el precio de venta en el mercado de este bien o servicio, x = f(p) es la *función de demanda* del bien o servicio X, dentro de ciertos supuestos restrictivos que exigen la independencia de la demanda respecto a los precios de otros bienes diferentes de X y de la renta o disponibilidades del sujeto comprador del bien o servicio en cuestión.

Como, en general, al crecer el precio *p* se demanda menos cantidad del bien -y recíprocamente- Δp y Δx son de signo contrario; si se desea que sea positiva la elasticidad correspondiente, ha de definirse afectada de un signo negativo, esto es, en la forma:

$$\frac{E(x)}{E(p)} = -\frac{p}{x} \times \frac{dx}{dp} \; ,$$

que representará, aproximadamente, el porcentaje en que varía la cantidad demandada de X cuando el precio del bien o servicio que nos ocupa sufre una variación del 1 por 100.

Como no resulta, con cierta frecuencia, fácil de obtener empíricamente funciones de demanda-precio se calcula, a veces, aquello que J. CASTAÑEDA (1968) denomina *elasticidad de arco*, correspondiendo a la elasticidad en el punto medio del segmento determinado por dos puntos, $P_1 (p_1, x_1)$ i $P_2 (p_2, x_2)$, que pertenecen a una curva teórica de demanda, y sus coordenadas son observaciones conseguidas mediante alguna investigación estadística previa.

Su cálculo se realiza empleando la fórmula aproximada, que ya hemos visto antes:

$$\mu = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} \div \frac{\Delta x}{x}, \text{ donde:}$$

$$\Delta f(x) = x_2 - x_1 \; ; \; f(x) = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \text{ y también: } \Delta x = p_2 - p_1 \; ; \; x = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

ya que las semisumas que figuran en estas expresiones son los puntos medios de las proyecciones de P_1P_2 sobre los ejes coordenados rectangulares cartesianos Ox y Op, y el punto definido por las coordenadas:

$\left(\frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$ es justamente el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$.

Por tanto, la elasticidad de arco pedida vendrá dada, en la práctica, por la expresión:

$$\frac{E_a(x)}{E_a(p)} = -\frac{x_2 - x_1}{\frac{x_1 + x_2}{2}} \div \frac{p_2 - p_1}{\frac{p_1 + p_2}{2}} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \div \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{x_1 - x_2}{p_2 - p_1} \times \frac{p_1 + p_2}{x_1 + x_2}.$$

Este método para calcular la elasticidad-precio se conoce también como "fórmula de los puntos medios", ya que el precio y la cantidad medios son las coordenadas del punto medio de la línea recta trazada entre los dos puntos dados; sin embargo, como esta fórmula asume implícitamente que la sección de la curva de demanda entre esos puntos es lineal, mientras mayor sea su curvatura por encima de ese registro, peor será también la aproximación de esta elasticidad.

Los conceptos desarrollados aquí pueden aplicarse también a la oferta por lo que a su elasticidad se refiere.

Son básicamente dos los factores que influyen sobre la elasticidad de la oferta, a saber:

- *La posibilidad de substituir recursos*: mientras más posibilidades tenga el productor de substituir recursos (por ejemplo substituir trabajo por capital), más elevada será también la elasticidad de la oferta.

- *El plazo u horizonte temporal*: A mayor plazo la curva de oferta será más elástica, y a menor plazo será menos elástica. Por ejemplo, a muy corto plazo la curva de oferta será perfectamente inelástica, pues el productor no puede variar sus planes de producción en un tiempo tan reducido (puede ser de un día para otro, o de una semana a otra, o tal vez plazos mayores dependiendo del tipo de producción).

Pues bien, a continuación se exponen algunos ejercicios representativos de este importante concepto profusamente utilizado en Economía.

Ejemplo 1

Si la elasticidad demanda-precio de un determinado servicio viene dada por la expresión: $\varepsilon = a + b \cdot p$, donde a y b son parámetros positivos, determinar la función de demanda correspondiente.

Solución:

En base a la información dada, se tiene lo siguiente:

$\varepsilon = -\frac{d\ln x}{d\ln p} = -\frac{p \cdot dx}{x \cdot dp} = a + b \cdot p$, de donde: $-\frac{dx}{x} = a\frac{dp}{p} + b \cdot dp$, que es una EDO de variables separadas integrable mediante una cuadratura, esto es:

$$-\int \frac{dx}{x} = a\int \frac{dp}{p} + b\int dp + C \text{, con lo que:}$$

- $\ln x = a \cdot \ln p + b \cdot p + C$; $\ln x = \ln p^{-a} - bp - C$, y de aquí:

$\ln x - \ln p^{-a} = \ln \frac{x}{p^{-a}} = \ln x \cdot p^{a} = -b \cdot p - C$, y haciendo: $k = e^{-C}$, se tendrá: $e^{-bp-C} = x \cdot p^{a} = k \cdot e^{-bp}$, de donde se deduce la función de demanda buscada, a saber:

$$\boxed{x = k \cdot p^{-a} \cdot e^{-bp}}$$

A la misma conclusión hubiéramos llegado, a partir de la misma fórmula de la elasticidad, tomando integrales del siguiente modo:

$-d\ln x = a\cdot d\ln p + b\cdot p\cdot\frac{dp}{p}$; $\ln x = -a\cdot\ln p - b\cdot\int dp = \ln p^{-a} - b\cdot p - C$, siendo C una constante arbitraria de integración, alcanzando el mismo resultado que el obtenido por el procedimiento anterior.

Ejemplo 2

La elasticidad de la demanda de un bien normal u ordinario con respecto al precio es la unidad. Hállese la ecuación de la curva de demanda del producto en cuestión, sabiendo que para un precio unitario la demanda se eleva a 1.000 unidades.

Nota: Recuérdese que para un bien normal, las variaciones del precio y de la demanda son de signo opuesto.

Solución:

$$E_pD = |-1| = \frac{p}{D(p)}\cdot D'(p) = \frac{p}{D(p)}\cdot\frac{dD(p)}{dp} \Rightarrow \frac{dD(p)}{D(p)} = -\frac{dp}{p}.$$

Integrando, mediante una cuadratura, se obtiene:

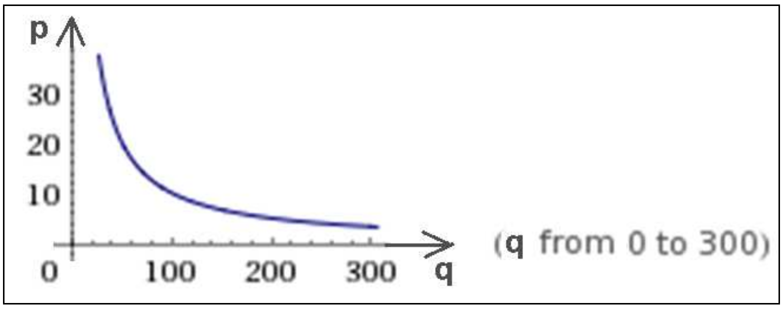
$$\int\frac{dD(p)}{D(p)} = -\int\frac{dp}{p};\ \ln D(p) = -\ln p + \ln C \Rightarrow D(p) = \frac{C}{p}.$$

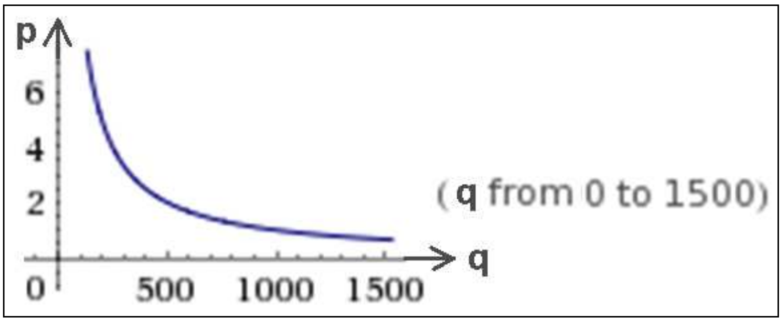
Se sabe que, para un precio p = 1 u.m., la demanda correspondiente es de: D(1) = 1.000 ud., luego:

$D(1) = 1.000 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 1.000$, y la curva de demanda pedida será:

$$\boxed{D(p) = q = \frac{1.000}{p}} \text{ o también: } \boxed{p = \frac{1.000}{q}}$$

, que resulta obviamente asintótica en los dos ejes coordenados, con las siguientes representaciones gráficas:





Ejemplo 3

Hállese la función económica y = f(x) que verifique que, en todo punto, el valor de la elasticidad sea igual a la inversa de la función.

Solución:

Sabemos que la elasticidad de una función es:

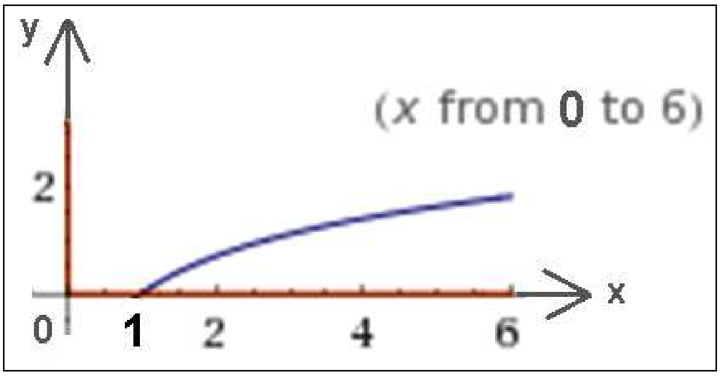
$E_x f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$, luego deberá cumplirse que:

$$\frac{x}{y} \cdot y' = \frac{1}{y}; \qquad x \cdot y' = 1; \qquad x \cdot \frac{dy}{dx} = 1; \qquad dy = \frac{1}{x} dx.$$

Integrando mediante una cuadratura, puesto que se trata de una sencilla ecuación de variables separadas, se obtiene que:

$$\int dy = \int \frac{1}{x} dx; \quad \text{o sea:} \quad y = \ln x + \ln C.$$

La función económica buscada es, pues: $\boxed{y = \ln Cx}$. En un caso simple, si suponemos, v. gr., el valor de la constante C = 1, se obtendría la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x → ∞ también y → ∞. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, luego existe una rama parabólica según el eje OX (horizontal).

3. LA TEORÍA DE LA EMPRESA

3.1. FUNCIONES DE INGRESO

El ingreso se determina como la suma de los productos de los precios por las cantidades vendidas de cada uno de los bienes o servicios en estudio. De este modo:

- Ingreso total (IT): es simplemente el precio (p) de un bien o servicio multiplicado por la cantidad (q) que se vende de ese bien o servicio.
- Ingreso marginal (IMa): es el incremento que experimenta el ingreso total cuando se eleva la producción en una unidad. El IMa puede ser positivo o negativo en dependencia de la elasticidad de la demanda. Así pues, el *ingreso marginal* es el cambio en el ingreso total que se produce cuando la cantidad vendida se incrementa en una unidad, es decir, al incremento del ingreso total que supone la venta adicional de una unidad de un determinado bien.

Si consideramos la función lineal del tipo f(x) = ax + b vemos que en la función de ingreso el término independiente b es igual a 0 por cuanto si no hay ventas de bienes el ingreso se anula. Por lo tanto esta función es del tipo I = f(x) = ax. Como a medida que aumentan las unidades vendidas aumenta el ingreso, es una función creciente y del primer cuadrante en la representación cartesiana, pues las cantidades vendidas no pueden ser negativas, siendo su menor valor x = 0 (cero unidades vendidas). En este caso, los ingresos serán también igual a 0 (cero). La gráfica de esta función tendría su nacimiento en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, es decir, en el punto (0,0). Respecto al concepto de *elasticidad* definido en el epígrafe anterior, veamos que:

- Cuando la elasticidad en valor absoluto es 1, el ingreso marginal es cero, puesto que esto significa que el incremento del precio se ve compensado por la disminución de la cantidad demandada sin variar, por tanto, el ingreso total.
- Si la elasticidad es inferior a 1, la subida del precio conlleva un ingreso marginal positivo y por tanto aumenta el ingreso total.

- Si la elasticidad es superior a 1, la subida del precio conlleva un ingreso marginal negativo y por tanto desciende el ingreso total.

A continuación se exponen algunos ejercicios representativos de este importante concepto en Economía.

Ejemplo 1

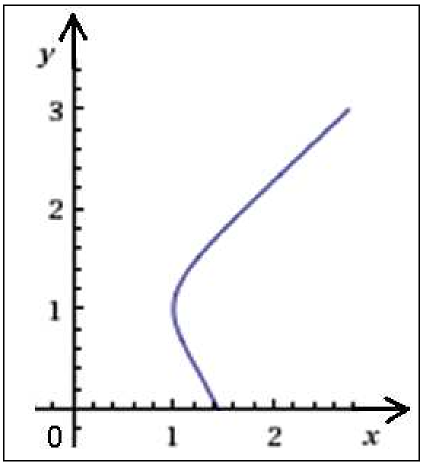
Señalemos por *y*, expresado en euros, el ingreso que se obtiene al vender *x* unidades de un producto determinado. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0$. Obtener *y* en función de *x*, sabiendo que la venta de 1 unidad de producto produce un ingreso de 1'00 euros.

Solución:

La EDO del enunciado es, en realidad, de variables separables, puesto que:

$y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{1-y^2} = \frac{x^2}{y^2-1}$, o también: $(y^2 - 1)dy = x^2dx$; integrando mediante una cuadratura se obtiene que: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} + C$; puesto que $y(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + C \rightarrow C = -1$, luego la solución buscada es: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} - 1 \leftrightarrow$ $\boxed{y^3 - 3y = x^3 - 3}$ (I.P.)

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Ejemplo 2

Sea *y*, expresado en euros, el ingreso obtenido por la venta de *x* unidades de un producto determinado. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}$. Hállese *y* en función de *x*, sabiendo que la venta de 10 unidades produce unos ingresos de 100 euros.

Solución:

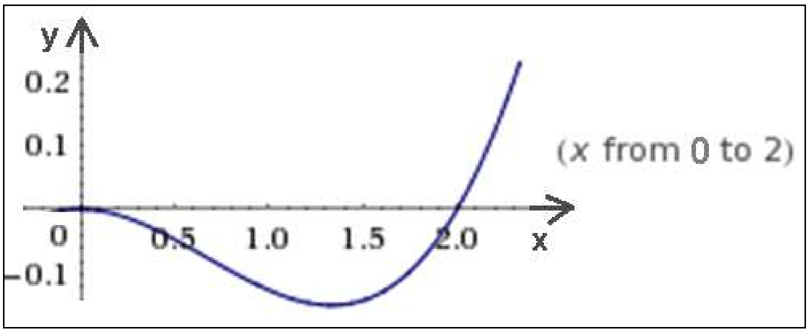
Escribimos la ecuación diferencial, que resulta ser de variables separables, en la forma: $\frac{1}{y}dy = \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}dx$. Integrando mediante una cuadratura se obtiene que:

$$\ln y = \int \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}dx = \int \frac{3x - 4}{x^2 - 2x}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x - 2}\right)dx = \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{dx}{x - 2} = ,$$
$$= 2\ln x + \ln(x - 2) + \ln k = \ln kx^2(x - 2),$$

puesto que se trata de la integral indefinida de una función racional con las raíces reales simples del denominador del integrando (x = 0 y 2), de donde: $y = kx^2(x - 2)$. Sabemos que: $x = 10 \Rightarrow 100 = k \cdot 100 \cdot 8 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$, luego la solución buscada es:

$$\boxed{y = \frac{1}{8}x^2(x - 2)} \text{ (I.P.)}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico obvio en el primer cuadrante del círculo):



NOTA: Esta función tendría sentido, alternativamente, como función de beneficio más que de ingreso, habida cuenta de que la venta de hasta 2 unidades produciría pérdidas, al no poderse superar los costes fijos del negocio, y a partir de esa cifra de ventas ya se obtendrían beneficios. Así pues, el "umbral de rentabilidad" se encontraría en x = 2 ud.

3.2. FUNCIONES DE COSTE

El "coste" es la expresión cuantitativa monetaria representativa del consumo necesario de los factores de la producción que se emplean para producir un bien o prestar un servicio determinado. Con las funciones de costes que veremos a continuación trataremos de plantear un modelo matemático simplificado de la realidad económica.

Iniciaremos diciendo que los costos de producción de un bien o de prestación de un servicio tienen distintos componentes. Cuando una empresa produce cualquier bien o presta un servicio, deberá utilizar una serie de insumos o *inputs* del proceso productivo que valorizados monetariamente le genera costos, que analizados en función a la relación con la producción total, los denominaremos *costos fijos* (CF) y *costos variables* (CV). Los primeros, como lo indica su nombre, son independientes de las cantidades de un artículo que se produzca o un servicio que se preste (p.ej.: alquiler del local, depreciación de los bienes durables, determinados impuestos, etc.). En cambio, los costos variables dependen de la cantidad que se produzca de ese mismo artículo o que se preste del servicio en cuestión (p. ej.: costos de materiales, de mano de obra productiva, etc.). Pues bien, el costo total (CT) es la suma de ambos.

En economía y finanzas, el coste marginal (CMa) mide la tasa de variación del coste dividida por la variación de la producción. Para comprender mejor el concepto de coste marginal, se suele expresar el coste marginal como el incremento que sufre el coste cuando se incrementa la producción en una unidad, es decir, el incremento del coste total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien.

La curva que representa la evolución del costo marginal tiene forma de parábola cóncava, debido a la *ley de los rendimientos decrecientes*. En el punto mínimo de dicha curva, se encuentra el número de bienes a producir para que los costos en beneficio de la empresa sean mínimos. En dicha curva, como veremos en algunos ejercicios, el punto de corte con la curva de costes medios nos determina el óptimo de producción, punto a partir del cual se obtiene mayor producción.

En política de precios el coste marginal nos marca el precio a partir del cual obtenemos beneficios, siempre y cuando hayamos alcanzado el umbral de rentabilidad o punto muerto.

Veamos, en fin, que las funciones lineales cumplen un importante papel en el análisis cuantitativo de los problemas económicos, en general. En muchos casos los problemas que se presentan en la realidad son no lineales (parabólicos, exponenciales, potenciales, semi-logarítmicos, etc.) pero, en otros, se buscan hipótesis que permitan transformarlos en problemas lineales ya que su solución resulta más sencilla. Ello se manifiesta en toda su plenitud en el caso de las funciones lineales de costos.

A continuación se exponen numerosos ejercicios representativos de este importante concepto en Economía.

Ejemplo 1

Sea la función de coste unitario a corto plazo de una empresa dada de modo que la suma de dicho coste *y* (€/ud.) más el coste unitario marginal es igual a la inversa de la suma del cuadrado de la cantidad de *output x* de la empresa más 1 unidad de producto. Sabiendo que se considera un coste nulo de los *inputs* fijos, por lo que cuando no hay producción el coste total unitario es también nulo, se desea conocer la función de coste unitario de dicha empresa.

Solución:

Se trata, en definitiva, de resolver la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\boxed{y' + y = \frac{1}{1+x^2}\text{, con la condición inicial: } y(0) = 0}\,.$$

La solución de esta ecuación no homogénea, que aparentemente parece sencilla, se complica según el método que se sigue para ello, como tendremos ocasión de comprobar seguidamente.

En efecto, los coeficientes de la ecuación expresada son continuos para toda x que pertenezca a los números reales, o sea que el intervalo de solución es: $\Re \Leftrightarrow -\infty < x < \infty$.

Esta EDO es una ecuación diferencial no exacta puesto que se puede escribir en la forma:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{dy}{dx} + y;\ \frac{dx}{1+x^2} = dy + y\cdot dx\,;\ dy + y\cdot dx - \frac{dx}{1+x^2} = 0\text{, de donde:}$$

$$(y - \frac{1}{1+x^2})dx + dy = 0\text{, con lo que: } \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 1 \neq 0 = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x}\,.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial anterior tiene la forma:

$y' + p(x)\cdot y = g(x)$, con $p(x) = 1$; de tal modo que, para resolverla, hallamos el factor integrante:

$$\mu(x) = \exp\int dx = \exp(x), \Rightarrow \mu(x) = e^x \ .$$

Ahora, multiplicamos la ecuación diferencial ordinaria anterior por dicho factor $\mu(x) = e^x$, y se tendrá que:

$$e^x y' + e^x y = e^x/(1+x^2) \ \Rightarrow \ (e^x y)' = e^x/(1+x^2) \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ e^x y = \int \left[e^x/(1+x^2)\right] dx + c \ \Rightarrow \ y = e^{-x}\int_0^x \left[e^x/(1+x^2)\right] dx + ce^{-x}$, que es la integral general del problema planteado aunque sería más correcto presentar un resultado más desarrollado de la misma.

Desde luego, a la misma conclusión hubiéramos llegado por aplicación directa de la fórmula correspondiente, puesto que se trata, como hemos apuntado, de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, o bien por el método de variación de constantes.

En efecto, la ecuación es del tipo:

$\frac{dy}{dx} + X\cdot y + X_1 = 0$, esto es: $\frac{dy}{dx} + y - \frac{1}{1+x^2} = 0$, en que: $X = 1$ y $X_1 = -\frac{1}{1+x^2}$.

Se tiene que: $\int X\cdot dx = x$; $\int X_1 \cdot e^{\int X\cdot dx}\cdot dx = -\int \frac{e^x}{1+x^2}\cdot dx$; de donde:

$$y = e^{-x}\cdot\left(c + \int \frac{e^x}{1+x^2}\cdot dx\right) = e^{-x}\int \frac{e^x}{1+x^2}\cdot dx + c\cdot e^{-x}, \text{ c.s.q.d.}$$

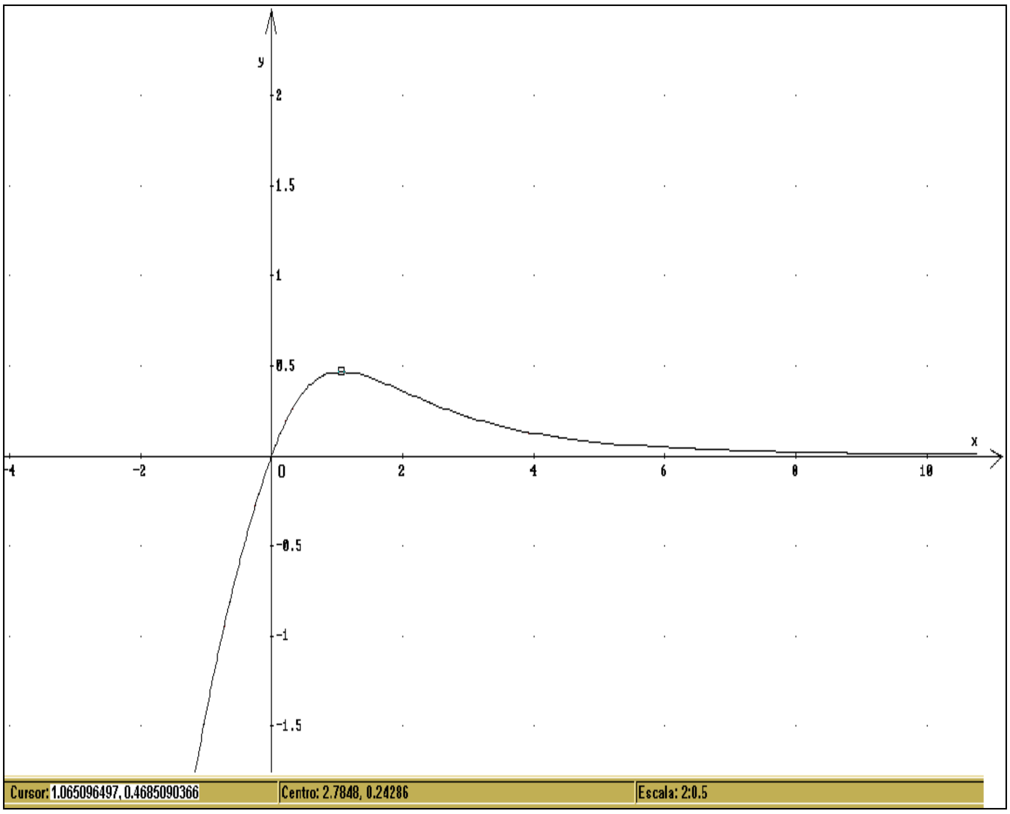
Substituyendo ahora la condición inicial dada en la ecuación anterior, se obtiene:

$$y(0) = \ 0 = e^0\int_0^0 \left[e^t/(1+t^2)\right] dt + ce^0 \ \Leftrightarrow \ c = 0 \ .$$

Finalmente, substituyendo en la ecuación, se obtiene la integral particular:

$$\boxed{y = e^{-x}\int_0^x \left[e^x/(1+x^2)\right] dx},$$

cuya representación gráfica correspondiente es la siguiente:



La función obtenida pasa por el origen de coordenadas, puesto que cuando x = 0, sucede que: $y = 1 \times \int_0^0 \frac{e^x}{1+x^2} \cdot dx = 1 \times 0 = 0$.

Es evidente que existe una asíntota horizontal que es el propio eje OX, puesto que:

$$\lim_{x \to +\infty} y = 0 .$$

Por otra parte, cuando x $\to$ -∞ se tendrá que:

$$\lim_{x \to -\infty} y = e^{\infty} \cdot \int_0^{-\infty} \frac{e^x}{1+x^2} \cdot dx = -\infty \times \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+x^2} \cdot dx = -\infty ,$$

lo cual presume la existencia de ramas parabólicas, aunque ello carece de sentido económico. En cualquier caso, dicha circunstancia deberá ser confirmada expresamente, por lo que calculamos la expresión: $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} \int_0^x \left[e^x / (1+x^2) \right] \cdot dx}{x}$, límite que no existe, por lo que podemos asegurar también la no existencia de ramas parabólicas.

Puestos a analizar los puntos singulares, veamos que para hallar el punto en que la función alcanza el máximo relativo o local calculamos la derivada primera (condición necesaria o de primer grado), así:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x}\int_0^x \frac{e^x}{1+x^2}\,dx\,.$$

Igualamos a cero y la solución a la ecuación correspondiente es: x = 1,065096497 ud.

Hallamos la segunda derivada para comprobar si se trata de un máximo relativo o local (condición suficiente o de segundo grado):

$$y'' = e^{-x}\int_0^x \frac{e^x}{1+x^2}\,dx - \frac{x^2+2x+1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$y''\left(1{,}065096497\right);\quad -0{,}4675788907 < 0\,.$$

Luego, la función alcanza un máximo en el punto de coordenadas (1,065096497, 0,4685090366).

Veamos ahora los puntos de inflexión. Igualando a cero la segunda derivada obtenemos que x = 1,997591819 ud.

Efectivamente, se trata de un punto de inflexión ya que:

$$y'''\left(1{,}997591819\right) = \left.\frac{x^4+2x^3+8x^2+2x-1}{\left(1+x^2\right)^3} - e^{-x}\int_0^x \frac{e^x}{1+x^2}\,dx\right|_{1{,}997591819} = 0{,}1765557587 \neq 0$$

Para resolver la integral que nos aparece en la anterior expresión de la solución particular, debe tenerse en cuenta el desarrollo de la función $e^{\text{tg } t}$, en serie de Mc Laurin hasta la novena derivada. Esto es:

$$\begin{cases} f(t) = e^{tg\ t} \ \ldots\ldots ;\ f(0) = 1 \\ f'(t) = \dfrac{e^{\text{tg } t}}{\cos^2 t} \ \ldots\ldots ;\ f'(0) = 1 \\ f''(t) = \dfrac{e^{tg\ t}(1+sen\ 2t)}{\cos^4 t} \ \ldots\ldots ;\ f''(0) = 1 \\ f'''(t) = \ \ldots\ldots ;\ f'''(0) = 3 \\ f^{IV}(t) = \ldots\ldots ;\ f^{IV}(0) = 9 \\ f^{V}(t) = \ldots\ldots ;\ f^{V}(0) = 37 \\ f^{VI}(t) = \ldots\ldots ;\ f^{VI}(0) = 177 \end{cases}$$

…….. y así sucesivamente.

De lo que resulta el siguiente desarrollo (hasta la novena potencia de t):

$$e^{tg\,t} = f(0) + t\cdot f'(0)\cdot\frac{t^2}{2!}f''(0) + \frac{t^3}{3!}f'''(0) + \frac{t^4}{4!}f^{IV}(0) + \frac{t^5}{5!}f^{V}(0) + \frac{t^6}{6!}f^{VI}(0) + \ldots =$$
$$= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \frac{3t^4}{8} + \frac{37t^5}{120} + \frac{59t^6}{240} + \frac{137t^7}{720} + \frac{871t^8}{5.760} + \frac{41.641t^9}{362.880} + \ldots$$

La integral buscada nos quedará así:

$$\int e^x/(1+x^2)\cdot dx = \int \frac{e^x}{1+x^2}\cdot dx = \boxed{\begin{array}{l} u = e^x \\ v = \operatorname{arctg} x \\ dv = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array}} = e^x\cdot \operatorname{arctg} x - \int e^x\cdot \operatorname{arctg} x\cdot dx;$$

esta última integral se resuelve por substitución y, posteriormente por partes, del siguiente modo:

$$\int e^x\cdot \operatorname{arctg} x\cdot dx = \boxed{\begin{array}{l} x = tg\,t \\ t = \operatorname{arctg} x \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{array}} = \int e^{tg\,t}\cdot t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \boxed{\begin{array}{l} u = t \\ v = e^{tg\,t} \\ dv = \dfrac{e^{tg\,t}}{\cos^2 t}\cdot dt \end{array}} =$$

$$= t\cdot e^{tg\,t} - \int e^{tg\,t}\cdot dt = t\,e^{tg\,t} - \int\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \frac{3t^4}{8} + \frac{37t^5}{120} + \frac{59t^6}{240} + \ldots\right)dt =$$
$$= t\cdot e^{tg\,t} - t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{8} - \frac{3t^5}{40} - \frac{37t^6}{720} - \frac{59t^7}{1680} + \ldots =$$

$$= e^x\cdot \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x - \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} - \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{6} - \frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{8} - \frac{3\cdot(\operatorname{arctg} x)^5}{40} -$$
$$- \frac{37(\operatorname{arctg} x)^6}{720} - \frac{59(\operatorname{arctg} x)^7}{1.680} - \frac{137(\operatorname{arctg} x)^8}{5.760} - \frac{871(\operatorname{arctg} x)^9}{51.840} - \ldots$$

de donde se deduce que:

$$\int_0^x \frac{e^x}{1+x^2}\cdot dx = \operatorname{arctg} x + \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{6} + \frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{8} + \frac{3\cdot(\operatorname{arctg} x)^5}{40} +$$
$$+ \frac{37(\operatorname{arctg} x)^6}{720} + \frac{59(\operatorname{arctg} x)^7}{1.680} + \frac{137(\operatorname{arctg} x)^8}{5.760} + \frac{871(\operatorname{arctg} x)^9}{51.840} + \ldots \qquad \text{(I)}$$

Evidentemente, para x = 0 su resultado es también 0. Veamos qué sucede para x = 1 considerando solo los siete primeros sumandos del desarrollo y ajustando hasta las diezmilésimas, a efectos de simplificación operativa:

0'7854 + 0'3084 + 0'0807 + 0'0476 + 0'0224 + 0,0121 + 0,0065 = 1'2631.

Repitiendo este mismo proceso para x = 2, se obtendría que:

1’1071 + 0’6129 + 0’2262 + 0’1878 + 0’1248 + 0,0946 + 0,0716 =
= 2’4250.

Repitiendo este mismo proceso para x = 3, se obtendría que:

1,2490 + 0,7801 + 0,3248 + 0’3042 + 0’2280 + 0,1951 + 0,1666 =
= 3’2478.

Después de haber añadido dos términos al desarrollo en serie de McLaurin, con la ayuda del programa *Derive* se calcula el desarrollo de grado 20 y la integral resultante es la siguiente:

$$\frac{23157229065769 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{21}}{4742499041280000 \cdot 21} + \frac{2832484672207 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{20}}{426824913715200 \cdot 20} + \frac{8224154352439 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{19}}{914624815104000 \cdot 19} +$$
$$\frac{4315903789009 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{18}}{355687428096000 \cdot 18} + \frac{342232522657 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{17}}{20922789888000 \cdot 17} + \frac{5721418891 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{16}}{261534873600 \cdot 16} +$$
$$\frac{24362249 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{15}}{830269440 \cdot 15} + \frac{241586893 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{14}}{6227020800 \cdot 14} + \frac{35797 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{13}}{691200 \cdot 13} + \frac{3887 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{12}}{57600 \cdot 12} +$$
$$\frac{325249 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{11}}{3628800 \cdot 11} + \frac{41641 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{10}}{3628800} + \frac{871 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{9}}{5760 \cdot 9} + \frac{137 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{8}}{720 \cdot 8} + \frac{59 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{7}}{240 \cdot 7} +$$
$$\frac{37 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{6}}{720} + \frac{3 \cdot \mathrm{ATAN}(x)^{5}}{40} + \frac{\mathrm{ATAN}(x)^{4}}{8} + \frac{\mathrm{ATAN}(x)^{3}}{6} + \frac{\mathrm{ATAN}(x)^{2}}{2} + \mathrm{ATAN}(x)$$

Y por ejemplo, para x = 100, toma el valor 28,60279951, y el cociente: $\frac{28'60279951}{e^{100}} \cong 0$, ejemplifica claramente la consideración asintótica del punto en cuestión.

Por otra parte, calculando los resultados para los 3 primeros valores enteros de x ($\forall x \in 1,2,3$), se observa, para los 7 primeros sumandos del desarrollo, que:

$$\begin{cases} \text{Para } x = 1 \rightarrow y = e^{-1} \times 1'2631 = 0'46467 \\ \text{Para } x = 2 \rightarrow y = e^{-2} \times 2'4250 = 0'32819 \\ \text{Para } x = 3 \rightarrow y = e^{-3} \times 3'2478 = 0'16170 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

valores, todos ellos, que se ajustan bien a la integral particular obtenida.

De este modo, la integral particular buscada de la ecuación diferencial planteada, que es la función de coste unitario de la empresa en cuestión, será, definitivamente:

$$\boxed{\begin{aligned}y(x) = e^{-x}\int_0^x \frac{e^x}{1+x^2}\cdot dx = e^{-x}[\text{arctg}\,x + \frac{(\text{arctg}\,x)^2}{2} + \frac{(\text{arctg}\,x)^3}{6} + \frac{(\text{arctg}\,x)^4}{8} + \frac{3\cdot(\text{arctg}\,x)^5}{40} + \\ + \frac{37(\text{arctg}\,x)^6}{720} + \frac{59(\text{arctg}\,x)^7}{1.680} + \frac{137(\text{arctg}\,x)^8}{5.760} + \frac{871(\text{arctg}\,x)^9}{51.840} + \ldots].\end{aligned}}$$

Ejemplo 2

Sea *x* el número de unidades fabricadas y *y* el coste de producción de un bien determinado. Sabiendo que la tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades producidas viene dado por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - x + \frac{9}{x}$, se pide calcular el coste en función de las unidades producidas, siendo el coste unitario de producción de 4€/Ud. cuando el número de unidades fabricadas es 3.

Solución:

Se trata, en este caso, de resolver la ecuación diferencial lineal dada. Esto es:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + x - \frac{9}{x} = 0;\ \ \text{donde}:\ X = -\frac{1}{x};\ X_1 = x - \frac{9}{x};$$

$$\int X\cdot dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x;$$

$$\int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx} = \int\left(x - \frac{9}{x}\right)\cdot e^{-\ln x}\cdot dx = \int\left(x - \frac{9}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx =$$

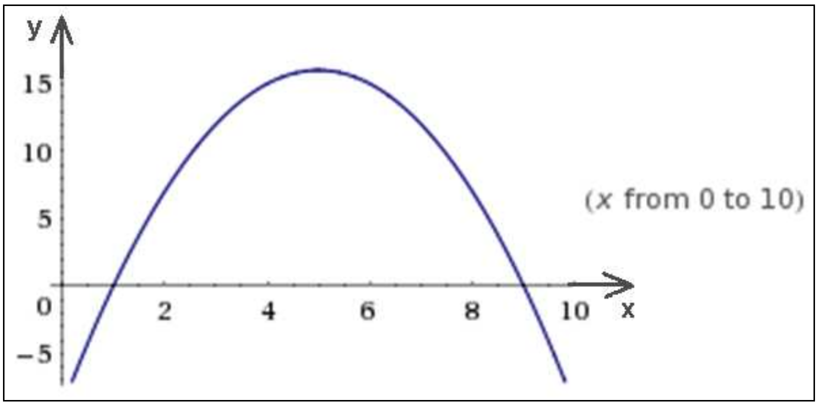
$$= \int\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)\cdot dx = x - 9\int\frac{1}{x^2}\cdot dx = x + \frac{9}{x};\ \text{luego}:$$

$y = x\left(k - x - \frac{9}{x}\right) = kx - x^2 - 9$; para y = 3 x 4 = 12’00 € $\rightarrow$ x = 3 ud., o sea:

y = 12 = 3k – 9 – 9 = 3k – 18 ; $k = \frac{18+12}{3} = 10$; y resulta la integral particular:

$$\boxed{y = -x^2 + 10x - 9}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Esta función tiene un máximo relativo o local para x = 5 ud. e y = 16'00 € (coste unitario de producción de 3'2 €/ud.). El coste de producción se anula para x = 1 ud. y x = 9 ud. de producto, puesto que se trata de resolver la ecuación: $x^2 - 10x + 9 = 0$; de donde:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$, y resulta: $x_1 = 1$ y $x_2 = 9$.

Ejemplo 3

Sea *y* el coste de producir *x* unidades de un cierto producto. Se sabe que la tasa a la que cambia el coste de producción, respecto al número de unidades fabricadas, es igual al doble del cuadrado del coste menos el cuadrado del número de unidades producidas, dividido todo ello por el producto de ambas variables. Se pide hallar la relación que existe entre las unidades producidas y el coste de producción. Para ello se sabe que al producir 1 unidad de producto, el coste de producción es de 3'00 euros.

Solución:

Planteado el problema conduce a la ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{xy}, \text{ con la condición } y(1) = 3 \text{ € .}$$

$$(2y^2 - x^2)dx - xy \cdot dy = 0 \text{ ; comprobemos que:}$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 2y^2 - x^2 \\ N(x,y) = -x \cdot y \end{array}\right\} \begin{array}{l} M(tx,ty) = 2y^2t^2 - t^2x^2 = t^2(2y^2 - x^2) = t^2 \cdot M(x,y) \\ N(tx,ty) = -tx \cdot ty = t^2(-xy) = t^2 \cdot N(x,y) \end{array}$$

y ambas funciones son homogéneas de grado 2, luego es efectivamente una ecuación homogénea. Haciendo el cambio de variable:

$y = z \cdot x$; $z = \frac{y}{x}$, pudiéndose aplicar directamente la fórmula:

$\frac{dx}{x} = \frac{-N(1,z) \cdot dz}{M(1,z) + z \cdot N(1,z)}$; $\frac{dx}{x} = \frac{z \cdot dz}{2z^2 - 1 - z \cdot z} = \frac{z \cdot dz}{z^2 - 1}$; que ya es una EDO de variables separables. Integrándola mediante una cuadratura, se tendrá que:

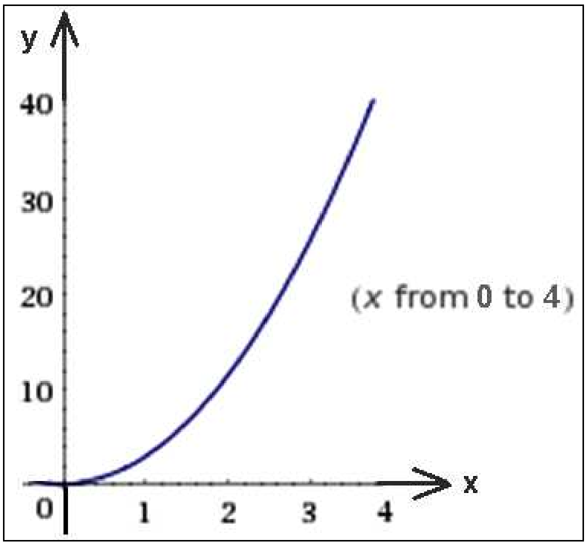
$$\ln x + \ln C = \frac{1}{2}\ln(z^2 - 1) = \ln Cx = \ln\sqrt{z^2 - 1}; \quad c^2x^2 = z^2 - 1 = \frac{y^2}{x^2} - 1;$$

$$c^2 \cdot x^4 = y^2 - x^2; \text{ haciendo ahora } K = C^2 \rightarrow y^2 = K \cdot x^4 + x^2; \quad y = \pm\sqrt{K \cdot x^4 + x^2};$$

$$x = 1 \text{ud.} \rightarrow y = 3€; \quad \text{con lo que}: 3 = \pm\sqrt{K + 1}; \quad 9 = K + 1 \rightarrow K = 8; \text{luego}:$$

$\boxed{y = \sqrt{8x^4 + x^2}}$, puesto que solo tiene sentido económico el valor positivo de la raíz cuadrada en cuestión, al tratarse de un coste de producción.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Efectuados los cálculos correspondientes, veamos que esta función posee un mínimo global para x = y = 0. Por otra parte, se presume la existencia de ramas parabólicas puesto que si $x \rightarrow \infty$ también $y \rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(8x^2 + 1)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{8x^2 + 1} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 4

Sea *y* = *C(x)* el coste expresado en euros, de fabricar *x* figuras de cerámica. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de figuras fabricadas viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} - 2x(y+1) = 0$. Hallar el coste en función del número de figuras de cerámica fabricadas, sabiendo que el coste de fabricar 2 unidades es de 109 euros.

Solución:

Escribiendo la ecuación diferencial en la forma: $\frac{1}{y+1}dy = 2x{\cdot}dx$, puesto que se trata de una ecuación de variables separadas, e integrando mediante una cuadratura, queda lo siguiente:

$$\ln(y+1) = x^2 + c_1 \text{; esto es :}$$

$$e^{x^2+c_1} = y+1 = e^{x^2}\cdot c \text{ (habiendo hecho : } c = e^{c_1}\text{); } y = c\cdot e^{x^2} - 1;$$

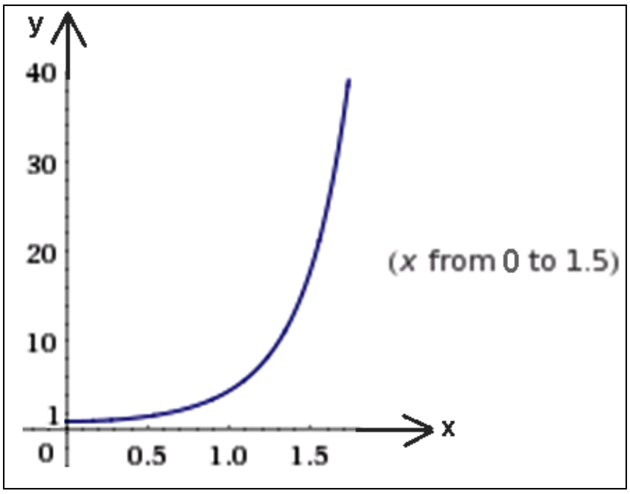
$$\text{y substituyendo valores : } 109 = c\cdot e^4 - 1;\ c\cdot e^4 = 110;\ \text{de donde } c \cong 2,$$

por lo que:

$$\boxed{y = 2{\cdot}e^{x^2} - 1}.$$

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x → ∞ también y → ∞. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^{x^2}-1}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Efectuados los cálculos correspondientes, veamos que esta función posee un mínimo global para x = 0, y = 1.

Ejemplo 5

Sea *y* el coste de producir *x* unidades de un libro. La tasa a la que varía el coste respecto a los libros producidos es: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + y^3}{x^3}$. Hállese el coste en función del número de libros producidos, sabiendo que si se producen 5 unidades, el coste es de 10'00 euros.

Solución:

Se trata de una ecuación diferencial homogénea. En efecto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y + y^3}{x^3}\ ;\ (x^2y + y^3)dx - x^3dy = 0\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = x^2y + y^3 \\ N(x,y) = -x^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} M(tx,ty) = t^2x^2ty + t^3y^3 = t^3(x^2y + y^3) = t^3 \cdot M(x,y) \\ N(tx,ty) = -t^3x^3 = t^3(-x^3) = t^3 \cdot N(x,y)\ ; \end{array}$$

y ambas funciones son homogéneas del mismo grado 3, luego efectivamente es una ecuación homogénea. Haciendo el cambio:

$y = z{\cdot}x\ ;\ \ z = \frac{y}{x}$, pudiéndose aplicar directamente la fórmula:

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{z + z^3 - z} = \frac{dz}{z^3}\ ;\ \ \text{integrando mediante una cuadratura, se tendrá que:}$$

$$\ln x + \ln c = -\frac{1}{2z^2} = \ln cx\ ;\ \ 2z^2 = -\frac{1}{\ln cx}\ ;\ \text{de donde se deduce que:}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{-1}{2\ln cx}} = \pm\frac{1}{\sqrt{-2\ln cx}} = \frac{y}{x}\ ;\ \ y = \pm\frac{x}{\sqrt{-2\cdot \ln cx}} = \pm\frac{x}{\sqrt{-2(\ln x + \ln c)}} =$$

$$\pm\frac{x}{\sqrt{-2\ln x - 2\ln c}} == \pm\frac{x}{\sqrt{-2\ln x + c'}}\ ;\ \text{habiendo hecho: } c' = -2\ln c.$$

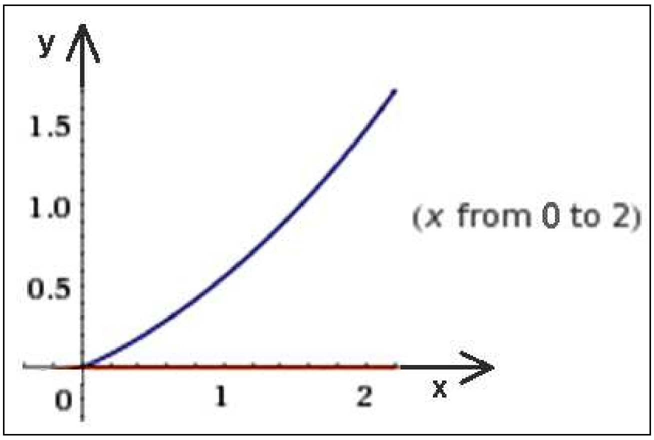
Para las condiciones dadas, el valor positivo resultante es:

$$10 = \frac{5}{\sqrt{-2\cdot\frac{3}{2} + c'}} = \frac{5}{\sqrt{-3 + c'}} \leftrightarrow c' = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}\ .$$

Así pues, el coste en función de los libros producidos será:

$$y = \frac{x}{\sqrt{-2\ln x + \frac{13}{4}}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Ejemplo 6

Un conjunto de explotaciones agrarias obtienen un producto (arroz cáscara) de modo que su demanda total de mercado viene dada por la función lineal: 3Q + 5.000p = 750.000. La función de costes marginales, a largo plazo, de estas explotaciones, es: CMa $= \frac{q}{10} + 10$, con unos costes fijos de 2.000 € . El precio del producto en cuestión (arroz "paddy") viene expresado en €/Qm. y las cantidades en Qm. Se trata de calcular:

1. El precio de equilibrio de mercado, la cantidad de producto obtenida, el número de explotaciones a largo plazo y el beneficio de los agricultores considerando un 20% de impuestos, con las representaciones gráficas correspondientes.

2. Se supone que las explotaciones agrarias constituyen una Cooperativa para la comercialización del producto, con la finalidad de controlar su oferta y aumentar -en todo aquello que sea posible- las ganancias de todos los socios. Calcular, en este caso, el precio del mercado, la cantidad de producto ofertado y los beneficios netos de cada explotación.

3. Si un agricultor abandona la Cooperativa, ¿qué cantidad de producto le convendría obtener?. ¿Qué beneficio obtendría y

cuál debería ser la dimensión mínima de su explotación teniendo en cuenta un rendimiento medio de 7.500 kg./Ha?

Solución:

Responderemos separadamente a cada una de las cuestiones planteadas.

1) En situación de competencia perfecta, a largo plazo, como ya sabemos, el precio se establece en el coste total medio mínimo.

La función de costes totales vendrá dada por: CT = CTV + CF, pero se tiene la ecuación de variables separadas siguiente que se resuelve mediante una cuadratura:

$$\frac{d(CTV)}{dq} = CMa, \text{ o sea}: CTV = \int CMa \cdot dq$$, con lo que:

CT = $\alpha(q) + b$ = $\int (\frac{q}{10} + 10) \cdot dq + 2.000 = \frac{q^2}{20} + 10q + 2.000$. Entonces:

$$\begin{cases} CTMe = \dfrac{\alpha(q) + b}{q} = \dfrac{q}{20} + 10 + \dfrac{2.000}{q} \\ CMa = \dfrac{d(CT)}{dq} = \dfrac{q}{10} + 10 \end{cases}$$

De la igualdad de las dos ecuaciones anteriores, resultará que:

$\frac{q}{20} + \frac{2.000}{q} = \frac{q}{10}$, de donde: $20q^2 = 10\ q^2 + 400.000$; **q = 200 Qm.**

A la misma conclusión llegaríamos minimizando los CTMe, esto es (condición necesaria o de primer grado):

$\frac{d(CTMe)}{dq} = \frac{1}{20} - \frac{2.000}{q^2} = 0$, de donde se deduce que q = 200 Qm., c.s.q.d.

Del mismo modo, la condición suficiente o de 2º grado exige que:

$\frac{d^2(CTMe)}{dq^2} = \frac{4.000}{q^3} > 0$, luego efectivamente se trata de un mínimo.

En este punto, se tendrá:

p = CMa = (200/10) + 10 = **30 € /Qm = 0'30 € /kg.,**

lo que implica unos ingresos de los agricultores de:

$$I = p \cdot q = 30 \cdot 200 = 6.000 \text{ €/explotación.}$$

La demanda total del mercado, será:

$$Q = \frac{750.000 - 5.000p}{3} = \frac{750.000 - 150.000}{3} = 200.000 \text{ Qm.}$$

Por otra parte, siendo **n** el número de agricultores, tendremos:

$Q = q \times n$, de donde: **n** = Q/q = 200.000/200 = **1.000 explotaciones.**

El presumible beneficio bruto de los agricultores, será:

$$\pi = I - C = p \times q - q^2/20 - 10q - 2.000 = 6.000 - 2.000 - 2.000 - 2.000 =$$

= **0 € /explotación.**

o sea, *que no habrá beneficio en esta situación.*

Les representaciones gráficas correspondientes son las siguientes:

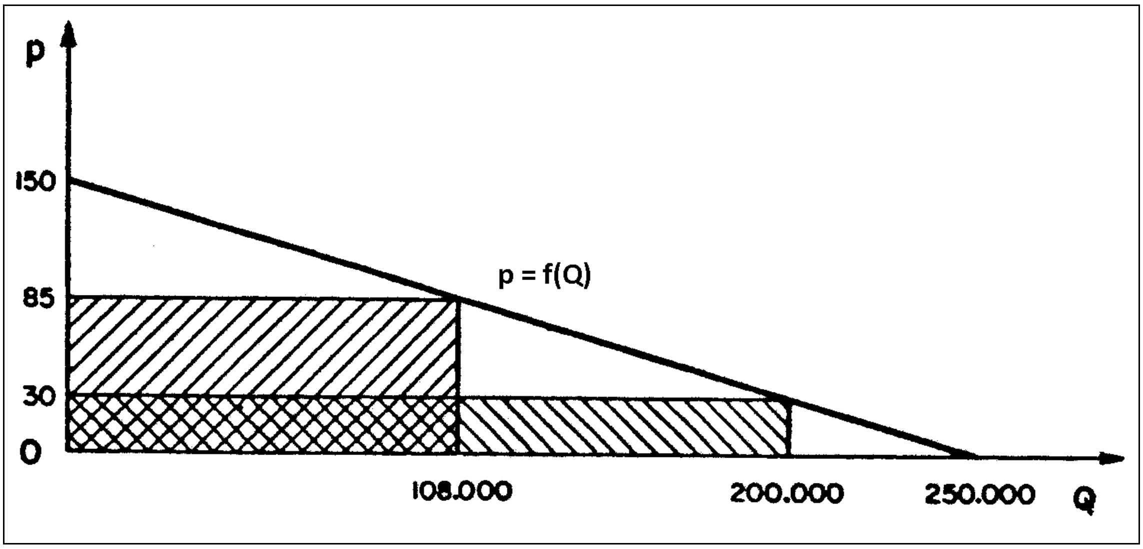


FIG. 4.1. Mercado del producto.

, donde el área de los rectángulos rayados representa los ingresos de los agricultores. Y también:

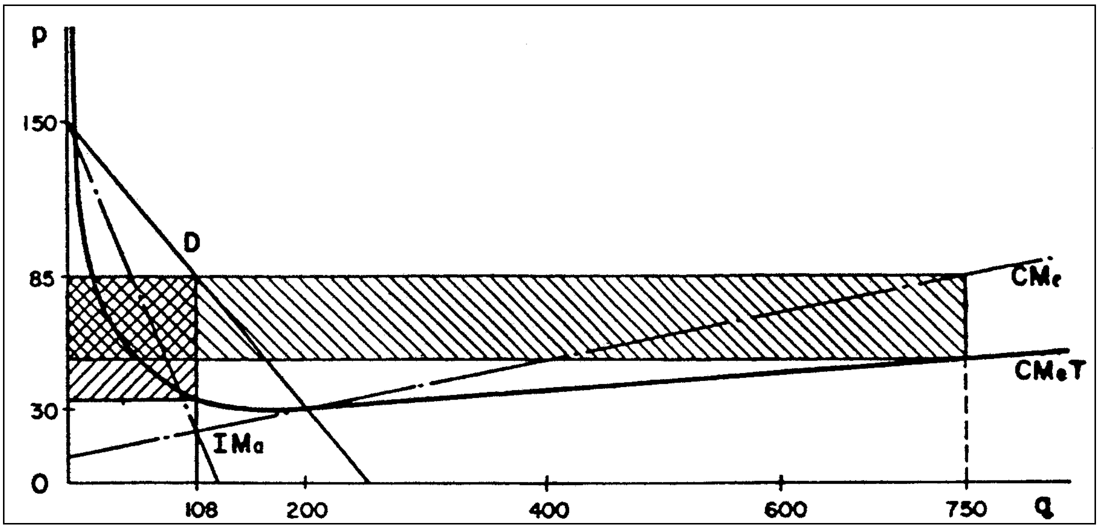


FIG. 4.2. Equilibrio de la explotación agrícola.

2) Ahora suponemos que todos los agricultores productores de arroz de la zona se unen para constituir una Cooperativa en su área territorial concreta. Entonces, la demanda correspondiente a cada una de las explotaciones sería (por simetría):

$$3.000q + 5.000p = 750.000$$
$$3q + 5p = 750 \quad ; \quad p = 150 - 0,6q$$

Los ingresos totales, serán:

$$I = p \times q = 150q - 0,6q^2 \quad ;$$

y los ingresos marginales vendrán dados por:

$$\left.\begin{array}{l} IMa = \frac{dI}{dq} = 150 - 1,2q \\ CMa = \frac{dC}{dq} = 0,1q + 10 \end{array}\right\} \text{Si IMa = CMa, resultará que:}$$

$$150 - 1,2q = 0,1q + 10 \text{ , de donde:}$$

$$\left.\begin{array}{l} q = \frac{140}{1,2} \cong 108 \text{ Qm} \\ p = 150 - 0,6 \times 108 \cong 85 \text{ €/Qm} \end{array}\right\} I = p \times q = 85 \times 108 = 9.180 \text{ €/explotación.}$$

Los beneficios brutos de cada agricultor serán:

π = I - C = p $\times$ q - q^2/20 - 10 q - 2.000 = 9.180 - 583 - 1.080 - 2.000 = 5.517 € , o sea, unos beneficios netos (menos impuestos) de:

5.517 x 0'80 = **4.413'60 € /explotación**.

En este caso, la demanda total del mercado, será:

$$Q = \frac{750.000 - 5.000\,p}{3} = 108.333 \text{ Qm.},$$

con los 1.000 agricultores, lo que obligaría a la búsqueda de nuevos mercados en relación a la situación anterior, ja que se habría perdido una demanda de:

ΔQ = 200.000 - 108.333 = 91.667 Qm.

3) Si cualquier agricultor abandona la Sociedad Cooperativa, le interesaría ofrecer su producto al mismo precio (máximo) que aquella, razón por la cual:

CMa = 85 = p, o sea : (q/10) + 10 = 85, de donde:

q = 750 Qm. = 75.000 kg.,

y unos ingresos de: I = p $\times$ q = 85 $\times$ 750 = 63.750 €/explotación.

Los beneficios brutos obtenidos, en este caso, serían:

π = I - C = p $\times$ q – q^2/20 - 10 q - 2.000 =

= 63.750 - 28.125 - 7.500 - 2.000 = 26.125 € , con unos beneficios netos de (teniendo en cuenta la fiscalidad):

26.125 x 0'80 = **20.900 € /explotación**.

Si consideramos, ahora, que el rendimiento medio de este cultivo se encuentra en la zona alrededor de los 7.500 kg. de arroz "paddy" o cáscara por hectárea de terreno, ello implicaría, para el agricultor en cuestión, la necesidad de cultivar un mínimo superficial de:

$$\frac{75.000\,\text{kg.}}{7.500\,\text{kg./Ha.}} = 10\,\text{Ha.}$$

Ello limitaría, de hecho, la posibilidad de actuar al margen de las cooperativas a los agricultores que tuvieran explotaciones arroceras de dimensión geofísica o territorial igual o superior a las 10 Ha.

Ejemplo 7

Sea *y = C(x)* el coste expresado en euros, de fabricar *x* unidades de un producto determinado. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades fabricadas viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$. Hallar el coste en función del número de unidades fabricadas, sabiendo que el coste de fabricar 1 unidad es de 1'00 € .

Solución:

Se trata, en definitiva, de resolver la EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$; con: y(1) = 1. y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ = f(y/x). Se trata, pues, de una ecuación diferencial homogénea, aunque también podría plantearse su resolución como si se tratase de una ecuación del tipo Riccati.

Sea el cambio: $t = \frac{y}{x}, \Rightarrow y = x \cdot t, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$. (1)

Substituyendo, se obtiene una ecuación de variables separables, a saber:

$$t + x\frac{dt}{dx} = t + t^2 \Leftrightarrow x\frac{dt}{dx} = t^2 \Leftrightarrow t^{-2} \cdot dt = \frac{x}{dx} \Leftrightarrow \int t^{-2} \cdot dt = \int \frac{x}{dx} \Leftrightarrow -t^{-1} = \ln|x| + c_1,$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + c \Leftrightarrow -x = y \cdot \ln|x| + c_1 y \Leftrightarrow x = c \cdot y - y \cdot \ln|x|$$; (t = y/x, c = -c_1). (2)

Las condiciones iniciales del problema son: x = 1, y = 1 . (3)

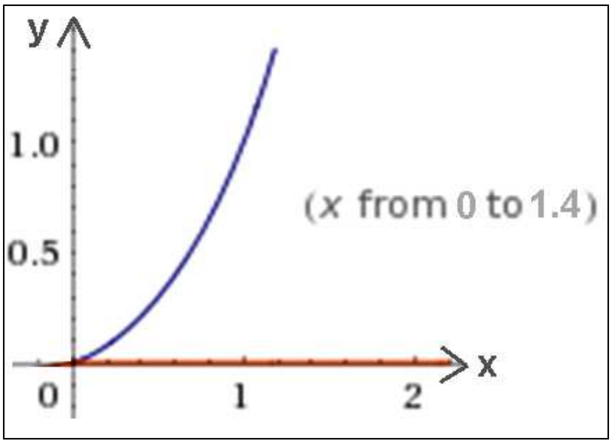
Al substituir (3) en (2), se halla el valor de la constante arbitraria c, así:

1 = c – ln1 ⇔ c = 1, con lo que el final queda:

x = y – y · ln x = y(1-ln x); y la I.P. buscada es:

$$\boxed{y = \frac{x}{1 - \ln x}}$$

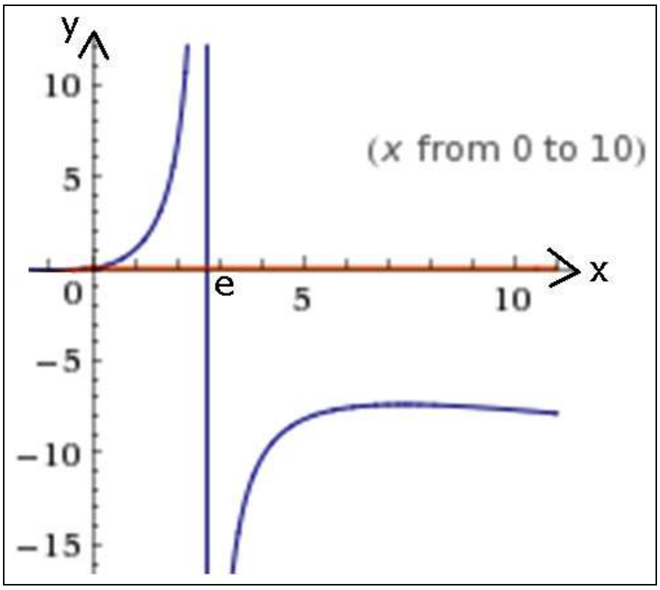
La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



, en este caso con presencia de una rama parabólica horizontal (según el eje OX), así como una asíntota vertical de ecuación x = e, dado que:

$$\lim_{x \to e} y = \frac{e}{0} = \infty \,.$$

Ello queda corroborado mediante una representación de mayor amplitud. En efecto, se tiene que:



Ejemplo 8

Sea *y = C(x)* el coste expresado en euros, de fabricar *x* unidades de un producto determinado. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades fabricadas viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$. Hallar el coste en función del número de unidades fabricadas, sabiendo que el coste de fabricar 1 unidad de producto es de 0’50 € .

Solución:

Se trata de resolver la EDO: $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$; $\text{con}: y(1) = \frac{1}{2}$.

$$x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} - 2x^{-1}y = 3x^{-2}y^4 \qquad (1)$$

$y(1) = \frac{1}{2}$ es la condición dada. La (1) es una ecuación de Bernouilli del tipo: $\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n}$, con P(x) = $-2x^{-1}$, Q(x) = $3x^{-2}$; n = 4;

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea: } t = y^{1-4} \Leftrightarrow t = y^{-3}, \\ \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}y^4 = -\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}(t^{-1/3})^4 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}t^{4/3} \\ \text{y entonces: } y = t^{-1/3}. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Substituyendo los valores correspondientes de (2) en (1), se obtiene:

$$-\frac{1}{3}\frac{dt}{dx}t^{-4/3} - 2x^{-1}t^{-1}t^{-1/3} = 3x^{-2}t^{-4/3} \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} + 6x^{-1}t = -9x^{-2},$$

{multiplicado cada término por $-3t^{4/3}$} (3)

La ecuación (3) presenta ahora la forma de una EDO lineal: $\frac{dt}{dx} + P(x) \cdot t = f(x)$, con P(x) = $6x^{-1}$. Para integrar la expresión (3) usamos el factor de integración: $\mu(x) = \exp\int(6x^{-1})dx = \exp(6\ln x) = \exp(\ln x^6) = x^6$;

$$x^6\frac{dt}{dx} + 6x^5t = -9x^4 \Leftrightarrow (x^6t)' = -9x^4 \Leftrightarrow x^6t = -9\int x^4dx \Leftrightarrow x^6t = -\frac{9}{5}x^5 + C,$$

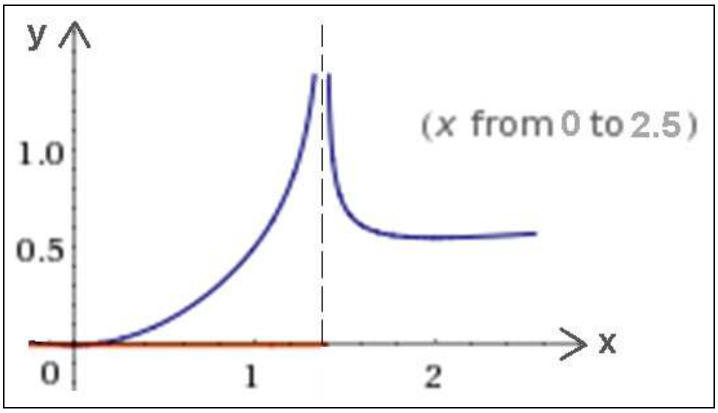
$\Rightarrow$ y se tiene la I.G. implícita: $x^6y^{-3} = -\frac{9}{5}x^5 + C$ (recuérdese que t = y^{-3}) (4). Substituyendo los valores correspondientes de (2) en (4), se obtiene:

$$1^6\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -\frac{9}{5}(1)^5 + C \Leftrightarrow 8 = -\frac{9}{5} + C \Leftrightarrow C = \frac{49}{5} \qquad (5),$$

$$\Rightarrow \qquad x^6y^{-3} = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{49}{5} \qquad \{(5) \text{ en } (4)\},$$

$\Rightarrow\ x^6y^{-3} = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{49}{5}\ \Leftrightarrow\ y^{-3} = -\frac{9}{5}x^{-1} + \frac{49}{5}x^{-6}$ (multiplicando cada término por x^{-6}), o sea: $\frac{1}{y^3} = -\frac{9}{5x} + \frac{49}{5x^6} = \frac{49-9x^5}{5x^6}$, y la integral particular buscada será: $\boxed{y = \sqrt[3]{\frac{5x^6}{49-9x^5}}}$.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Es evidente que existe una asíntota vertical para: $49 - 9x^5 = 0$, con lo que entonces:

$$x = (49/9)^{0'2} \approx 1'40.$$

Ejemplo 9

Sea *y* = *C(x)* el coste expresado en euros, de fabricar *x* unidades de un producto determinado. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades fabricadas viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $(x+y^2)dx - 2xy\cdot dy = 0$. Hallar el coste en función del número de unidades fabricadas, sabiendo que el coste de fabricar 1 unidad es de 2'00 € .

Solución:

El problema consiste, en definitiva, en integrar la ecuación diferencial ordinaria: $(x + y^2)\cdot dx - 2xy\cdot dy = 0$, sujeta a la condición dada: $y(1) = 2$.

Se trata de una ecuación diferencial no exacta, puesto que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq -2y = \frac{\partial N}{\partial x};$$

sabiendo que admite un multiplicador dependiente de la única variable *x*, puesto que:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y+2y}{-2xy}=-\frac{2}{x}\,.$$

Siendo entonces el multiplicador o factor integrante $\mu(x)$, la ecuación resultará:

$$\mu(x)\cdot(x+y^2)\cdot dx-2xy\cdot\mu(x)\cdot dy=0.$$

Como: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\mu(x)\cdot 2y$; $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2y\mu(x)-2xy\cdot\mu'(x)$.

Obligando a que sea una diferencial exacta:

$$\mu(x)\cdot 2y=-2y\mu(x)-2xy\mu'(x)\ ;\qquad \mu(x)=-\mu(x)-x\cdot\mu'(x)\ ;$$

simplificando: $x\cdot\mu'(x)=-2\mu(x)$, o bien: $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}=-\dfrac{2}{x}$; e integrando:

$$\ln\mu(x)=-2\ln x=\ln x^{-2}\text{, o bien: }\mu(x)=\frac{1}{x^2}\,.$$

La ecuación quedará entonces configurada del siguiente modo:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0\ ;\qquad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}=\frac{\partial N}{\partial x}\ ;$$

que ya es una ecuación diferencial exacta. Integrada, debe obtenerse:

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\varphi(y)=\ln x-\frac{y^2}{x}+\varphi(y)\ ;$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{2y}{x}=-\frac{2y}{x}+\varphi'(y)\ ;\quad \varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=C\ ;$$

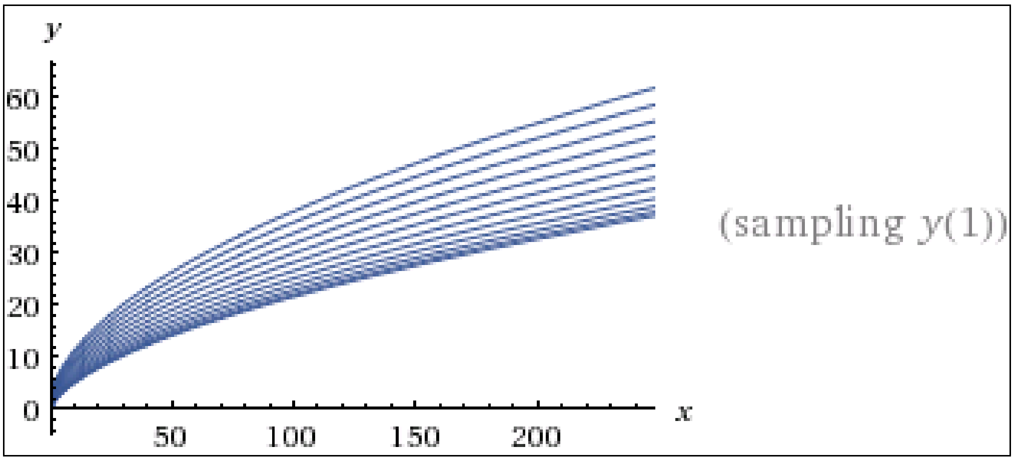
$$u(x,y)=\ln x-\frac{y^2}{x}+C\ ;\quad \text{o sea, la I.G. será}:\ \ln x-\frac{y^2}{x}=C\,,$$

o lo que es lo mismo: $x\cdot e^{-\frac{y^2}{x}}=C$, que se puede también expresar así:

$$x\cdot e^{-\frac{y^2}{x}}=C=\frac{x}{e^{y^2/x}}\ ;\qquad e^{y^2/x}=\frac{x}{C}=K\cdot x\ ;\qquad \frac{y^2}{x}=\ln K\cdot x\ ;$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{x(\ln K + \ln x)} = \pm\sqrt{Cx + \ln x^x}} \Rightarrow \text{I.G.}$$

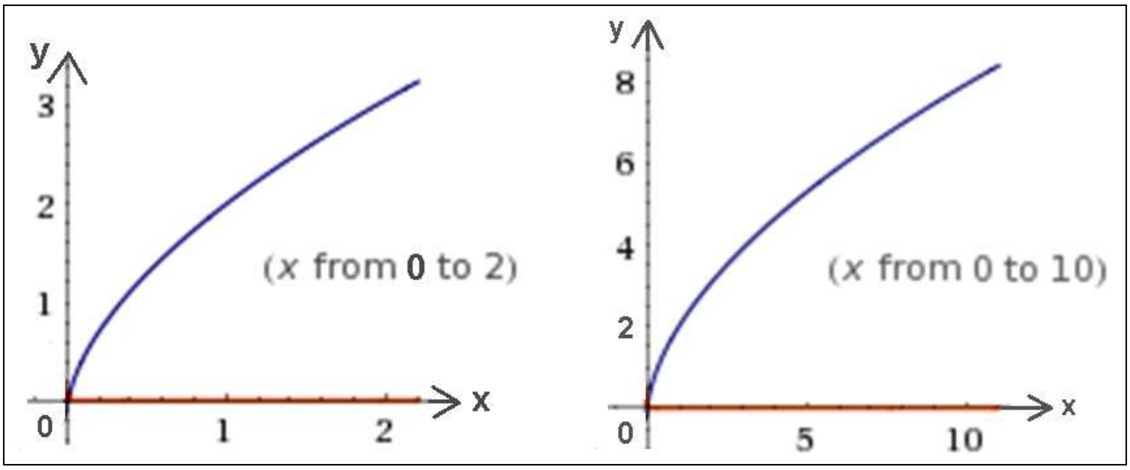
La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



En base a la condición inicial dada en el enunciado, y(1) = 2, se tendrá que: $y^2 = Cx + \ln x^x$; 4 = C, y resultará la integral particular:

$$\boxed{y(x) = \sqrt{4x + \ln x^x}}\ .$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x + \ln x^x}}{x} = 0$, luego existe una rama parabólica según el eje OX (horizontal).

Ejemplo 10

Dada la siguiente función de costes marginales de una empresa: $15x^2 + 8x + 3$, se trata de hallar la función correspondiente de costes totales sabiendo que cuando se producen 4 unidades el coste total es de 896'00 € .

Solución:

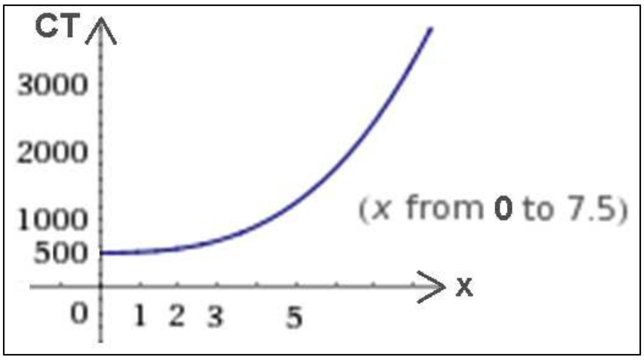
Se sabe que: CT = $\int CMa \cdot dx = \int (3 + 8x + 15x^2) \cdot dx = 3x + 4x^2 + 5x^3 + C_0$, lo que constituye una sencilla ecuación de variables separadas que se integra mediante una cuadratura. Ahora bien, de los datos del problema se deduce que:

$$CT(4) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4^3 + C_0 = 896 \text{ €} \rightarrow C_0 = 500'00 \text{ €},$$

y la función de costes totales buscada vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{CT(x) = 3x + 4x^2 + 5x^3 + 500}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \rightarrow \infty$ también $y = CT \rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + 4x^2 + 5x^3 + 500}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 11

Sea *y = C(x)* el coste, expresado en euros, de fabricar *x* unidades de un producto determinado. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades fabricadas viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)\cdot dy = 0$. Hallar el coste en función del número de unidades fabricadas, sabiendo que el coste de fabricar 1 unidad es de 2'00 € .

Solución:

Se trata de resolver la EDO: $(y - xy^2)\cdot dx + (x + x^2y^2)\cdot dy = 0$, con $y(1) = 2$. Esta ecuación diferencial no es exacta puesto que: $\frac{\delta M}{\delta y} = 1 - 2xy \neq \frac{\delta N}{\delta x} = 1 + 2xy^2$, y ningún factor de integración es inmediatamente evidente. Obsérvese, sin embargo, que la ecuación diferencial se puede reescribir como:

$$(y\cdot dx + x\cdot dy) + (-xy^2 dx + x^2y^2 dy) = 0 . \quad (1)$$

El primer grupo de términos tiene muchos factores de integración (véase la Tabla 1 del capítulo 2). Uno de estos factores, concretamente $\mu(x, y) = 1/(xy)^2$, es un factor de integración para toda la ecuación. Multiplicando (1) por $1/(xy)^2$, encontramos que:

$$\frac{y\cdot dx + x\cdot dy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2 dx + x^2y^2 dy}{(xy)^2} = 0 ,$$

o de manera equivalente: $\frac{y\cdot dx + x\cdot dy}{(xy)^2} = \frac{1}{x}dx - dy$. (2)

Así mismo:

$\frac{dx}{x^2y} + \frac{dy}{xy^2} - \frac{dx}{x} + dy = 0$, de donde se deduce la ecuación:

$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\cdot dy = (\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x})dx + (\frac{1}{xy^2} + 1)dy = 0$; $\frac{\delta M}{\delta y} = -\frac{1}{x^2y^2} = \frac{\delta N}{\delta x}$.

Así pues, como acabamos de demostrar, dado que (2) ya es exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones anteriores.

Alternativamente, de la Tabla correspondiente del capítulo 2 vemos que: $\frac{y\cdot dx + x\cdot dy}{(xy)^2} = d\left(\frac{-1}{xy}\right)$, de modo que (2) se puede volver a escribir como: $d\left(\frac{-1}{xy}\right) = \frac{1}{x}dx - dy$.

Integrando ambos lados de esta ecuación mediante una cuadratura, encontramos que:

$$\frac{-1}{xy} = \ln|x| - y + c\,,$$

que es la solución de la EDO planteada en su forma implícita.

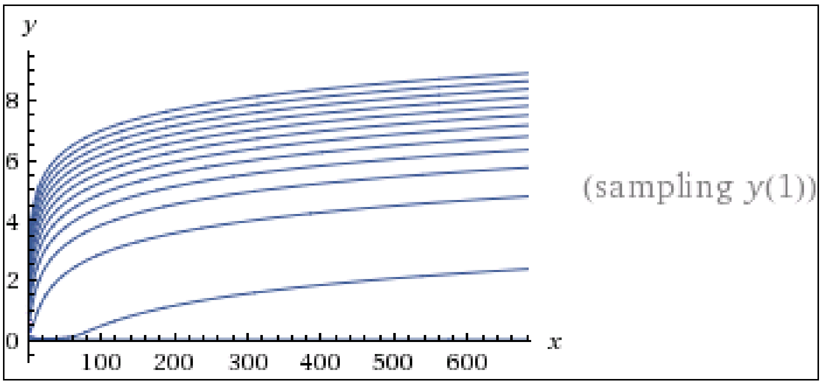
En forma explícita, tendremos que:

$$-\frac{1}{x} = y\cdot\ln x - y^2 + c\cdot y = y(\ln x + c) - y^2 = y\cdot\ln K\cdot x - y^2\,,$$

haciendo c = ln K. De este modo, la I.G. buscada será, por aplicación de la fórmula cuadrática:

$$y^2 - (\ln Kx)\cdot y - \frac{1}{x} = 0\,; \qquad \boxed{y = \frac{\ln Kx \pm \sqrt{(\ln Kx)^2 + \frac{4}{x}}}{2}}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:

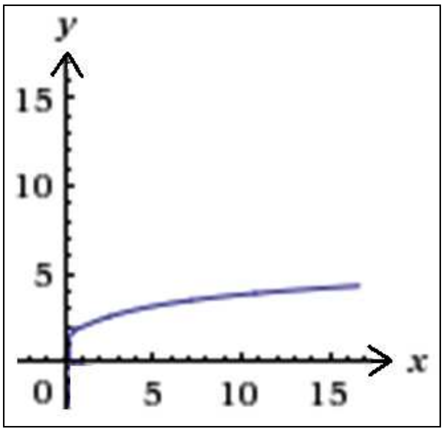


Aplicando ahora la condición dada, se tendrá que:

$\frac{-1}{2} = -2 + c;\ c = \frac{3}{2}$, y resulta la integral particular: $\boxed{-\frac{1}{x\cdot y} = \ln x - y + \frac{3}{2}}$, o bien considerando que ln K = 3/2 = 1’5, se tiene que K ≈ 4’4817, y entonces:

$$\boxed{y = \frac{\ln 4'4817x \pm \sqrt{(\ln 4'4817x)^2 + \frac{4}{x}}}{2}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Ejemplo 12

Una empresa fabricante de un determinado producto se halla caracterizada por la siguiente función de costes marginales:

$$CMa = 3x^2 – 20x + 30,$$

y opera en un mercado de competencia perfecta en que el precio es tal que la empresa se nivela (no obtiene ni beneficios extraordinarios ni pérdidas). Se pide: a) determínense los costes fijos de la empresa en cuestión, b) hállense las restantes ecuaciones de coste y su representación gráfica.

Solución:

a) En este caso, el *óptimo de explotación* (beneficios extraordinarios nulos), es decir, el mínimo de los costes medios totales se iguala al coste marginal en dicho punto. Los costes totales vendrán dados por la resolución de esta sencilla ecuación diferencial de variables separadas:

$$\frac{dCT}{dx} = CMa \text{ , esto es:}$$

$$CT = \int CMa \cdot dx = \int (3x^2 - 20x + 30) \cdot dx = x^3 - 10x^2 + 30x + CF \text{ ,}$$

y los costes totales medios serán:

$$CTMe = \frac{x^3 - 10x^2 + 30x + CF}{x} = x^2 - 10x + 30 + \frac{CF}{x} \text{ ,}$$

pero en el mínimo se debe cumplir que su primera derivada debe anularse (condición necesaria o de primer grado), con lo que:

$$\frac{dCTMe}{dx} = 2x - 10 - \frac{CF}{x^2} = 0 \text{ ,}$$

por lo que cualquier cuantía de coste fijo que verifique la anterior ecuación resultaría un coste fijo admisible. Esto es: CF = $2x^3 - 10x^2$.

Desde luego, los costos fijos son aquellos costos que la empresa debe pagar independientemente de su nivel de operación, es decir, aquellos que se deben pagar con independencia de que haya o no una producción vendible. Un costo fijo, es una erogación en que la empresa debe incurrir obligatoriamente, aún cuando se opere a media marcha, o bien no lo haga, razón por la que son tan importantes en la estructura financiera de cualquier empresa. Es el caso por ejemplo de los pagos como el arrendamiento de una nave industrial o de un local de negocio, puesto que debe pagarse haya o no negocio. Sucede también así con casi todos los pagos laborales, servicios públicos, seguros, algunos impuestos o tasas, etc. Quizás el principal componente de los costos fijos empresariales es la mano de obra, por lo tanto, no es de extrañarnos que cada día las empresas luchen por obtener una mayor flexibilidad laboral que les permita ir convirtiendo esos costos fijos en variables.

Se comprueba que se trata de un mínimo al calcular la condición suficiente o de segundo grado del extremo relativo, a saber:

$$\frac{d^2CTMe}{dx^2} = 2 + \frac{2CF}{x^3} > 0\text{, c.s.q.d.}$$

b) Las restantes ecuaciones de costes son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Costes variables = CV = } x^3 - 10x^2 + 30x \\ \text{Costes variables medios = CVMe = } x^2 - 10x + 30 \end{cases}$$

El volumen de producción mínimo de la empresa es x = 5, puesto que: CMa = CVMe; o sea: $3x^2 - 20x + 30 = x^2 - 10x + 30 \Rightarrow x = 5$ (la otra solución x = 0 es rechazable).

Este punto coincide con el mínimo de la curva de CVMe, puesto que: $\frac{d}{dx}(x^2 - 10x + 30) = 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$, y la condición suficiente o de 2º grado exige que: $\frac{d}{dx}(2x - 10) = 2 > 0$, luego se trata, efectivamente, de un mínimo. Se corresponde a: C = 25 – 50 + 30 = 5.

La representación gráfica pedida, en definitiva, es la siguiente:

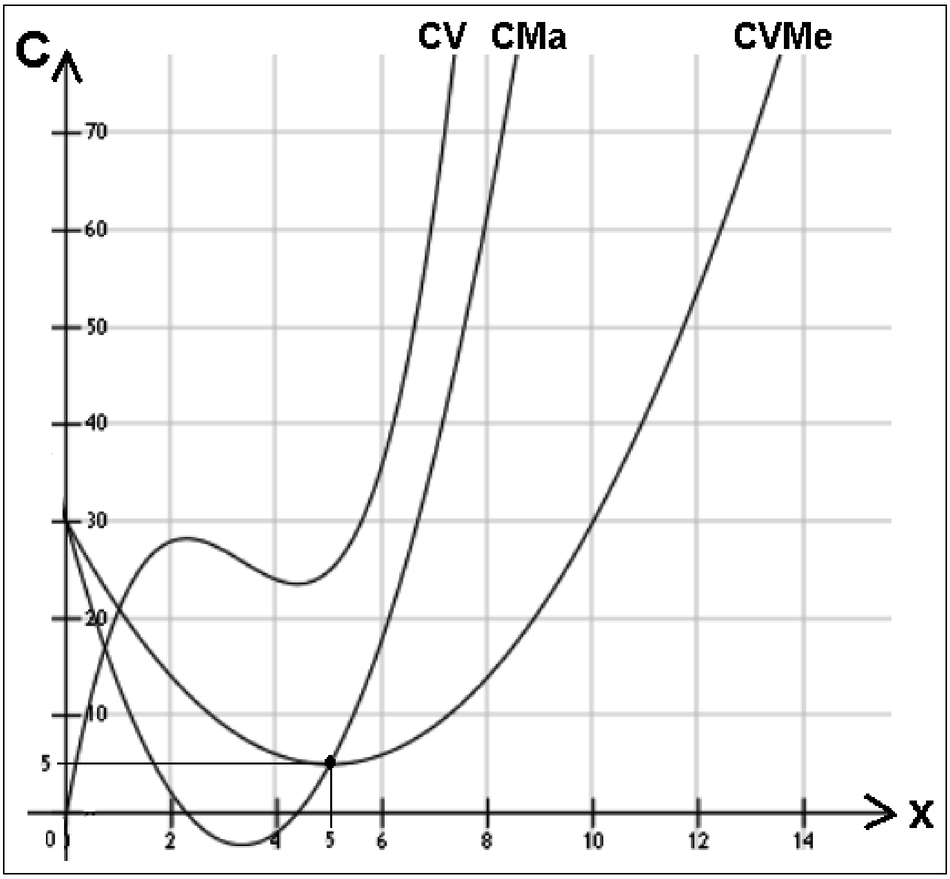


FIG. 4.3. Diferentes curvas de coste (I).

Ejemplo 13

Una empresa funciona en régimen de competencia perfecta en un mercado cuyo precio de equilibrio es 26'00 € . La función de oferta de la empresa es: $p = x^2 - 8x + 17$. Si la empresa maximiza sus beneficios, se trata de averiguar: a) El precio de cierre, b) Si se supone que la empresa no obtiene ni beneficios ni pérdidas, obtener el importe de los costes fijos, y c) En este último caso, la representación gráfica de las diversas ecuaciones de coste.

Solución:

a) Es sabido que la función de oferta de la empresa es la de costes marginales en su tramo creciente y a partir del mínimo de explotación, con lo que los costes totales vendrán dados por la resolución de esta sencilla ecuación diferencial de variables separadas:

$$\frac{dCT}{dx} = CMa \text{ , esto es:}$$

$$CT = \int CMa \cdot dx = \int (x^2 - 8x + 17) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 17x + CF \text{ ,}$$

siendo los costes variables de: CV = $\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 17x$, y los costes totales medios serán:

$$\text{CTMe} = \frac{(x^3/3) - 4x^2 + 17x + CF}{x} = \frac{x^2}{3} - 4x + 17 + \frac{CF}{x}\text{, y también:}$$

$$\text{CVMe} = \frac{x^2}{3} - 4x + 17\text{, cuyo mínimo vendrá determinado por:}$$

$\frac{dCVMe}{dx} = \frac{2x}{3} - 4 = 0$, de donde: x = 6, al que corresponde un precio de cierre de: p_c = $\frac{6^2}{3} - 4 \cdot 6 + 17$ = 5'00 € . Ello también correspondería a la intersección entre las funciones de CMa y de CVMe, esto es:

$x^2 - 8x = \frac{x^2}{3} - 4x$; de donde $x_1 = 6$ y $x_2 = 0$ (rechazable), c.s.q.d.

b) Al ser p_e = 26'00 € , la primera condición de equilibrio en competencia perfecta exige que: CMa = IMa = p_e, con lo que:

$x^2 - 8x + 17 = 26$; $x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2}$, o sea: $x_1 = 9$ y $x_2 = -1$ (esta última solución carece de significado económico), y los costes fijos son del orden de CF = 162 € .

c) Por último, se tendrán las siguientes funciones de coste:

$$\begin{cases} \text{Costes totales} = CT = CV + CF = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 17x + 162 \\ \text{Costes totales medios} = CTMe = \frac{x^2}{3} - 4x + 17 + \frac{162}{x} \\ \text{Costes variables} = CV = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 17x \\ \text{Costes variables medios} = CVMe = \frac{x^2}{3} - 4x + 17 \\ \text{Costes marginales} = CMa = x^2 - 8x + 17 \\ \text{Costes fijos} = CF = 162 \end{cases}$$

La representación gráfica pedida es la siguiente:

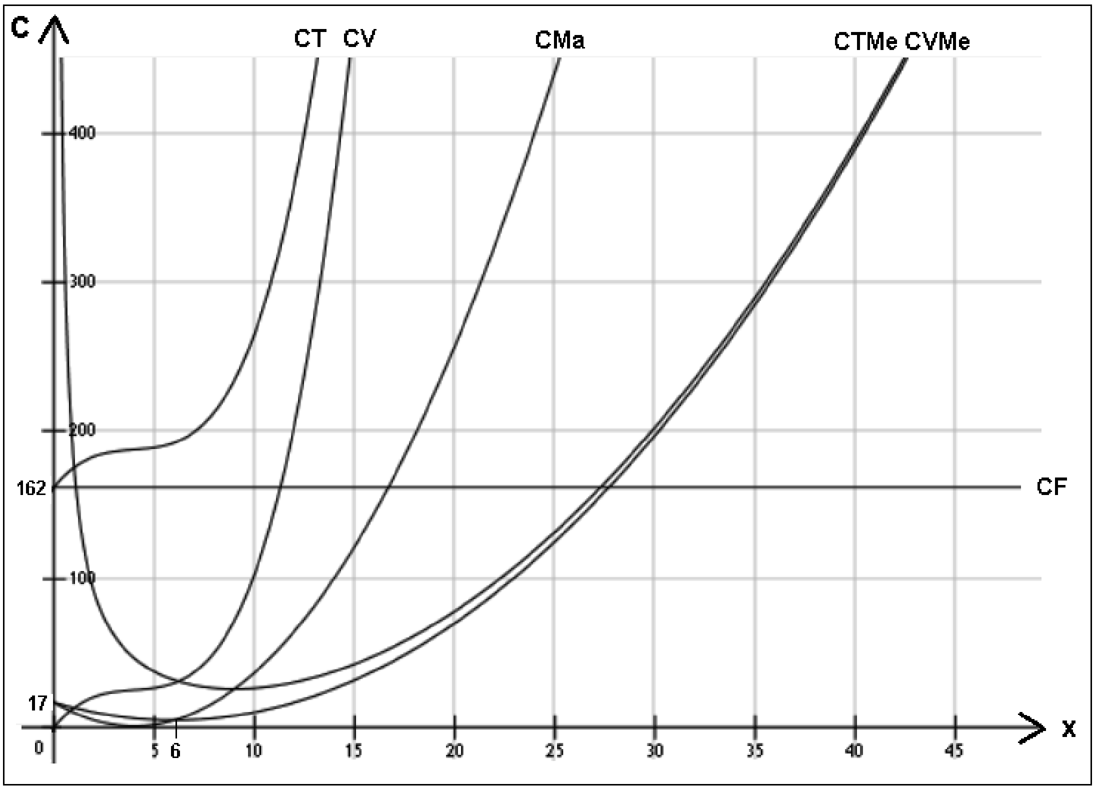


FIG. 4.4. Diferentes curvas de coste (II).

Ejemplo 14

Si y = C(x) representa el coste de producción de *x* unidades de un producto manufacturado, hallar dicha función de coste si la función de elasticidad del coste viene dada por la expresión:

$$E(x) = \frac{20x - y}{2y - 10x}, \text{ donde } C(100) = 500, \text{ y } 100 \leq x.$$

Solución:

La elasticidad del coste se define como el cociente entre el coste marginal y el coste medio, esto es:

$$E(x) = CMa/CMe = \frac{C'(x)}{C(x)/x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}. \text{ Esto es: } \frac{20x - y}{2y - 10x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}, \text{ o sea:}$$

$$(20x - y) \cdot y \cdot dx = (2y - 10x) \cdot x \cdot dy; \ (20xy - y^2) \cdot dx - (2xy - 10x^2) \cdot dy = 0.$$

La anterior EDO es exacta, ya que se cumple que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 20x - 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

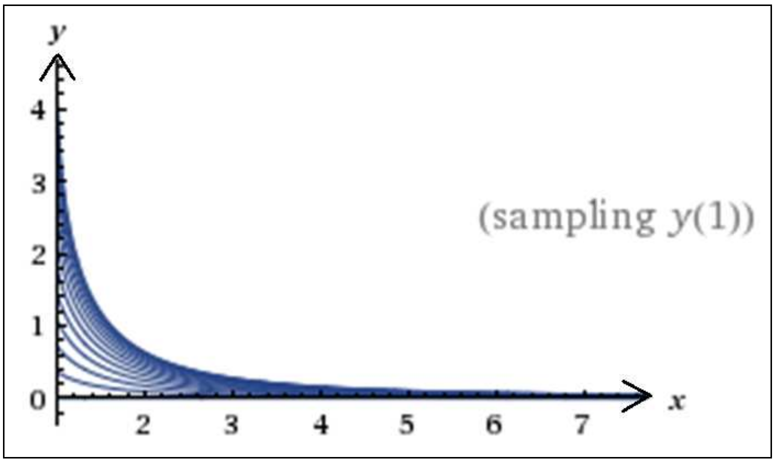
Por otra parte, existe la función u(x,y) que se determina como sigue:

$$u(x,y) = \int M(x,y)\cdot dx + \varphi(y) = \int (20xy - y^2)\cdot dx + \varphi(y) = 10yx^2 - xy^2 + \varphi(y).$$

$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = N(x,y) = 10x^2 - 2xy = 10x^2 - 2yx + \varphi'(y)$, de donde se deduce que: $\varphi'(y) = 0$, con lo que: $\varphi(y) = k$, entonces: $u(x,y) = 10yx^2 - xy^2 + k$, y se tendrá la integral general de la EDO expresada en forma implícita:

$$u(x,y) = 10x^2y - xy^2 = C.$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



En base a las condiciones dadas en el enunciado del problema, se tendrá que:

$$C = 10\cdot 10.000\cdot 500 - 100\cdot 500^2 = 50.000.000 - 25.000.000 = 25.000.000,$$

o sea:

$xy^2 - 10x^2y + 25.000.000 = 0$, que podemos resolver en *y* mediante la aplicación de la fórmula cuadrática, a saber:

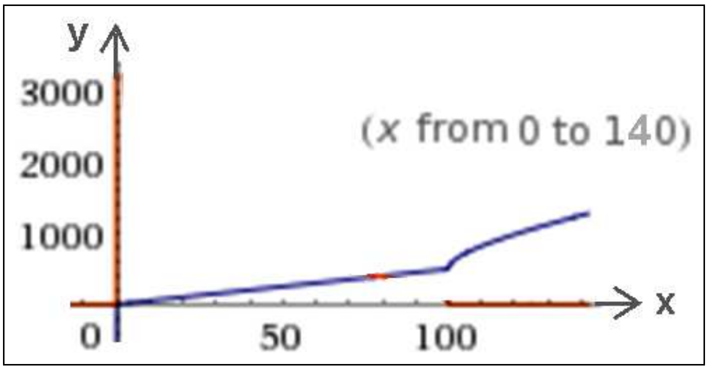
$$y = \frac{10x^2 \pm \sqrt{100x^4 - 100.000.000\cdot x}}{2x} \Rightarrow \frac{5x^2 + 5\sqrt{x^4 - 1.000.000\cdot x}}{x},$$

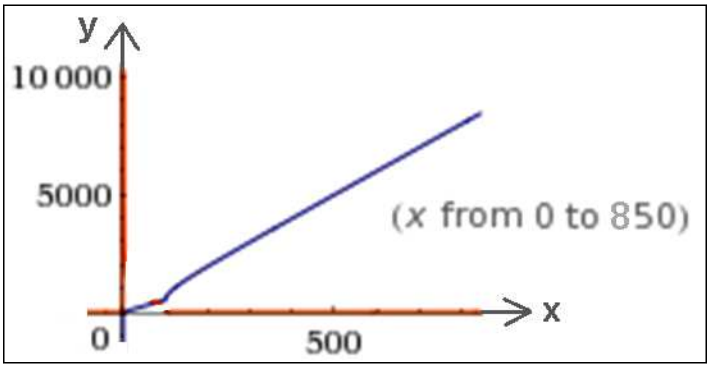
puesto que parece lógico adoptar el valor positivo de la raíz del numerador desde el punto de vista económico. Luego la solución particular buscada, expresada ya en forma explícita, será la siguiente:

$$\boxed{C(x) = \frac{5(x^2 + \sqrt{x^4 - 1.000.000 \cdot x})}{x}}$$

Por otra parte, se presume en este caso la existencia de una asíntota oblicua o general (CT = mx + n), puesto que si x $\rightarrow \infty$ también CT $\rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5(x^2 + \sqrt{x^4 - 1.000.000x})}{x^2} = 10$. Así mismo, n = $\lim\limits_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} [\frac{5(x^2 + \sqrt{x^4 - 1.000.000x})}{x} - 10x] = 0$, luego existe una asíntota oblicua de ecuación: CT = 10x, que pasa por el origen de coordenadas.

La representación gráfica de esta solución particular, que toma sentido a partir de x ≥ 100 y en el campo real, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):





Ejemplo 15

El coste marginal de cierto producto en función de la cantidad producida viene dado por la función: $q^4 + 3q^2$. Determinar la función de coste total del producto sabiendo que los costes fijos ascienden a 2.000 € , así como las restantes funciones de coste con sus correspondientes representaciones gráficas.

Solución:

Se tendrá que:
CMa = $q^4 + 3q^2 = \frac{d(CT)}{dq}$, que es una EDO de variables separables, cuya integración, mediante una cuadratura, ofrece:

$$CT = \int (q^4 + 3q^2) \cdot dq = \frac{q^5}{5} + q^3 + C \, .$$

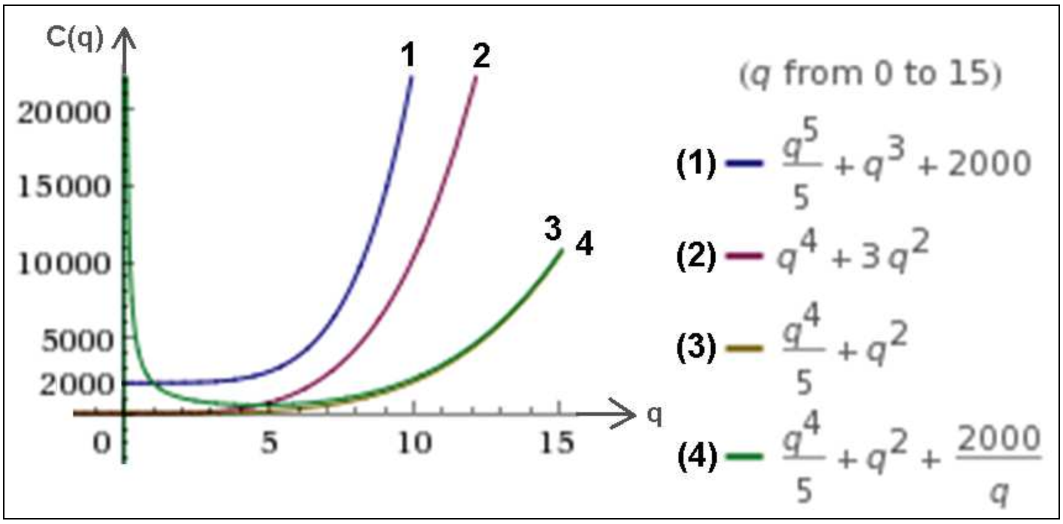
Pero según los datos del problema, $\forall$ q = 0 $\rightarrow$ CT = CF = C = 2.000 € , luego se tendrá la expresión:

$$\boxed{CT(q) = \frac{q^5}{5} + q^3 + 2.000}$$

Por otra parte, se tendrán los siguientes costes:

- Costes variables $\rightarrow$ CV = $\frac{q^5}{5} + q^3$
- Costes variables medios $\rightarrow$ CVMe = $\frac{CV}{q} = \frac{q^4}{5} + q^2$
- Costes totales medios $\rightarrow$ CTMe = $\frac{CT}{q} = \frac{q^4}{5} + q^2 + \frac{2.000}{q}$

La representación gráfica de estas curvas de coste es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



A la vista de las configuraciones analíticas de estas curvas, es fácil deducir que poseen todas ellas ramas parabólicas verticales según el eje OC (hacia arriba).

Ejemplo 16

Los costes marginales de una empresa, en función de la cantidad de "output" producida, viene dada por la función siguiente:

$$CMa = 3q^2 - 24q + 60, \text{ y los costes fijos son } CF = 100 \text{ u.m.}$$

Se pide:

1) Determinar las ecuaciones de costes variables, costes medios y marginales, representando en unos mismos ejes de coordenadas las curvas de costes totales y costes variables. Representar asimismo, en otros ejes de coordenadas, las curvas de costes medios y la curva de costes marginales.

2) Determinar el volumen de producción mínimo de la empresa.

3) Determinar el volumen de producción óptimo, cuando el precio del "output" es p = 60 unidades monetarias en un mercado de competencia perfecta. Se pide calcular también los beneficios extraordinarios netos de la empresa considerando un 20% de impuestos. Representar el punto del equilibrio en el gráfico correspondiente.

4) La curva de costes marginales es la curva de oferta de la empresa; comprobar si se trata de una curva elástica o inelástica.

Solución:

1) El costo marginal se define como la variación en el costo total, ante el aumento de una unidad en la cantidad producida, es decir, es el costo de producir una unidad adicional. Resulta ser un concepto fundamental en la teoría microeconómica, debido a que se utiliza para determinar la cantidad de producción de las empresas y los precios de los productos, y depende de la tecnología utilizada en la producción, de los precios de los insumos y de los factores de producción.

En nuestro caso, resulta que: $CMa = \frac{dCT}{dq} = 3q^2 - 24q + 60$; de donde integrando esta ecuación de variables separables mediante una cuadratura, se tendrá:

$$CT = \int (3q^2 - 24q + 60)dq = q^3 - 12q^2 + 60q + C. \text{ Además:}$$

$$\forall q = 0 \rightarrow CT = C = CF = 100 \text{ u.m.}$$

Las diferentes ecuaciones de costes pedidas son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Costes variables} = CV = q^3 - 12q^2 + 60q \\ \text{Costes fijos} = CF = 100 \text{ u. m.} \\ \text{Costes variables medios} = CVMe = q^2 - 12q + 60 \\ \text{Costes totales} = CT = CV + CF = q^3 - 12q^2 + 60q + 100 \\ \text{Costes totales medios} = CTMe = q^2 - 12q + 60 + 100/q \end{cases}$$

2) El volumen de producción mínimo de la empresa es q = 6, puesto que:

CMa = CVMe; o sea: $3q^2 - 24q + 60 = q^2 - 12q + 60 \Rightarrow q = 6$.

Este punto coincide con el mínimo de la curva de CVMe, puesto que: $\frac{d}{dq}(q^2 - 12q + 60) = 2q - 12 = 0 \Rightarrow q = 6$, y la condición suficiente o de 2º grado exige que: $\frac{d}{dq}(2q - 12) = 2 > 0$, luego se trata, efectivamente, de un mínimo. Se corresponde a C = 36 – 72 + 60 = 24.

3) Si p = 60 u.m., p = CMa; $60 = 3q^2 - 24q + 60$; q = 8; y se tendrá:

$$\pi \text{ (beneficios brutos)} = I - C = p \cdot q - q^3 + 12q^2 - 60q - 100 =$$

$$= 60 \cdot 8 - 8^3 + 12 \cdot 8^2 - 60 \cdot 8 - 100 = 480 - 324 = 156 \text{ u.m.,}$$

lo que supone unos beneficios netos, teniendo en cuenta la fiscalidad, de: 156·0'80 = 124'80 u.m.

4) $\varepsilon = \text{elasticidad} = \frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q}$; la curva de oferta de la empresa será:

$p = 3q^2 - 24q + 60$, a partir de q = 6.

Se puede comprender fácilmente que la oferta es siempre inelástica. En efecto:

$$3q^2 - 24q + 60 - p = 0;\ q = 12 \pm \sqrt{144 - 3p};$$

$$\varepsilon = \mp \frac{3p}{2q\sqrt{144 - 3p}} = \mp \frac{9q^2 - 72q + 180}{6q\sqrt{8q - q^2 - 4}}.$$

La representación gráfica correspondiente será la siguiente:

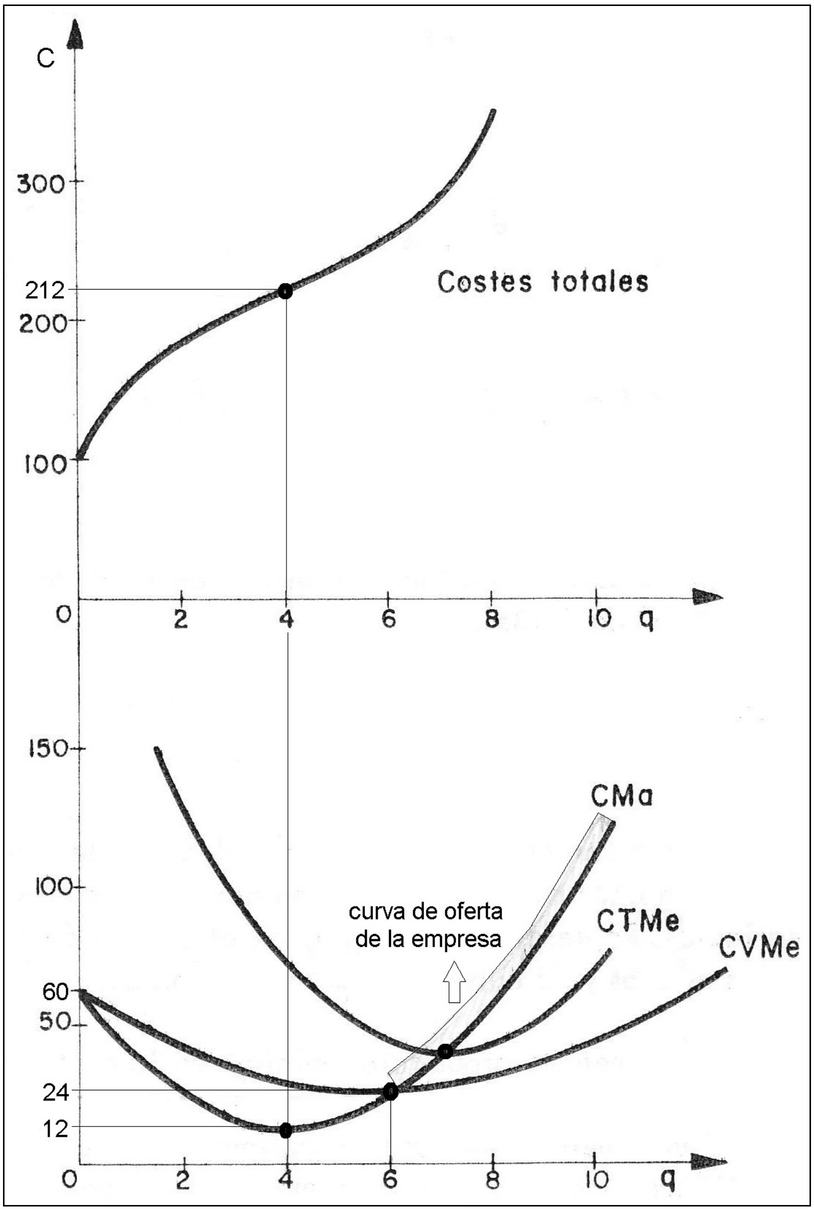


FIG. 4.5. Diferentes curvas de coste (III).

Por otra parte, el mínimo de la curva de CMa deberá coincidir con el punto de inflexión de la curva de costes totales CT, a saber:

$$\frac{dCMa}{dq} = 6q - 24 = 0 \Rightarrow q = 4 \Rightarrow CMa = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 60 = 12,$$

con unos costes totales de:

$CT = CV + CF = 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 60 \cdot 4 + 100 = 212$, y la condición de 2º grado o suficiente para la existencia de un mínimo relativo o local exige que: $\frac{d}{dq}(6q - 24) = 6 > 0$, luego se trata, efectivamente, de un mínimo de la curva de CMa.

Ejemplo 17

Hállese la función de coste total, C(q), tal que, para cada cantidad producida q, el coste marginal es proporcional al cuadrado del coste total, si se sabe que una unidad de producto cuesta una unidad monetaria.

Solución:

$CMa(q) = \frac{dC(q)}{dq} = k[C(q)]^2$, con $k \neq 0$. Luego, $\frac{dC(q)}{[C(q)]^2} = k \cdot dq$.

Integrando mediante una cuadratura esta EDO de variables separadas, se obtiene que: $-\frac{1}{C(q)} = k \cdot q + \alpha$; de donde: $C(q) = -\frac{1}{\alpha + k \cdot q}$.

Como C(q) debe ser positivo para tener sentido económico, $\forall q > 0$, entonces se cumple que:

$\alpha + k \cdot q < 0 \Rightarrow k \cdot q < -\alpha$. Si para q = 1, se tiene que: C(1) = 1, entonces:

$C(1) = -\frac{1}{\alpha + k} = 1$, es decir, $\alpha + k = -1 \Rightarrow \alpha = -(k + 1)$.

Por lo tanto, la función de coste total pedida es:

$$C(q) = -\frac{1}{-(k+1) + k \cdot q}, \text{ o sea, } \boxed{C(q) = \frac{1}{k(q-1) - 1}}.$$

Ejemplo 18

Una empresa cuya función de costes marginales CMa es la siguiente: $C' = 90x^2 - 30x + 500$ opera en un mercado de competencia perfecta en el cual el precio es tal que ofreciendo seis unidades de producto no obtiene beneficios ni pérdidas. Hallar la función de costes totales de la empresa y representarla gráficamente.

Solución:

El enunciado del problema implica que el óptimo de la explotación (coste medio mínimo o, lo que es lo mismo, C' = C*) es x = 6. Integrando mediante una cuadratura esta sencilla EDO de variables separadas, se tiene que:

$$C' = CMa = 90x^2 - 30x + 500 = \frac{dCT}{dx}, \text{ con lo que:}$$

$$CT = \int C'(x)\cdot dx = \int (90x^2 - 30x + 500)\cdot dx = 30x^3 - 15x^2 + 500x + C_o ,$$

y la función de costes totales medios será:

$$CTMe = C^* = \frac{CT}{x} = 30x^2 - 15x + 500 + \frac{C_o}{x} .$$

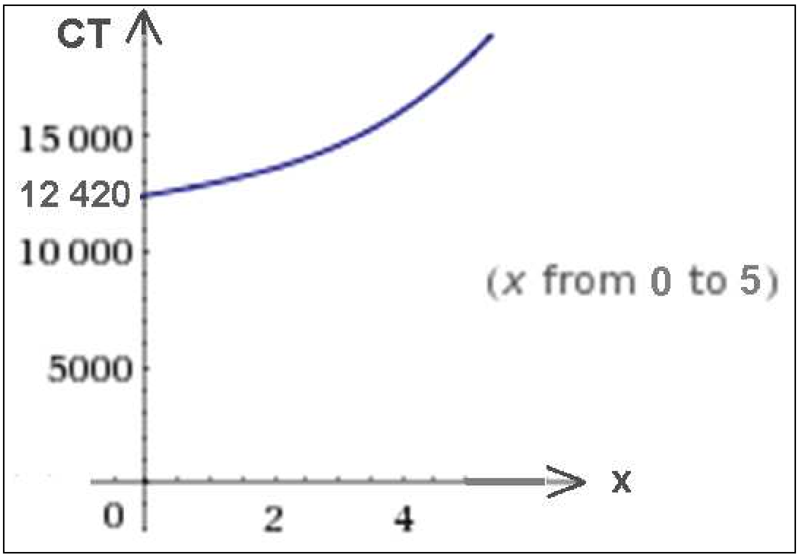
Como en el mínimo de los costes medios, que se alcanza para un valor de x = 6 ud., se ha de cumplir que:

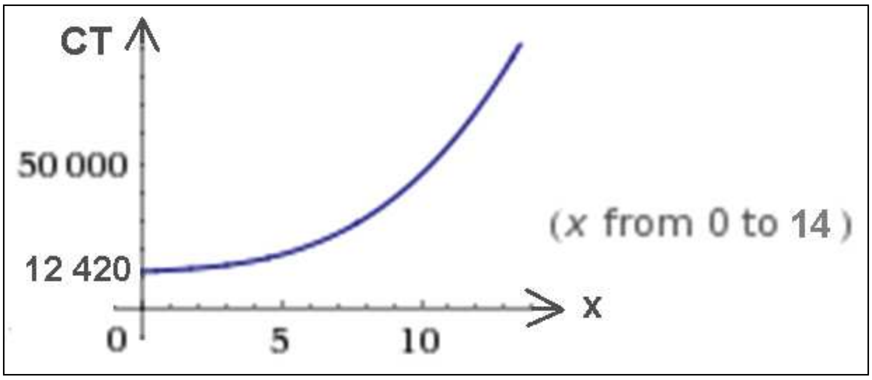
$\frac{dC^*}{dx} = 60x - 15 - \frac{C_o}{x^2} = 0$; o sea: $60 \cdot 6 - 15 - \frac{C_o}{6^2} = 0$, de donde: C_o = 12.420,

(lo que se comprueba haciendo C' = C*). Por lo tanto, la función de costes totales buscada será la siguiente:

$$\boxed{CT = C(x) = 30x^3 - 15x^2 + 500x + 12.420} .$$

Su representación gráfica correspondiente será:





Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y = CT \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{30x^3 - 15x^2 + 500x + 12.420}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OCT (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 19

Una empresa monopolista[2] que opera en un mercado cuya función de demanda es: $p = 444 - \frac{x}{2}$ ($\forall x \leq 888$), tiene la siguiente función de costes marginales: $CMa = C' = 81x^2 - 108x + 36$. Se pretende hallar la función de costes totales de la empresa sabiendo que en el equilibrio obtiene un beneficio extraordinario de 76'50 unidades monetarias.

Solución:

$I'(x) = C'(x)$ e $I(x) = p \cdot x = 444 \cdot x - \frac{x^2}{2}$, de donde: $I'(x) = 444 - x$, o sea:

$$444 - x = 81x^2 - 108x + 36; \quad 81x^2 - 107x - 408 = 0, \text{ esto es:}$$

$x = \frac{107 \pm \sqrt{11.449 + 132.192}}{162} = 3$ (única solución real) y $\forall x = 3$ se tiene que:

$$I(3) = 444 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} = 1.327'5, \text{ con lo que:}$$

$$C(3) = I(3) - \pi = 1.327'5 - 76'5 = 1.251 \text{ u.m.}$$

Integrando ahora mediante una cuadratura la función de los costes marginales, se obtiene que:

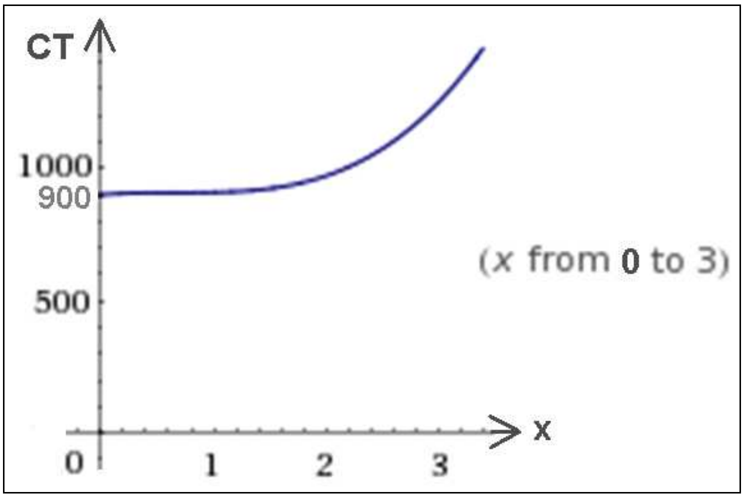
$$CT = \int C'(x) \cdot dx = \int (81x^2 - 108x + 36) \cdot dx = 27x^3 - 54x^2 + 36x + C_o; \text{ pero:}$$

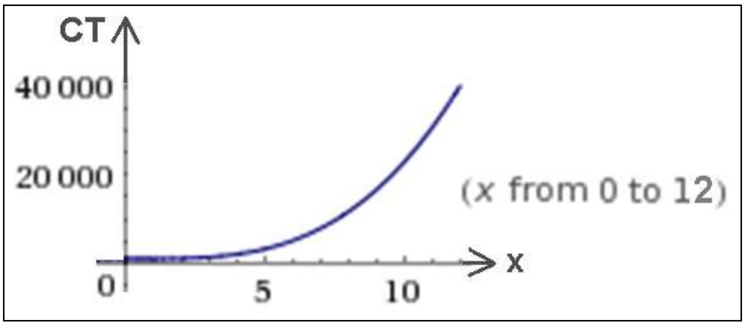
$C_o = C(3) - C_v(3) = 1.251 - 27 \cdot 3^3 + 54 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 = 900$, y la función buscada será la siguiente:

$$\boxed{CT = 27x^3 - 54x^2 + 36x + 900}$$

Su representación gráfica correspondiente será:

[2] Un *monopolio* es una situación de privilegio legal o fallo de mercado, en el cual existe un productor (monopolista) que tiene un gran poder de mercado y es el único que posee un producto, bien, recurso o servicio determinado y diferenciado. Para que exista un monopolio, es necesario que en dicho mercado no existan productos sustitutos, es decir, que no existe ningún otro bien que pueda reemplazar el producto determinado y, por lo tanto, constituye la única alternativa que tiene el consumidor para comprar.





Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y = CT \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{27x^3 - 54x^2 + 36x + 900}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 20

Resolver la EDO: $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 1$, que es una curva de costes variables medios de cierta empresa, con $y(0) = 4$ € e $y'(0) = -3$ € . Se pide también representar gráficamente las restantes curvas de coste considerando unos costes fijos de 100 € .

Solución:

La ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$.

Al ser -1 y -2 las raíces de la ecuación característica, la integral general de la ecuación homogénea será:

$$y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

Una solución particular de la ecuación dada, puede ser:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C,$$

de donde $\begin{cases} y'_p = 2Ax + B \\ y_p'' = 2A \end{cases}$, que llevadas a la ecuación inicial, da:

$$2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C \equiv 2x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 & A = 1 \\ 6A + 2B = 0 & B = -3 \\ 2A + 3B + 2C = 1 & C = 4 \end{cases}$$

La solución particular es, pues: $y_p = x^2 - 3x + 4$, y la solución general de la ecuación dada, será:

$$y = y^* + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + x^2 - 3x + 4.$$

De acuerdo con las condiciones iniciales dadas, se tiene que:

$$y(0) = 4 = C_1 + C_2 + 4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0.$$

Derivando, $y' = -C_1e^{-x} - 2C_2e^{-2x} + 2x - 3$, luego también:

$$y'(0) = -3 = -C_1 - 2C_2 - 3 \Rightarrow -C_1 - 2C_2 = 0.$$

Por tanto, $C_1 = C_2 = 0$ y la solución del problema de valores iniciales plateado, es la siguiente:

$$y = x^2 - 3x + 4.$$

Por último, se tendrán las siguientes funciones de coste y su respectiva representación gráfica:

$$\begin{cases} \text{Costes totales} = CT = CV + CF = x^3 - 3x^2 + 4x + 100 \\ \text{Costes totales medios} = CTMe = x^2 - 3x + 4 + \dfrac{100}{x} \\ \text{Costes variables} = CV = x^3 - 3x^2 + 4x \\ \text{Costes variables medios} = CVMe = x^2 - 3x + 4 \\ \text{Costes marginales} = CMa = 3x^2 - 6x + 4 \\ \text{Costes fijos} = CF = 100 \end{cases}$$

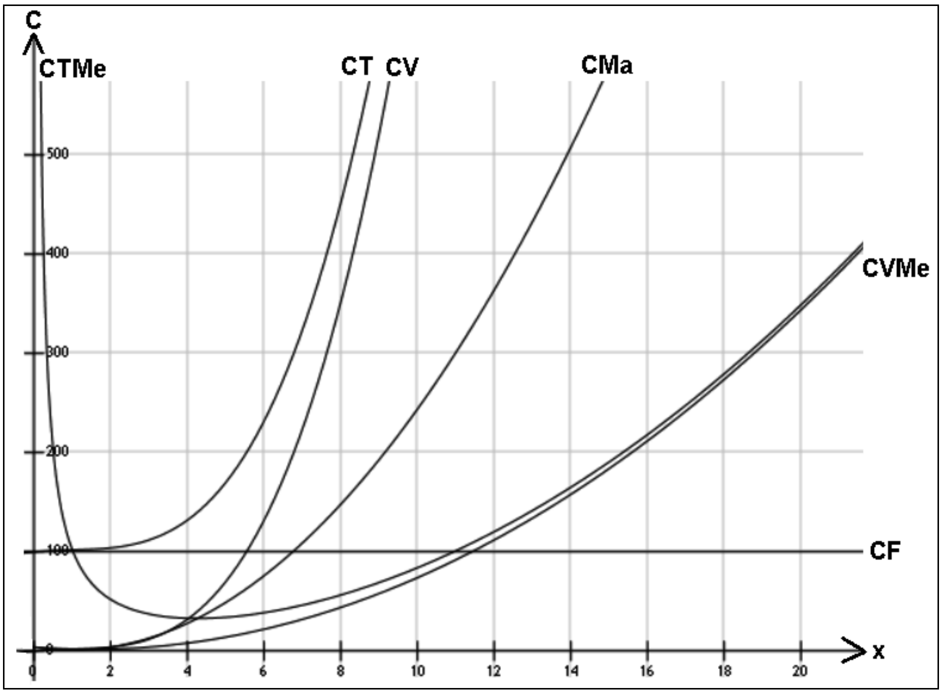


FIG. 4.6. Diferentes curvas de coste (IV).

Obsérvese que:

$$\begin{cases} \text{Costes variables} = CV = x^3 - 3x^2 + 4x \\ \text{Costes variables medios} = CVMe = x^2 - 3x + 4 \end{cases}$$

El volumen de producción mínimo de la empresa es x = 1'5, puesto que: CMa = CVMe; o sea: $3x^2 - 6x + 4 = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow x = 1'5$ (la otra solución x = 0 es rechazable).

Este punto coincide con el mínimo de la curva de CVMe, puesto que: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 4) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1'5$, y la condición suficiente o de 2º grado exige que: $\frac{d}{dx}(2x - 3) = 2 > 0$, luego se trata, efectivamente, de un mínimo. Se corresponde a: $C = 1'5^2 - 3 \cdot 1'5 + 4 = 1'75$ € .

Ejemplo 21

Una empresa que monopoliza el mercado de un producto determinado, en el que se puede llevar a cabo una discriminación de precios, se enfrenta con dos grupos distintos de consumidores, con demandas totales independientes, que vienen dadas por las funciones siguientes:

$$\begin{cases} q_1 = 160 - 20p \\ q_2 = 100 - 10p \end{cases}$$

La función de costes marginales de la empresa, es la siguiente: $CM_a = 0'01 \cdot q + 1$, con unos costes fijos de 200 u.m. Se pide: a) determinar los precios de venta del producto, la oferta total de la empresa y los beneficios netos que obtendría con una fiscalidad del 25%, b) las diferentes curvas de coste y su representación gráfica, y c) representar gráficamente la solución del ejercicio.

Solución:

a)

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= 80 - 10\ IM_a \\ q_2 &= 50 - 5\ IM_a \end{aligned}\right\} \quad q = q_1 + q_2 = 130 - 15\ IMa.$$

Resulta que: $CM_a = \dfrac{dCT}{dq} = 0'01q + 1$; de donde integrando esta sencilla ecuación de variables separables mediante una cuadratura, se tendrá que:

$$CT = \int (0'01q + 1) \cdot dq = 0'005 \cdot q^2 + q + C.$$ Además:

$\forall q = 0 \rightarrow CT = C = CF = 200$ u.m., con lo que la ecuación de costes totales de la empresa será:

$$C = 0'005 \cdot q^2 + q + 200.$$

Como $IM_a = CM_a$; $\dfrac{130 - q}{15} = 0'01q + 1$, de donde:

$q = 100$; $IM_a = 2$ u.m. ; $q_1 = 60$; $q_2 = 40$; $p_1 = 5$ u.m. ; $p_2 = 6$ u.m. ;

de donde se deduce que:

$$\begin{cases} \text{Ingresos totales} \rightarrow I = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 = 5 \times 60 + 6 \times 40 = 540 \text{ u.m.} \\ \text{Gastos totales} \rightarrow CT = 0'005 \cdot 100^2 + 100 + 200 = 350 \text{ u.m.} \end{cases}$$

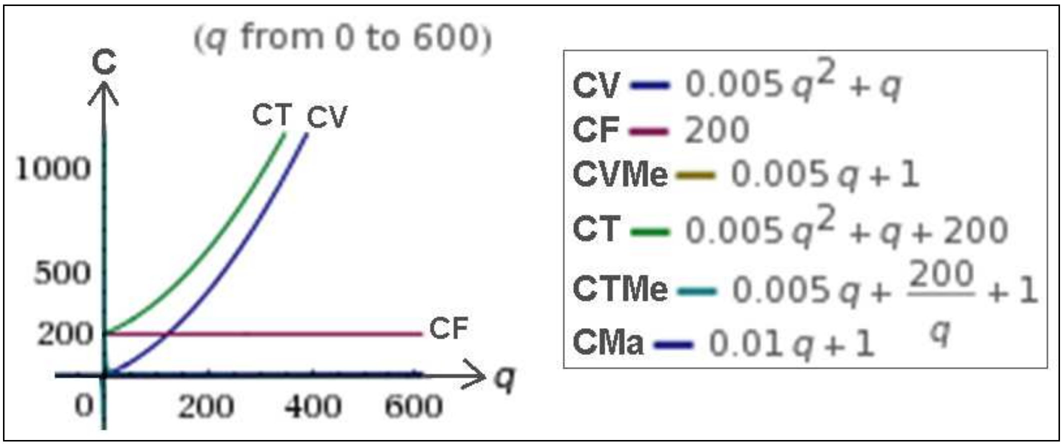
, resultando el siguiente beneficio:

$$\begin{cases} \text{Beneficios brutos: } \pi = I - CT = 540 - 350 = 190 \text{ u.m.} \\ \text{Beneficios netos: } B = \pi \cdot 0'75 = 142'5 \text{ u.m.} \end{cases}$$

b) Las diferentes ecuaciones de costes pedidas son las siguientes:

- Costes variables = CV = $0'005 \cdot q^2 + q$
- Costes fijos = CF = 200 u. m.
- Costes variables medios = CVMe = $0'005 \cdot q + 1$
- Costes totales = CT = CV + CF = $0'005 \cdot q^2 + q + 200$
- Costes totales medios = CTMe = $0'005 \cdot q + 1 + 200/q$

, con la representación gráfica siguiente:



c) La solución del ejercicio, en definitiva, puede verse en la siguiente representación gráfica:

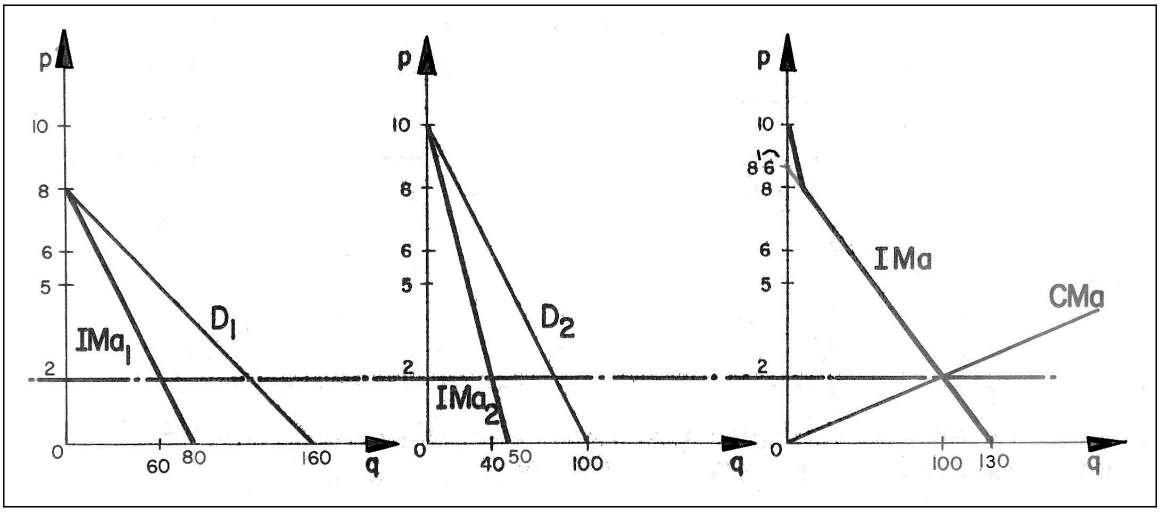


FIG. 4.7. Solución gráfica.

3.3. FUNCIONES DE BENEFICIO

A la hora de elegir la cantidad que desea ofrecer al mercado, la empresa buscará lógicamente obtener el máximo beneficio posible. En los modelos correspondientes se recoge la relación existente entre el beneficio y la cantidad sacada al mercado por la empresa a través de la una cierta función que denominaremos *función de beneficios.*

Por definición, la función de beneficio neto B(x) o bruto $\pi(x)$ estará dada por la diferencia existente entre la función de ingresos totales y la función de costos totales (en el primer caso considerando también los impuestos), que ya conocemos. Si el costo total de producción excede a los ingresos obtenidos por las ventas de los objetos o servicios producidos, la empresa sufre una pérdida; si, por el contrario, los ingresos superan a los costos, se obtiene una utilidad o ganancia. Si los ingresos obtenidos por las ventas igualan a los costos de producción, en fin, se dice que el negocio está en el punto de equilibrio o de beneficio cero.

Con carácter general, la condición necesaria o de primer grado, de valor cero de la derivada en el óptimo aplicada a la función de beneficios, equivale afirmar que el coste marginal (CMa) ha de ser igual al ingreso marginal (IMa), tal como se ha visto en el ejemplo anterior. Dado que en competencia perfecta el ingreso marginal de la empresa viene dado por el precio de mercado, dicha condición la podemos expresar diciendo que la empresa elige aquel volumen de producción para el cual el coste marginal coincide con el precio de mercado.

Por otra parte, la condición suficiente o de segundo grado de extremo relativo o local para que se alcance el valor máximo es que la función de beneficios sea cóncava para dicho nivel de producción, resultando inmediato comprobar que ello se cumplirá si la función de coste marginal es creciente en dicho punto.

Véase, al respecto de lo expuesto, el siguiente ejercicio:

Ejemplo 1

Sea *y* el beneficio neto anual obtenido por un comerciante cuando invierte *x* euros en publicidad. La tasa a la que cambia el beneficio neto respecto a la cantidad empleada en inversión viene dada por la EDO: $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 4y}$. Hallar la expresión que relaciona ambas variables del problema, sabiendo que cuando se invierten 10.000 €/año en publicidad el beneficio bruto anual es de 25.000 € (considérese un tipo impositivo medio del 20%).

Solución:

Escribiendo la expresada ecuación de la forma:

$(3x^2 - y)dx + (-x + 4y)dy = 0$, podemos comprobar que se trata de una ecuación diferencial exacta. En efecto, siendo:

$M(x,y) = 3x^2 - y$, y también: $N(x,y) = 4y - x$, por lo que se cumple que: $\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = -1 = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x}$, luego: $f(x,y) = \int 3x^2 - y)dx = x^3 - xy + C(y)$, y derivando respecto a *y*, se debe cumplir que: $-x + C'(y) = -x + 4y \rightarrow C'(y) = 4y \rightarrow C(y) = 2y^2 - C$. La integral general es, pues: $x^3 - x{\cdot}y + 2y^2 = C$. Pues bien, para las condiciones dadas en el enunciado, si x = 10.000 €/año → y = 25.000 x 0'80 = 20.000 €/año (descontando impuestos), por lo que se tendrá que:

$C = 10.000^3 - 10.000 \times 20.000 + 2 \times 20.000^2 = 10.006 \times 10^8$, de lo que resulta: $2y^2 - xy + (x^3 - 10.006{\cdot}10^8) = 0$, que expresa la relación buscada en forma implícita. Si se desea obtenerla en forma explícita, habrá que recurrir a la fórmula cuadrática y escoger la única solución posible, a saber:

$$\boxed{y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 8x^3 + 80.048 \cdot 10^8}}{4}}$$

Ejemplo 2

Sea *y* (en 10^4 €) el resultado contable anual obtenido por un fabricante cuando vende *x* (en 10^3) unidades de su producto. La tasa a la que cambia el resultado respecto a la cantidad vendida viene dada por la EDO: $y' = -\frac{xy + x^3}{\frac{x^2}{2} + y^2}$. Hallar la expresión que relaciona ambas variables del problema y juzgar la rentabilidad o viabilidad de la empresa en cuestión.

Solución:

De la expresión: $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy + x^3}{\frac{x^2}{2} + y^2}$, se deduce la ecuación:

$(-xy - x^3)dx = \left(\frac{x^2}{2} + y^2\right)dy$, o sea: $\overbrace{(-xy - x^3)}^{M}dx - \overbrace{\left(\frac{x^2}{2} + y^2\right)}^{N}dy = 0$; se cumple que: $\frac{\partial M}{\partial y} = -x = \frac{\partial N}{\partial x}$; por lo que es una EDO exacta. Entonces:

$$u(x,y) = \int (-xy - x^3)dx + \varphi(y) = -y\int x{\cdot}dx - \int x^3{\cdot}dx + \varphi(y) = -\frac{yx^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = N(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 = -\frac{x^2}{2} + \varphi'(y)\,; \quad \varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3}\,;$$

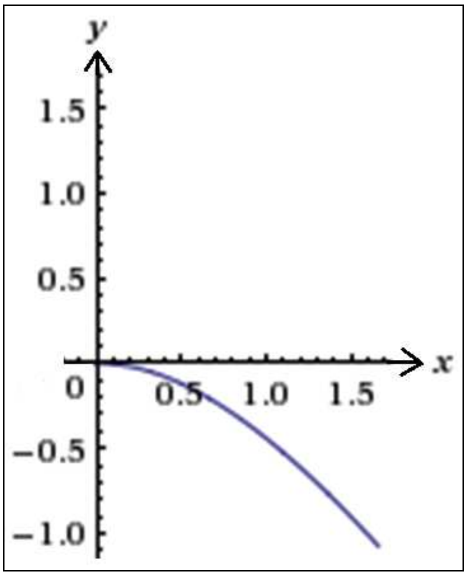
$u(x,y) = -\frac{yx^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{y^3}{3}$. La integral general es, pues:

$$\frac{yx^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} = C \rightarrow \text{I.G.} \quad \text{Se cumple que:}$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, puesto que si no hay producción puede también considerarse nulo el resultado contable (suponiendo que los costes fijos de la empresa, de haberlos, están compensados por otros ingresos), con lo que la integral particular vendrá dada por: $\boxed{\frac{yx^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} = 0}$. Esta expresión, en forma implícita, puede resolverse también, en el campo real, de forma explícita, así:

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{9x^8 + 8x^6} - 3x^4} - \frac{2x^2}{\sqrt[3]{\sqrt{9x^8 + 8x^6} - 3x^4}}\right)$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:



A la vista de los resultados obtenidos, es evidente que la empresa en cuestión carece de rentabilidad presente y futura al ser sus resultados contables siempre negativos (pérdidas), aumentando las mismas conforme lo hacen también las ventas, por lo que procede llevar a cabo su disolución o cierre.

3.4. FUNCIONES DE PRODUCCIÓN

La *función de producción* es la relación existente entre el producto obtenido y la combinación de factores que se utilizan en su obtención. Cada tipo de actividad empresarial, industrial, o simplemente cualquier actividad productiva (entiéndase, por “actividad productiva” aquella que combina factores de producción con el objetivo de obtener un resultado materializado en un bien, o en la prestación de un servicio) tendrá una función de producción diferente.

La función de producción representa, pues, la máxima cantidad que se puede producir de un bien con unos determinados recursos; por lo tanto, es una aplicación que a un vector de recursos le hace corresponder un escalar que representa la cantidad producida. La función de producción de un productor relaciona la cantidad usada de factores de producción con la producción obtenida gracias a ella. El productor puede ser una economía, un sector productivo, una explotación agropecuaria o bien una determinada industria.

No cualquier función de los factores de producción resulta una función de producción razonable; por esa razón se consideran una serie de supuestos que se cree debería satisfacer toda función de producción realista. Los factores de producción incluyen, en casi todos los casos de interés práctico, el trabajo y el capital; pudiendo incluir también, en algunos casos, tierra, materias primas o recursos naturales. Frecuentemente, se simplifica el modelo suponiendo que en muchos sectores sólo interviene el capital y el trabajo, aunque esto puede no ser adecuado para otros sectores en particular, como el agropecuario, que consumen una cantidad apreciable de recursos naturales.

La función de producción determina la cantidad que van a producir las empresas, es decir, la cantidad de bienes y servicios que éstas van a ofrecer al mercado. En todo proceso productivo las empresas emplean:

- *Recursos productivos* (stock de capital, maquinarias, ordenadores, instalaciones, vehículos, etc.).
- *Recursos humanos* (trabajadores).

La función de producción relaciona la cantidad de factores productivos utilizada (mano de obra, maquinaria, materia prima, otros suministros, etc.) con la producción obtenida de un determinado bien. Al incrementar los factores productivos la cantidad obtenida del bien o servicio aumenta de forma más que proporcional. Pero normalmente, a partir de cierto nivel de producción, sucede que este incremento inicial de eficiencia desaparece y comienza a haber ineficiencias; la pendiente de la función de producción va disminuyendo y el aumento de la producción obtenido al aumentar los factores productivos empleados es cada vez menor. Por ejemplo, llega un determinado momento en el que un aumento de los factores productivos en un 40 por ciento consigue aumentar la producción en tan solo un 25 por ciento. Esta ley se denomina "ley del producto marginal decreciente".

Por otra parte, el denominado *producto marginal* es el incremento de la producción que se obtiene al incrementar un determinado factor productivo en una unidad.

Véase, al respecto de lo aquí expuesto, el siguiente ejercicio:

Ejemplo 1

Se supone que la función de productividad marginal de una empresa, con un “input” variable, viene dada por la ecuación siguiente: PMa = $-x^2 + 16x + 80$. Se pide:

1) Determinar la función de producción, así como la cantidad máxima de “output” que podría obtenerse por la empresa sabiendo que a un nivel nulo de “input” corresponde una producción de q = 10.
2) Representar gráficamente las curvas de productividad total, media variable y marginal.

Solución:

1) Es sabido que: $\frac{dq}{dx} = PMa = -x^2 + 16x + 80$, por lo que se trata de una EDO de variables separables integrable mediante una cuadratura, a saber:

$$q = \int (-x^2 + 16x + 80)dx = -\frac{x^3}{3} + 8x^2 + 80x + C.$$

Como resulta que: q(0) = 10 = C, que es dato del problema, se tendrá una función de producción:

$$\boxed{q = -\frac{x^3}{3} + 8x^2 + 80x + 10} = \text{PTF} + \text{PTV}.$$

La cantidad máxima de “output” vendrá dada por:

$$PMa = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 16x - 80;\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 320}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 20 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

y solo tiene sentido económico la solución positiva, esto es, x = 20.

Para este mismo nivel de "input", corresponde una producción de:

$$q = -\frac{20^3}{3} + 8 \cdot 20^2 + 80 \cdot 20 + 10 = 2.143 .$$

2) Lógicamente, el punto de inflexión de la curva de productividad total coincide con el máximo de la curva de PMa, con lo que:

- <u>Condición de primer grado o necesaria</u>:

$\frac{d\,PMa}{dx} = -2x + 16 = 0 \Rightarrow x = 8$, que es un máximo absoluto de la curva PMa en el punto (8, 144).

- <u>Condición de segundo grado o suficiente</u>:

$\frac{d^2PMa}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow$ luego existe un máximo en este punto que es también un punto de inflexión en la curva de la función de producción de la empresa, así:

$q = -\frac{8^3}{3} + 8 \cdot 8^2 + 80 \cdot 8 + 10 = 991$, o sea, correspondería al punto (8, 991).

Por otra parte, la productividad media variable (PMeV) es el cociente de la productividad total variable (PTV) por la cantidad de "input", o sea: $PMeV = \frac{q}{x} = -\frac{x^2}{3} + 8x + 80$, de tal suerte que ambas curvas de PMa y PMeV se igualan en el punto (0, 80) y también en el máximo de la curva de PMeV si es que tal punto existe. En efecto: $\frac{d}{dx} = (-\frac{x^2}{3} + 8x + 80) = -\frac{2x}{3} + 8 = 0$; de donde: x = 12, al que corresponde q = 128. Ello puede comprobarse también por igualación de ambas funciones, o sea: (PMa = PMeV):

$$-x^2 + 16x + 80 = -\frac{x^2}{3} + 8x + 80 \text{; esto es: } -x + 16 = -\frac{x}{3} + 8 \text{;}$$

y resulta: x = 12, c.s.q.d.

La representación gráfica correspondiente será la siguiente:

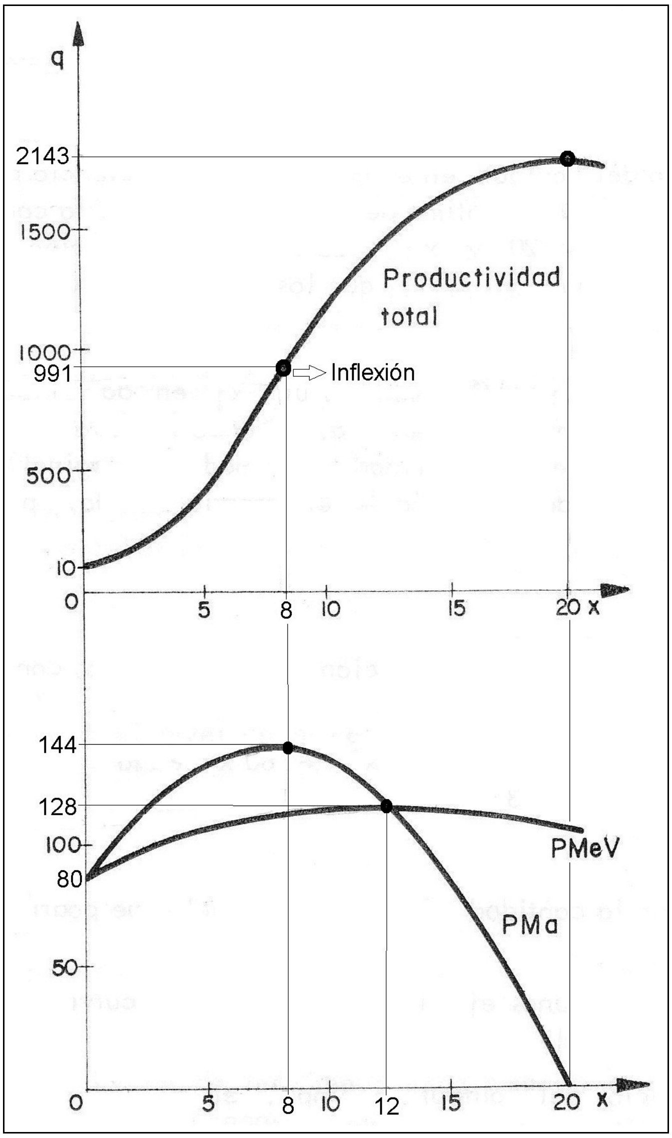


FIG. 4.8. Diferentes curvas de productividad.

3.5. OTROS

Ejemplo 1

Cuatro meses después de que se detuviera la publicidad, una compañía fabricante notifica que sus ventas han caído de 100.000 unidades por mes a 80.000. Si las ventas siguen un patrón de decrecimiento exponencial, ¿cuántas unidades se venderán después de los siguientes dos meses?

Solución:

Es obvio que si el decrecimiento en las ventas fuera lineal, se perderían 10.000 unidades en los siguientes dos meses, con lo que se venderían 70.000 unidades al cabo de dicho período. Sin embargo, aquí usaremos el modelo de decrecimiento exponencial: $y = C \cdot e^{kt}$, donde el tiempo t se mide en meses. De la condición inicial (t = 0), se sabe que C = 100.000 ud. Además, dado que: y = 80.000 ud. cuando t = 4 meses, se tiene que:

$$80.000 = 100.000 \cdot e^{4k};\ 0'8 = e^{4k};\ \ln 0'8 = 4k, \text{ de donde: } k = -0'0558.$$

De este modo, al cabo de dos meses más (cuando t = 6), se puede especular razonablemente que la tasa de ventas mensuales de la empresa será:

$$\boxed{y = 100.000 \cdot e^{-0'0558 \cdot 6} = 71.548 \text{ ud.}}$$

En este ejemplo, en realidad, no ha sido necesario resolver la siguiente EDO de variables separables:

$$y'(t) = k \cdot y(t), \text{ o sea: } \frac{dy}{dt} = k \cdot y;\ \frac{dy}{y} = k \cdot dt;\ \ln y = k \cdot t + C_1, \text{ de donde:}$$

$y(t) = e^{k \cdot t + C_1} = C \cdot e^{k \cdot t}$, habiendo hecho $C = e^{C_1}$.

4. EL EQUILIBRIO DEL MERCADO

4.1. FUNCIONES DE OFERTA

La función de oferta es una expresión matemática que relaciona la cantidad ofrecida de un bien o servicio (q = x) con su precio de mercado (p = y). Normalmente, la relación existente entre la cantidad ofrecida y el precio del bien o servicio es positiva: aumentos en el precio están asociados a aumentos en la cantidad ofrecida, por lo que la función será creciente. Dicha función de oferta del mercado depende, entre otros, de los siguientes factores: precio del bien o servicio, coste de los factores de producción, tecnología, y otros factores tales como por ejemplo: el número de empresas oferentes. Si relacionamos la cantidad ofrecida con el precio del producto, la función de oferta seguirá normalmente una trayectoria de pendiente positiva.

Así pues, la oferta es la cantidad de un bien o servicio que una empresa está dispuesta a vender durante un período determinado de tiempo. Igual que sucede en el caso de la demanda, la oferta no mide la ventas reales de la empresa, sino su "disposición a vender". La teoría económica considera como factores esenciales que inciden en la oferta de un bien, los tres siguientes: el *precio* del bien (p), los *costes de producción* (*C*), y las *expectativas empresariales* (E). La empresa está dispuesta a vender su producto a un precio mínimo que cubra el coste de producción, y a partir de ese mínimo, cuanto mayor sea el precio, mayor será su beneficio. Esta relación entre la cantidad ofrecida y precio de un bien se denomina *Ley de la Oferta*, que podríamos enunciar simplemente del siguiente modo: *A mayor precio mayor oferta y a menor precio menor cantidad ofrecida*, de ahí el carácter creciente de las funciones de oferta en sus representaciones gráficas, como tendremos ocasión de comprobar en los ejercicios que siguen. ¿Qué ocurriría si se alterarse el precio?. Si el precio es p*, la cantidad ofrecida será q*, en tanto que si el precio aumenta, la cantidad ofrecida también lo hará. Tal como podremos apreciar, el cambio en el precio genera un movimiento a lo largo de la curva de oferta del mercado.

El resto de los factores que afectan a la función de oferta, en caso de alteración, *ceteris paribus*, provocarán un desplazamiento paralelo de la función de oferta. Hacia la izquierda, en el caso de que aumenten los costes de producción, o bien que se reduzca el número de empresas que operan el mercado. Y hacia la derecha, cuando se reduzcan los costes, mejore la tecnología y aumente el número de empresas en el mercado.

A continuación se exponen numerosos ejercicios representativos de este importante concepto en Economía.

Ejemplo 1

Sea *y* el precio unitario de venta de un producto determinado, y *x* la cantidad ofertada de dicho producto. Se sabe que la razón a la que cambia la oferta respecto al precio viene dada por la ecuación diferencial ordinaria: $x(x + 3)dy - y(2x + 3)dx = 0$. Sabiendo que para $y = 20$ € el valor de *x* es de 2 unidades, se pide hallar la oferta en función del precio, así como su elasticidad.

Solución:

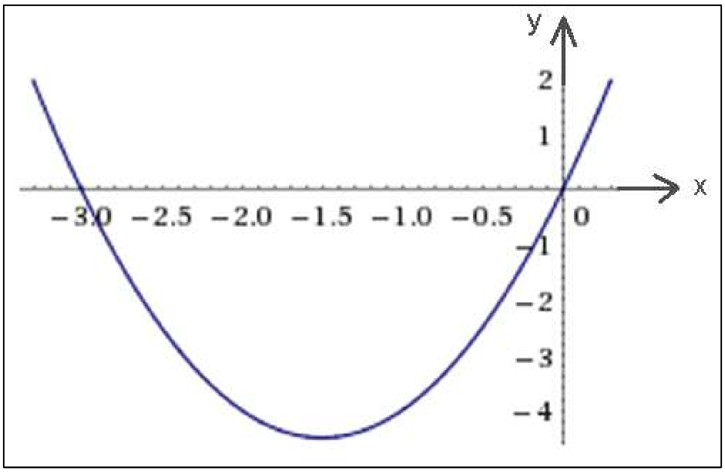
$x(x + 3)dy - y(2x + 3)dx = 0 \leftrightarrow (2xy + 3y)dx - (x^2 + 3x)dy = 0$; se trata de hecho de una EDO de variables separables, puesto que:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x+3}{x(x+3)}dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right)dx \leftrightarrow \ln y = [\ln x + \ln(x + 3)] + \ln C =$$

$= \ln Cx(x + 3)$, de donde se deduce que: $y = Cx(x + 3)$. Substituyendo ahora la condición dada en esta ecuación, resultará que: $y = 20$ € $\rightarrow x = 2$ ud., luego: $20 = 10\cdot C \rightarrow C = 2$, por lo que la relación que liga la oferta del producto en función del precio vendrá dada por la expresión:

$\boxed{y = 2x(x + 3)}$, que es una integral particular.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico exclusivo en el primer cuadrante del círculo):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x $\to \infty$ también y $\to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} (2x+6) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Si ahora estudiamos, por ejemplo, la elasticidad entre los puntos de la curva de oferta $O_1(2,20)$ y $O_2(3,36)$, se tendrá que:

$$e_o = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{3-2}{3+2} \times \frac{36+20}{36-20} = \frac{1}{5} \times \frac{56}{16} = 0'70 < 1,$$

por lo que resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

Ejemplo 2

Sea *y* el precio unitario de venta de un producto e *x* su oferta. La razón a la que cambia la oferta respecto al precio, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = 4x + 2y$. Se pide: a) hallar la oferta en función del precio, sabiendo que si el precio unitario es de 56’00 euros, la cantidad ofertada es de 1’50 unidades, y b) la elasticidad de la función entre los puntos en que x = 0 ud. y x = 1’50 ud.

Solución:

a)

$\frac{dy}{dx} = 4x + 2y$; $y' - 2y = 4x$; la ecuación característica de la homogénea es:

$\lambda - 2 = 0$; $\lambda = 2$; por lo que: $y^* = c \cdot e^{2x}$;

Ensayaremos ahora una solución particular de la completa del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} y_p = ax + b \\ y'_p = a \end{array}\right\} \qquad a - 2ax - 2b = 4x;$$

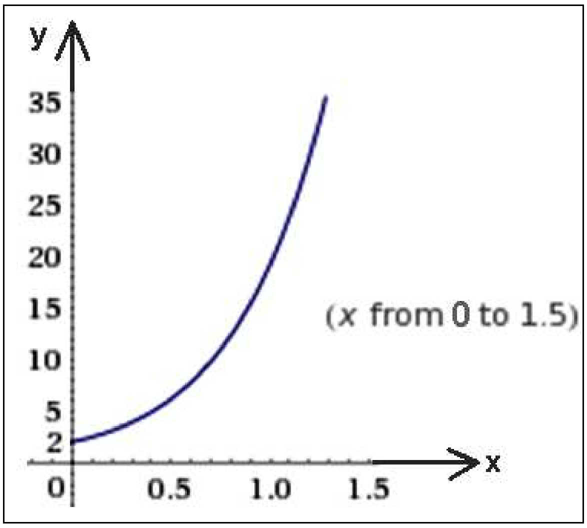
$$-2a = 4;\ a = -2;\ a - 2b = 0;\ b = \frac{a}{2} = -1;$$

$$y = y^* + y_p = c\cdot e^{2x} - 2x - 1;$$

Para las condiciones dadas: $56 = -3 - 1 + c\cdot e^3 = -4 + 20c \leftrightarrow c \approx 3$.

Luego la oferta en función del precio es: $\boxed{y = -2x - 1 + 3\cdot e^{2x}}$.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



La función tiene un valor mínimo en el primer cuadrante para x = 0 € de y = 2 ud. Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^{2x} - 2x - 1}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Si ahora estudiamos la elasticidad entre los puntos de la curva de oferta $O_1(0,2)$ y $O_2(1'5,56)$, se tendrá que:

$$e_o = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{1'5 - 0}{1'5 + 0} \times \frac{56 + 2}{56 - 2} = \frac{58}{54} = 1'07 > 1,$$

por lo que resulta relativamente elástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción mayor.

Ejemplo 3

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y''-4y'+3y=0$. Se pide: a) calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 0 € , no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es la unidad, y b) calcular la elasticidad de la función entre los puntos en que x = 0 ud. y x = 2 ud.

Solución:

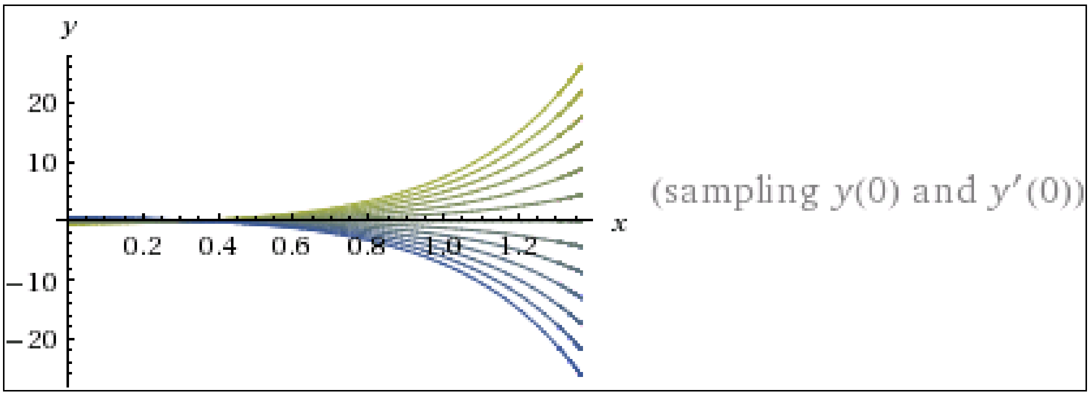
a) Se trata de resolver la ecuación diferencial ordinaria dada en el enunciado: y'' – 4y' + 3y = 0, hallando la solución particular tal que y(0) = 0 e y'(0) = 1.

La ecuación característica o modular será: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$;

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$, luego la I.G. buscada será:

$$\boxed{y(x) = c_1 \times e^{3x} + c_2 \times e^{x}} \rightarrow \text{I.G.}$$

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Para hallar la solución particular o también llamado “problema de valor inicial” (PVI), hacemos: $y(0) = c_1 + c_2$, con lo que:

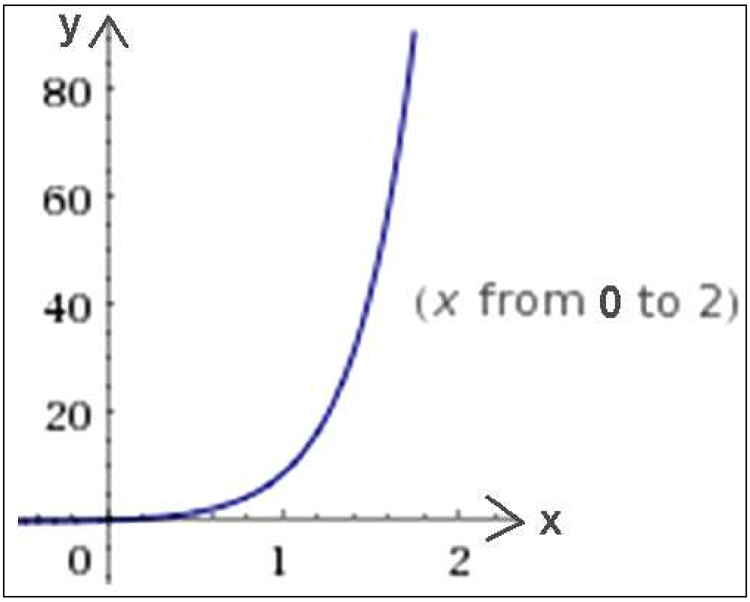
$$y'(x) = 3 \times c_1 \times e^{3x} + c_2 \times e^{x} \; ; \; y'(0) = 3c_1 + c_2 \; ; \text{ entonces:}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2c_1 = 1 \; ; \; c_1 = ½ \\ c_2 = - ½ \; ; \end{array}$$

con lo que la solución o integral particular buscada será:

$$\boxed{y_p = \frac{e^{3x}}{2} - \frac{e^{x}}{2} = \frac{e^{3x} - e^{x}}{2}}$$

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función del tipo exponencial, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x $\rightarrow \infty$ también y $\rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(e^{2x}-1)}{2x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Debe tenerse en cuenta que si x = 2 ud., también sucederá que: y = $\frac{e^6 - e^2}{2} = \frac{403'43 - 7'39}{2} = 198'02$ € , por lo que la elasticidad existente entre los puntos de la curva de oferta $O_1(0,0)$ y $O_2(2,198'02)$, será la siguiente:

$$e_o = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{2-0}{2+0} \times \frac{198'02 + 0}{198'02 - 0} = 1,$$

por lo que resulta una elasticidad unitaria, y las proporciones en que varían el precio y la cantidad ofertada del producto en cuestión son las mismas.

Ejemplo 4

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* € de un producto, respecto a su oferta *x* (en miles de ud.), viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y'' - 6y' + 9y = x^2 \cdot e^{3x}$. Se pide: a) calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 2'00 € , no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 6, y b) calcular la elasticidad puntual cuando la oferta es de 2.000 ud.

Solución:

a) Se trata, en definitiva, de resolver el siguiente problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = x^2 \cdot e^{3x} \\ y(0) = 2 \ ; \quad y'(0) = 6 \ ; \end{cases}$$

La ecuación característica de la homogénea, es:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \ ; \quad \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}, \text{ y su solución será:}$$

$$y^* = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} .$$

Ensayaremos ahora una solución particular que sea combinación lineal de soluciones, habida cuenta de la naturaleza del segundo miembro (producto de un polinomio por una función exponencial), así como para evitar indeseables fenómenos de resonancia, con lo que:

$$y_p = (ax^2 + bx + c) \cdot x^2 \cdot e^{3x} = e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) \ ;$$

$$\begin{aligned} y'_p &= 3 \cdot e^{3x}(ax^4 + bx^3 + cx^2) + e^{3x}(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) = \\ &= e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_p &= 3 \cdot e^{3x}(3ax^4 + 3bx^3 + 3cx^2 + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) + \\ &+ e^{3x}(12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) = \\ &= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + \\ &+ 12ax^3 + 9bx^2 + 6cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) = \\ &= e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + \\ &+ 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) \ ; \end{aligned}$$

y substituyendo los valores obtenidos en la ecuación inicial, se tiene que:

$$\begin{gathered} e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx + 12ax^2 + 6bx + 2c) - \\ - e^{3x}(18ax^4 + 18bx^3 + 18cx^2 + 24ax^3 + 18bx^2 + 12cx) + \\ + e^{3x}(9ax^4 + 9bx^3 + 9cx^2) = e^{3x}(12ax^2 + 6bx + 2c) = e^{3x} \cdot x^2 \ ; \end{gathered}$$

$12ax^2 + 6bx + 2c = x^2$; o sea: $a = 1/12$; $b = 0$; $c = 0$; con lo que resultará la integral general:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} + \frac{e^{3x} \cdot x^4}{12} .$$

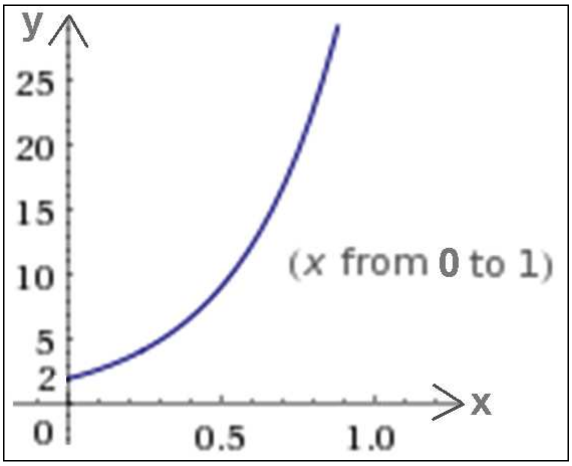
Ahora bien, las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 2 \ ; \\ y'(x) = 3 \cdot c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{3x} + 3c_2 \cdot x \cdot e^{3x} + \dfrac{3 e^{3x} \cdot x^4 + 4x^3 \cdot e^{3x}}{12} \ ; \\ y'(0) = 3c_1 + c_2 = 6 \ ; \quad c_2 = 0 \ ; \end{cases}$$

y resultará, en definitiva, la I.P. buscada:

$$\boxed{y(x) = 2e^{3x} + \frac{e^{3x} \cdot x^4}{12} = \frac{e^{3x}(24 + x^4)}{12}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}(24 + x^4)}{12x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Se tiene que: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{3x}(3x^4 + 4x^3 + 72)}{12}$; $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{12}{e^{3x}(3x^4 + 4x^3 + 72)}$; y entonces:

$$e_O = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{12}{e^{3x}(3x^4 + 4x^3 + 72)} \times \frac{e^{3x}(24 + x^4)}{12x} =$$

$$= \frac{24 + x^4}{3x^5 + 4x^4 + 72x} = \frac{24 + 16}{96 + 64 + 144} = 0'13 < 1,$$

por lo que resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

Ejemplo 5

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* € de un producto, respecto a su oferta *x* (en miles de ud.), viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $x^2y''-2xy'+2y=0$. Se pide: a) calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 0 € , no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 2 y su segunda derivada es igual a 4, y b) calcular la elasticidad puntual cuando la oferta es de 4.000 ud.

Solución:

a) Se trata de resolver la ecuación diferencial y el problema de valor inicial siguiente:

$$x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0, \quad \text{con } \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=4 \end{cases}$$

Se trata de una EDO del tipo Euler-Cauchy, por lo que efectuaremos el cambio de variable habitual en estos casos:

$$x = e^t \text{ ; } \quad dx = e^t\cdot dt \text{ ; } \quad t = \ln x \text{ ; } \quad y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}; \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

con lo que substituyendo estas expresiones en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2\frac{dy}{dt}+2y=0; \text{ con lo que resulta: } \frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=0;$$

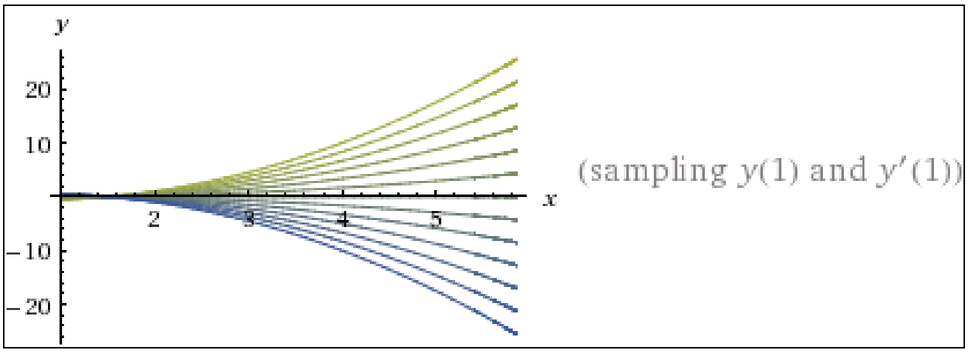
que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la siguiente ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ ; } \quad \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases} \lambda_1=2 \\ \lambda_2=1 \end{cases}$$

y la integral general vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{t} = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x}.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



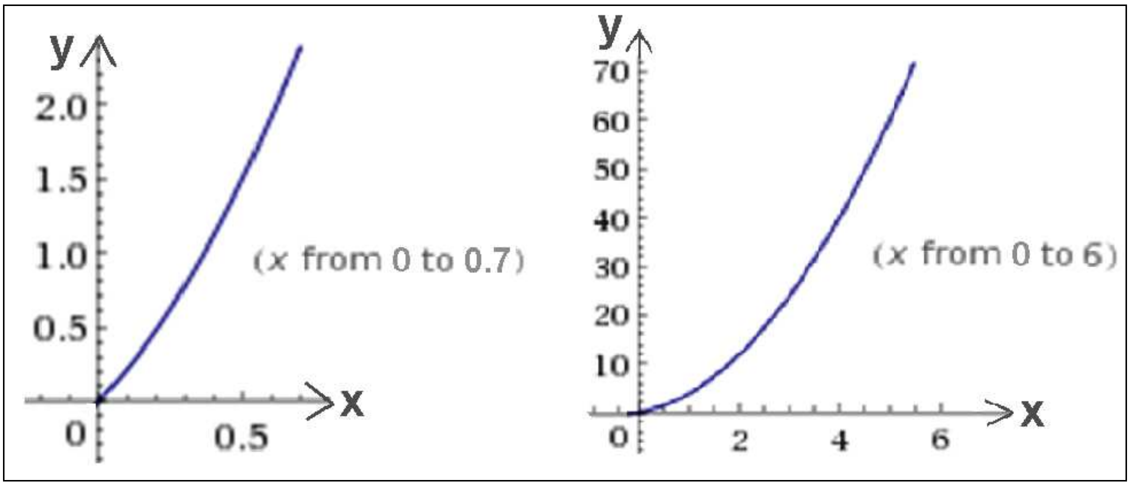
Por otra parte, las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \ ; \\ y'(x) = 2c_1x + c_2 \ ; \quad y'(0) = c_2 = 2 \\ y''(x) = 2c_1 \ ; \ y''(0) = 2c_1 = 4 \ ; \ c_1 = 2 \ ; \end{cases}$$

por lo que, con las condiciones iniciales prefijadas, se obtendría la solución particular buscada siguiente:

$$\boxed{y(x) = 2x^2 + 2x = 2(x + x^2)}$$

La representación gráfica correspondiente de esta solución particular pedida es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es:

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2(x+1) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Se tiene que: dy/dx = 4x + 2; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x+2}$; y la elasticidad buscada será: $e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{x+1}{2x+1} = \frac{5}{9} = 0'56 < 1$, por lo que la oferta en este punto resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

4.2. FUNCIONES DE DEMANDA

La *función de demanda* es la representación gráfica de la relación matemática existente entre la máxima cantidad de un determinado bien o servicio que un consumidor estaría dispuesto a comprar a cada precio de ese bien.

La función de demanda, junto con la función de oferta, constituye una de las herramientas más útiles del análisis teórico empleadas en la economía neoclásica para predecir la determinación de precios. El punto de intersección entre ambas funciones se conoce con el nombre de *equilibrio* entre la oferta y la demanda, que veremos en el apartado siguiente.

La función de demanda es un *constructo* útil para predecir el efecto posible o probable de ciertas situaciones económicas en el consumo de bienes. Frecuentemente, se habla de la función de demanda como un objeto realmente existente, aunque en realidad es un objeto abstracto cuya existencia se deriva de supuestos matemáticos concretos que, a veces, se cumplen solo aproximadamente. Además, la función de demanda y sus propiedades dependen de que los consumidores presenten racionalidad perfecta, las mercancías sean infinitamente divisibles y otra serie de supuestos teóricos, que han sido criticados. Sin embargo, aún con las limitaciones que puedan imponer las abstracciones anteriores, la función de demanda resulta un modelo teórico útil para comprender el comportamiento cualitativo de los mercados, y en muchos casos es una descripción empíricamente adecuada.

Conviene recordar que los factores que determinan la demanda de un bien o de un servicio son el precio del mismo, el precio de los demás bienes, la renta personal del consumidor y también las preferencias o gustos de los individuos. Los desplazamientos a lo largo de la función de demanda expresan la variación de la cantidad demandada por efecto del precio, asumiendo que los demás factores se mantienen constantes.

Para un consumidor dado, que consume *n* bienes diferentes, la demanda de este consumidor de un determinado producto *P* dependerá no solo de la renta disponible y de sus preferencias, sino también del precio de los *n*-1 productos que configuran su "cesta de la compra" solo cuando se considera el supuesto de *ceteris paribus* para los mercados de los otros *n*-1 productos y la renta resultará una función de demanda para *P* únicamente dependiente del precio del producto *P*.

Cuando la función de demanda se desplaza hacia la derecha, explica un aumento en la demanda debido a la variación de un factor distinto del precio, y cuando la función se desplaza hacia la izquierda ello manifiesta una disminución en la demanda debida también a la variación de un factor distinto del precio.

Los desplazamientos de la función de demanda pueden deberse a los siguientes factores:

- El aumento de la población demandante del bien o servicio.
- Cambios en las perspectivas de precios futuros.
- Cambios en las preferencias de los consumidores.
- El aumento de la renta disponible de algunos consumidores.
- Si se está considerando la demanda de un determinado bien *P* con independencia del resto, la alteración del precio de alguno de los otros bienes puede traducirse en un desplazamiento del bien *P*.

Otros conceptos interesantes relacionados, cuya conceptualización teórica se ha realizado anteriormente y que tendremos ocasión de practicar en algunos de los ejercicios aquí expuestos, son los siguientes:

- *ELASTICIDAD ARCO DE LA DEMANDA,* es aquella que mide la variación en toda la curva del arco de la demanda. En una curva de demanda, el coeficiente de elasticidad precio de la demanda entre dos puntos se denomina *elasticidad arco*. Como el coeficiente de elasticidad-precio de la demanda suele ser diferente en todos los puntos a lo largo de la curva, la elasticidad arco constituye solamente una estimación. En definitiva, esta elasticidad entre los puntos A(q_1, p_1) y B(q_2, p_2) puede calcularse del siguiente modo:

$$e_a = -\frac{\dfrac{q_2 - q_1}{(q_2 + q_1)/2}}{\dfrac{p_2 - p_1}{(p_2 + p_1)/2}} = -\frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \text{ x } \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1},$$

que se corresponde con la expresión del epígrafe 2.2. de este mismo capítulo de nuestro libro. Es normal, por otra parte, cambiar el signo de esta elasticidad habida cuenta del sentido diferente de los incrementos de precios y cantidades al tratarse de una función decreciente en el primer cuadrante para un bien "normal", cosa que sucede justo al revés en el caso de las funciones de oferta.

- *ELASTICIDAD PUNTO DE LA DEMANDA,* es aquella que se mide en un punto determinado de la curva de la demanda. A medida que el arco se vuelve más pequeño, la aproximación mejora y se aproxima a un valor puntual en el límite, cuando el cambio en el precio tiende a cero, constituyendo la denominada *elasticidad punto* o *elasticidad puntual*. Para hallar su valor se debe trazar la tangente a ese punto de la curva. Se calcula mediante la expresión:

$$e_p = \frac{dq}{dp} x \frac{p}{q}.$$

A continuación se exponen numerosos ejercicios representativos de este importante concepto en Economía.

Ejemplo 1

El precio de venta *y* de un bien, respecto a la cantidad demandada *x*, cambia con la razón expresada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}$. Obtener: a) el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 7'50 euros/unidad, la cantidad demandada es de 4 unidades, y b) la elasticidad arco entre los puntos extremos de dicha función de demanda y la elasticidad en el punto en que y = 10 €/ud.

Solución:

a) Podemos escribir la ecuación dada en el enunciado así:

$(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0$, que es diferencial exacta, como puede comprobarse. En efecto:

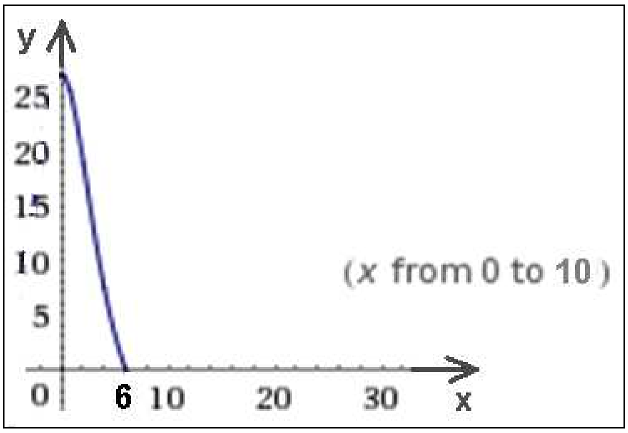
$M(x, y) = 2xy + 24x$; $N(x,y) = x^2 + 16$; entonces, se cumple que:

$$\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2x = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x}.$$

Así pues: $\int (2xy + 24x)dx = x^2 y + 12x^2 + C(y)$. Derivando respecto de *y* se obtiene que: $x^2 + C'(y) = x^2 + 16 \rightarrow C'(y) = 16 \rightarrow C(y) = 16y + C$.

Luego, la solución general será: $x^2y + 12x^2 + 16y + C = 0 \leftrightarrow$ $y = \frac{-12x^2 - C}{x^2 + 16}$. Substituyendo los valores dados, se obtiene que:
$C = -x^2y - 12x^2 - 16y = -16\cdot 7'5 - 12\cdot 16 - 16\cdot 7'5 = -16(15 + 12) = -432$.
La solución o integral particular buscada es, pues: $\boxed{y = \frac{-12x^2 + 432}{x^2 + 16}}$. La curva, en el primer cuadrante, recorre desde el punto máximo (0,27) al mínimo (6,0), como puede comprobarse seguidamente.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



b) La elasticidad arco buscada entre los puntos (0, 27) y (6, 0) viene dada por la expresión:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} x \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{6-0}{6+0} x \frac{0+27}{0-27} = (1) \times (-1) = -1,$$

por lo que se trata de una elasticidad unitaria.

Por otra parte, la elasticidad puntual en y = 10 €/ud. deberá tener en cuenta que:

$$x = +\sqrt{-\frac{16(y-27)}{y+12}} = +\sqrt{\frac{16(27-y)}{y+12}}$$. La derivada es:

$\frac{dx}{dy} = -\frac{78}{\sqrt{\frac{27-y}{y+12}} \times (y+12)^2}$. Además: $x = \sqrt{\frac{16 \times 17}{22}} = 3'52$, y entonces se obtiene:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{78}{\sqrt{\frac{17}{22} \times 22^2}} = -0'18$$, y la elasticidad punto buscada será:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -0'18 \times \frac{10}{3'52} = -0'51 \in (-1, 0),$$

por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Obsérvese que también el valor de la expresión dx/dy puede obtenerse por diferenciación del siguiente modo:

$$yx^2 + 16y + 12x^2 - 432 = 0 \ ;$$

$$(12 + y)x^2 + 16y - 432 = 0 = f(x, y) \ ; \quad f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = 0 \ ;$$

$$2x(12 + y) \cdot dx + (x^2 + 16)dy = 0 \ ; \quad 2x(12 + y) \cdot \frac{dx}{dy} = -x^2 - 16 \ ;$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-x^2 - 16}{24x + 2xy} = \frac{-3'52^2 - 16}{24 \cdot 3'52 + 2 \cdot 3'52 \cdot 10} = \frac{-28'3904}{\underbrace{84'48 + 70'4}_{154'88}} = -0'18$$, c.s.q.d.

Ejemplo 2

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su demanda *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x^2 + xy)}{x^2 + y^2}$. Se pide: a) calcular el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 5'00 € , la demanda es de 15 unidades, y b) calcular la elasticidad arco entre los puntos extremos de la función de demanda, así como la elasticidad en el punto anteriormente dado.

Solución:

a) Escribiendo la expresada ecuación de la forma:

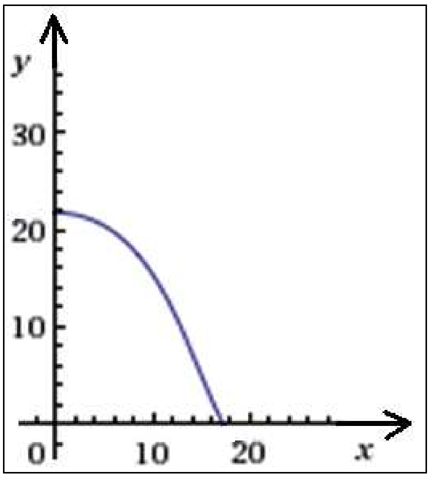
$2(x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$, podemos comprobar que se trata de una ecuación diferencial exacta. En efecto, siendo:
$M(x,y) = 2(x^2 + xy)$ y $N(x,y) = x^2 + y^2$, se cumple que: $\frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = 2x = \frac{\delta N(x,y)}{\delta x}$, luego: $\int 2(x^2 + xy)dx = \frac{2x^3}{3} + x^2y + C(y)$, y derivando respecto a *y*, se debe cumplir que: $x^2 + C'(y) = x^2 + y^2 \rightarrow C'(y) = y^2 \rightarrow$ $C(y) = \frac{y^3}{3} - C$. La integral general es, pues: $\frac{2x^3}{3} + x^2y + \frac{y^3}{3} = C.$

Pues bien, para las condiciones dadas (con y = 5'00 € $\rightarrow$ x = 15 ud.), se tendría que: $\frac{2}{3}x3.375+225x5+\frac{125}{3}=\frac{10.250}{3}$; C = 10.250/3, por lo que la integral particular buscada ofrece la solución implícita:

$$\boxed{f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3 = 10.250}$$

La curva, en el primer cuadrante, recorre desde el punto máximo (0, 21'72) al mínimo (17'24, 0), como puede comprobarse seguidamente.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



b) Los puntos extremos son los siguientes:

$$\left.\begin{cases}\text{Para } x = 0 \rightarrow y = \sqrt[3]{10.250} = 21'72 \\ \text{Para } y = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{10.250}{2}} = 17'24\end{cases}\right\} (0, 21'72) \rightarrow (17'24, 0)\ ,$$

y con ello se tendrá la siguiente elasticidad arco:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} x \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{17'24 - 0}{17'24 + 0} x \frac{0 + 21'72}{0 - 21'72} = (1) \times (-1) = -1,$$

por lo que se trata de una elasticidad unitaria.

Por otra parte, en el punto dado de coordenadas (15,5), la elasticidad puntual vendrá dada así:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{x^2+y^2}{2x^2+2xy} \to \text{en}\,(15{,}5) \to = -\frac{225+25}{450+150} = -\frac{250}{600} = -0'42\ ,$$

y la elasticidad puntual será:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -0'42 \times \frac{5}{15} = -0'14 \in (-1{,}0),$$

por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Ejemplo 3

La razón a la que está disminuyendo la demanda de un servicio determinado, expresada en unidades por año, viene dada por la siguiente función exponencial: $50.000 \cdot e^{-0'2 \cdot t}$, donde t = 0 corresponde al uno de enero del año 2016. Hállese: a) la razón a la que cambia la demanda cuando t = 5 años, y b) ¿cuántas unidades se demandarán entre los años 2016 y 2025, ambos inclusive?.

Solución:

a) Para t = 5 años, la razón a la que disminuye la demanda será:

$$50.000 \cdot e^{-0'2 \cdot 5} = 50.000 \cdot e^{-1} \approx 18.394 \text{ unidades/año.}$$

b) Las unidades demandadas entre los años 2016 y 2025 serán:

$$\frac{dy}{dt} = 50.000 \cdot e^{-0'2 \cdot t};\quad y = \int_0^{10} 50.000 \cdot e^{-0'2t} \cdot dt = -\frac{50.000}{0'2}\left[e^{-0'2t}\right]_0^{10} =$$
$$= -250.000\,(e^{-2} - 1) \cong 216.166 \text{ unidades.}$$

Ejemplo 4

Sea *x* la demanda de un cierto producto e *y* el precio unitario de venta del mismo. Se sabe que el ritmo al que cambia el precio, respecto a la demanda, viene expresado por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x - \frac{120}{x}$. Se pide: a) calcular el precio en función de la demanda, sabiendo que el precio unitario de venta es de 3'00 euros cuando la demanda es de 9 unidades, y b) calcular la elasticidad en el punto anterior.

Solución:

a) La ecuación diferencial es lineal de primer orden. Se puede escribir así:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - x + \frac{120}{x} = 0\,;\quad X = -\frac{1}{x}\,;\quad X_1 = -x + \frac{120}{x}\,;\quad \int X\cdot dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x\,;$$

$$\int X_1\cdot e^{\int X\cdot dx} = \int\left(-x + \frac{120}{x}\right)\cdot e^{-\ln x}\cdot dx = \int\left(\frac{120}{x} - x\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\cdot dx = \int\left(\frac{120}{x^2} - 1\right)\cdot dx =$$

$$120\int \frac{dx}{x^2} - x = -\frac{120}{x} - x\,;\quad \text{luego:}$$

$$y = x\left(K + \frac{120}{x} + x\right) = Kx + 120 + x^2\,;$$

y = 3'00 €/ud. $\rightarrow$ x = 9 ud. ; 3 = 9K + 120 + 81 ; 9K = -198 $\rightarrow$ K = -22 ; luego la solución buscada será:

$$\boxed{y = x^2 - 22x + 120},$$

que nos ofrece el precio del producto en función de la demanda del mismo.

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):

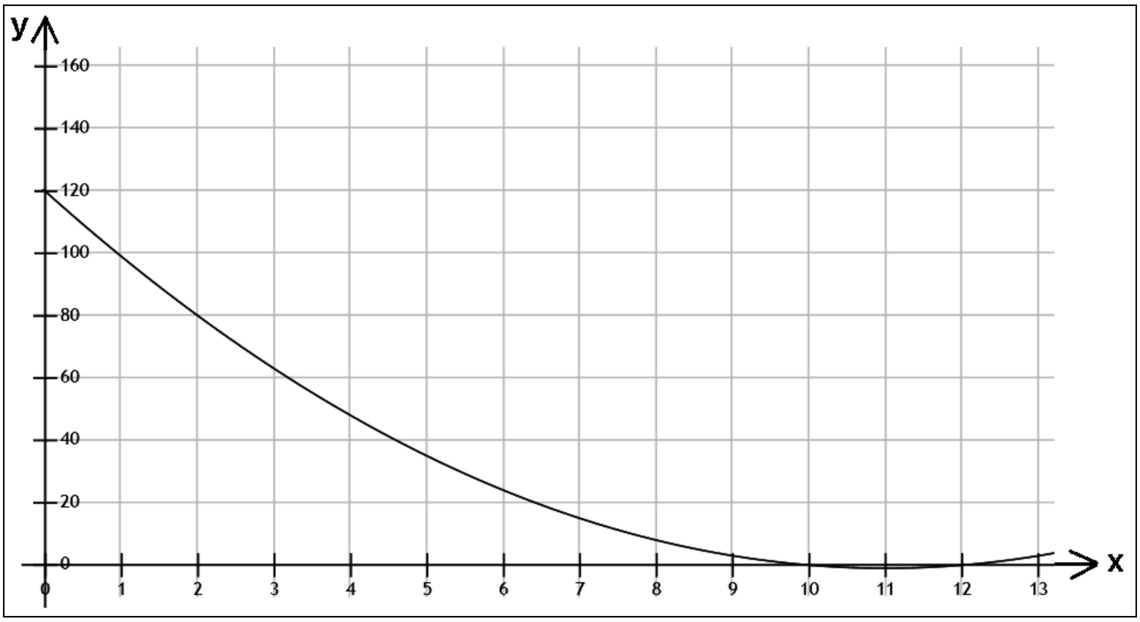


FIG. 4.9. Función de demanda (I).

Realizados los cálculos correspondientes, veamos que esta función posee un mínimo global cuando x = 11ud. e y = -1. No obstante, por las razones ya señaladas, la función de demanda decreciente transcurre desde los puntos de coordenadas (0,120) hasta el (10,0), puesto que de la ecuación: $x^2 - 22x + 120 = 0$ dedúcese que:

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 480}}{2} = \frac{22 \pm 2}{2}, \text{ con } x_1 = 10 \text{ y } x_2 = 12.$$

b) Por otra parte, en el punto dado de coordenadas (9,3), la elasticidad puntual vendrá dada así:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = \frac{1}{2x - 22}, \text{ y la elasticidad puntual en (9,3), será:}$$

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{2x - 22} \times \frac{y}{x} = \frac{y}{2x^2 - 22x} = \frac{3}{162 - 198} = -\frac{1}{12} = -0'08 \in (-1, 0),$$

por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Ejemplo 5

La tasa a la que cambia el precio de venta, *y*, de la gasolina de 95 octanos respecto a su demanda, *x*, viene dada por la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 1}$. Hállese el precio de la gasolina de 95 octanos, como una función de la demanda, en el caso de que el precio fuese de 1'50 €/litro cuando la demanda es de 50 litros.

Solución:

La ecuación se puede escribir: $(3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + 1)dy = 0$, que como podemos comprobar, se trata de una ecuación diferencial exacta, puesto que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \text{ Tendremos:}$$

$$f(x,y) = \int (3x^2 + 2xy)dx = x^3 + x^2 y + C(y) \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + C'(y) = x^2 + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow C'(y) = 1 \rightarrow C(y) = y + C.$$

Luego la solución general es:

$$x^3 + x^2 y + y + C = 0 \ ; \quad y = \frac{-C - x^3}{x^2 + 1};$$

Substituyendo los valores dados en el enunciado del problema planteado: y = 1'50 €/l., x = 50 litros y despejando C, se obtiene el valor de la constante, así:

$$C = -x^3 - x^2y - y = -50^3 - 50^2 \cdot 1'5 - 1'5 = -125.000 - 3.750 - 1'5 =$$

$$= -128.751'5,$$

luego la expresión buscada es la siguiente:

$$\boxed{y = \frac{128.751'5 - x^3}{x^2 + 1}}$$

, con la siguiente representación gráfica:

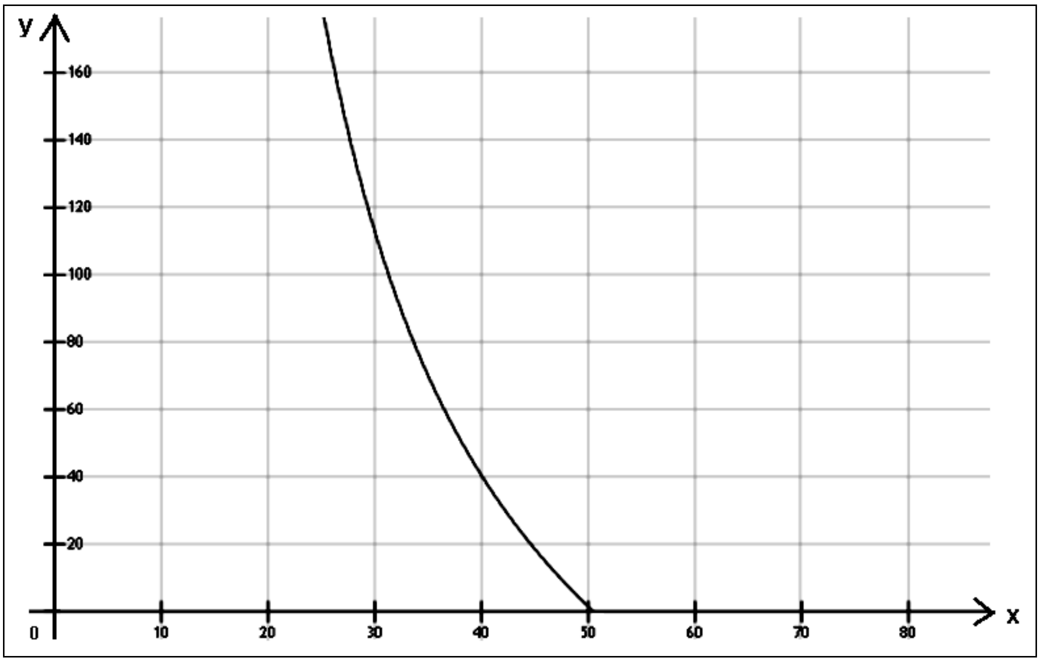


FIG. 4.10. Función de demanda (II).

Efectuados los cálculos correspondientes para la búsqueda de extremos relativos, veamos que esta función tiene un máximo local para x = 0, y = 128.751'5, y un mínimo local (en el 2º cuadrante) para los valores: x = -63'6043, y = 95'4065.

Se observa, por otra parte, que el precio se anula a partir de la cantidad: x = $\sqrt[3]{128.751'5} = 50'5$ litros (véase la figura anterior), y se continúan precios negativos del combustible, lo que constituye un absurdo económico, por lo que pese a la corrección en la resolución formal del problema planteado, el modelo económico resultante carece de significado.

Ejemplo 6

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su demanda *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $x\frac{dy}{dx} + y = -y^2 x$. Se pide: a) calcular el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 4'00 € , la demanda es de 1 unidad de producto, y b) calcular la elasticidad arco entre los puntos en que: x = 1 ud. y x = e ud., así como la elasticidad puntual en el primero de ellos.

Solución:

a) Se trata, en definitiva, de resolver la EDO siguiente:

$$x \cdot y' + y = - y^2 x, \text{ con } y(1) = 4.$$

Esta ecuación no es de variables separadas ni tampoco lineal de primer orden. Dividimos la ecuación por *x* para despejar y', así: $y' + \frac{y}{x} = -y^2$. Se trata, pues, de una ecuación del tipo Bernouilli, con: $p(x) = \frac{1}{x}$, q(x) = - 1 y n = 2. La resolvemos, como siempre, mediante el cambio de variable: $u = \frac{1}{y}$, que, derivando respecto de x, ofrece lo siguiente: $u' = - y^{-2} \cdot y'$, y despejando la y' resultará: $y' = - u' \cdot y^2$, que substituimos en la ecuación: $-u' y^2 + \frac{y}{x} = -y^2$.

Ahora dividimos por $-y^2$, y resulta: $u' - \frac{u}{x} = 1$, que es una ecuación lineal de primer orden con ecuación homogénea asociada, a saber: $u' - \frac{u}{x} = 0$. La solución de la homogénea es: $\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$, o sea: ln u = ln x + ln C; o sea: $u^* = C \cdot x$.

Hallamos después una solución particular de la ecuación completa por el método de variación de constantes, esto es:

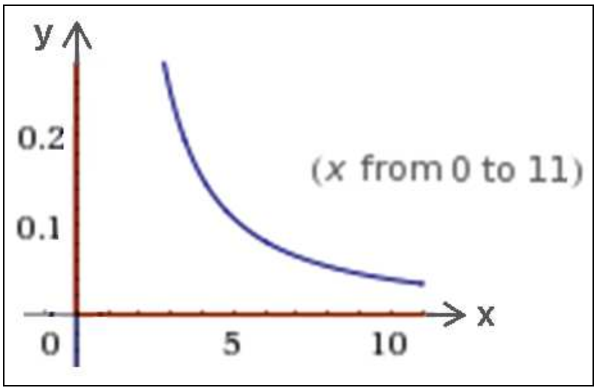
$u_p = C(x) \cdot x$; $u'_p = C'(x) \cdot x + C(x)$; substituyendo: $C'(x)x + C(x) - C(x) = 1$, luego: $C'(x) = \frac{1}{x}$, de donde, $C(x) = \ln|x|$. Entonces $u_p = x \cdot \ln|x|$ es una solución particular de la ecuación completa.

La solución general de la completa será: $u = u^* + u_p = C \cdot x + x \cdot \ln|x|$.

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{y}$, resultará la integral general: $y = \frac{1}{Cx + x\ln|x|}$, y en este caso particular, según las condiciones dadas en el enunciado: 4 = 1/C, de donde: C = ¼ = 0'25, con lo que la solución buscada será:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{0'25 \cdot x + x \cdot \ln|x|}}$$

La representación gráfica de esta solución particular, que resulta asintótica en ambos ejes coordenados, es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



b) Los puntos dados son los siguientes:

$$\left.\begin{cases} \text{Para } x = 1 \rightarrow y = 4'00 \text{ €} \\ \text{Para } x = e \rightarrow y = \dfrac{1}{0'25 \times e + e} = \dfrac{1}{1'25 \times e} = 0'29 \text{ €} \end{cases}\right\} \quad (1, 4'00) \rightarrow (e, 0'29),$$

y con ello se tendrá la siguiente elasticidad arco:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} x \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{e-1}{e+1} x \frac{0'29 + 4'00}{0'29 - 4'00} = \frac{1'72}{3'72} \times \frac{4'29}{-3'71} = -0'53 \in (-1, 0),$$

por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Por otra parte, en el punto dado de coordenadas (1,4), la elasticidad puntual vendrá dada así:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln x + 1'25}{x^2(\ln x + 0'25)^2}; \frac{dx}{dy} = -\frac{x^2(\ln x + 0'25)^2}{\ln x + 1'25};$$

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{x^2(\ln x + 0'25)^2}{\ln x + 1'25} \times \frac{1}{0'25 \cdot x^2 + x^2 \cdot \ln x} = -\frac{(\ln x + 0'25)^2}{\ln x + 1'25} \times \frac{1}{0'25 + \ln x} =$$

$$= -\frac{\ln x + 0'25}{\ln x + 1'25} = -\frac{0'25}{1'25} = -0'20 \in (-1, 0),$$

por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Ejemplo 7

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto determinado, respecto a su demanda *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $(x+y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$. Se pide: a) calcular el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 1’00 € , la demanda es de 1 unidad de producto, y b) calcular la elasticidad puntual en el punto anterior.

Solución:

a) Se trata, en definitiva, de resolver la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica: $(x + y)^2dx + (2xy + x^2 – 1)dy = 0$, con $y(1) = 1$.

La ecuación anterior es de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; con:

$M(x,y) = (x + y)^2$ y también $N(x,y) = 2xy + x^2 – 1$,

por lo que investigaremos si: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$ (1) . De aquí se concluye que la ecuación es exacta; por lo que existe una función f(x,y) para la que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 - 1. \qquad (2)$$

Integrando la primera ecuación en (2) respecto a *x* (o sea, manteniendo a *y* constante), se obtiene que:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + g(y) \quad (3) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + g'(y). \quad (4)$$

Igualamos a (4) con: $N(x,y) = 2xy + x^2 – 1$, o sea:

$x^2 + 2xy + g’(y) = 2xy + x^2 – 1 \Leftrightarrow g’(y) = -1, \Rightarrow$ $g(y) = -y$ (5),

$$\Rightarrow \qquad f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y. \qquad \{(5) \text{ en } (3)\}$$

Por lo tanto, la solución general de la EDO planteada es: $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = c$ (6). Ahora, substituyendo (1) en (6), se obtiene:

$$\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2(1) + (1)(1)^2 - 1 = c \Leftrightarrow \frac{1}{3} + 1 + 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = \frac{4}{3} \qquad (7)$$

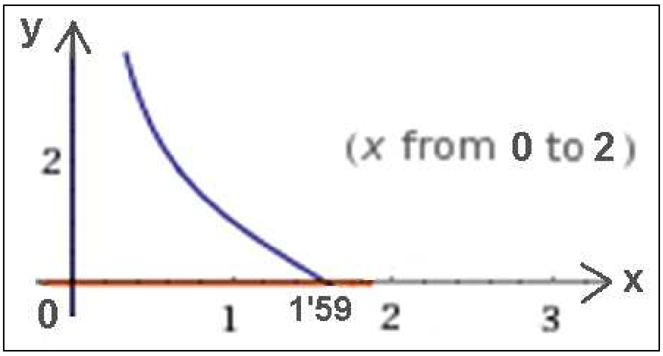
Por último, al substituir (7) en (6) se encuentra la solución particular implícita que contiene al par ordenado (1,1), a saber:

$$\boxed{\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3y = 4}.$$

Así mismo, utilizando la fórmula cuadrática, llegamos a la siguiente expresión explícita:

$$\boxed{y(x) = \frac{-3x^2 + \sqrt{3}\cdot\sqrt{-x^4 - 6x^2 + 16x + 3} + 3}{6x}}.$$

La representación gráfica de esta solución particular, en que el eje OY constituye una asíntota vertical, es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



b) En este caso, podemos partir directamente de la ecuación diferencial dada, así: $(x+y)^2 + (2xy + x^2 - 1)(dy/dx) = 0$. Despejando:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+y)^2}{2xy + x^2 - 1}$; $\frac{dx}{dy} = -\frac{2xy + x^2 - 1}{(x+y)^2} = \frac{1 - 2xy - x^2}{(x+y)^2}$. Y entonces:

$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{y - 2xy^2 - x^2y}{x(x+y)^2}$, y en el punto (1,1) sucederá que:

$\rightarrow\ e_p = \frac{1-2-1}{4} = -0'50 \in (-1, 0)$, por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

A la misma conclusión llegaríamos a partir de la expresión implícita: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3y - 4 = 0$, operando del siguiente modo:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{3x^2 + 6xy - 3}{3x^2 + 6xy + 3y^2} = -\frac{x^2 + 2xy - 1}{x^2 + 2xy + y^2}.$$ Y por último:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{3x^2y + 6xy - 3y}{3x^3 + 6x^2y + 3y^2x} = -\frac{3+6-3}{3+6+3} = -\frac{6}{12} = -0'50,$$ c.s.q.d.

4.3. PRECIO DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD

Habrá una situación de *equilibrio entre la oferta y la demanda* cuando, a los precios de mercado, todos los consumidores puedan adquirir las cantidades que deseen y los oferentes consigan vender todas las existencias que producen o poseen. El precio y la cantidad de producto que se intercambiará realmente en el mercado queda determinado automáticamente como consecuencia de la forma de las curvas de oferta y demanda del producto a las que nos hemos referido con anterioridad. Si el precio es muy alto, los productores estarán ofreciendo mucho más producto del que demandan los consumidores por lo que se encontrarán con *excedentes*, cantidades que no pueden vender, por lo que reducirán sus producciones y bajarán los precios. Por el contrario, si el precio resulta ser demasiado bajo, las cantidades demandadas serán mayores que las ofrecidas por lo que se producirá escasez. Algunos consumidores estarán dispuestos a pagar más dinero por ese bien o servicio. El precio y la cantidad producida aumentarán.

En la mayor parte de los modelos microeconómicos sencillos de oferta y demanda se puede observar un *equilibrio estático* en el mercado. No obstante, el equilibrio económico puede existir en relaciones que no sean de mercado y puede ser dinámico. Un equilibrio también puede ser multimercado o general, en contraposición al equilibrio parcial de un solo mercado.

En Economía, el término “equilibrio” es utilizado para sugerir un estado de "balance" entre las fuerzas de oferta y las fuerzas de demanda. Por ejemplo, un aumento en la oferta alterará el equilibrio, conduciendo a una disminución de los precios. En general, un nuevo equilibrio puede lograrse en la mayor parte de mercados. Así, no habrá cambios en el precio o en la cantidad de producto vendido y adquirido, hasta que no haya un movimiento exógeno en la oferta o en la demanda (como cambios en la tecnología o en las preferencias del consumidor). Esto es, no existen fuerzas endógenas que establezcan el precio o la cantidad.

Por otra parte, no todos los equilibrios económicos son *estables*. Un equilibrio será estable cuando pequeñas desviaciones en el equilibrio activan fuerzas económicas que llevan al subsistema económico hacia el equilibrio original.

A continuación se exponen numerosos ejercicios representativos de este importante concepto en Economía.

Ejemplo 1

La demanda y la oferta de un cierto bien están dadas en miles de unidades por: D = 48 – 2p(t) + 3p'(t), S = 30 + p(t) + 4p'(t), respectivamente. Si en t = 0 el precio del bien es 10'00 € , encuentre: a) el precio en cualquier tiempo t > 0, y b) si hay estabilidad o inestabilidad de precio.

Solución:

a) El precio p(t) está determinado al igualar la oferta y la demanda, esto es:

$$48 - 2p(t) + 3p'(t) = 30 + p(t) + 4p'(t), \text{ o bien: } p'(t) + 3p(t) = 18.$$

que es una EDO inhomogénea de primer orden.

La ecuación característica de la homogénea, ofrece:

$$\lambda + 3 = 0;\ \lambda = -3;\ \text{de donde: } p^* = c\cdot e^{-3t}.$$

Ensayando, ahora, la solución particular constante de la completa se tiene que:

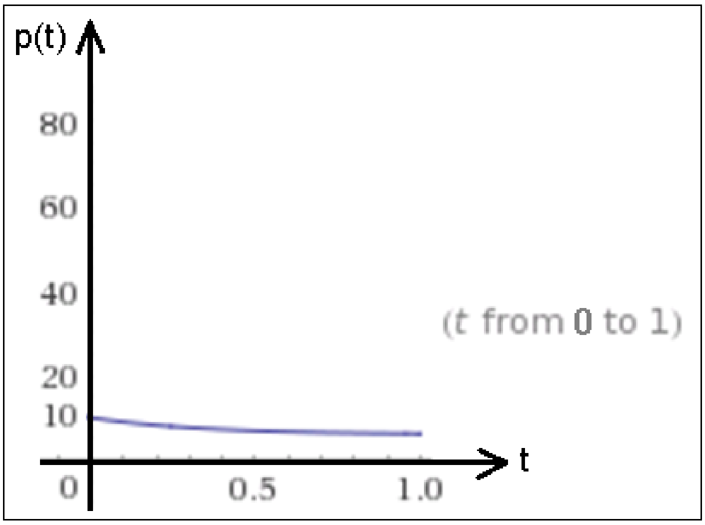
$$\left.\begin{array}{l} p_p = a \\ p'_p = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3a = 18;\ a = 6;\ \text{o sea, la solución general será:} \\ p = p^* + p_p = c\cdot e^{-3t} + 6;\ \text{y substituyendo en la} \end{array}$$

ecuación inicial sujeta a p = 10 en t = 0 se obtiene que:

$$p_0 = 10 = c + 6;\ c = 4;\ \text{o sea: } \boxed{p(t) = 4\cdot e^{-3t} + 6}.$$

b) De esto vemos que si $t \to +\infty$, $p \to 6$, puesto que: $\lim_{t\to+\infty}(6 + 4\cdot e^{-3t}) = 6$, lo que constituye una asíntota horizontal. Por tanto, tenemos estabilidad de precio, y el precio de equilibrio es de 6'00 € .

El gráfico correspondiente de precio contra el tiempo se muestra en la figura siguiente, con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo:



Ejemplo 2

Suponga que la oferta y la demanda están dadas en términos de precios *p* por: S = 60 + 2p, D = 120 – 3p, respectivamente, y la constante de proporcionalidad en la expresión: $\frac{dp}{dt} = -\alpha \frac{dq}{dt}$ es $\alpha = 4 > 0$ (se trata de un problema de inventario, donde la oferta y la demanda no son iguales pero la oferta cambia con el tiempo para satisfacer la demanda). Se pide: a) Escribir la ecuación diferencial para *p*, y b) Determinar el precio en cualquier tiempo t > 0 asumiendo que p = 8'00 € en t = 0.

Solución:

a) De la expresión: $\frac{dp}{dt} = -\alpha(S - D)$, se deduce que la EDO requerida para *p* es:

$$\frac{dp}{dt} = -4(60 + 2p - 120 + 3p) \quad \text{ó} \quad \frac{dp}{dt} + 20p = 240 .$$

b) Resolviendo la anterior como una ecuación diferencial lineal de primer orden (o bien como una con las variables separables) se obtiene la expresión: p' + 20p = 240.

Formando la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda + 20 = 0;\ \lambda = -20;\ \text{o sea: } p^* = c\cdot e^{-20\cdot t}.$$

Ensayando la solución particular de la completa se tiene que:

$$\begin{cases} p_p = a; & 20a = 240;\ a = 12; \text{ con lo que:} \\ p'_p = 0; & p = p^* + p_p = c\cdot e^{-20\cdot t} + 12. \end{cases}$$

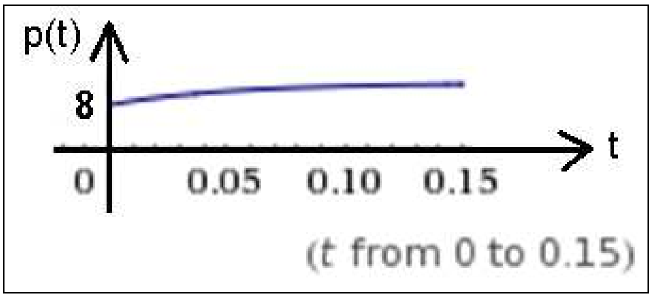
Usando el valor p = 8 en t = 0, según las condiciones iniciales dadas, ofrece: c = -4, y así nos queda la relación buscada:

$$\boxed{p(t) = 12 - 4\cdot e^{-20\cdot t}}$$

y, a largo plazo, el precio de equilibrio vendrá dado por (asíntota horizontal):

$$p_e = \lim_{t\to+\infty}(12 - 4\cdot e^{-20\cdot t}) = 12'00\ €\text{, con } q_e = 60 + 2\cdot 12 = 84.$$

El gráfico correspondiente puede verse en la figura siguiente con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo:



Nótese que el precio se incrementa de 8'00 € (en t = 0) al precio de equilibrio de 12'00 € . Este precio de equilibrio también se obtiene al igualar la oferta y la demanda, esto es: $60 + 2p_e = 120 - 3p_e$, o sea:

$$5p_e = 60;\ \text{de donde: } p_e = 12'00\ €\ .$$

Ejemplo 3

Supongamos que un productor desea proteger sus utilidades al requerir que la tasa a la cual incrementará el precio sea proporcional a la tasa a la cual declina el inventario. En ese caso tenemos que: dp/dt = -k·dq/dt, donde k > 0 es la constante de proporcionalidad que se asume conocida, de modo que usando la ecuación: dp/dt = - k (S - D), puesto que S y D se pueden expresar en términos de *p*, la ecuación dp/dt = - k (S - D) es una ecuación diferencial ordinaria para p. Se pide: a) Resolver el caso en que la oferta y la demanda están dadas en términos de precios *p* por las expresiones: S = 60 + 2p, D = 120 – 3p, respectivamente, y la constante de proporcionalidad es k = 4. b) Estudiar la estabilidad temporal del precio, efectuando la representación gráfica correspondiente. c) Hallar los ingresos brutos anuales del productor, siendo *p* (€/ud.) y *q* (ud./día), con un calendario laboral de 240 días/año.

NOTA: El presente ejemplo ya ha sido resuelto anteriormente, en parte, por procedimientos similares.

Solución:

a) De la fórmula dp/dt = - k·dq/dt, se deduce la ecuación diferencial requerida para *p*, esto es: dp/dt = -4(60 + 2p - 120 + 3p), o bien:

$$dp/dt + 20p = 240.$$

Resolviendo esta última ecuación diferencial completa de primer orden lineal, hallaremos primero la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda + 20 = 0;\ \lambda = -20, \text{ y la solución es: } p^*(t) = c\cdot e^{-20t}.$$

Ensayemos, ahora, una solución particular constante de la ecuación completa, o sea: $p_p = 240$, con $p'_p = 0$, y substituyendo en la ecuación inicial se tiene que: $20p_p = 240$; $p_p = 12$.

La integral general será, pues: $p(t) = p^*(t) + p_p = c\cdot e^{-20t} + 12$.

Teniendo en cuenta la condición inicial dada:

$p_0 = c + 12 = 8$, o sea: $c = -4$, y la trayectoria temporal del precio vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{p(t) = -4\cdot e^{-20t} + 12}$$

b) A largo plazo, el precio de equilibrio vendrá dado por:

$$p_e = \lim_{t\to+\infty} (12 - 4\cdot e^{-20\cdot t}) = 12'00\ €, \text{ con } q_e = 60 + 2\cdot 12 = 84.$$

En cualquier caso, de la igualación de las ecuaciones de la oferta y la demanda se obtendría el punto de equilibrio:

$$60 + 2p_e = 120 - 3p_e;\ 5p_e - 60 = 0;\ p_e = 12'00\ €\ ;\ q_e = 84, \text{ c.s.q.d.},$$

con la siguiente representación gráfica:

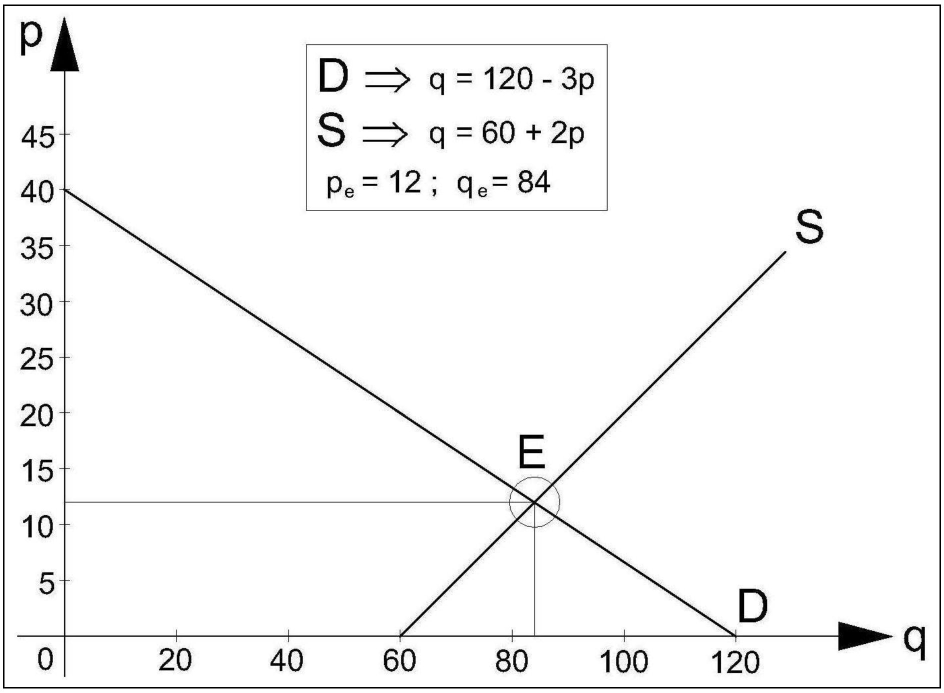


FIG. 4.11. Oferta, demanda y punto de equilibrio (I).

c) Los ingresos brutos del productor vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 12 €/ud. $\times$ 84 ud./día $\times$ 240 días/año = 241.920 €/año.

Ejemplo 4

La demanda y la oferta de un cierto bien están expresadas en miles de unidades por: D = 48 - 2p(t) + 3p´(t), y S = 30 + p(t) + 4p´(t), respectivamente. Si en t = 0 el precio del bien es de 10'00 € , encuentre: (a) El precio en cualquier tiempo t > 0 y (b) Si hay estabilidad o inestabilidad de precio, con la representación gráfica correspondiente.

Solución:

a) El precio de equilibrio del mercado p(t) está determinado al igualar la oferta con la demanda, esto es:

$$48 - 2p(t) + 3p'(t) = 30 + p(t) + 4p'(t) \text{ ; de donde: } p'(t) + 3\,p(t) = 18.$$

Resolviendo la ecuación diferencial completa de primer orden lineal, hallaremos primero la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda + 3 = 0;\ \lambda = -3, \text{ y la solución es: } p^*(t) = c\cdot e^{-3t}.$$

Ensayemos, ahora, una solución particular constante de la ecuación completa, o sea: $p_p = 18$, con $p'_p = 0$, y substituyendo en la ecuación inicial se tiene que: $3p_p = 18$; $p_p = 6$.

La integral general será, pues: $p(t) = p^*(t) + p_p = c \cdot e^{-3t} + 6$.

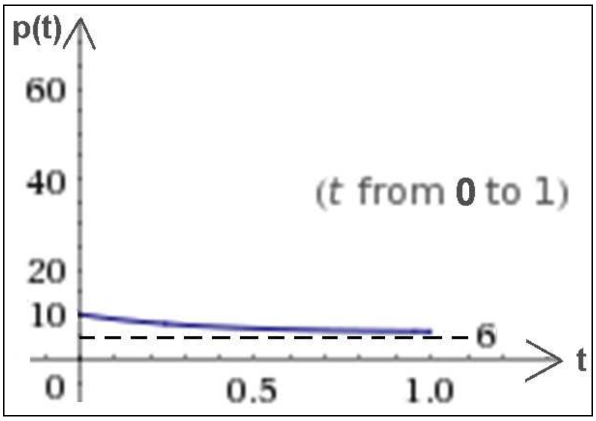
Teniendo en cuenta la condición inicial dada:
$p_0 = c + 6 = 10$, o sea: $c = 4$, y la trayectoria temporal del precio vendrá dada por la expresión:

$$\boxed{p(t) = 4 \cdot e^{-3t} + 6}$$

b) A largo plazo, el precio de equilibrio vendrá dado por (asíntota horizontal):

$p_e = \lim_{t \to +\infty} (6 + 4 \cdot e^{-3 \cdot t}) = 6'00$ €, con $q_e = 30 + 6 = 36$ (36.000 ud.).

El gráfico correspondiente puede verse en la figura siguiente con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo:



Por lo tanto, en el presente modelo económico tenemos *estabilidad de precio*, y el precio de equilibrio es de 6'00 € .

Ejemplo 5

En el siguiente modelo de mercado con expectativas de precios en el que:

$$\begin{cases} D(t) = 16 - 4P(t) - 6\dfrac{dP(t)}{dt} + 4\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \\ S(t) = -8 + 8P(t) + 4\dfrac{dP(t)}{dt} + 6\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

, a) obténgase P(t) para las condiciones iniciales P(0) = 3 y P'(0) = $-\frac{5}{2}$, y b) estúdiese el mismo problema en el caso de cambiar de signo los coeficientes de las primeras derivadas de las funciones dadas de oferta y demanda.

Solución:

a) Del equilibrio oferta/demanda: D(t) = S(t), se deduce que:

$$16-4P(t)-6\frac{dP(t)}{dt}+4\frac{d^2P(t)}{dt^2}=-8+8P(t)+4\frac{dP(t)}{dt}+6\frac{d^2P(t)}{dt^2},$$

de donde resulta:

$$-2\frac{d^2P(t)}{dt^2}-10\frac{dP(t)}{dt}-12P(t)=-24\text{, y también: }\frac{d^2P(t)}{dt^2}+5\frac{dP(t)}{dt}+6P(t)=12.$$

Para obtener su solución general, hallemos en primer lugar las raíces de la ecuación característica de la homogénea de grado dos, esto es:

$$\frac{d^2P(t)}{dt^2}+5\frac{dP(t)}{dt}+6P(t)=0,$$

que es $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, con $\lambda = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}$, y las raíces reales distintas son: $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -3$. La solución general de la ecuación es, pues:

$$P(t)^* = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}.$$

Para hallar una solución particular, tomemos $P_p = a$, con lo que:

$$\frac{dP_p}{dt}=0 \quad y \quad \frac{d^2P_p}{dt^2}=0,$$

por lo que substituyendo en la ecuación, se tiene que:

$$6a = 12 \quad y \quad a = 2.$$

La solución general es: $P(t) = P(t)^* + P_p = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + 2$.

Encontremos ahora la solución particular para las condiciones iniciales dadas, o sea: P(0) = 3 y P'(0) = $-\frac{5}{2}$. Ya que:

$$\frac{dP(t)}{dt} = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$$, del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 + 2 = 3 \\ -2c_1 - 3c_2 = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Obtenemos los valores de las constantes: $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = \frac{1}{2}$.

La solución buscada del modelo, que nos ofrece la trayectoria temporal del precio de mercado, es, pues:

$$\boxed{P(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + 2}.$$

Por otra parte, $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 2$, ya que: $e^{-2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ y $e^{-3t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, lo que constituye una asíntota horizontal.

La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio es:

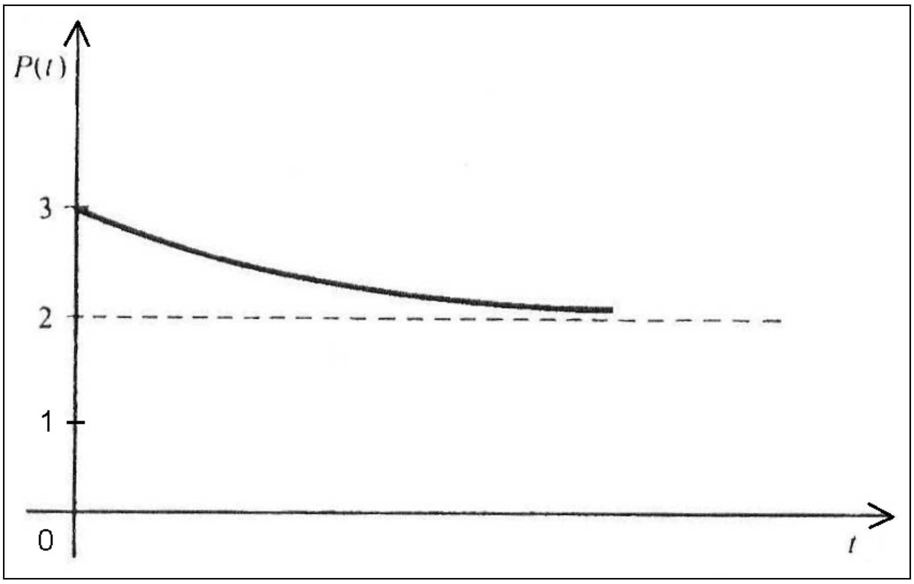


FIG. 4.12. Trayectoria temporal del precio (I).

, y la recta P(t) = 2 constituye una asíntota horizontal.

b) En este caso, las ecuaciones de oferta y demanda se convierten en:

$$\begin{cases} D(t) = 16 - 4P(t) + 6\dfrac{dP(t)}{dt} + 4\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \\ S(t) = -8 + 8P(t) - 4\dfrac{dP(t)}{dt} + 6\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

$$16 - 4P(t) + 6\frac{dP(t)}{dt} + 4\frac{d^2P(t)}{dt^2} = -8 + 8P(t) - 4\frac{dP(t)}{dt} + 6\frac{d^2P(t)}{dt^2},$$

de donde resulta:

$$-2\frac{d^2P(t)}{dt^2} + 10\frac{dP(t)}{dt} - 12P(t) = -24, \text{ y también: } \frac{d^2P(t)}{dt^2} - 5\frac{dP(t)}{dt} + 6P(t) = 12.$$

Para obtener su solución general, hallemos en primer lugar las raíces de la ecuación característica de la homogénea de grado dos, esto es:

$$\frac{d^2P(t)}{dt^2} - 5\frac{dP(t)}{dt} + 6P(t) = 0,$$

que es λ^2 - 5λ + 6 = 0, con $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$, y las raíces reales distintas son: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. La solución general de la ecuación es, pues:

$$P(t)^* = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}.$$

Para hallar una solución particular, tomemos $P_p = a$, con lo que:

$$\frac{dP_p}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2P_p}{dt^2} = 0,$$

por lo que substituyendo en la ecuación, se tiene que: 6a = 12 y a = 2.

La solución general es: $P(t) = P(t)^* + P_p = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + 2$.

Encontremos ahora la solución particular para las condiciones iniciales dadas, o sea: P(0) = 3 y $P'(0) = -\frac{5}{2}$. Ya que:

$$\frac{dP(t)}{dt} = 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{3t}, \text{ del sistema:}$$

$$\left.\begin{array}{r} c_1 + c_2 + 2 = 3 \\ 2c_1 + 3c_2 = -\frac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Obtenemos los valores de las constantes: $c_1 = \frac{11}{2}$ y $c_2 = -\frac{9}{2}$.

La solución buscada del modelo, que nos ofrece la trayectoria temporal del precio de mercado, es, pues:

$$\boxed{P(t) = \frac{11}{2}e^{2t} - \frac{9}{2}e^{3t} + 2}.$$

Por otra parte, $\lim\limits_{t\to-\infty} P(t) = 2$, ya que: $e^{2t} \underset{t\to-\infty}{\rightarrow} 0$ y $e^{3t} \underset{t\to-\infty}{\rightarrow} 0$.

Para t = 0 se tendría P(0) = 3, y con P(1) = -47'74, y así sucesivamente se obtendrían precios negativos, con lo cual este modelo carece de significado económico.

Ejemplo 6

Sea un modelo de mercado con expectativas de precios en el que:

$$\begin{cases} D(t) = 2 - 2P(t) + 2\dfrac{dP(t)}{dt} + \dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \\ S(t) = -2 + 3P(t) + 6\dfrac{dP(t)}{dt} + 2\dfrac{d^2P(t)}{dt^2} \end{cases}$$

con P(0) = 2'00 € y dP(0)/dt = 1. Obténgase P(t) y estúdiese la trayectoria temporal del precio.

Solución:

Igualando la oferta y la demanda (equilibrio), se tendrá que:

$$2 - 2P + 2P' + P'' = -2 + 3P + 6P' + 2P'' \ ;$$

de donde se obtiene la EDO no homogénea siguiente: $P'' + 4P' + 5P = 4$.

La ecuación característica de la homogénea, será: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$;

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \left\langle \begin{matrix} \lambda_1 = -2 + i \\ \lambda_2 = -2 - i \end{matrix} \right. \text{, (con } \alpha = -2 \text{ y } \beta = 1\text{) ,}$$

y la solución de la homogénea será:

$$P^*(t) = e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t).$$

Para hallar una solución de la completa o inhomogénea, ensayaremos la solución particular:

$$\begin{cases} P_p = a \\ P'_p = P''_p = 0 \end{cases}$$

con lo que substituyendo en la ecuación inicial resulta que: $5a = 4 \rightarrow a = 4/5$, y entonces la I.G. será:

$$P(t) = P^*(t) + P_p = e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t) + \frac{4}{5}.$$

Para las condiciones dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$P(0) = A + \frac{4}{5} = 2; \quad A = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5};$$

$$\begin{aligned} P'(t) &= -2\cdot e^{-2t}(A\cdot\cos t + B\cdot\sin t) + e^{-2t}(B\cdot\cos t - A\cdot\sin t) = \\ &= e^{-2t}(-2A\cdot\cos t - 2B\cdot\sin t + B\cdot\cos t - A\cdot\sin t) \end{aligned}$$

$$P'(0) = -2A + B = 1 ; \quad B = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5};$$

y la I.P. resultante, que es la solución pedida del modelo, es la siguiente:

$$\boxed{P(t) = e^{-2t}\left(\frac{6}{5}\cdot\cos t + \frac{17}{5}\cdot\sin t\right) + \frac{4}{5}}\ .$$

En este caso, se tendrá un precio de equilibrio, a largo plazo, de: $P_e = \lim_{t\to+\infty} P(t) = \frac{4}{5}$ = 0'80 € , y el precio oscilará alrededor de este valor.

La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio es:

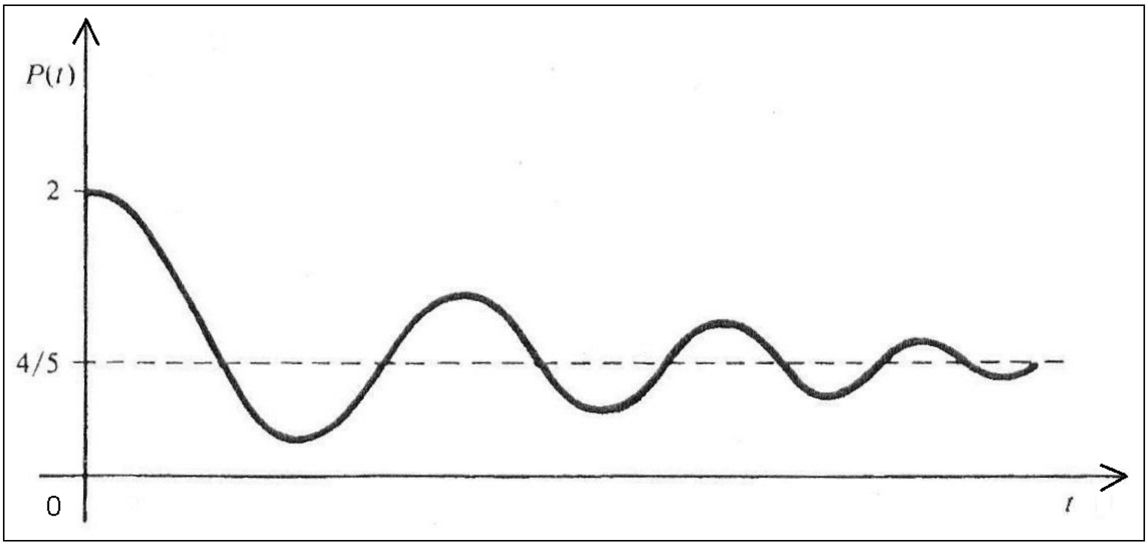


FIG. 4.13. Trayectoria temporal del precio (II).

Ejemplo 7

Hasta ahora hemos trabajado con las funciones de oferta y de demanda de tipo lineal, donde la variable dependiente o funcional *cantidad* (q), cambia en proporción directa con el cambio de la variable independiente o explicativa *precio* (p). Pero existen algunos casos en que la relación existente entre ambas puede estar representada por una función no lineal, generalmente de tipo polinómico (parabólico), donde la respuesta de la variable dependiente no se encuentra en proporción directa con los cambios que experimenta la variable independiente.

En el caso de funciones Oferta y Demanda no lineales (fundamentalmente cuadráticas o cúbicas), para buscar el equilibrio del mercado se deberá encontrar, como siempre, el precio de mercado que iguale la cantidad ofrecida (q_o) y la cantidad demandada (q_d). Veámoslo mejor mediante un sencillo ejemplo.

Sean las siguientes funciones cuadráticas respectivas de oferta y demanda de un cierto bien o servicio: $q_o = p^2 - 5$ y $q_d = - 2p^2 + 32p + 160$. Se trata de hallar: a) el correspondiente equilibrio del mercado, b) la elasticidad arco de la función de demanda entre los puntos en que se anula la cantidad del bien y el de equilibrio, así como la elasticidad puntual de la demanda y la oferta en este último punto, c) los ingresos brutos anuales del productor, siendo *p* (€/ud.) y *q* (ud./día), con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) El equilibrio de mercado estará situado, como siempre, en el punto de intersección entre las cantidades ofrecidas y demandadas, esto es:

$$q_o = q_d, \text{ con lo que:}$$

$$p^2 - 5 = - 2p^2 + 32p +160, \text{ de donde resulta que: } 0 = 3p^2 - 32p -165.$$

Buscamos las raíces de esta ecuación, con lo que:

$p = \dfrac{32 \pm \sqrt{1.024 + 1.980}}{6} = 14'47$ € $= p_1$, que será el precio de equilibrio, y p_2 carece de sentido económico por ser un número negativo. Por otra parte, para q = 0 se tiene el único precio positivo p = 20 €/ud.

Así pues, se opera en este caso con los siguientes valores:

q_d : la cantidad demanda.
q_o : la cantidad ofrecida.
p: el precio del bien en un determinado momento.
Punto de equilibrio: E (204'25, 14'47)
Precio de equilibrio = p_e = 14'47 €/ud.
Cantidad de equilibrio = q_e = 204'25 ud./día.

Gráficamente puede encontrarse el punto en donde se cortan las curvas dadas de Oferta y de Demanda. A saber:

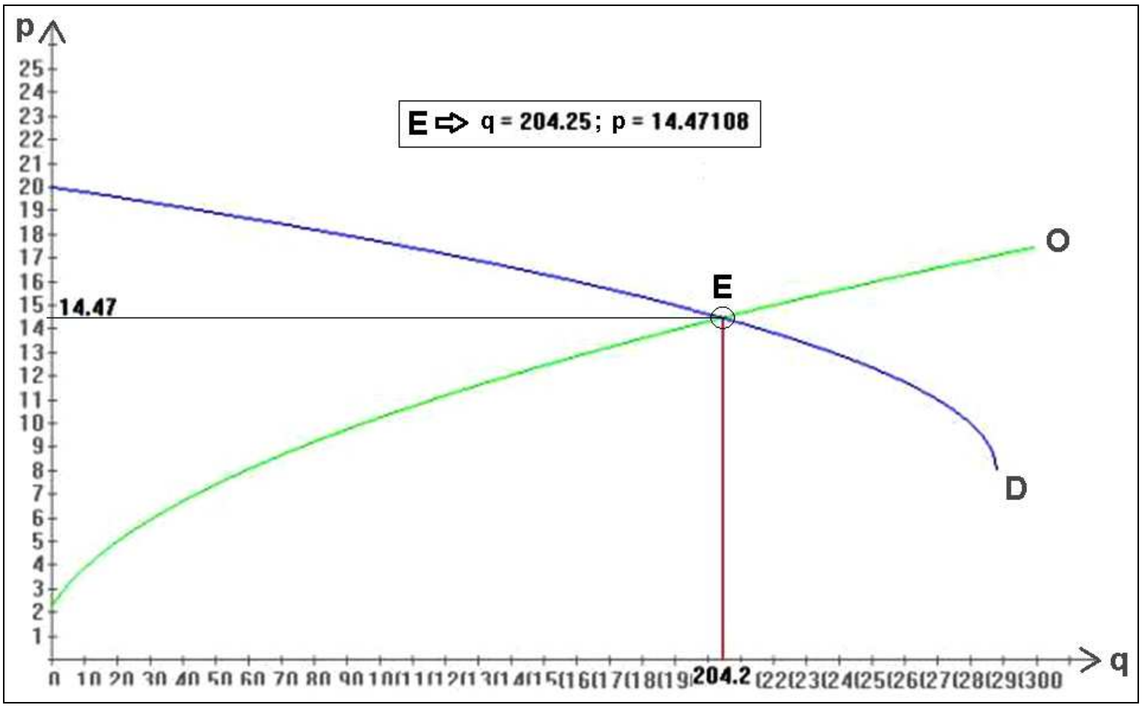


FIG. 4.14. Oferta, demanda y punto de equilibrio (II).

b) Se trata aquí, pues, de calcular la elasticidad arco de la demanda entre los puntos: (0, 20) y (204'25, 14'47), con lo que:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} x \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{204'25 - 0}{204'25 + 0} x \frac{14'47 + 20}{14'47 - 20} = (1) \times \frac{34'47}{-5'53} = -6'23 < -1,$$

por lo que se trata de una demanda relativamente elástica.

Por otra parte, para el cálculo de la elasticidad puntual de la demanda en el equilibrio E(204'25, 14'47), debe tenerse en cuenta que:

$q = -2p^2 + 32p + 160$; $dq/dp = -4p + 32$. En p = 14'47 € , se tiene que:

q = 204'25, y también: $dq/dp = -4 \cdot 14'47 + 32 = -25'88$, con lo que:

$$e_{pd} = \frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q} = -25'88 \times \frac{14'47}{204'25} = -1'83 < -1,$$

por lo que se trata de una demanda relativamente elástica.

De hecho, también esta elasticidad se podría haber calculado así:

$$e_{pd} = \frac{(-4p+32)\times p}{-2p^2+32p+160} = \frac{2p^2-16p}{p^2-16p-80} = \frac{2p(p-8)}{(p-20)\times(p+4)} =$$

$$= \frac{2\times 14'47(14'47-8)}{(14'47-20)\times(14'47+4)} = \frac{187'2418}{-5'53\times 18'47} = -1'83, \text{ c.s.q.d.}$$

Del mismo modo, la elasticidad puntual de la función de oferta en el punto de equilibrio hallado E(204’25, 14’47) vendrá dada por:

$q = p^2 - 5$; $dq/dp = 2p = 2\cdot 14'47 = 28'94$. Y con ello, se tendrá que:

$$e_{po} = \frac{dq}{dp} \times \frac{p}{q} = 28'94 \times \frac{14'47}{204'25} = 2'05 > 1,$$

por lo que se trata de una oferta relativamente elástica.

c) Los ingresos brutos del productor vendrán dados por:

$I = p \times q =$ 14’47 €/ud. $\times$ 204’25 ud./día $\times$ 240 días/año =

= 709.319’40 €/año.

Ejemplo 8

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$\begin{cases} D \rightarrow y(x) = \dfrac{120-3x}{4} \\ O \rightarrow x(1-y)dx + (x^2+y)dy = 0 \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades anuales. Se trata de estudiar: a) el equilibrio del mercado teniendo en cuenta que a una cantidad ofertada nula corresponde un precio de 2’00 € , b) la elasticidad puntual de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio, y c) los ingresos brutos anuales del productor.

Solución:

a) Evidentemente, la función de demanda es una recta decreciente que transcurre en el primer cuadrante del círculo desde el punto (0,30) al (40,0). Por lo que se refiere a la función de oferta, veamos que:

$$M(x,y) = x(1-y);\; N(x,y) = x^2 + y;\; \frac{\delta M(x,y)}{\delta y} = -x \neq \frac{\delta N(x,y)}{\delta x} = 2x,$$

luego se trata de una EDO no exacta y habrá que buscar el correspondiente factor integrante de la forma $\mu(t)$, y siendo presumiblemente $t = x^2 + y^2$, deberá verificarse, según hemos visto en la exposición teórica precedente, que:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2(xN - yM)} = f(t),$$

siendo este segundo miembro una función que solo dependa de t.

En efecto, en nuestro caso, como hemos visto, se cumple que:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial M}{\partial y} = -x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x\end{array}\right. \Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3}{2t}.$$

Integrando mediante una cuadratura se tiene que: $2\ln \mu(t) = -3\ln t$. Quitando logaritmos y deshaciendo el cambio de variable, resulta:

$$\mu(x^2 + y^2) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

Aplicando este factor integrante a la ecuación diferencial propuesta, se obtiene que:

$$\frac{x(1-y)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}dx + \frac{x^2 + y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}dy = 0.$$

Integrando esta ecuación diferencial total, que ahora ya es exacta, resulta que:

$$\int_a^x \frac{t(1-y)}{\sqrt{(t^2 + y^2)^3}}dt + \int_b^y \frac{a^2 + t}{\sqrt{(a^2 + t^2)^3}}dt = k.$$

Para calcular el primer sumando, hagamos el cambio de variable:

$u = t^2 + y^2$, $du = 2t\cdot dt$ con lo cual se tendrá que:

$$I=(1-y)\int_a^x \frac{tdt}{\sqrt{(t^2+y^2)^3}}=(1-y)\int_{a^2+y^2}^{t^2+y^2}\frac{du}{2\sqrt{u^3}}=(1-y)\left[\frac{-1}{\sqrt{u}}\right]_{a^2+y^2}^{t^2+y^2}=\frac{-(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1-y}{\sqrt{a^2+y^2}}\ ,$$

La segunda integral la descomponemos en dos sumandos, así:

$$J=\int_b^y \frac{a^2+t}{\sqrt{(a^2+t^2)^3}}dt=\int_b^y \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+t^2)^3}}dt+\int_b^y \frac{t}{\sqrt{(a^2+t^2)^3}}dy=J_1+J_2\ .$$

En J_1, hacemos $t=\dfrac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} \Rightarrow dt=\dfrac{a^2dy}{\sqrt{(a^2+y^2)^3}}$, con lo cual, resulta:

$$J_1=\left[\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]_b^y=\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

En J_2, ponemos $t = a^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2y\cdot dy$, de donde,

$$J_2=\left[\frac{-1}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]_b^y=-\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Sumando ahora: $J = J_1 + J_2$; $\quad J=-\dfrac{(1-y)}{\sqrt{a^2+y^2}}+\dfrac{1-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

y por fin se tendrá que: $I + J = -\dfrac{(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1-b}{\sqrt{a^2+b^2}}=k$.

Poniendo una sola constante arbitraria, resultará, en fin, la integral general:

$$\sqrt{x^2+y^2}+C(1-y)=0\ .$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la condición inicial dada, se tendrá que: $y(0) = 2$, o sea: $2 + C(1-2) = 0$, de donde: $C = 2$, y resulta la integral particular:

$$\sqrt{x^2+y^2}+2(1-y)=0\ .$$

Esta ecuación ofrece las dos soluciones siguientes:

$$y_1 = \frac{1}{3}(4-\sqrt{3x^2+4}) \ ; \ y_2 = \frac{1}{3}(\sqrt{3x^2+4}+4),$$

y tratándose de una función de oferta (creciente) adoptaremos la segunda de ellas, con lo que la búsqueda del punto de equilibrio del mercado exige, como siempre, que: O = D, esto es:

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)=\frac{120-3x}{4}; \quad \sqrt{3x^2+4}=\frac{3(120-3x)}{4}-4=\frac{344-9x}{4};$$

elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad resultará que:

$$3x^2+4=\frac{118.336+81x^2-6.192x}{16}; \quad 48x^2+64=81x^2-6.192x+118.336;$$

$$33x^2-6.192x+118.272=0; \quad 11x^2-2.064x+39.424=0;$$

$$x=\frac{2.064\pm\sqrt{4.260.096-1.734.656}}{22}=\frac{2.064\pm1.589'2}{22}=\begin{cases}166'05=x_1\\21'58=x_2\end{cases}$$

siendo x_2 = 21'58 (21.580 ud./año) el único resultado válido como puede comprobarse en la figura anexa, al que corresponde un precio de:

$$\boxed{y = 13'82 \text{ €/ud.}}$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:

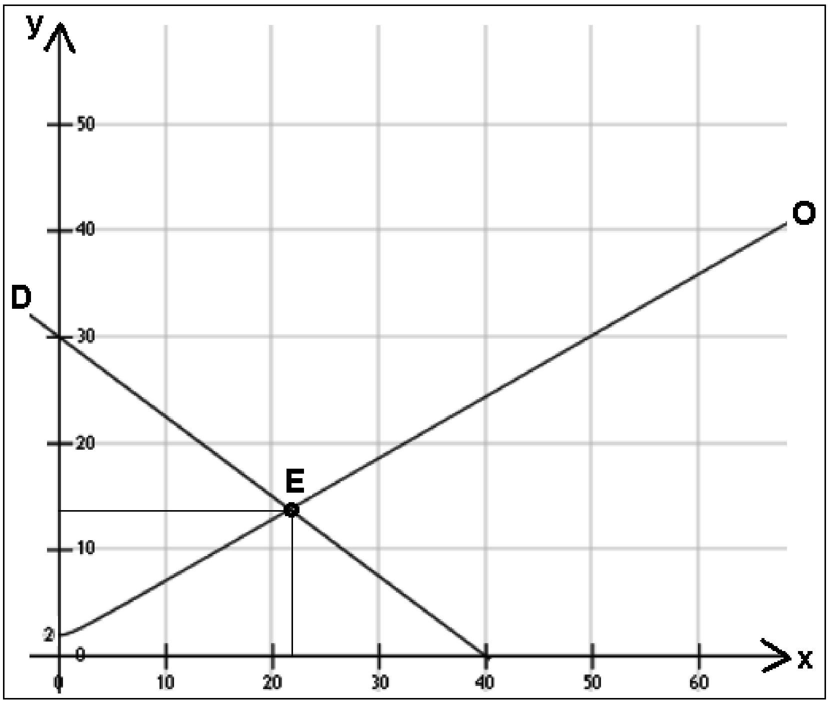


FIG. 4.15. Oferta, demanda y punto de equilibrio (III).

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado anteriormente E(21'58, 13'82), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ y = (120 – 3x)/4; dy/dx = -3/4; $\frac{dx}{dy} = -\frac{4}{3}$. Y la elasticidad de la función de demanda será:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \times \frac{120-3x}{4x} = \frac{x-40}{x} = (21'58-40)/21'58 = -0'85 \in (-1,0),$$

por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Del mismo modo:

O $\Rightarrow$ y = $\frac{1}{3}(\sqrt{3x^2+4}+4)$; dy/dx = $\frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}$; $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{3x^2+4}}{x}$. Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será la siguiente:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3x^2+4}}{x} \times \frac{\sqrt{3x^2+4}+4}{3x} = \frac{3x^2+4+4\sqrt{3x^2+4}}{3x^2} = 1'11 > 1.$$

En este caso, la función en estudio resulta relativamente elástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada del bien en cuestión disminuye en una proporción mayor.

c) Los ingresos brutos del productor vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 13'82 €/ud. $\times$ 21.580 ud./año = 298.235'60 €/año.

Ejemplo 9

Se pide: a) Hallar la función de oferta de un bien normal expresada así: y'' – 4y' + 5y = $2e^{2x}$ (sin x + cos x), siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día, que verifica las condiciones iniciales siguientes: y(0) = 1 € , y'(0) = 2 € ; b) teniendo en cuenta la función de demanda siguiente: y = $-8x^3 - 10x^2 - 7x + 8$, estudiar el equilibrio del mercado y la elasticidad de la demanda en dicho punto de equilibrio; c) los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) La ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$.

Las raíces (complejas imaginarias mixtas) de la ecuación característica son: 2 ± i, luego la solución general de la ecuación homogénea es la siguiente:

$$y^* = e^{2x} (C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Al coincidir la parte imaginaria de las raíces con el coeficiente de x en el seno y el coseno, la solución particular a ensayar de la ecuación completa puede ser, para evitar fenómenos de resonancia:

$$y_p = xe^{2x}(A \sin x + B \cos x).$$

Al derivar dos veces, substituir en la ecuación inicial e identificar los coeficientes de los términos con igual parte literal, se obtienen los valores de los coeficientes indeterminados, que son, A = 1, B = -1, como puede comprobar el amable lector/a.

Así pues la solución particular de la ecuación completa es:

$$y_p = xe^{2x} (\sin x – \cos x).$$

Sumándole la solución general de la homogénea antes hallada, obtenemos la integral general de la ecuación diferencial dada, que resulta ser la siguiente:

$$y = y^* + y_p = e^{2x} [(C_1 + x) \sin x + (C_2 – x) \cos x].$$

Al derivar esta función y hacer y(0) = 1, y'(0) = 2, se obtienen los valores de las constantes arbitrarias, $C_1 = C_2 = 1$, siendo la solución al problema de valores iniciales propuesto, en definitiva:

$$y(x) = e^{2x} [(1 + x) \sin x + (1 – x) \cos x].$$

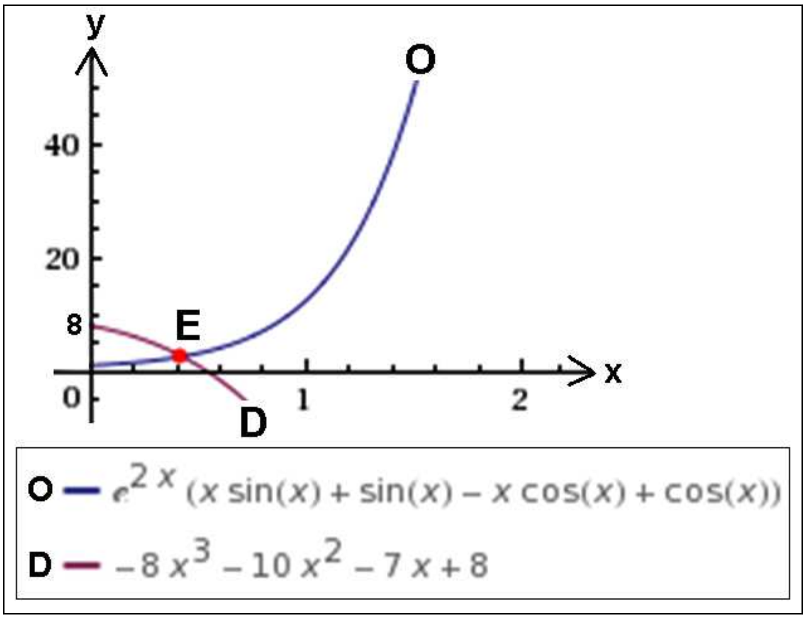
b) La búsqueda del punto de equilibrio del mercado exige, como siempre, que: O = D, esto es:

$$e^{2x} [(1 + x) \sin x + (1 – x) \cos x] = -8x^3 – 10x^2 – 7x + 8 ,$$

que ofrece las soluciones reales siguientes (tendremos en cuenta solamente la primera de ellas):

$$\begin{cases} x \approx 0.425164333253664\ldots \\ x \approx 3.72553815861385\ldots \\ x \approx 6.92485734534581\ldots \\ x \approx 10.1116014334378\ldots \end{cases}$$

, esto es, a x = 0’425 (425 ud./día) corresponde un precio y = 2’61 €/ud., lo que también puede apreciarse así:



La representación gráfica correspondiente puede verse a continuación con mayor detalle:

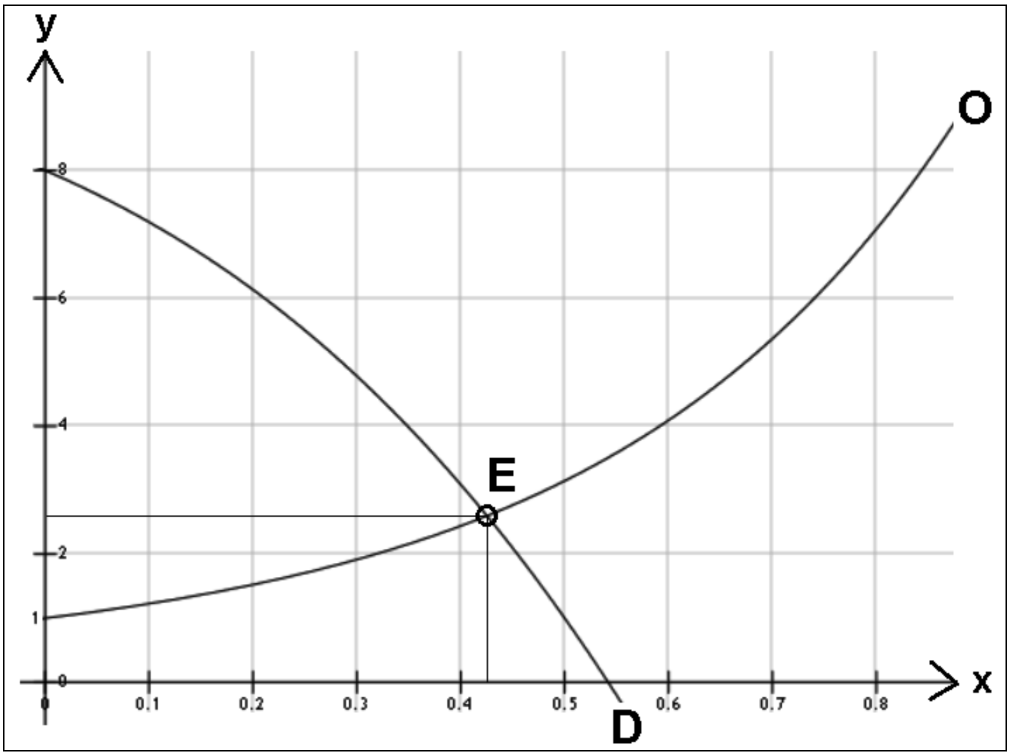


FIG. 4.16. Oferta, demanda y punto de equilibrio (IV).

Por último, la elasticidad de la función de demanda en el punto de equilibrio del mercado anteriormente hallado E(0’425, 2’61) vendrá dada por:

D $\Rightarrow$ y = $-8x^3 - 10x^2 - 7x + 8$; dy/dx = $-24x^2 - 20x - 7$;

$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{24x^2 + 20x + 7}$. Y la elasticidad de la función de demanda será:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{1}{24x^2 + 20x + 7} \times \frac{-8x^3 - 10x^2 - 7x + 8}{x} = -0'31 \in (-1,0),$$

por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

c) Los ingresos brutos anuales del productor vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 2'61 €/ud. $\times$ 425 ud./día $\times$ 240 días/año = 266.220 €/año.

CAPÍTULO 5

OTRAS APLICACIONES ECONÓMICAS DE LAS EDO

1. TEORÍA MACROECONÓMICA

La *macroeconomía* es la parte de la teoría económica que se encarga del estudio general de la economía, mediante el análisis de las variables económicas agregadas como, por ejemplo, el monto total de bienes y servicios producidos, el total de los ingresos, el nivel de empleo, de recursos productivos, la balanza de pagos, el tipo de cambio y el comportamiento general de los precios. La macroeconomía puede ser utilizada para analizar cuál es la mejor manera de influir en objetivos políticos como, por ejemplo, hacer crecer la economía, conseguir la estabilidad de precios, fomentar el empleo y la obtención de una balanza de pagos sostenible y equilibrada. La macroeconomía se centra en los fenómenos que afectan las variables indicadoras del nivel de vida de una sociedad. Además objetiviza más al analizar la situación económica de un país propio en el que vive, lo que permite entender los fenómenos que intervienen en ella. En contraposición, como ya se ha dicho, la microeconomía estudia el comportamiento económico de agentes individuales, como consumidores, empresas, trabajadores e inversores, y su interacción en mercados particulares.

Así pues, la macroeconomía estudia el funcionamiento global de una economía como un todo, sin hacer hincapié en el comportamiento específico de distintos sectores o agentes en cada mercado por separado. Es decir, el objeto principal de la macroeconomía es explicar la evolución de los agregados económicos, como el producto interior bruto, el nivel general de precios o la tasa de desempleo. Estos agregados son el resultado de agrupar los comportamientos de distintos agentes individuales en diferentes mercados.

Por ejemplo, al estudiar la evolución de los precios desde un punto de vista macroeconómico se realiza un promedio de todos los precios de los bienes y servicios que forman la economía, obteniendo el nivel general de precios, incluso aunque se sepa que cada uno de ellos puede estar teniendo comportamientos diferentes. Si se estudia el desempleo, se trata de obtener aquellas características comunes a las distintas industrias y definir las medidas que permitirían reducir la tasa de paro a lo largo del conjunto de la economía. O si se estudia el consumo, se analizará qué relación existe entre la cifra total del consumo de las familias del país con otras magnitudes como la renta o el tipo de interés, más que estudiar las decisiones individuales que realizan los consumidores cuando escogen entre distintos tipos de bienes en función de sus precios relativos.

A continuación se exponen algún ejercicio representativo de la aplicación de las ecuaciones diferenciales a esta importante rama de la Economía.

Ejemplo 1

Suponga que un país determinado tiene un crecimiento económico que es proporcional a su Producto Interno Bruto (PIB), es decir, que la tasa de crecimiento económico con el tiempo (dY/dt) resulta proporcional al producto (Y) respectivo en el tiempo (t). Si el factor de proporcionalidad fuera $\beta \in (0,1)$, se pide determinar:

a) La ecuación diferencial correspondiente.
b) Interprete el factor de proporcionalidad β.
c) Determinar la función de producto en el tiempo Y(t).
d) Se encontró por análisis econométrico a lo largo de 67 años (1945-2011), que la tasa de crecimiento potencial de PIB es del 2,91**%** anual, y que en el año 1945 el PIB fue de 4.314 millones de euros. Determinar el producto esperable para el año 2020, suponiendo una función de producto exponencial.
e) Muestre en un gráfico adecuado la función temporal de producto.

Solución:

Respectivamente:

a) El planteamiento proporcional con: Y = Y(t) será: $dY/dt \approx Y$.

En forma de igualdad con el factor de proporcionalidad:
$dY/dt = \beta \cdot Y$.

b) Despejando β de la anterior ecuación tenemos: $\beta = dY/(Y \cdot dt) = \Delta\%Y \cdot dt$. Esta ecuación nos dice que β representa un incremento porcentual en el producto (Y) por unidad de tiempo, es decir, que es la tasa de crecimiento por unidad de tiempo.

c) Para determinar la función de producto en el tiempo Y = Y(t) se parte de la ecuación: $dY/dt = \beta \cdot Y$, y separando variables, tenemos: $dY/Y = \beta \cdot dt$.

Integrando miembro a miembro mediante una cuadratura, tenemos que: $\int dY/Y=\beta\int dt$. La función de producción general, donde K y C son constantes, será:

$$\ln Y = \beta\cdot t + K.$$

Despejando Y, con $e^K = C = Y(0)$, donde Y(0) es el producto inicial en el tiempo cero (t = 0), resultará que:

$$Y(t) = e^{(\beta t+K)} = C\cdot e^{\beta t} = Y(0)\cdot e^{\beta t}.$$

Finalmente, la función de producción particular o trayectoria de tiempo de la producción será:

$$Y(t) = Y(0)\cdot e^{\beta t}.$$

d) Si β = 0,0291, con Y(1945) = Y(0) = 4.314 y el número de años será:

t = (2020-1945) = 75. Reemplazamos los datos en la ecuación correspondiente: $Y(t) = Y(0)\cdot e^{\beta t}$ y tenemos el siguiente producto para el año 2020:

$$Y(75) = 4.314\cdot e^{0,0291\cdot t} = 38.258,49 \times 10^6 \text{ €} .$$

Entonces, el PIB potencial del año 2020 posiblemente sea de

38.258,49 millones de euros, mientras que el correspondiente al año 2012 (t = 67), que es el representado en la siguiente figura, fue de 30.312’66 x 10^6 euros.

e) La representación gráfica de la función de producción en el tiempo es, en definitiva, la siguiente:

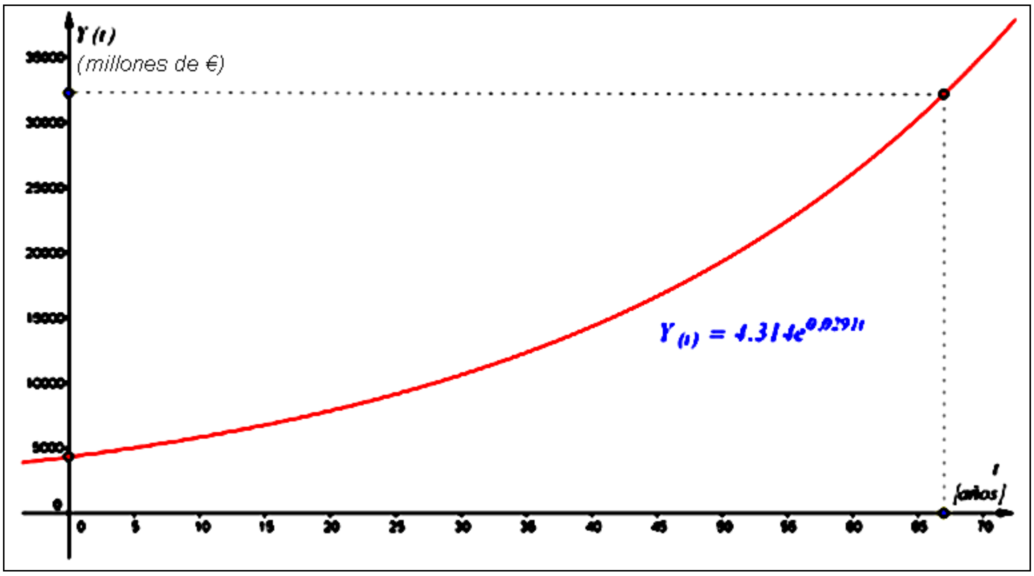


FIG. 5.1. Crecimiento del PIB (con detalle al año 2012).

2. FINANZAS

Las *finanzas* son las actividades relacionadas para el intercambio de distintos bienes de capital entre individuos, empresas o Estados y con la incertidumbre y el riesgo que estas actividades conllevan. Se le considera una de las ramas básicas de la economía. Se dedica al estudio de la obtención de capital para la inversión en bienes productivos y de las decisiones de inversión de los ahorradores. Está relacionada con las transacciones y con la administración del dinero. En ese marco, se estudia la obtención y gestión, por parte de una compañía, un individuo, o del propio Estado, de los fondos que necesita para cumplir sus objetivos, así como de los criterios con que dispone de sus activos; en otras palabras, lo relativo a la obtención y gestión del dinero, así como de otros valores o sucedáneos del dinero, como son los títulos, los bonos, etc. Según Bodie y Merton, las finanzas "estudian la manera en que los recursos escasos se asignan a través del tiempo". Las finanzas tratan, por lo tanto, de las condiciones y la oportunidad con que se consigue el capital, de los usos de éste, y los retornos que un inversionista obtiene de sus inversiones.

La *Matemática financiera* se puede dividir en dos grandes bloques de operaciones financieras que se dividen en operaciones simples, con un solo capital, y complejas, las denominadas *rentas*, que involucran corrientes de pagos, como es el caso de las cuotas de devolución de un préstamo. En ambos casos, la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias resulta evidente, como tendremos ocasión de comprobar en los ejercicios que siguen.

Ejemplo 1

Cuando nació su primer hijo, una pareja depositó en una cuenta de ahorros de largo plazo un capital de 5.000 € bajo un interés continuo al 8% anual. Se dejó que se acumularan los intereses devengados, por lo que se desea saber a cuánto ascenderá la cuenta en el decimoctavo cumpleaños del niño, o sea, al cumplir su mayoría de edad.

Solución:

El monto del dinero en una cuenta bajo interés compuesto crece proporcionalmente a la cantidad de dinero presente en la cuenta en un momento determinado. De tal manera que la ecuación diferencial asociada al hecho en cuestión está dada por la expresión: $\frac{dA}{dt} = k \cdot A$ (1). En estos casos, la constante de proporcionalidad k es el rédito o interés porcentual. Esto es: $8\% \leftrightarrow 8 \times \frac{1}{100} = 0'08.$ Por lo que k = 0’08. (2)

Substituyendo (2) en (1), se obtiene: $\frac{dA}{dt} = 0'08{\cdot}A$,

$\Rightarrow \frac{dA}{A} = 0'08{\cdot}dt$ (separando variables) $\Rightarrow \int \frac{dA}{A} = \int 0'08{\cdot}dt$ (aplicando la integral),

$\Rightarrow$ ln A = 0'08·t + c_1 (integrando)

$\Rightarrow A = e^{0'08\cdot t + c_1} \Leftrightarrow A = e^{c_1} e^{0'08\cdot t} \Leftrightarrow A = c{\cdot}e^{0'08\cdot t}$ (habiendo hecho: $e^{c}{}_1 = c$) (3).

En el momento de abrir la cuenta, los datos son: t = 0, A = 5.000 € (4). Substituyendo ahora (4) en (3), se obtiene que:

$5.000 = c\cdot e^{0'08(0)} \Leftrightarrow 5.000 = c\cdot e^{0} \Leftrightarrow 5.000$, o sea: c = 5.000. (5)

Ahora, substituyendo (5) en (3), se obtiene: $A = 5.000\cdot e^{0'08\cdot t}$ (6).

Como necesitamos averiguar el monto del dinero A en el momento en que el muchacho cumple 18 años de edad, debemos substituir t = 18 años en la expresión anterior (6), con lo que:

$A = 5.000\cdot e^{0'08(18)} \Leftrightarrow A = 5.000\cdot e^{1'44} \Leftrightarrow$ y entonces:

$A \approx 5.000(4'220695817) \approx 21.103$ € .

De resolverse este mismo problema por medio de la matemática financiera, con un período anual de capitalización de los intereses devengados, se tendrá que:

$A = 5.000\ (1 + 0'08)^{18} = 5.000 \times 3'996015 = 19.980$ € .

Si el período de capitalización es mensual, sucede que:

$A = 5.000\ (1 + \frac{0'08}{12})^{18\cdot 12} = 5.000 \times 1'006667^{216} = 21.003$ € ,

y si el período de capitalización es diario, sucedería que (teniendo en cuenta que el año natural tiene una duración media de 365'25 días, considerando la parte alícuota proporcional de los años bisiestos):

$A = 5.000\ (1 + \frac{0'08}{365'25})^{18\cdot 365'25} = 5.000 \times 1'000219^{6.574'5} = 21.096$ € ,

…, y así sucesivamente, convergiendo hacia la cantidad anteriormente obtenida de 21.103 € . Si la capitalización de los intereses pasa a ser continua (en vez de ser discreta en el tiempo), tal como plantea el presente problema en su enunciado, se tendrá lo siguiente:

$\lim\limits_{n\to\infty} A = \lim\limits_{n\to\infty} [\ 5.000(1+\frac{0'08}{n})^{18\cdot n}\ ]$ = (por aplicación de la fórmula de Euler) =

$= 5.000 \times e^{\lim\limits_{n\to\infty}[18\cdot n\,(1+\frac{0'08}{n}-1)]} = 5.000 \times e^{1'44} = 5.000 \times 4'220696 = 21.103$ € ,

que coincide plenamente con el resultado ofrecido por la resolución de la ecuación diferencial, c.s.q.d.

Respuesta: cuando el muchacho cumpla sus 18 años de edad, el saldo de la cuenta de ahorro en cuestión ascenderá a 21.103 € , aproximadamente.

Ejemplo 2

Una persona deposita 20.000 € en una cuenta de ahorro que paga el 5 por ciento de interés anual, compuesto en forma continua. Encuentre: a) la cantidad existente en la cuenta al cabo de tres años, y b) el tiempo requerido para que la cuenta duplique su saldo, asumiendo que no hay retiradas parciales ni aportaciones adicionales.

Solución:

a) Aquí, N(t) indica el balance en la cuenta en cualquier tiempo t. Inicialmente, N(0) = 20.000 € . El balance de la cuenta crece por medio de los pagos de intereses, que son proporcionales a la cantidad de dinero existente en la cuenta. La constante de proporcionalidad es la tasa o tipo de interés con que se remunera. En este caso, k = 0'05 y la ecuación se convierte en:

$$\frac{dN}{dt} - 0'05\cdot N = 0\,.$$

Esta ecuación diferencial de primer orden es tanto lineal como separable. Su solución es, a partir de la ecuación característica: λ - 0'05 = 0, de donde: λ = 0'05, y entonces: $N(t) = c\cdot e^{0'05\cdot t}$.

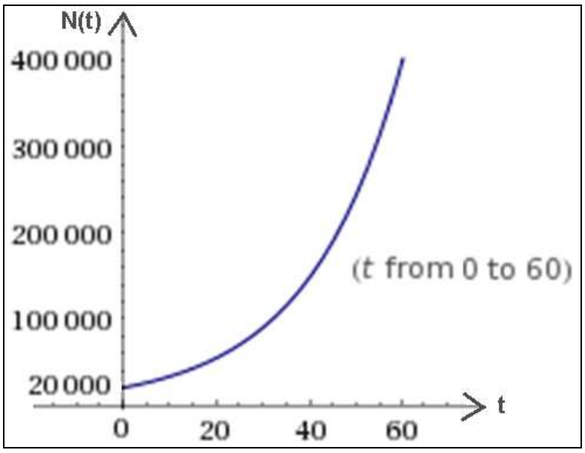
En t = 0, N(0) = 20.000 € , que cuando se substituye da:

$$20.000 = c\cdot e^{0'05(0)} = c.$$

Con este valor de c, la expresión anterior se convierte en:

$$N(t) = 20.000\cdot e^{0'05\cdot t}.$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t $\rightarrow \infty$ también N(t) $\rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{N}{t} = \lim_{x \to +\infty} \frac{20.000 \cdot e^{0'05 \cdot t}}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Esta ecuación es una integral particular de la EDO anterior que nos da el saldo expresado en euros de la cuenta de ahorro en un determinado tiempo t.

Substituyendo t = 3 encontramos que el balance, luego de tres años, es el siguiente:

$$N(3) = 20.000e^{0'05(3)} = 20.000(1'161834) = \boxed{23.236'68\ €\ .}$$

b) Buscamos ahora el tiempo t en el que el balance sea:

N(t) = 40.000 € . Substituyendo estos valores y resolviendo para t, obtenemos que:

$40.000 = 20.000 \cdot e^{0'05 \cdot t}$; $2 = e^{0'05 \cdot t}$; $\ln|2| = 0'05 \cdot t$; y entonces:

$$\boxed{t = \frac{1}{0'05} \ln|2| = 13'86 \text{ años}}\ .$$

Ejemplo 3

Una persona deposita 5.000 € en una cuenta de ahorro que acumula interés compuesto de manera continua. Asumiendo que no hay extracciones ni depósitos adicionales, ¿qué saldo habrá en la cuenta después de siete años si la tasa de interés es del 8’50 por ciento constante durante los primeros cuatro años y del 9’25 por ciento durante los tres años subsiguientes?

Solución:

Aquí, N(t) denota el balance de la cuenta en un tiempo t. Inicialmente N(0) = 5.000 € . Para los primeros cuatro años, se tiene una constante de proporcionalidad (tipo de interés) de k = 0'085 y la ecuación se convierte en:

$$\frac{dN}{dt} - 0'085 \cdot N = 0 .$$

Esta ecuación diferencial de primer orden es tanto lineal como separable. Su solución es, a partir de la ecuación característica: λ - 0'085 = 0, de donde: λ = 0'085, y entonces, su solución es:

$$N(t) = c \cdot e^{0'085 \cdot t} \qquad (\forall t / 0 \leq t \leq 4 \text{ años}).$$

En t = 0, N(0) = 5.000 € , que cuando se substituye da:

$$5.000 = c \cdot e^{0'085(0)} = c,$$

y se convierte en la integral particular: $N(t) = 5.000 \cdot e^{0'085 \cdot t}$, $\forall$ t / (0 ≤ t ≤ 4).

Substituyendo t = 4, encontramos que el saldo luego de los cuatro primeros años es:

$$N(t) = 5.000 \cdot e^{0'085(4)} = 5.000(1'404948) = 7.024'74 \text{ €} .$$

Esta cantidad también representa el saldo existente en la cuenta para el comienzo del período de los tres últimos años. En éstos, la tasa de interés es del 9'25 por ciento, y la ecuación se convierte ahora en:

$$\frac{dN}{dt} - 0'0925 \cdot N = 0 , \ \forall t / (0 \leq t \leq 4).$$

Su solución general es:

$$N(t) = c \cdot e^{0'0925 \cdot t} , \ \forall t / (4 \leq t \leq 7).$$

Para t = 4 años, N(4) = 7.024'74 € , que al ser substituido da:

$$7.024'74 = c \cdot e^{0'0925(4)} = c(1'447735) \quad \text{o bien} \quad c = 4.852'23,$$

y se convierte en la solución particular:

$$N(t) = 4.852'23 e^{0'0925 \cdot t} , \ \forall t / (4 \leq t \leq 7)$$

Substituyendo ahora t = 7 encontramos que el saldo después de 7 años es el siguiente:

$$N(7) = 4.852'23 \cdot e^{0'0925(7)} = 4.852'23(1'910758) = \boxed{9.271'44 \text{ € }.}$$

Ejemplo 4

¿Qué tasa de interés constante se requiere si el depósito inicial colocado en una cuenta de ahorro que acumula interés compuesto continuamente debe duplicar su valor en seis años?

Solución:

El balance N(t) en la cuenta en cualquier tiempo t está gobernado por la expresión:

$$\frac{dN}{dt} - k \cdot N = 0 \, .$$

Esta ecuación diferencial de primer orden es tanto lineal como separable. Su solución es, a partir de la ecuación característica: λ - k = 0, de donde: λ = k, y entonces se obtiene como solución: $N(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$.

No nos dan en este caso una cantidad por el depósito inicial, de modo que lo indicamos como N_0. En t = 0, N(0) = N_0, que cuando se substituye da:

$$N_0 = c \cdot e^{k(0)} = c, \text{ y se convierte en: } N(t) = N_0 e^{k \cdot t}.$$

Buscamos el valor de k para el cual N = $2N_0$ cuando t = 6. Substituyendo estos valores en la ecuación y resolviendo para k, encontramos que:

$$2N_0 = N_0 e^{k(6)} \; ; \quad e^{6k} = 2 \; ; \quad 6k = \ln|2| \; ; \quad k = \frac{1}{6} \ln|2| = 0'1155 \, .$$

Respuesta: Así pues, se requiere una tasa de interés remunerador del 11'55 por ciento.

Ejemplo 5

Se ha realizado una inversión de cierto capital que hace que éste experimente un crecimiento exponencial. Al cabo de un año, el capital asciende a 10.087 € y a los dos años es de 10.711 € . ¿Cuál fue el tipo de interés remunerador y la inversión inicial?

Solución:

Si denotamos por y(t) el capital existente en un instante t, se cumple que: $y(t) = C\cdot e^{kt}$, donde C y k son constantes positivas que provienen de considerar la ecuación diferencial de variables separadas:

$$y'(t) = k\cdot y(t),\text{ o sea: } \frac{dy}{dt} = k\cdot y;\ \frac{dy}{y} = k\cdot dt;\ \ln y = k\cdot t + C_1,\text{ de donde:}$$

$$y(t) = e^{k\cdot t + C_1} = C\cdot e^{k\cdot t},\text{ habiendo hecho } C = e^{C_1}.$$

Tomemos como unidad de tiempo el año y fijemos t = 0 en el instante inicial (en que se realizó la inversión). Si transcurrido un año el capital era de 10.087 € , y a los dos años es de 10.711 € , se cumple que:

$$y(1) = 10.087\text{ € e } y(2) = 10.711\text{ € .}$$

Con estos datos ya podemos calcular el valor de las constantes C y k. En particular, el capital invertido inicialmente es y(0) = C. O sea:

$$\begin{cases} y(1) = 10.087 = C\cdot e^{k} \quad (1) \\ y(2) = 10.711 = C\cdot e^{2k} \quad (2) \end{cases}$$

$\frac{10.711}{10.087} = \frac{C\cdot e^{2k}}{C\cdot e^{k}} = e^{k}$, de donde se deduce que: k = ln (10.711/10.087) ≈ 0'06, que corresponde a un tipo de interés continuo del 6% anual.

Conocido el valor de k lo substituimos en la expresión (1) para encontrar el valor de C, que constituye la inversión inicial, esto es:

$10.087 = C\cdot e^{0'06}$, y resultará: $\boxed{C = 10.087\cdot e^{-0'06} = 9.500\text{ €}}$.

CAPÍTULO 6

RESOLUCIÓN DE LAS EDO POR SERIES DE POTENCIAS Y OPERADORES

1. SOLUCIONES OBTENIDAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

1.1. INTRODUCCIÓN

Podemos considerar como ecuaciones diferenciales clásicas las de Bessel[1] y las de Legendre[2], que poseen gran belleza estética y

[1] The Bessel functions, first defined by the mathematician Daniel Bernouilli and generalized by Friedrich Bessel, are canonical solutions $y(x)$ of Bessel's differential equation:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0$$

for an arbitrary real or complex number α (the order of the Bessel function); the most common and important cases are for α an integer or half-integer. Although α and −α produce the same differential equation, it is conventional to define different Bessel functions for these two orders (e.g., so that the Bessel functions are mostly smooth functions of α). Bessel functions are also known as cylinder functions or cylindrical harmonics because they are found in the solution to Laplace's equation in cylindrical coordinates. Bessel's equation arises when finding separable solutions to Laplace's equation and the Helmholtz equation in cylindrical or spherical coordinates. Bessel functions are therefore especially important for many problems of wave propagation and static potentials. In solving problems in cylindrical coordinate systems, one obtains Bessel functions of integer order ($\alpha = n$); in spherical problems, one obtains half-integer orders ($\alpha = n + ½$). (FRANQUET, 2013).

[2] Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Most of his work was brought to perfection by others: his work on roots of polynomials inspired Galois theory; Abel's work on elliptic functions was built on Legendre's; some of Gauss' work in statistics and number theory completed that of Legendre. He developed the least squares method, which has broad application in linear regression, signal processing, statistics, and curve fitting; this was published in 1806 as an appendix to his book on the paths of comets. Today, the term "least squares method" is used as a direct translation from the French "méthode des moindres carrés". In 1830 he gave a proof of Fermat's last theorem for exponent ***n* = 5**, which was also proven by Dirichlet in 1828. In number theory, he conjectured the quadratic reciprocity law, subsequently proved by Gauss; in connection to this, the Legendre symbol is named after him. He also did pioneering work on the distribution of primes, and on the application of analysis to number theory. His 1796 conjecture of the Prime number theorem was rigorously proved by Hadamard and de la Vallée-Poussin in 1898. Legendre did an impressive amount of work on elliptic functions, including the classification of elliptic integrals, but it took Abel's stroke of genius to study the inverses of Jacobi's functions and solve the problem completely. He is known for the Legendre transformation, which is used to go from the Lagrangian to the Hamiltonian formulation of classical mechanics. In thermodynamics it is also used to obtain the enthalpy and the Helmholtz and Gibbs (free) energies from the internal energy. He is also the name giver of the Legendre polynomials, solutions to Legendre's differential equation, which occur frequently in physics and engineering applications, *e.g.* electrostatics. Legendre is best known as the author of *Éléments de géométrie*, which was published in 1794 and was the leading elementary text on the topic for around 100 years. This text greatly rearranged and simplified many of the propositions from Euclid's Elements to create a more effective textbook. (FRANQUET, 2013).

numerosas aplicaciones físicas, que aparecen, respectivamente, en la resolución del problema de Dirichlet[3] en coordenadas cilíndricas y esféricas, y cuyo tratamiento no consideramos de especial interés en este curso introductorio, objeto del presente libro, por lo que obviaremos aquí su presentación pormenorizada.

Se ha visto en apartados anteriores cómo resolver algunas ecuaciones lineales de orden *n*: las de coeficientes constantes y algunas de coeficientes variables, como las de Euler-Cauchy o aquellas de las que se conoce una solución particular de la correspondiente ecuación homogénea.

No obstante, en general, no se ha contemplado cómo resolver las ecuaciones lineales con coeficientes variables, algunas de las cuales pueden aparecer ligadas a importantes problemas de la Economía, como por ejemplo las ecuaciones de Legendre, Hermite, Airy o Stokes, Laguerre[4], Tchebyshev[5], Bessel, etc. que son de coeficientes polinómicos y que podemos ver conjuntamente sintetizadas en el siguiente cuadro:

[3] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, (born Feb. 13, 1805, Düren, French Empire [now in Germany]—died May 5, 1859, Göttingen, Hanover), German mathematician who made valuable contributions to number theory, analysis, and mechanics. He taught at the universities of Breslau (1827) and Berlin (1828–55) and in 1855 succeeded Carl Friedrich Gauss at the University of Göttingen. Dirichlet made notable contributions still associated with his name in many fields of mathematics. In number theory he proved the existence of an infinite number of primes in any arithmetic series $a + b, 2a + b, 3a + b, \ldots, na + b$, in which a and b are not divisible by one another. He developed the general theory of units in algebraic number theory. His *Vorlesungen über Zahlentheorie* (1863; "Lectures Concerning Number Theory"), with later addenda, contains some material important to the theory of ideals. In 1837 Dirichlet proposed the modern concept of a function $y = f(x)$ in which for every x, there is associated with it a unique y. In mechanics he investigated the equilibrium of systems and potential theory, which led him to the Dirichlet problem concerning harmonic functions with prescribed boundary values. His *Gesammelte Werke* (1889, 1897; "Collected Works") was published in two volumes. (FRANQUET, 2013).

[4] The sequence of Edmond Laguerre (1834-1886) polynomials is a Sheffer sequence. The rook polynomials in combinatorics are more or less the same as Laguerre polynomials, up to elementary changes of variables. The Laguerre polynomials arise in quantum mechanics, in the radial part of the solution of the Schrödinger equation for a one-electron atom. Physicists often use a definition for the Laguerre polynomials that is larger, by a factor of $n!$, than the definition used here. (Furthermore, various physicist use somewhat different definitions of the so-called associated Laguerre polynomials, for instance in [Modern Quantum mechanics by J.J. Sakurai] the definition is different than the one found below. A comparison of notations can be found in [Introductory quantum mechanics by R.L. Liboff].). (FRANQUET, 2013).

[5] Pafnuty Tchebyshev (1821-1894) studied at the college level at Moscow University, where he earned his bachelor's degree in 1841. At Moscow University, Tchebyshev was a graduate student of Nikolai Brashman. After Tchebyshev became a professor of mathematics in Moscow himself, his two most illustrious graduate students were Andrei Andreyevich Markov (the elder) and Alexandr Lyapunov. Tchebyshev is considered to be a founding father of Russian mathematics. Among his well-known students were the prolific mathematicians Dmitry Grave, Aleksandr Korkin, Aleksandr Lyapunov, and Andrei Markov. According to the Mathematics Genealogy Project, Tchebyshev has 7.483 mathematical "descendants" as of 2010. The lunar crater Tchebyshev and the asteroid 2010 Tchebyshev were named in his honour. (FRANQUET, 2013).

TIPO	ECUACIÓN DIFERENCIAL
Tchebyshev	$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$
Hermite	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Laguerre	$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$
Legendre	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$
Bessel	$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$
Airy / Stokes	$y'' - xy = 0$

Además, las ecuaciones hasta ahora vistas, generalmente tienen soluciones expresables en términos de un número finito de funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas, etc., o inversas de éstas). Otras veces, aún sabiendo resolver la ecuación, había que expresar la solución por medio de una integral.

Pero, en general, las soluciones no pueden expresarse tan fácilmente. Es necesario, por tanto, buscar otros modos de expresar las soluciones de ecuaciones lineales de 2º orden, que propicien a su vez nuevos métodos de resolución de las mismas.

La aplicabilidad de este método a la resolución de las EDO de cualquier orden no resulta en absoluto despreciable, como tendremos ocasión de comprobar seguidamente. En el presente capítulo de nuestro libro se estudiará un método de resolución basado en la representación de soluciones mediante el método de las series de potencias que puede revestir gran utilidad en ciertos casos como tendremos ocasión de comprobar mediante la resolución de algunos ejemplos que juzgamos suficientemente representativos.

1.2. SOLUCIÓN EN EL ENTORNO DE UN PUNTO ORDINARIO

1.2.1. Definiciones

Se va a considerar, a continuación, el caso de la ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden siguiente:

$$\boxed{P(x)\cdot y'' + Q(x)\cdot y' + R(x)\cdot y = 0} \qquad [1]$$

, o bien expresándola en forma canónica:

$$\boxed{\boxed{y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = 0}} \qquad [1']$$

Un punto cualquiera x_0 se llama *punto ordinario* de [1] o [1´] si las funciones: $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ son *analíticas* en x_0, es decir, si p(x) y q(x) tienen desarrollos en serie de Taylor[6] en torno a x_0 con radios respectivos de convergencia R_1 y R_2 no nulos. Si cualesquiera de estas funciones no es analítica en x_0, entonces x_0 es un *punto singular*. Una función cualquiera f(x) es *analítica* en x_0 si su serie de Taylor alrededor de x_0, a saber:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n}{n!}$$

converge a f(x) en alguna vecindad de x_0. Los polinomios, las funciones trigonométricas directas sen x y cos x, así como la exponencial e^x, son analíticos en cualquier lugar, con lo que también lo son las sumas, diferencias y productos de estas funciones. Los cocientes de cualesquiera de estas dos funciones son analíticos en todos los puntos donde el denominador es diferente de cero.

Si P(x), Q(x), R(x) son polinomios, entonces x_0 es punto ordinario de [1] si y solo si $P(x_0) \neq 0$ (siendo [1] no simplificable). Si x_0 no es punto ordinario, como ya se ha visto, se llama *punto singular* de la ecuación [1] ó [1´].

Según el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, la simple continuidad de p(*x*) y q(*x*) en un entorno *I* de un punto x_0, es suficiente como para garantizar la existencia de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación [1´] en dicho entorno, así como para garantizar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial definido por [1´] y las condiciones: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = b_0$, con $x_0 \in I$.

Pero si además es x_0 un punto ordinario de [1] ó [1´], las p(*x*) y q(*x*) no solo son continuas en *I*, sino analíticas. Y cabe preguntarse entonces si las soluciones de tal ecuación heredarán dicha propiedad. Por tanto, si x_0 es un punto ordinario de [1], surgen inmediatamente las preguntas siguientes:

[6] A **Taylor series** is a representation of a function as an infinite sum of terms that are calculated from the values of the function's derivatives at a single point. The concept of a Taylor series was formally introduced by the English mathematician Brook Taylor (1685-1731) in 1715. If the Taylor series is centered at zero, then that series is also called a **Maclaurin series**, named after the Scottish mathematician Colin Maclaurin (1698-1746), who made extensive use of this special case of Taylor series in the 18th century. It is common practice to approximate a function by using a finite number of terms of its Taylor series. Taylor's theorem gives quantitative estimates on the error in this approximation. Any finite number of initial terms of the Taylor series of a function is called a Taylor polynomial. The Taylor series of a function is the limit of that function's Taylor polynomials, provided that the limit exists. A function may not be equal to its Taylor series, even if its Taylor series converges at every point. A function that is equal to its Taylor series in an open interval (or a disc in the complex plane) is known as an analytic function. (FRANQUET, 2013).

- *¿Existen soluciones analíticas de [1] en un entorno de x_0, es decir, soluciones de la forma:*

$$\boxed{y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...} \quad , \quad [2]$$

Y en caso afirmativo:

- *¿Cómo se obtienen los coeficientes a_n?*
- *¿Dónde converge la serie [2]?*

Es importante, sin duda, poder responder adecuadamente a estas preguntas, pues sería absurdo intentar buscar soluciones de la forma [2], si no existen. Si existen en *I*, pueden además derivarse término a término en *I*.

Las respuestas a estas preguntas las da el siguiente teorema, que será enunciado, pero no demostrado, por razones obvias de espacio.

1.2.2. Teorema

"Si x_0 es un punto ordinario de [1] (ó [1']) entonces la solución general de [1] en un cierto entorno de x_0 puede escribirse en la forma [2] y a su vez :

$$\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 \cdot y_1(x) + a_1 \cdot y_2(x)},$$

siendo a_0 y a_1 constantes arbitrarias e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ analíticas en un entorno I de x_0, y linealmente independientes en I".

El radio de convergencia de las series $y_1(x)$ e $y_2(x)$ es, al menos, tan grande como el mínimo de los radios de convergencia de los desarrollos en serie de p(x) y q(x) en torno a x_0 (es decir, al menos igual a la distancia de x_0 al punto singular más próximo de la ecuación [1], ya sea dicho punto real o complejo).

Los coeficientes a_n de la serie [2] se obtienen en términos de a_0 y a_1, substituyendo la serie genérica $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ en la expresión [1], (así como los desarrollos de p(x) y q(x) si P(x), Q(x), R(x) no son polinomios) y procediendo por el método de los coeficientes indeterminados.

1.2.3. Observaciones

a) La serie solución puede converger con radio mayor que el indicado en el teorema.

b) Si el punto ordinario es $x_0 \neq 0$, pueden simplificarse las notaciones trasladando x_0 al origen de coordenadas, mediante el cambio de variable: $x - x_0 = t$. La solución de la nueva ED resultante se puede obtener por el método de las series de potencias alrededor de t = 0. Entonces, la solución de la ecuación original se obtiene fácilmente regresando a la variable original substituyendo la ecuación de transformación del cambio de variables antedicho.

c) Según el teorema de existencia y unicidad, cada solución está determinada de manera única por los valores $y(x_0)$ e $y'(x_0)$, es decir, por a_0 y a_1. Por eso, todos los coeficientes se obtienen en términos de a_0 y a_1.

d) El método para resolver una ecuación completa del tipo: $y'' + p(x)y' + q(x)\cdot y = h(x)$, siendo x_0 punto ordinario y h(x) analítica en x_0, es análogo. En este caso, también hay que desarrollar h(x) en serie de potencias en torno a x_0, antes de proceder por coeficientes indeterminados. También podría resolverse en primer lugar la ecuación homogénea y actuar luego por el método de variación de constantes, o bien por reducción de orden.

e) Es claro que podría usarse un método semejante para la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

1.3. ECUACIÓN Y POLINOMIOS DE LEGENDRE

1.3.1. Definiciones

La denominada “ecuación de Legendre”, de parámetro m ≥ 0, es:

$$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + m\cdot(m+1)y = 0} \qquad [3]$$

Se trata de hallar soluciones en serie de potencias de x, es decir en torno al punto $x_0 = 0$.

Sucede que: $\begin{cases} p(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2} \\ q(x) = \dfrac{m(m+1)}{1-x^2} \end{cases}$ Ambas analíticas en $x_0 = 0$, con radio de convergencia de los respectivos desarrollos: $R_1 = R_2 = 1$.

Luego $x_0 = 0$ es un punto ordinario, existiendo solución en serie de potencias de *x*, válida, al menos para $|x| < 1$.

Sea ahora $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Substituyendo en la mencionada ecuación de Legendre, se tiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} m\cdot(m+1)a_n x^n \equiv 0.$$

Habrán de ser nulos los coeficientes de todas las potencias de *x*, o sea:

x^0 : $\quad 2\cdot 1\cdot a_2 + m(m+1)a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\dfrac{m(m+1)}{2\cdot 1}a_0$

x^1 : $\quad 3\cdot 2\cdot a_3 - 2a_1 + m(m+1)a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\dfrac{m(m+1)-2}{3\cdot 2}a_1 = -\dfrac{(m-1)(m+2)}{3!}a_1$

....

x^n : $\quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2n\cdot a_n + m(m+1)a_n = 0$

$$a_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \Rightarrow \boxed{a_n = -\frac{(m-n+2)(m+n-1)}{n(n-1)}a_{n-2}\ ,\forall n \geq 2}$$

Luego resultará la integral general de la EDO:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1 - \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{(m-2)m(m+1)(m+3)}{4!}x^4 - \ldots\right] + \\ &\quad + a_1\left[x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 - \ldots\right], \forall |x| < 1 \end{aligned}}$$

, es decir, se tendrá que: $y(x) = a_0\cdot y_1(x) + a_1\cdot y_2(x)$.

Si *m* = 0, 1, 2, ..., una de las dos series es un polinomio de grado *m*. Dichos polinomios $p_n(x)$ son, respectivamente:

$p_0 = 1$; $p_1(x) = x$; $p_2(x) = 1 - 3x^2$; $p_3(x) = x - \dfrac{5}{3}x^3$; ... , y así sucesivamente.

Pues bien, se llama *polinomio de Legendre de orden m* y se designa con la notación $P_m(x)$, a la solución polinómica de la ecuación de Legendre de parámetro *m*, o sea, el múltiplo de $p_n(x)$, tal que $P_m(1) = 1$.

Será, pues:

$P_0(x) = 1;$
$P_1(x) = x;$
$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2};$
$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x;$
…………………….... ;

y así sucesivamente.

1.3.2. Algunas propiedades

Son las siguientes:

- Los polinomios de Legendre pueden darse mediante la denominada *fórmula de Rodrigues:*

$$\boxed{P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n}$$

, en la que aparece el doble factorial: $(2n)!! = 2^n \cdot n!$

- O bien mediante una *función generadora*, debida a Legendre, a saber:

$$\boxed{\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-1/2} = P_0(x) + P_1(x)\cdot t + P_2(x)\cdot t^2 + \ldots}$$

También mediante *fórmulas de recurrencia* del tipo siguiente*:*

$$\boxed{\begin{array}{l} P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x\cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \\ P'_{n+1} - P'_{n-1} = 2(n+1)\cdot P_n \end{array}}$$

- Cumplen la *relación de ortogonalidad:*

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)\cdot dx = \begin{cases} 0 & ,\forall m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & ,\forall m = n \end{cases}} \quad [4]$$

La ecuación de Legendre aparece, en fin, en varios problemas de la Física dotados de simetría esférica y resulta útil, así mismo, en algunas aplicaciones económicas.

1.4. ECUACIÓN Y POLINOMIOS DE HERMITE

1.4.1. Definiciones

La denominada "ecuación de Hermite"[7] es la siguiente:

$$\boxed{y'' - 2x\,y' + 2\lambda\,y = 0} \qquad [5]$$

Aparece esta ecuación, por ejemplo, en la mecánica cuántica, a partir de la ecuación de Schrödinger[8] para un oscilador armónico.

Se trata ahora de obtener su solución por el método de las series potenciales, en torno al punto x_0= 0. El x_0 = 0 es un punto ordinario de la ecuación [5], pues p(*x*) = -2*x*, y q(*x*) = 2λ son analíticas en *x* = 0. Además, los radios de convergencia de los respectivos desarrollos son ambos infinitos. Luego existe solución de la ecuación de Hermite [5], de la forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, que resulta válida para todo *x* real. Substituyendo en la ecuación [5] de Hermite, se obtiene que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot a_n x^n - 2\lambda\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0, \quad \forall x \in \{\Re\}$$

Luego, se tendrá que:

Coeficiente de 1: $2a_2 + 2\lambda a_0 = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = -\lambda a_0$

…………………………………………………………………..

Coeficiente de x^{n-2}: $n\cdot(n-1)\cdot a_n - 2(n-2)\cdot a_{n-2} + 2\lambda\cdot a_n = 0$

Relación de recurrencia: $\boxed{a_n = \dfrac{-2(\lambda + 2 - n)\cdot a_{n-2}}{n\cdot(n-1)}} \quad \forall n \geq 2$

---

[7] Charles Hermite (1822-1901) made friends with important mathematicians at this time and frequently visited Joseph Bertrand. On a personal note this was highly significant for he would marry Joseph Bertrand's sister. More significantly from a mathematical point of view he began corresponding with Jacobi and, despite not shining in his formal education, he was already producing research which was ranking as a leading world-class mathematician. The letters he exchanged with Jacobi show that Hermite had discovered some differential equations satisfied by theta-functions and he was using Fourier series to study them. He had found general solutions to the equations in terms of theta-functions. Hermite may have still been an undergraduate but it is likely that his ideas from around 1843 helped Liouville to his important 1844 results which include the result now known as Liouville's theorem. (FRANQUET, 2013).

[8] The Schrödinger (1887-1961) equation is the fundamental equation of physics for describing quantum mechanical behaviour. It is also often called the Schrödinger wave equation, and is a partial differential equation that describes how the wave function of a physical system evolves over time. Viewing quantum mechanical systems as solutions to the Schrödinger equation is sometimes known as the Schrödinger picture, as distinguished from the matrix mechanical viewpoint, sometimes known as the Heisenberg picture. (FRANQUET, 2013).

Luego también:

$$\boxed{\begin{aligned}y(x) = a_0\left[1 - \frac{2\lambda}{2!}x^2 + \frac{2^2\lambda(\lambda-2)}{4!}x^4 - \frac{2^3\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)}{6!}x^6 + \dots\right] + \\ + a_1\left[x - \frac{2(\lambda-1)}{3!}x^3 + \frac{2^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{5!}x^5 - \frac{2^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{7!}x^7 + \dots\right], \forall x\end{aligned}}$$

, es decir, se tendrá, como en el caso anterior, que:

$$y(x) = a_0 \cdot y_1(x) + a_1 \cdot y_2(x)\,.$$

Esta solución general de la ecuación de Hermite también puede expresarse como:

$$y(x) = c_1\, H_m(x) + c_2\; {}_1F_1\left(-\frac{m}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,x^2\right)$$

, siendo m = λ, y: ${}_1F_1\left(-\frac{\lambda}{2};\frac{1}{2};x^2\right)$ la conocida como función hipergeométrica confluente de Kummer[9]. Para λ = 0,1, 2, ..., una de las dos series es un polinomio. Dichos polinomios $h_n(x)$, para los valores:
λ = *n* = 0,1, 2,..., son, respectivamente, los siguientes:

$$h_0(x) = 1,\ h_1(x) = x,\ h_2(x) = 1 - 2x^2,\ h_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3, \dots,$$ y así sucesivamente.

Se *llama polinomio de Hermite de grado n*, y se designa por <u>$H_n(x)$</u>, a la solución polinómica de la ecuación de Hermite de parámetro λ = *n* (o sea, el múltiplo de $h_n(x)$), cuyo coeficiente de x^n es precisamente 2^n. Será, por tanto:

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2,\ H_3(x) = 8x^3 - 12x, \dots,$$

y así sucesivamente.

---

[9] Ernst Eduard Kummer (1810-1893) made several contributions to mathematics in different areas; he codified some of the relations between different hypergeometric series, known as contiguity relations. The Kummer surface results from taking the quotient of a two-dimensional abelian variety by the cyclic group {1, −1} (an early orbifold: it has 16 singular points, and its geometry was intensively studied in the nineteenth century). See also Kummer's function, Kummer ring and Kummer sum. Kummer also proved Fermat's last theorem for a considerable class of prime exponents (see regular prime, ideal class group). His methods were closer, perhaps, to p-adic ones than to ideal theory as understood later, though the term 'ideal' arose here. He studied what were later called Kummer extensions of fields: that is, extensions generated by adjoining an *n*th root to a field already containing a primitive *n*th root of unity. This is a significant extension of the theory of quadratic extensions, and the genus theory of quadratic forms (linked to the 2-torsion of the class group). As such, it is still foundational for class field theory. (FRANQUET, 2013).

1.4.2. Algunas propiedades

- Los polinomios de Hermite pueden darse también mediante la denominada *fórmula de Rodrigues:*

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}}$$

- También por medio de la *función generadora*, esto es:

$$\boxed{e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n}$$

- O bien mediante las *fórmulas de recurrencia:*

$$\boxed{\begin{array}{l} H_{n+1}(x) = 2x \cdot H_n(x) - 2n \cdot H_{n-1}(x) \\ H_n'(x) = 2n \cdot H_{n-1}(x) \end{array}}$$

- Cumplen la *relación de ortogonalidad*, a saber*:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot H_m(x) \cdot H_n(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & ,\forall m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} = \pi^{\frac{1}{2}} \cdot (2n)!!, & \forall m = n \end{cases}}$$

1.5. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

La aplicabilidad de este método de las series de potencias a la resolución de las EDO económicas no resulta en absoluto despreciable. Veamos, a continuación, algunos ejercicios representativos de ello después de haber tenido en cuenta la teoría correspondiente en los anteriores epígrafes.

Ejemplo 1

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dy}{dx} - x^2 y = 0$. Se pide calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 2'00 € , no existe oferta alguna de dicho producto.

Solución:

Se trata, en definitiva, de resolver la EDO: $y' - x^2 y = 0$, sujeta a la condición: y(0) = 2, que en este caso vamos a resolver por aplicación de las series de potencias.

Esto es:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = 0 \\ C_1 + C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} n C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = 0 \end{array}\right.$$

Teniendo en cuenta que:

$$k = n - 3 \qquad k = n$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} (k+3) C_{k+3} x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} \left[(k+3) C_{k+3} - C_k\right] = 0 \Rightarrow C_{k+3} = \dfrac{C_k}{k+3} \end{array}\right.$$

Se tiene que:

$$\left\{\begin{array}{l} k = 0 \Rightarrow C_3 = \dfrac{C_0}{3} \\ k = 1 \Rightarrow C_4 = \cancel{\dfrac{C_1}{4}} = 0 \\ k = 2 \Rightarrow C_5 = \cancel{\dfrac{C_2}{5}} = 0 \\ k = 3 \Rightarrow C_6 = \dfrac{C_3}{6} = \dfrac{C_0}{18} \\ k = 4 \Rightarrow C_7 = \dfrac{C_4}{7} = 0 \\ k = 5 \Rightarrow C_8 = \dfrac{C_5}{8} = 0 \\ k = 6 \Rightarrow C_9 = \dfrac{C_6}{9} = \dfrac{C_0}{162} \end{array}\right.$$

O sea:

$$y = C_0 + \frac{C_0}{3}x^3 + \frac{C_0}{18}x^6 + \frac{C_0}{162}x^9;$$
$$y = C_0\left[1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{18} + \frac{x^9}{162}\right].$$

Lo que ofrece la integral general:

$$\boxed{y = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^3}{3}\right)^n = C_0 e^{x^3/3}}$$

También aquí el resultado obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando que se trata de una EDO lineal homogénea de primer orden, puesto que: $X = -x^2$ y $X_1 = 0$. Su integración resulta inmediata, ya que se trata de una ecuación de variables separables, así:

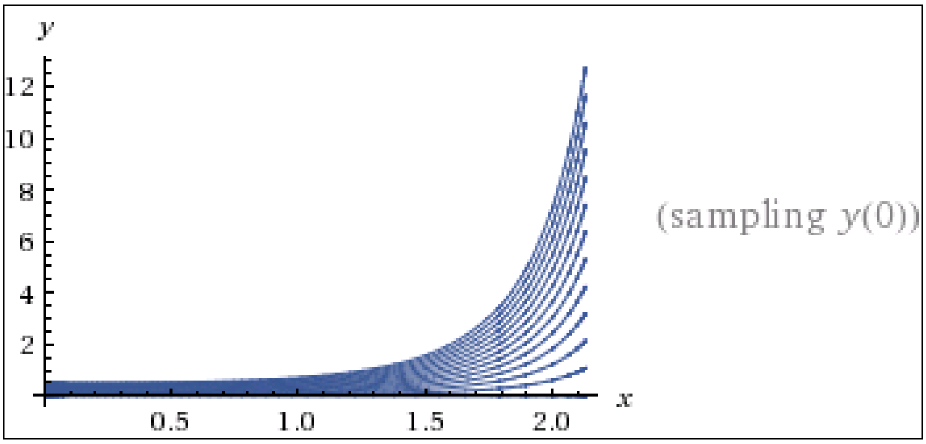
$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y\,;\quad \frac{dy}{y} = x^2 \cdot dx\,,$$

de donde la integral general buscada, obtenida mediante una cuadratura, será:

$$\ln y = \frac{x^3}{3} + C\,;\ y = e^{C + \frac{x^3}{3}} = C_0 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \text{ (habiendo hecho: } C_0 = e^C\text{), o también:}$$

$$y(x) = -C \cdot e^{-\int X \cdot dx} = -C \cdot e^{\frac{x^3}{3}} = C_0 \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \text{ (habiendo hecho: } C_0 = -C\text{), c.s.q.d.}$$

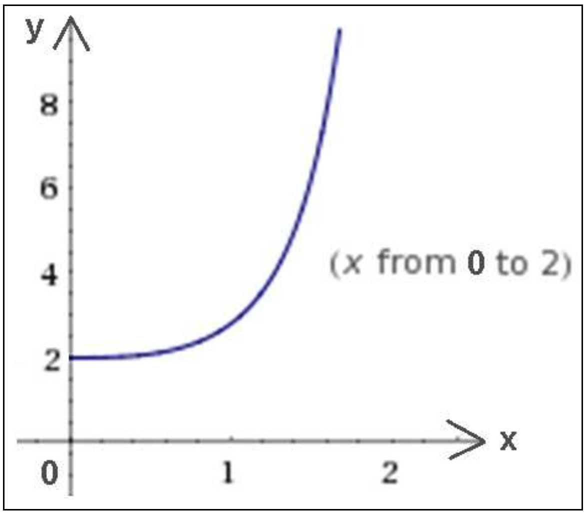
La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



En base a la condición dada en el enunciado, se tiene que: $y(0) = 2$, y entonces $C_0 = 2$, con lo que la integral particular buscada es:

$$\boxed{y(x) = 2 \cdot e^{\frac{x^3}{3}}}$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume la existencia de ramas parabólicas puesto que si x $\rightarrow$ ∞ también aquí y $\rightarrow$ ∞. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 \cdot e^{x^3/3}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 2

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y'' - xy' - y = 0$. Se pide calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 1’00 € , no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 0 (horizontal).

Solución:

Aquí debemos hallar la solución general de la ecuación diferencial ordinaria:

$$y'' - xy' - y = 0\,,$$

determinando dos soluciones linealmente independientes en serie de potencias de x, así como el campo de validez de las mismas. En particular, se trata de obtener la solución PVI tal que: y(0) = 1 ; y’(0) = 0.

En este caso, es: $\begin{cases} p(x) = -x \\ q(x) = -1 \end{cases}$. Ambas analíticas en $x_0 = 0$, con radios de convergencia de sus respectivos desarrollos $\begin{cases} R_1 = \infty \\ R_2 = \infty \end{cases}$, es decir $x_0 = 0$ es un punto ordinario.

Luego, según el teorema anterior, existe solución de la ecuación en serie de potencias de *x*, válida para todo $x \in \{\Re\}$.

Sea ahora: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Por tanto: $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n{\cdot}a_n x^{n-1}$, y también: $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{n-2}$. Substituyendo estos valores en la ecuación diferencial dada, se tendrá que:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n{\cdot}(n-1){\cdot}a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n{\cdot}a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0 \ \text{ en } \{\Re\}$$

Término independiente: $2\cdot 1\cdot a_2 - a_0 = 0 \qquad \Rightarrow a_2 = \dfrac{a_0}{2}$

Coeficiente de x: $3\cdot 2\cdot a_3 - a_1 - a_1 = 0 \qquad \Rightarrow a_3 = \dfrac{a_1}{3}$

....

Coeficiente de x^n: $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0 \qquad \Rightarrow a_{n+2} = \dfrac{a_n}{n+2}$

Ley de recurrencia: $\boxed{a_n = \dfrac{a_{n-2}}{n}, \forall n \geq 2}$

Luego a_0 y a_1 son libres y $\begin{cases} a_{2n} = \dfrac{a_0}{(2n)!!} = \dfrac{a_0}{2^n{\cdot}n!} \\[2ex] a_{2n+1} = \dfrac{a_1}{(2n+1)!!} = \dfrac{a_1{\cdot}2^n{\cdot}n!}{(2n+1)!} \end{cases}$

Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= a_0\left[1 + \frac{x^2}{2!!} + \frac{x^4}{4!!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!!} + \ldots\right] + a_1\left[x + \frac{x^3}{3!!} + \frac{x^5}{5!!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} + \ldots\right] = \\ &= a_0{\cdot}y_1(x) + a_1{\cdot}y_2(x), \forall x \in \{\Re\} \end{aligned}}$$

Solución particular (PVI): $\begin{cases} y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \end{cases}$

Luego se tiene que: $y(x) = \sum_0 \frac{x^{2n}}{(2n)!!} \Rightarrow y(x) = \sum_0 \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \sum_0 \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}$

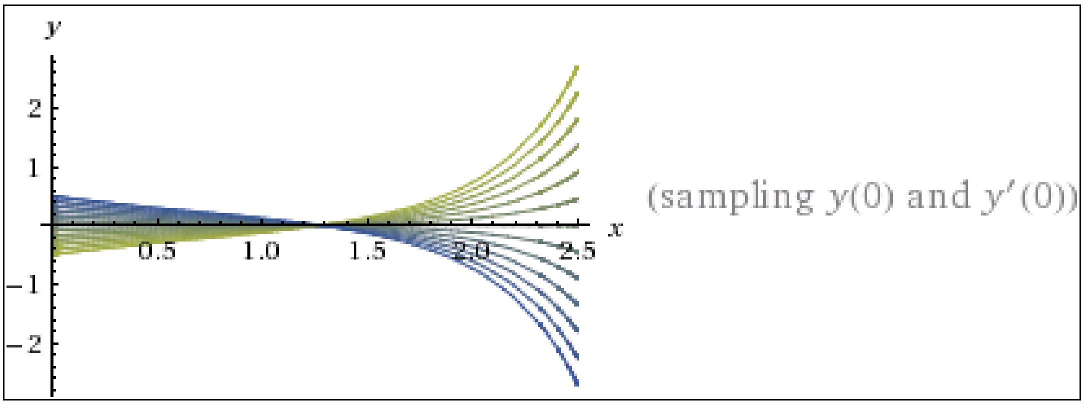
Y resulta, en fin, la solución buscada:

$$\boxed{y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}}$$

Debe tenerse en cuenta que la integral general de esta EDO puede expresarse como:

$$\boxed{y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, c_1\, e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_2\, e^{\frac{x^2}{2}}}$$

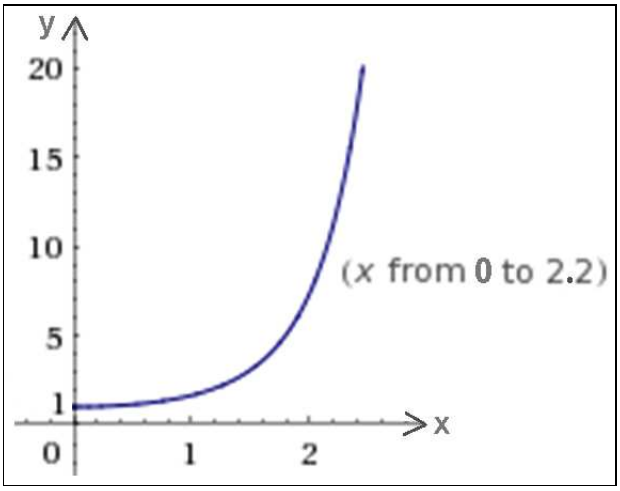
, siendo *erf* la función error. La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Por otra parte, se tendrá, teniendo en cuenta las condiciones particulares iniciales dadas del problema, que: $y(0) = c_2 = 1$, y $c_1 = 0$, por lo que resultará, en efecto, que: $y(x) = e^{x^2/2}$, c.s.q.d.

Por otra parte, se presume la existencia de ramas parabólicas puesto que si $x \to \infty$ también aquí $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2/2}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



2. EL OPERADOR POLINOMIAL Y EL OPERADOR ALGEBRAICO DE HEAVISIDE

2.1. EL OPERADOR DIRECTO

Al tratar de resolver ecuaciones diferenciales relacionadas con la teoría de vibraciones, el ingeniero inglés Oliver Heaviside[10] (1850-1925) descubrió que los operadores diferenciales podían tratarse analíticamente como variables algebraicas. De acuerdo con el *"cálculo operacional"*, si se tiene una ecuación diferencial de primer orden de la forma: (D – a)y = f(t), donde D es el operador diferencial, esto es, D = d/dt, o bien D = d/dx, entonces la solución general a dicha ecuación es de la forma:

$$y = e^{at}\int e^{-at}f(t)dt + c_1e^{at}.$$

Heaviside observó que si se trataba al operador diferencial D como una variable algebraica, era posible alcanzar igualmente la solución de toda ecuación pareja a la de arriba. En efecto, según la solución general, se cumple que:

$$y = \frac{1}{D-a}f(t) = e^{at}\int e^{-at}f(t)dt + c_1e^{at}$$

[10] Heaviside was a self-taught English electrical engineer, mathematician, and physicist who adapted complex numbers to the study of electrical circuits, invented mathematical techniques to the solution of differential equations (later found to be equivalent to Laplace transforms), reformulated Maxwell's field equations in terms of electric and magnetic forces and energy flux, and independently co-formulated vector analysis. Although at odds with the scientific establishment for most of his life, Heaviside changed the face of mathematics and science for years to come. Between 1880 and 1887, Heaviside developed the operational calculus (involving the *D* notation for the differential operator, which he is credited with creating), a method of solving differential equations by transforming them into ordinary algebraic equations which caused a great deal of controversy when first introduced, owing to the lack of rigor in his derivation of it. He famously said, "Mathematics is an experimental science, and definitions do not come first, but later on." He was replying to criticism over his use of operators that were not clearly defined. On another occasion he stated somewhat more defensively, "I do not refuse my dinner simply because I do not understand the process of digestion". (FRANQUET, 2013).

El método en cuestión puede aplicarse a ecuaciones diferenciales de orden *n*, ya que si se tiene que:

$$(D - m_1)\cdot(D - m_2) \ldots (D - m_n)\cdot y = b(x),$$

entonces se puede definir la función u como:

$$u = (D - m_2) \ldots (D - m_n)\cdot y,$$

y lo que queda es resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$(D - m_1)\cdot u = b(x).$$

Una vez resuelta la ecuación para u se substituye en:

$$(D - m_2)\cdot(D - m_3) \ldots (D - m_n)\cdot y = u(x).$$

Repitiendo el proceso señalado, se tiene que:

$$v = (D - m_3) \ldots (D - m_n)\cdot y \Rightarrow (D - m_2)\cdot v = u(x).$$

Integrando:

$$(D - m_3) \ldots (D - m_n)\cdot y = v(x).$$

Esta repetición nos llevará entonces hasta la solución y(x).

Heaviside publicó sus resultados, cuya utilidad a la hora de resolver ecuaciones de la física y la ingeniería hizo que pronto se extendieran. Sin embargo, el trabajo de Heaviside, formal y poco riguroso, atrajo las críticas de algunos matemáticos puristas que los rechazaron argumentando que los resultados de Heaviside no podían surgir de tal forma. No obstante, el éxito del método hizo que pronto fuera adoptado por ingenieros y físicos de todo el mundo, de manera que al final atrajo la atención de cierto número de matemáticos tratando de justificar el método de manera rigurosa. Tras varias décadas de infructuosos intentos, se reparó en que la Transformada descubierta por Laplace (que veremos en el posterior capítulo 7) hacía un siglo no solo ofrecía un fundamento teórico plausible al método de cálculo operacional de Heaviside, sino que además presentaba una alternativa mucho más sistemática a la aplicación de tales métodos.

Pues bien, para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x) , \quad a_n \neq 0 ,$$

es decir, con coeficientes constantes, vamos a estudiar los siguientes ejemplos.

2.2. EL OPERADOR INVERSO

Los operadores suelen tener su inversa; esto significa que si:

$$P(D)y = b(x) \Rightarrow P^{-1}(D)P(D)y = P^{-1}(D)b(x) \Rightarrow y_p = P^{-1}(D)b(x),$$

donde $y_p(x)$ es una solución particular de la EDO $P(D)y = b(x)$. Notemos que esto significa también que:

$$D^{-n}b(x) = \iint \underbrace{\cdots}_{n\ \text{veces}} \int b(x)\cdot dx$$

El operador inverso de $P(D)$, es decir $P^{-1}(D)$, puede también representarse como $1/P(D)$. Debe quedar claro que su significado radica en el hecho de que al actuar sobre $b(x)$ produce una solución particular y_p. Esta última notación resulta ser a veces más conveniente y dependiendo de la forma de $b(x)$ puede resultar algunas veces de fácil solución.

En general se tiene que si:

$$P(D)y = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y = b(x),$$

entonces se cumple que:

$$y_p = \frac{1}{P(D)}\left[b(x)\right] = \frac{1}{a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0}D + \frac{a_2}{a_0}D^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}D^{n-1} + \frac{a_n}{a_0}D^n\right)}\left[b(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{a_0}\left(1 + c_1D + c_2D^2 + \dots + c_{n-1}D^{n-1} + c_nD^n\right)\left[b(x)\right],\ \forall a_0 \neq 0$$

donde el término $(1 + c_1D + c_2D^2 + \dots + c_{n-1}D^{n-1} + c_nD^n) / a_0$, es la expansión en serie de $1/P(D)$.

Por otro lado, notemos que si $a_0 = 0$, entonces:

$$P(D)y = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D)y = D(a_nD^{n-1} + a_{n-1}D^{n-2} + \dots + a_1)y = b(x).$$

Si ambos $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$, entonces se puede seguir factorizando. Por lo tanto, en general, se tendrá que:

$$P(D)y = D^r(a_nD^{n-r} + ... + a_{r+1}D + a_r)y = b(x),$$

y a partir de aquí se podrá despejar la solución particular y_p.

Desde luego, el proceso aquí descrito se puede simplificar notablemente según la naturaleza analítica de la función b(x).

CAPÍTULO 7

LA TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

La transformada de Laplace (1780), que es un operador lineal como tendremos ocasión de comprobar seguidamente, toma su nombre en honor de aquel gran matemático francés (ver nota correspondiente a pie de la página 239). Constituye una herramienta útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que aparecen de forma natural en diversos campos de la ciencia, la técnica y la economía. La moderna aplicación de las transformadas de Laplace y toda su teoría subyacente surge en realidad en la segunda mitad del siglo XIX. Dicha transformación supone, genéricamente, que y(x) es una función continua en todo el semieje OX positivo, y supongamos ahora que su producto por e^{-px} sea integrable entre 0 e ∞ en un cierto campo de p.

Conviene observar que en muchos manuales se utiliza la notación *S* (mayúscula) o *s* (minúscula) por la *p*. Aquí las podremos utilizar indistintamente, especialmente en la resolución de problemas y ejercicios de aplicación, como se verá con posterioridad, aunque emplearemos mayoritariamente la *p* en la resolución de las ecuaciones integrales (ver posterior capítulo 8).

Pues bien, la función η del parámetro p (que es una variable real arbitraria) que esta integral define en tal campo:

$$\eta(p) = L[y(x)] = \int_0^{\infty} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx \quad , \forall\, x \,/\, 0 \leq x < \infty ,$$

se denomina *transformada Laplace* de y(x), siendo **L** el llamado *operador de la transformada de Laplace* y siempre y cuando la integral esté definida, mientras que la función **y** se llamará "función generatriz Laplace de η", y escribiremos: $\eta(p) = L[y(x)]$; o recíprocamente, la transformada inversa: $y(x) = L^{-1}[\eta(p)]$. A veces, especialmente en el estudio de las ecuaciones integrales, se utiliza la notación: $\eta = \phi$. La técnica más simple para identificar las transformadas inversas de Laplace consiste en reconocerlas, ya sea de memoria[1] o bien mediante una tabla más o

[1] Es lamentable reconocer, a menudo, nuestra endeble capacidad memorística cuando, por otra parte, existen casos de memoria prodigiosa registrados en la *Naturalis historia* de Plinio, tal como nos hace

menos extensa como la que se adjunta posteriormente. Si no se halla en una forma reconocible, entonces ocasionalmente se puede convertir en tal forma mediante una manipulación algebraica, de tal modo que, como sea que casi todas las transformadas de Laplace son cocientes, el procedimiento más adecuado consiste en convertir primero el denominador a una forma que aparezca en la tabla correspondiente y luego el numerador de la fracción en cuestión.

Ello sucede, en fin, para todos los valores de *p* para los cuales la integral impropia converja. La convergencia ocurre cuando existe el límite:

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-px}\cdot y(x)\cdot dx\ .$$

Si este límite no existe, la integral impropia diverge y la función y(x) no posee transformada de Laplace. Cuando se evalúa la integral anterior, la variable *p* se trata como una constante, habida cuenta de que la integración lo es con respecto a *x*.

Cuando y(x) no es una función sino una distribución con una singularidad en 0, la definición es la siguiente:

$$\eta(p) = L[y(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\infty} e^{-px}\cdot y(x)\cdot dx\ .$$

Ambas transformaciones, directa e inversa, son operaciones lineales, es decir, poseen las siguientes propiedades:

a) Son distributivas en relación a la adición:

$L\,[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$, y por tanto: $L^{-1}[\eta_1+\eta_2] = L^{-1}[\eta_1] + L^{-1}[\eta_2]$.

b) Son permutables con un factor independiente de la variable:

$L[ay] = a\cdot L[y]$; $L^{-1}[a\eta] = a\cdot L^{-1}[\eta]$, siendo **a** una constante cualquiera.

Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la versión unilateral. También existe la transformada de Laplace bilateral, que se define como sigue:

notar J. L. Borges. Así, por ejemplo, Ciro I de Anshan, rey de los persas, hijo de Teispes, en la segunda mitad del siglo VII a. de C., sabía llamar por su nombre a todos los soldados de sus ejércitos; Mitridatos VI denominado "Eupator Dionysius", rey del Ponto desde el año 111 a. de C. hasta el 63 a. de C., administraba la justicia en los veintidós idiomas de su imperio; el poeta Simónides –nacido el 556 a. de C. y fallecido en Agrigento por el año 468 a. de C.– fue el inventor de la mnemotecnia (el arte de desarrollar la memoria humana mediante los ejercicios apropiados); el filósofo griego Metrodoro, discípulo de Epicuro, profesaba el arte de repetir fielmente todo aquello que escuchaba una sola vez.

$$\eta_B(p) = L[y(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} \cdot y(x) \cdot dx \ .$$

La transformada de Laplace η(p) típicamente existe para todos los números reales *p>a*, donde *a* es una constante que depende del comportamiento de crecimiento de y(x).

En el año 1744, Leonhard Euler ya había investigado un conjunto de integrales de la forma:

$$z = \int e^{ax} \cdot X(x) \cdot dx \ , \text{ y: } z = \int x^A \cdot X(x) \cdot dx ,$$

como soluciones de ecuaciones diferenciales, pero no profundizó en ellas y pronto abandonó su estudio. Joseph Louis Lagrange, admirador de Euler, también investigó este tipo de integrales y las ligó a la teoría de la probabilidad en un trabajo sobre funciones de densidad de probabilidad de la forma:

$$\int e^{-ax} \cdot X(x) \cdot a^x \cdot dx \ ,$$

que algunos tratadistas interpretan como auténticas transformadas laplacianas[2].

Este tipo de integrales atrajeron poderosamente la atención de Laplace cuando, en 1782, y siguiendo la idea original de Euler, trató de emplear estas integrales como soluciones de las ecuaciones diferenciales. Parece ser que en 1785 dio un paso más allá, y reenfocó el problema para -en vez de usar las integrales como soluciones- aplicarlas a las ecuaciones dando lugar a las “transformadas de Laplace” tal como hoy en día las conocemos. Para ello, usó una integral de la forma:

$$\int x^s \cdot y(s) \cdot dx \ ,$$

análoga a la transformada de Mellin[3], con la que transformó una ecuación diferencial en una ecuación algebraica de la que buscó su

[2] La transformada de Laplace hállase estrechamente relacionada con la función generatriz de momentos de la Estadística, y tiene la propiedad de que convierte ciertas integrales (convoluciones) de dos funciones en producto de sus transformadas. En Estadística, esta convolución representa la distribución de la suma de dos variables aleatorias independientes.

[3] The *Mellin transform* is an integral transform that may be regarded as the multiplicative version of the two-sided Laplace transform. This integral transform is closely connected to the theory of Dirichlet series, and is often used in number theory and the theory of asymptotic expansions; it is closely related to the Laplace transform and the Fourier transform, and the theory of the gamma function and allied special functions. The notation implies this is a line integral taken over a vertical line in the complex plane. Conditions under which this inversion is valid are given in the Mellin inversion theorem. The transform is named after the Finnish mathematician Robert Hjalmar Mellin (1854-1933). (FRANQUET, 2013).

solución. Planteó algunas de las principales propiedades de su transformada y, de alguna forma, reconoció que el método de Joseph Fourier para resolver por medio de series la ecuación de difusión podría relacionarse con su transformada integral para un espacio finito con soluciones periódicas.

Pese al logro de tal suerte conseguido, las transformadas de Laplace cayeron pronto en un relativo olvido al haber sido presentadas en el campo de la probabilidad -ajeno a su moderna aplicación en la física, la economía y la ingeniería- y ser tratadas, injustamente, como objetos matemáticos puramente teóricos sin aplicación práctica relevante. Por fin, hacia principios del pasado siglo XX, la transformada de Laplace se convirtió en una herramienta común de la teoría de vibraciones y de la teoría de circuitos, dos de los campos donde ha sido aplicada, sin duda, con más éxito. En general, la transformada es adecuada para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en el origen. Una de sus ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división. Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, que obviamente resultan mucho más fáciles de resolver.

Resulta cada vez más frecuente, que en Economía se utilicen técnicas y métodos matemáticos que originalmente surgieron como respuesta a problemas físicos. Una metodología que es usada comúnmente para resolver problemas de ingeniería es la de las transformadas integrales, y muy concretamente la transformada de Laplace. Lo que hace útil a esta transformada es la interpretación natural que tiene como el valor presente de un flujo de efectivo.

En efecto, la transformada de Laplace de una función *f* tiene una interpretación económica evidente: L[f](s) es el valor presente de un flujo f (t) durante el periodo [0, 8) y con una tasa de descuento igual a s. Esta observación fue hecha en 1986 por S. Buser (véase [Buser 1986]), que detectó en esta transformada una herramienta para calcular el valor presente de flujos de efectivo. Otras aplicaciones dentro de finanzas y actuaría pueden verse en los siguientes artículos: [DeSchepper, Teunen y Goovaerts 1992 y 1994], [Pelsser 2000], [Denuit 2001] y [Bartoszewicz 2000].

Sea k(t) una trayectoria para el capital. Si el capital se deprecia a una tasa ä, entonces la trayectoria de inversión bruta está dada por la expresión:

$$I(t) = \frac{dk(t)}{dt} + \delta k(t).$$

Supongamos que la tasa de descuento es igual a r, por lo tanto, tomando la trasformada de Laplace de la inversión y utilizando las propiedades correspondientes tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[I](r) &= \mathcal{L}\left[\frac{dk}{dt}\right](r) + \delta\mathcal{L}[k](r)\\ &= r\mathcal{L}[k](r) - k(0) + \delta\mathcal{L}[k](r)\\ &= (r+\delta)\mathcal{L}[k](r) - k(0).\end{aligned}$$

Esto nos da la relación existente entre el valor presente de la inversión bruta (L[I](r)) y el del capital (L[k](r)), ambos descontados a la tasa r.

2. TRANSFORMADA DE UNA DERIVADA

Pero quizás la propiedad más interesante para las aplicaciones subsiguientes es que: “Al derivar la función y(x) la transformada Laplace queda multiplicada por su variable p y disminuida en y(0)”. Es decir:

Si $L[y(x)] = \eta(p)$, es $L[y'(x)] = p\cdot L[y] - y(0) = p\cdot\eta(p) - y(0)$. (1)

Claro es que se supone que y’(x) sigue cumpliendo las condiciones de integrabilidad exigidas a y(x). En este supuesto resulta, en efecto, que:

$$\int_0^\infty e^{-px}\cdot y'(x)\cdot dx = \left[e^{-px}y(x)\right]_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px}\cdot y(x)\cdot dx = -y(0) + p\cdot\eta(p)\,,$$

pues la integrabilidad de la función subintegral o integrando $e^{-px}\cdot y(x)$, entre los límites 0 e ∞, exige la anulación de esta función para $x\to\infty$.

La aplicación reiterada de la expresión anterior (1) nos dará:

$$\begin{cases} L[y''(x)] = p\cdot L[y'] - y'(0) = p^2\cdot\eta(p) - p\cdot y(0) - y'(0)\\ L[y'''(x)] = p\cdot L[y''] - y''(0) = p^3\cdot\eta(p) - p^2\cdot y(0) - p\cdot y'(0) - y''(0)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Y así sucesivamente. La transformada de la derivada enésima de una función (supuesta existente) es igual al producto de la transformada de esta función por p^n menos un polinomio en p de grado (n-1) cuyos coeficientes, ordenados según las potencias decrecientes de p, son los valores iniciales y(0), y’(0), ..., $y^{n-1}(0)$ de la función y de sus (n-1) primeras derivadas. Es decir:

$$L[y^{(n)}(x)] = p\cdot L[y^{(n-1)}] - y^{(n-1)}(0) =$$
$$p^n\cdot\eta(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \dots - p\cdot y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).$$

Si las condiciones iniciales sobre y(x) en x = 0 están dadas por:

$$y(0) = c_0;\ y'(0) = c_1;\ \dots\ ;\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

entonces, la ecuación anterior se puede volver a escribir como:

$$L[y^{(n)}(x)] = p^n \cdot \eta(p) - c_0 \cdot p^{n-1} - c_1 \cdot p^{n-2} - \dots - c_{n-2} \cdot p - c_{n-1}\ .$$

Para los casos especiales (de frecuente presentación) en que n = 1 y n = 2, ya contemplados, la ecuación anterior se simplifica, respectivamente, del siguiente modo:

$$L[y'(x)] = p \cdot \eta(p) - c_0\ ;\ L[y''(x)] = p^2 \cdot \eta(p) - c_0 \cdot p - c_1\ .$$

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO. CONVOLUCIÓN

Esta transformada integral tiene una serie de propiedades que la pueden hacer útil en el análisis de sistemas lineales. Una de las ventajas más significativas radica en que la integración y la derivación en el Cálculo Infinitesimal clásico se convierten fácilmente en multiplicación y división. Ello transforma las ecuaciones diferenciales, integrales e integro-diferenciales en ecuaciones polinómicas, obviamente mucho más sencillas de resolver.

Otra aplicación no menos importante en los sistemas lineales es el cálculo de la señal de salida. Ésta se puede calcular mediante la convolución de la respuesta impulsiva del sistema con la señal de entrada[4]. La realización de este cálculo en el espacio de Laplace convierte la convolución en una multiplicación, habitualmente de resolución mucho más sencilla.

Cuando se habla de la transformada de Laplace, generalmente se refiere a la versión unilateral. También existe, sin embargo, la transformada de Laplace bilateral. Conviene tener presente, al respecto de lo expuesto hasta aquí, el siguiente cuadro aclaratorio:

---

[4] Esta operación es muy usada en telecomunicaciones, análisis armónico, etc., permitiendo encontrar fácilmente muchos resultados importantes. El cálculo de la integral se puede realizar de dos maneras diferentes: analíticamente (resolviendo las integrales planteadas) o bien gráficamente (calculando las áreas respectivas a partir de los gráficos realizados para las señales). La convolución con δ(t) se calcula valiéndose de la propiedad de separación de la función δ(t), que permite escribir la función x(t) como la suma de infinitos pulsos pesados. Por lo que respecta a la Economía, la convolución y las operaciones relacionadas se encuentran en muchas aplicaciones de la econometría. Y así:

- En Estadística, como un promedio móvil ponderado.
- En Teoría de la Probabilidad, puesto que la distribución de probabilidad de la suma de dos variables aleatorias independientes es la convolución de cada una de sus distribuciones de probabilidad.

Dos funciones pueden tener la misma transformada de Laplace

Ejemplo:

$$x_1(t)=\begin{cases} e^{\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$X_1(s)=\int_0^{\infty} e^{\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t}dt=$$

$$=\left.\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\right|_0^{\infty}=\boxed{\frac{1}{s-\alpha} \quad \sigma>\alpha}$$

$$x_2(t)=\begin{cases} 0 & t>0 \\ -e^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$$

$$X_2(s)=\int_{-\infty}^{0} -e^{\alpha t}e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-s)t}dt=$$

$$=-\left.\frac{e^{(\alpha-s)t}}{\alpha-s}\right|_{-\infty}^{0}=\boxed{\frac{1}{s-\alpha} \quad \sigma<\alpha}$$

se diferencian solo en la región de convergencia

La transformada de Laplace hállase estrechamente relacionada con la Transformada de Fourier y la Transformada Z (empleada en las ecuaciones en diferencias finitas, como veremos en el capítulo siguiente). La transformada de Laplace es, de hecho, una generalización de la Transformada de Fourier de Tiempo-Continuo. Aunque las transformadas de Laplace rara vez se resuelven mediante integración si no por medio de tablas y el uso de computadoras (por ejemplo *Matlab*) como veremos más adelante. Esto define la transformada de Laplace y su inversa. Nótense las similitudes existentes entre la transformada de Laplace y su inversa. Ello nos ofrecerá, como resultado, muchas de las simetrías encontradas en el análisis de Fourier. Para resolver las Transformadas de Laplace se pueden emplear diversos métodos, a saber:

a) *Resolviendo la Integral:*

Probablemente, el método más difícil y menos usado para encontrar la Transformada de Laplace es resolviendo directamente la integral. Aunque es técnicamente posible hacerlo así, también es extremadamente consumidor de tiempo, dada la facilidad de los siguientes dos métodos para encontrarla. Las integrales están sobretodo para entender conceptualmente la teoría y de dónde se originan los siguientes métodos resolutivos.

b) *Usando una Computadora:*

El uso de una computadora con el *software* adecuado para encontrar la transformada de Laplace resulta relativamente sencillo. *Matlab*, por ejemplo, tiene dos funciones, *laplace* e *ilaplace*, y las dos forman parte de las librerías simbólicas, con lo que encontraremos la transformada de Laplace y su inversa, respectivamente. Este método resulta preferido generalmente para funciones más complicadas. Funciones más sencillas e ideales usualmente se resuelven, con mayor rapidez, mediante el empleo de tablas, como los ejemplos que siguen a continuación.

c) *Usando Tablas:*

Cuando se aprende por primera vez la transformada de Laplace, las tablas son, sin duda alguna, la forma más común para encontrarla. Con suficiente práctica, no obstante, las tablas se hacen innecesarias. La gran parte del diseño de aplicaciones empieza en el dominio de Laplace y dan como resultado una solución en el dominio del tiempo.

A continuación, se ofrece una tabla suficientemente completa para los casos más usuales que se puedan presentar:

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
K	$\frac{K}{p}\quad (p>0)$	$Sh\ \omega x$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\quad (p>\lvert\omega\rvert)$
$x^n (n>-1)$, $(p>0)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$	$Ch\ \omega x$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}\quad (p>\lvert\omega\rvert)$
x	$\frac{1}{p^2}\quad (p>0)$	$x\cdot \sin \omega x$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}\quad (p>0)$
$K\cdot e^{ax}\quad (p>-a)$	$\frac{K}{p-a}$	$\sin \omega x\cdot Sh\ \omega x$	$\frac{2\omega^2 p}{p^4+4\omega^4}$
$\sin Kx$	$\frac{K}{p^2+K^2}\quad (p>0)$	$\cos \omega x\cdot Ch\ \omega x$	$\frac{p^3}{p^4+4\omega^4}$
$\cos Kx$	$\frac{p}{p^2+K^2}\quad (p>0)$	$x^n\ e^{ax}$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}\quad (n>-1)\ (p>a)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}-e^{-Kx})$	$\frac{K}{p^2-K^2}$	$\frac{1-e^{-x}}{x}$	$l\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$\frac{1}{2}(e^{Kx}+e^{-Kx})$	$\frac{p}{p^2-K^2}$	lx	$\frac{\Gamma'(1)}{p}-\frac{lp}{p}$
$x^n e^{ax}\ (n>-1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{\cos\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax}\sin Kx$	$\frac{K}{(p-a)^2+K^2}\quad (p>a)$	$\frac{\sin\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$
$e^{ax}\cos Kx$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+K^2}\quad (p>a)$	$\frac{Ch\alpha\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi p}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
$\cos(\omega x+K)$	$\frac{p\cdot\cos K-\omega\cdot\sin K}{p^2+\omega^2}$	$\frac{Sh\alpha\sqrt{x}}{\pi}$	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}p^{3/2}}e^{\frac{\alpha^2}{4p}}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$\sin(\omega x + K)$	$\frac{p\cdot\sin K + \omega\cdot\cos K}{p^2+\omega^2}$	$\sqrt[n]{x}$ $(p > 0)$	$p^{-(n+1)/n}\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{x}\right)$
$\frac{x^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$ $(p > 0)$	$\frac{x^q}{\Gamma(q+1)}$	$\frac{1}{p^{q+1}}$ $(p > 0)$
$\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$ $(p > -\alpha)$	$e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{p+\alpha}$ $(p > -\alpha)$
$1-e^{-\alpha x}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$ $(p > 0)$	$\frac{1}{b-a}(e^{-ax}-e^{-bx})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$ $(p>-a)$ $(p>-b)$
$\ln\frac{x}{x_0}$ $(p > 0)$	$-\frac{x_0}{p}\left[\ln(x_0\cdot p)+\gamma\right]$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cdot\cos at)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
x^{n-1} $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{(n-1)!}{p^n}$ $(p > 0)$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}p^{-3/2}$ $(p > 0)$
$1\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}p^{-1/2}$ $(p > 0)$	$x^{n-1/2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{(1)(3)(5)\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}p^{-n-1/2}$ $(p>0)$
$x\cdot\cos ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ $(p > 0)$	$x^{n-1}e^{ax}$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{(n-1)!}{(p-a)^n}$ $(p > a)$
$\sin ax - ax\cdot\cos ax$	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$ $(p > 0)$	$\frac{1}{a}e^{-x/a}$	$\frac{1}{1+ap}$
$\frac{1}{a}(e^{ax}-1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$	$1-e^{-x/a}$	$\frac{1}{p(1+ap)}$
$\frac{1}{a^2}$ x 3 $e^{-x/a}$	$\frac{1}{(1+ap)^2}$	$\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{e^{-x/a}-e^{-x/b}}{a-b}$	$\frac{1}{(1+ap)(1+bp)}$	$(1 + ax)e^{ax}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
$\frac{1}{a^3}(a-x)e^{-x/a}$	$\frac{p}{(1+ap)^2}$	$\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{a-b}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
$\frac{ae^{-x/b}-be^{-x/a}}{ab(a-b)}$	$\frac{p}{(1+ap)(1+bp)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{ax}-1-ax)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$\sin^2 ax$	$\frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\sinh^2 ax$	$\frac{2a^2}{p(p^2-4a^2)}$
$\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^2 p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}-\sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{a^3}{p^4+a^4}$
$\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{p^3}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\sinh\frac{ax}{\sqrt{2}}+\sin\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{ap^2}{p^4+a^4}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax-\sin ax)$	$\frac{a^3}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh ax-\cos ax)$	$\frac{a^2 p}{p^4-a^4}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax+\sin ax)$	$\frac{as^2}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh ax+\cos ax)$	$\frac{p^3}{p^4-a^4}$
$\cos ax\cdot\sinh ax$	$\frac{a(p^2-2a^2)}{p^4+4a^4}$	$\sin ax\cdot\cosh ax$	$\frac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}$
$\frac{1}{2}(\sin ax+ax\cos ax)$	$\frac{ap^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\cos ax-\frac{ax}{2}\sin ax$	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(ax\cdot\cosh ax-\sinh ax)$	$\frac{a^3}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{x}{2}\sinh ax$	$\frac{ap}{(p^2-a^2)^2}$
$\frac{1}{2}(\sinh ax+ax\cosh ax)$	$\frac{ap^2}{(p^2-a^2)^2}$	$\cosh ax+\frac{ax}{2}\sin ax$	$\frac{p^3}{(p^2-a^2)^2}$
$\frac{a\cdot\sin bx-b\cdot\sin ax}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{\cos bx-\cos ax}{a^2-b^2}$	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\frac{a\cdot\sin ax-b\cdot\sin bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{a^2\cdot\cos ax-b^2\cdot\cos bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
$\frac{b\cdot\sinh ax-a\cdot\sinh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{ab}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\frac{\cos ax-\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\frac{a\cdot\sinh ax-b\cdot\sin bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^2}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\frac{a^2\cos ax-b^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{p^3}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$x-\frac{1}{2}\sin ax$	$\frac{a^2}{p^2(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a}\sinh ax - x$	$\frac{a^2}{p^2(p^2-a^2)}$
$1-\cos ax-\frac{ax}{2}\sin ax$	$\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$	$1-\cosh ax+\frac{ax}{2}\sinh ax$	$\frac{a^4}{p(p^2-a^2)^2}$
$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$1+\frac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\frac{a^2b^2}{p(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$
$\frac{x}{8}\left[\sin ax-ax\cdot\cos ax\right]$	$\frac{a^3p}{(p^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{8}\left[(3-a^2x^2)\sin ax-3ax\cdot\cos ax\right]$	$\frac{a^5}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{x}{8}(ax\cdot\cosh ax-\sinh ax)$	$\frac{a^3p}{(p^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{8}\left[(1+a^2x^2)\sin ax-ax\cdot\cos ax\right]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2+a^2)^3}$
$\frac{1}{n!}(1-e^{-x/a})^n$	$\frac{1}{p(ap+1)(ap+2)...(ap+n)}$	$\frac{1}{8}\left[(3+a^2x^2)\sinh ax-3ax\cdot\cosh ax\right]$	$\frac{a^5}{(p^2-a^2)^3}$
$\sin(ax+b)$	$\frac{p\cdot\sin b+a\cdot\cos b}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{8}\left[ax\cdot\cosh ax-(1-a^2x^2)\sinh ax\right]$	$\frac{a^3p^2}{(p^2-a^2)^3}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{p\cdot\cos b-a\cdot\sin b}{p^2+a^2}$	$e^{-ax}-e^{ax/2}\left[\cos\frac{ax\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\sin\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right]$	$\frac{3a^2}{p^3+a^3}$
$\frac{1+2ax}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{p+a}{p\sqrt{p}}$	$e^{-ax}/\sqrt{\pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
$\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}}(e^{bx}-e^{ax})$	$\sqrt{p-a}-\sqrt{p-b}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cosh 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{a/p}$	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sin 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{-a/p}$
$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\sinh 2\sqrt{ax}$	$p^{-3/2}e^{a/p}$	$J_0(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p}e^{-a/p}$
$\sqrt{x/a}\cdot J_1(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{p^2}e^{-a/p}$	$(x/a)^{(s-1)/2}\cdot J_{s-1}(2\sqrt{ax})\ (s>0)$	$p^{-s}e^{-a/p}$
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

Función generatriz y(x)	**Transformada L[y(x)]**	**Función generatriz y(x)**	**Transformada L[y(x)]**
$J_0(x)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$J_1(x)$	$\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$
$J_s(x)\quad (s > -1)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^s}{\sqrt{p^2+1}}$	$x^s J_s(ax)\quad \left(s>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2a)^s\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(p^2+a^2)^{s+(1/2)}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}\quad (s>0)$	$\frac{1}{p^s}$	$\frac{4^n n!}{(2n)!\sqrt{\pi}}\cdot x^{n-(1/2)}$	$\frac{1}{p^n\sqrt{s}}$
$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}e^{-ax}\quad (s>0)$	$\frac{1}{(p+a)^s}$	$\frac{1-e^{ax}}{x}$	$\ln\frac{p-a}{p}$
$\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$	$\frac{2}{x}\sinh ax$	$\ln\frac{p+a}{p-a}$
$\frac{2}{x}(1-\cos\cdot ax)$	$\ln\frac{p^2+a^2}{p^2}$	$\frac{2}{x}(\cos bx-\cos ax)$	$\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$
$\frac{\sin ax}{x}$	$\arctan\frac{a}{p}$	$\frac{2}{x}\sin ax\cdot\cos bx$	$\arctan\frac{2ap}{p^2-a^2+b^2}$
$\sin\lvert ax\rvert$	$\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)\left(\frac{1+e^{-(\pi/a)p}}{1-e^{-(\pi/a)p}}\right)$	---	---
Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$	Transformada inversa $L^{-1}[\eta(p)]$	Función $\eta(p)$

FIG. 7.1. Transformadas de Laplace más usuales.

NOTAS EXPLICATIVAS DE LA TABLA PRECEDENTE:

1. γ es la constante de Euler-Mascheroni. La **constante de Euler-Mascheroni**, (también conocida *como constante de Euler*), a la que ya nos hemos referido con anterioridad, es una constante matemática que aparece principalmente en la teoría de números, y se denota con la letra griega minúscula γ (Gamma). Se define como el límite de la diferencia entre la serie armónica y el logaritmo natural o neperiano, a saber:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right] = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\right)dx$$

Su valor aproximado es:

$$\gamma \approx 0,577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,\ldots$$

Esta constante apareció por primera vez en el año 1734, en un artículo escrito por Leonhard Euler, denominado *De Progressionibus harmonicis observationes*, calculando los 6 primeros dígitos para la constante y llamándola *C*. En 1781 calcularía otros 10 decimales más. En 1790, Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 decimales y la denotaría como *A*. Ya más tarde se denotaría de la forma moderna como γ, debido a su conexión con la función gamma, a la que nos referiremos inmediatamente.

El número γ no se ha probado que sea algebraico o transcendente; de hecho, ni siquiera se conoce si γ es irracional o no. El análisis de fracciones continuas revela que, de ser racional, su denominador debe ser muy elevado (actualmente del orden de $10^{242.080}$). Debido a que está presente en un gran número de ecuaciones y relaciones, la racionalidad o irracionalidad de γ se halla, sin duda, entre los problemas abiertos más importantes de las matemáticas.

2. Γ(q) representa la función gamma o integral euleriana de segunda especie. Integrando por partes en dicha función, se obtiene: $\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx$; $u = x^{q-1}$; $dv = e^{-x} \cdot dx$; $du = (q - 1) \cdot x^{q-2} \cdot dx$; $v = -e^{-x}$; con lo que:

$$\Gamma(q) = \left[-e^{-x} \cdot x^{q-1}\right]_0^\infty + (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1)\int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-2} \cdot dx = (q-1) \cdot \Gamma(q-1) \,.$$

Reiterando el procedimiento, se tendrá que:

$$\Gamma(q) = (q - 1)(q - 2) \ldots (q - k) \cdot \Gamma(q - k).$$

En el caso particular de que *q* sea un número natural (o sea, entero positivo), la aplicación de la expresión anterior conduce a la siguiente:

$$\Gamma(q) = (q - 1)! \quad (\forall q \in \mathbf{N}),$$

puesto que: $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = 1$. Una expresión que se presenta con frecuencia, es la que se obtiene mediante el cambio de variable: $x = t^2$. En efecto:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2q-2} \cdot 2t = 2\int_0^\infty e^{-t^2} \cdot t^{2p-1} \cdot dt \,.$$

Así mismo, el cambio x = mt, conduce análogamente a:

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{q-1} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-mt} \cdot (mt)^{q-1} \cdot m \cdot dt = m^q \int_0^\infty e^{-mt} \cdot t^{q-1} \cdot dt \,.$$

3. Las funciones de Bessel de primera especie y orden α que aparecen en la tabla anterior son las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel que son finitas en el origen (x = 0) para enteros no negativos α y divergen en el

límite $x \to 0$ para α negativo no entero. El tipo de solución y la normalización de $J_\alpha(x)$ están definidos por sus propiedades. Es posible definir la función $J_\alpha(x)$ por su expansión en serie de Taylor en torno a x = 0. Las **funciones de Bessel**, primero definidas por el matemático Daniel Bernouilli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas *y(x)* de la ecuación diferencial de Bessel, a saber:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

, donde α es un número real o complejo. El caso más común es cuando α es un número entero *n*, aunque la solución para α no entero es similar. El número α se denomina *orden* de las funciones de Bessel asociadas a dicha ecuación. Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y coeficientes variables, tiene dos soluciones linealmente independientes. Aunque α y $-\alpha$ dan como resultado la misma función, es conveniente definir diferentes funciones de Bessel para estos dos parámetros, pues las funciones de Bessel en función del parámetro α son funciones suaves casi doquiera. Las funciones de Bessel se denominan también *funciones cilíndricas*, o bien *armónicos cilíndricos* porque son solución de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas.

Para su aplicación a la resolución de las ecuaciones diferenciales, resulta fundamental la obtención de L[y'(x)] expresada en función de L[y(x)], o sea:

$$L[y'(x)] = \int_0^\infty e^{-px} y'(x)dx = y(x)\cdot e^{-px}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px} y(x)dx =$$
$$= -y(0) + p\cdot L[y(x)] = -y(0) + p\cdot\eta(p)$$

, después de integrar por partes.

Análogamente se obtiene que:

$$L\left[\int_0^x y(x)dx\right] = \int_0^\infty e^{-px}dx\int_0^x y(x)dx = \frac{\int_0^\infty e^{-px} y(x)dx}{p} = \frac{L[y(x)]}{p}$$

, que resulta de gran utilidad en la resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales que veremos en el siguiente capítulo de nuestro libro.

Un teorema de la máxima importancia es el correspondiente al producto de transformadas o de "convolución". Sean, en efecto, dos funciones $y_1(x)$, $y_2(x')$, tales que:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(p) &= L[y_1(x)] = \int_0^\infty e^{-px}\cdot y_1(x)\cdot dx \\ \eta_2(p) &= L[y_2(x')] = \int_0^\infty e^{-px'}\cdot y_2(x')\cdot dx' \end{aligned}\right\}$$

El producto de las transformadas será:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-p(x+x')} y_1(x)\cdot y_2(x')\cdot dx\cdot dx' .$$

Mediante el cambio de variable: u = x, v = x + x', es decir, que resulta: x = u; x' = v – u; cuyo determinante funcional jacobiano de la transformación es la unidad, puesto que:

$$J = \frac{\partial\,(x\cdot x')}{\partial\,(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x'}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

En cuanto al recinto o dominio de integración (cuadrante positivo del círculo, x>0, x'>0) se transforma en el u>0, v>u (véanse a continuación los recintos de las figuras anexas), que es el ángulo de 45º sexagesimales = 50^g centesimales = $\pi/4$ radianes, rayado en la figura correspondiente. A saber:

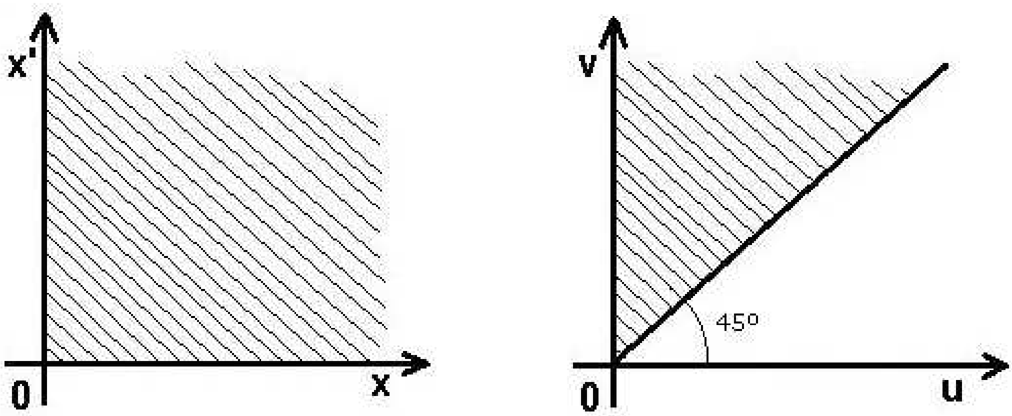


FIG. 7.2. Dominios de integración.

Por lo tanto, se obtiene que:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-pv}\left[\int_0^{v} y_1(u)\cdot y_2(v-u)\cdot du\right]\cdot dv .$$

A la integral combinada entre ambas funciones, $\int_0^{v} y_1(x)\cdot y_2(v-x)\cdot dx$, se le llama "producto de convolución" (plegamiento o *faltung* en idioma alemán), "convolución" o bien "producto compuesto" de las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y se representa por $y_1(x)*y_2(x)$, esto es:

$$\eta_1(p)\cdot\eta_2(p) = L[y_1(x)*y_2(x)], \text{ de donde:}$$
$$y_1(x)*y_2(x) = L^{-1}[\eta_1(p)\cdot\eta_2(p)] = y_2(x)*y_1(x) .$$

Si una de las dos convoluciones en la ecuación anterior es más simple de calcular, entonces se elige esa convolución cuando se determina la transformada inversa de Laplace de un producto. En definitiva, veamos que el “producto de convolución” de sendas funciones es el producto ordinario de sus transformadas. Por lo tanto, la generatriz del producto ordinario de dos funciones es el producto de convolución de sus generatrices.

4. LOS "IMPULSOS" DE INVERSIÓN

La función delta de Dirac puede aplicarse a un sinnúmero de problemas para los cuales queremos modelar un impulso exógeno. Tomemos, por ejemplo, la siguiente ecuación de inversión:

$$\frac{dk}{dt} = \delta_a(t),$$

es decir, la inversión es nula excepto en el instante t = a para el cual es "infinitamente grande", o bien hay un "impulso" de inversión en t = a. La solución a esta ecuación es, con ä = 0:

$$k(t) = k(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s}\right](t) \Rightarrow$$
$$k(t) = k(0) + u_a(t).$$

La figura siguiente muestra el comportamiento de k(t): en el instante t = a, el capital pasa discretamente a tomar el valor k(0) + 1. Esto es:

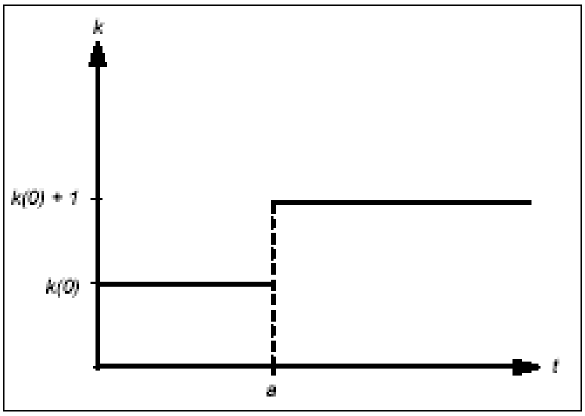


FIG. 7.3. El capital cambia discretamente en t = a.

El ejemplo anterior puede generalizarse tomando la siguiente ecuación:

$$\frac{dk}{dt} = \sum_{n=1}^{T} \delta_n(t),$$

es decir, los impulsos de inversión se realizan en t = 1, 2, ..., T. La ecuación se resuelve igual que arriba, obteniéndose la expresión:

$$k(t) = k(0) + \sum_{n=1}^{T} u_n(t).$$

La figura siguiente muestra el comportamiento de k(t) para este caso. Podemos también tomar en cuenta la depreciación del capital y considerar la ecuación:

$$\frac{dk}{dt} + \delta k = \delta_a(t).$$

La solución de esta ecuación está dada, nuevamente, como sigue:

$$\begin{aligned} k(t) &= k(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\delta}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-as}}{s+\delta}\right](t) \\ &= k(0)e^{-\delta t} + u_a(t)e^{-\delta(t-a)}. \end{aligned}$$

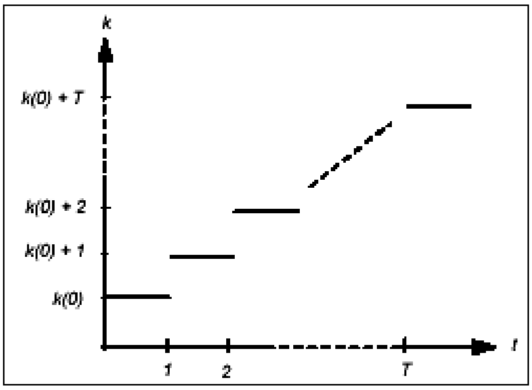


FIG. 7.4: El capital cambia discretamente en t = 1, 2, ..., T.

El comportamiento de k(t) cuando k(0) = 1, ä = 0.3 y a = 4 se muestra, en fin, en la figura siguiente:

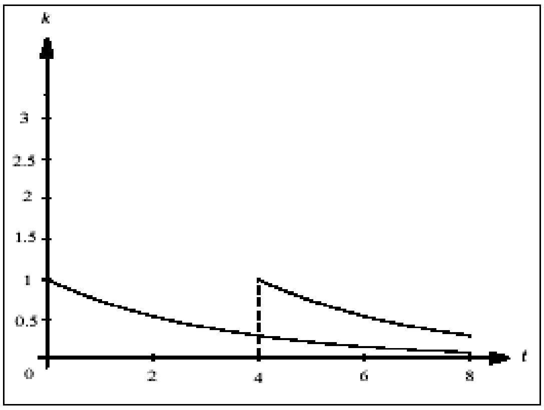


FIG. 7.5. Trayectoria de k(t).

Los ejemplos anteriores podrían adaptarse fácilmente al caso de la inversión en un activo con un flujo de dividendos D(t) y una tasa libre de riesgo r. La ecuación para el valor x(t) del activo está dada por la expresión:

$$\frac{dx}{dt} + D(t) = r \cdot x(t) \, ,$$

que es la ecuación con ä = -r y H(t) = -D(t). Esta ecuación puede interpretarse como una condición de no arbitraje: en cada instante es equivalente invertir la cantidad x(t) a una tasa r, (digamos comprando Cetes[5]) obteniendo una cantidad rx(t), o bien realizar la inversión, obteniendo los dividendos D(t) más el cambio en el valor del activo dx(t) dt . Los dividendos pueden modelarse como funciones de impulso. Ésta es, claramente, una mejor aproximación de la realidad que el pensarlos simplemente como funciones continuas. Ello enlaza, por otra parte, con su concepción como funciones discretas o recurrentes como las que tendremos ocasión de estudiar en posteriores capítulos de este mismo libro.

5. RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS

5.1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ejemplo 1

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $\frac{dy}{dx} - y = 1$, con *y* expresado en euros y *x* en miles de unidades del producto. Se pide: a) calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 0 € , no existe oferta alguna de dicho producto, y b) calcular el precio cuando la oferta sea de 2.400 unidades, con la correspondiente representación gráfica.

[5] Los CETES (Certificados de la Tesorería) son títulos de crédito al portador emitidos por el Gobierno, en los cuales se consigna la obligación de éste a pagar su valor nominal al vencimiento. Dicho instrumento se emite con el fin de influir en la regulación de la masa monetaria, financiar la inversión productiva y propiciar un sano desarrollo del mercado de valores. A través de este mecanismo se captan recursos de personas físicas y jurídicas a quienes se les garantiza una renta fija. El rendimiento que recibe el inversionista consiste en la diferencia existente entre el precio de compra y el de venta. Este instrumento se coloca a través de los operadores a una tasa determinada de descuento y tiene el respaldo del Banco Central del país, en su calidad de agente financiero del Gobierno.

Solución:

a) Se trata de resolver la EDO: $y' - y = 1$, con la condición inicial dada: $y(0) = 0$, en este caso por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto:

$Sy_S - y(0) - y_S = L(1)$; $y_S(S-1) = \frac{1}{S} \Rightarrow y_S = \frac{1}{S(S-1)}$, de donde:

$\frac{A}{S} + \frac{B}{S-1} = \frac{1}{S(S-1)}$, $A(S - 1) + BS = 1$, que resolviendo las fracciones simples y coeficientes indeterminados, ofrece: $A = -1 \Rightarrow B = 1$, con lo que resulta la siguiente función generatriz Laplace:

$$y(x) = -L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{S-1}\right\} = -1 + e^x .$$

Por aplicación alternativa del método clásico o de los coeficientes indeterminados, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea o incompleta, será la siguiente: $\lambda - 1 = 0$; $\lambda = 1$; con lo que se obtiene la solución: $y^* = c \cdot e^x$; ensayaremos, ahora, una solución particular de la no homogénea del tipo:

$\begin{cases} y_p = a \\ y'_p = 0 \end{cases}$; y substituimos en la ecuación inicial, obteniéndose:

$-a = 1$; $a = -1$; con lo que se tendrá la solución general: $y(x) = y^* + y_p = c \cdot e^x - 1$; y aplicando la condición inicial, se tiene que: $y(0) = c - 1 = 0$; lo que implica que: $c = 1$, y nos quedará la I.P. buscada ya obtenida por el procedimiento anterior:

$$\boxed{y(x) = e^x - 1} \quad \text{c. s. q. d.}$$

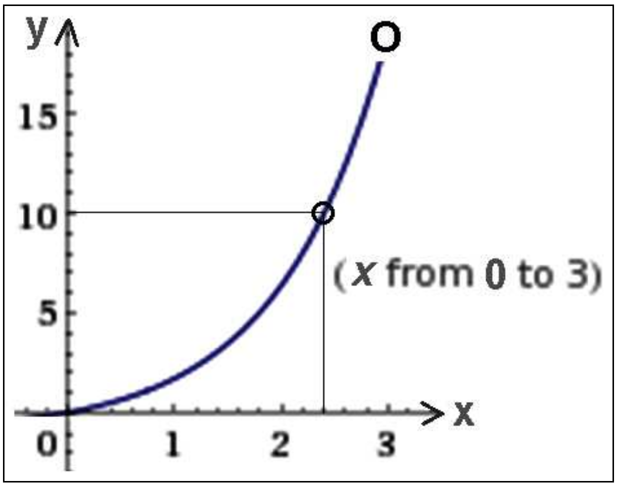
De hecho se tata de una ecuación lineal de primer orden, con:

$X = -1$; $X_1 = -1$, y: $\int X \cdot dx = -\int dx = -x$;

$\int X_1 \cdot e^{\int X \cdot dx} \cdot dx = -\int e^{-x} \cdot dx = e^{-x}$; y aplicando la fórmula pertinente:

$y(x) = e^x(c - e^{-x}) = c \cdot e^x - 1$, que es la I.G. a la cual habrá que aplicar la condición inicial para obtener la I.P. buscada (es evidente que con $c = 1$).

b) La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Para x = 2.400 ud. corresponderá un precio de:

$$y = e^x - 1 = e^{2'4} - 1 = 11'0232 - 1 \approx 10'02 \text{ €},$$

tal como puede apreciarse en la figura anterior.

Ejemplo 2

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y' - 5y = 0$. Se pide calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 2'00 € , no existe oferta alguna de dicho producto.

Solución:

Se trata de resolver la EDO: $y' - 5y = 0$; con la condición inicial dada en el enunciado: $y(0) = 2$.

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial ordinaria y usando las propiedades anteriormente explicadas, obtenemos la expresión: $L\{y'\} - 5L\{y\} = L\{0\}$.

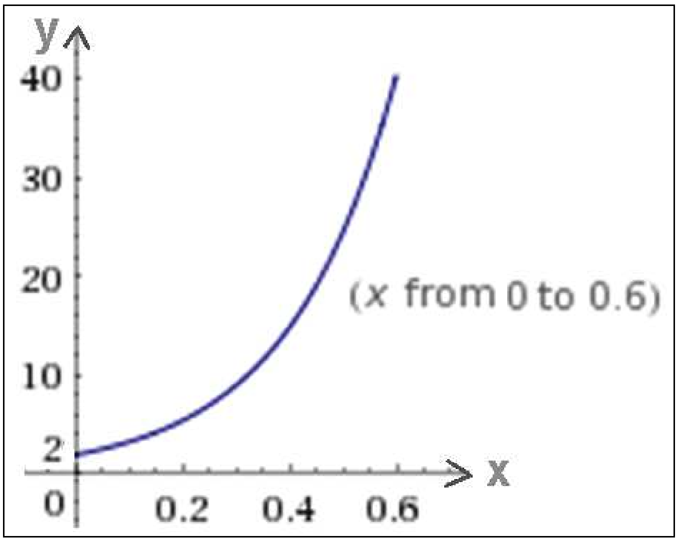
Luego, usando la ecuación con c_0 = 2, encontramos que:

[sY(s) – 2] – 5Y(s) = 0, de lo cual se infiere que: $Y(s) = \dfrac{2}{s-5}$.

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace de Y(s) en ambos miembros de esta ecuación, obtenemos la función generatriz Laplace buscada siguiente:

$$y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 2{\cdot}e^{5x}.$$

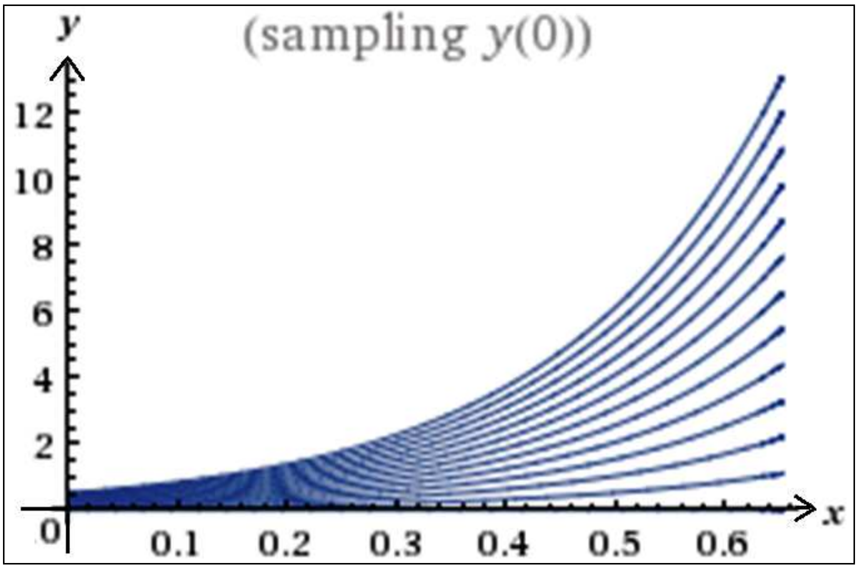
La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x → ∞ también y → ∞. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (2e^{5x}/x) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

El resultado anteriormente obtenido es obvio si procedemos a efectuar la resolución de este problema directamente, esto es, considerando, como siempre, la ecuación característica o modular siguiente:

λ - 5 = 0; con lo que resulta la raíz: λ_1 = 5, y entonces, aplicando las fórmulas correspondientes, se tendrá la integral general: $y(x) = c_1{\cdot}e^{5x}$, cuya representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



La resolución de la I.P. exige que $c_1 = 2$, como podrá comprobar sin mayor dificultad el amable lector/a.

Ejemplo 3

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y' - 5y = e^{5x}$. Se pide calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 0 € , no existe oferta alguna de dicho producto.

Solución:

Se trata de resolver la EDO: $y' - 5y = e^{5x}$; con la condición inicial dada: $y(0) = 0$.

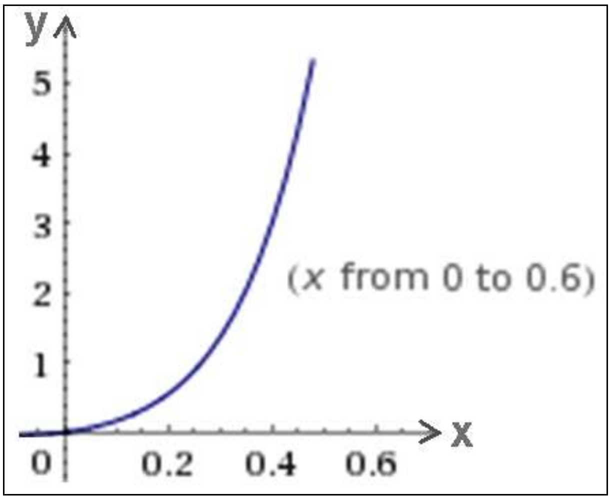
Tomando la transformada inversa de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial y usando las propiedades correspondientes, encontramos que: $L\{y'\} - 5L\{y\} = L\{e^{5x}\}$. Luego, usando adecuadamente la tabla de transformadas y la ecuación con $c_0 = 0$, obtenemos la expresión:

$$[sY(s) - 0] - 5Y(s) = \frac{1}{s-5}, \text{ de lo cual se deduce que: } Y(s) = \frac{1}{(s-5)^2}.$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Y(s), obtenemos la I.P. buscada o función generatriz Laplace, así:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2}\right\} = x \cdot e^{5x}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



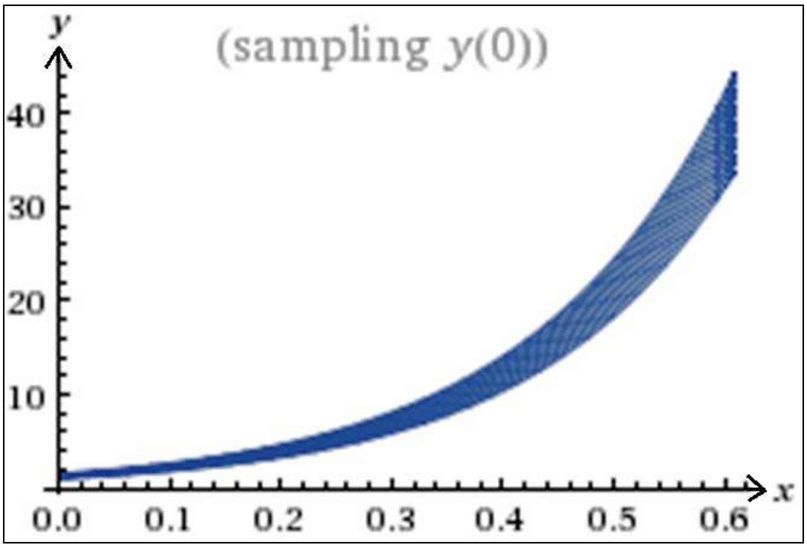
De hecho, la solución general de esta EDO viene dada por la expresión:

$$y(x) = e^{5x}(c + x),$$

y la condición inicial dada obliga a que c = 0.

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x → ∞ también y → ∞. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{5x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



5.2. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Ejemplo 1

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y'' - y' - 2y = 4x^2$. Se pide calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que, cuando el precio es de 1'00 € , no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 4.

Solución:

Se trata de resolver la EDO: $y'' - y' - 2y = 4x^2$; con las condiciones iniciales dadas: $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial dada tenemos lo siguiente:

$$L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 4L\{x^2\}.$$

Luego, usando las ecuaciones correspondientes, con los datos suministrados: $c_0 = 1$ y $c_1 = 4$, tenemos que:

$$[s^2Y(s) - s - 4] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = \frac{8}{s^3},$$

$$s^2Y(s) - s\cdot Y(s) - 2\cdot Y(s) = \frac{8}{s^3} + s + 4 - 1,$$

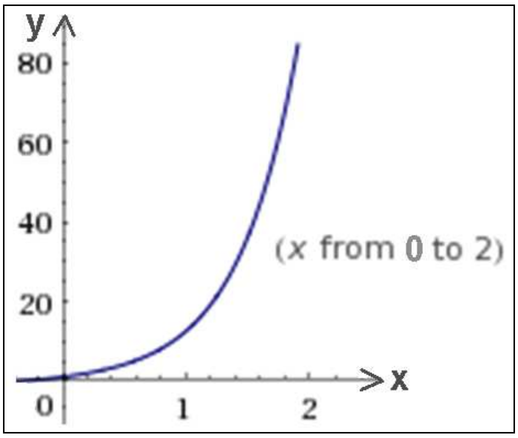
$$Y(s)[s^2 - s - 2] = \frac{8}{s^3} + s + 3,$$

o, resolviendo para Y(s), se tiene: $Y(s) = \dfrac{s+3}{s^2 - s - 2} + \dfrac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}$.

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace, obtenemos la expresión buscada mediante la correspondiente función generatriz:

$$\boxed{\begin{aligned} &y(x) = L^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2 - s - 2}\right) + L^{-1}\left(\frac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}\right) = \\ &\left(\frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}\right) + \left(-3 + 2x - 2x^2 + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{8}{3}e^{-x}\right) = 2e^{2x} + 2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3. \end{aligned}}$$

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



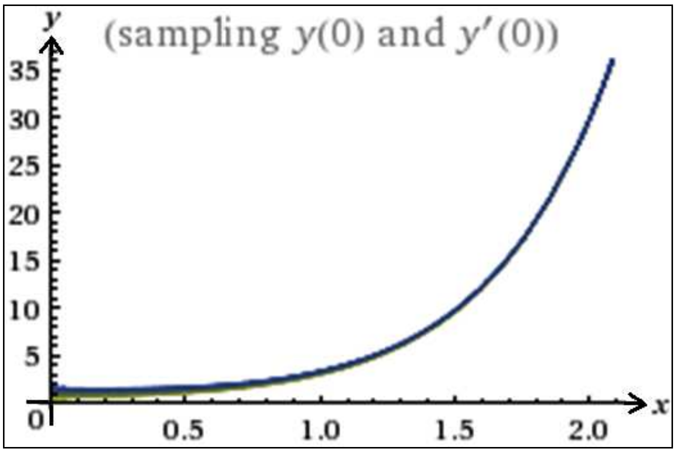
De hecho, la solución general de esta EDO viene dada por:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3,$$

y en nuestro caso: $c_1 = 2$ y $c_2 = 2$.

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x} + 2e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica del haz o familia de soluciones correspondiente será:



Ejemplo 2

La tasa a la que cambia el precio de venta *y* de un producto, respecto a su oferta *x*, viene dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x}$. Se pide calcular el precio en función de la oferta, sabiendo que cuando el precio es de 0 € , no existe oferta alguna de dicho producto y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 0 (horizontal).

Solución:

Se trata de resolver la EDO: $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x}$; con las condiciones iniciales dadas: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Usando el método de las transformadas de Laplace, se obtiene que:

$$S^2y_S - Sy(0) - y'(0) - 4Sy_S - 4y(0) + 4y_S = \{L(x^3e^{2x}\};$$

$$S^2y_S - 4Sy_S + 4y_S = \frac{6}{(S-2)^4};$$

$$y,= \frac{6}{(S^2-4S+4)(S-2)^4} = \frac{6}{(S-2)^2(S-2)^4} = \frac{6}{(S-2)^6}.$$

Y se obtiene la I.G.: $\boxed{y(x) = \frac{6}{5!}L^{-1}\left\{\frac{5!}{S^6}\right\}_{S\to S-2} = \frac{1}{20}x^5e^{2x}}$

Alternativamente, por aplicación del método clásico de los coeficientes indeterminados, se tendrá que la ecuación característica de la homogénea será:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0\ ; \qquad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

con lo que la solución de la homogénea será: $y^* = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x}$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular del tipo:

$$\begin{cases} y_p = (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot x^2 \cdot e^{2x} = (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2) \cdot e^{2x}; \\ y'_p = (5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx) \cdot e^{2x} + 2(ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2) \cdot e^{2x} = \\ \qquad = e^{2x}(2ax^5 + 5ax^4 + 2bx^4 + 4bx^3 + 2cx^3 + 3cx^2 + 2dx^2 + 2dx); \\ y''_p = 2 \cdot e^{2x}(2ax^5 + 5ax^4 + 2bx^4 + 4bx^3 + 2cx^3 + 3cx^2 + 2dx^2 + 2dx) + \\ + e^{2x}(10ax^4 + 20ax^3 + 8bx^3 + 12bx^2 + 6cx^2 + 6cx + 4dx + 2d) = \\ = e^{2x}(4ax^5 + 20ax^4 + 4bx^4 + 20ax^3 + 16bx^3 + 4cx^3 + 12bx^2 + 12cx^2 + 2dx^2 + 6cx + 8dx + 2d) \end{cases}$$

Substituyendo ahora, en la ecuación inicial, los valores anteriormente obtenidos, queda:

$$e^{2x}(4ax^5 + 20ax^4 + 4bx^4 + 20ax^3 + 16bx^3 + 4cx^3 + 12bx^2 + 12cx^2 + 2dx^2 + 6cx + 8dx + 2d) -$$

$$- e^{2x}(8ax^5 + 20ax^4 + 8bx^4 + 16bx^3 + 8cx^3 + 12cx^2 + 8dx^2 + 8dx) +$$

$$+ e^{2x}(4ax^5 + 4bx^4 + 4cx^3 + 4dx^2) = x^3 \cdot e^{2x}\text{; esto es:}$$

$$e^{2x}(20ax^3 + 12bx^2 - 2dx^2 + 6cx + 2d) = e^{2x} \cdot x^3;$$

$20a = 1$; $a = \frac{1}{20}$; $b = 0$; $c = 0$; $d = 0$; con lo que la solución particular será:

$$y_p = \frac{x^3}{20} \times x^2 \times e^{2x} = \frac{x^5}{20} \times e^{2x};$$

y la solución general de la EDO será:

$$y(x) = y^* + y_p = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + \frac{x^5}{20} \times e^{2x}.$$

Por aplicación, ahora, de las condiciones iniciales dadas en el propio enunciado del problema planteado, se tendrá que:

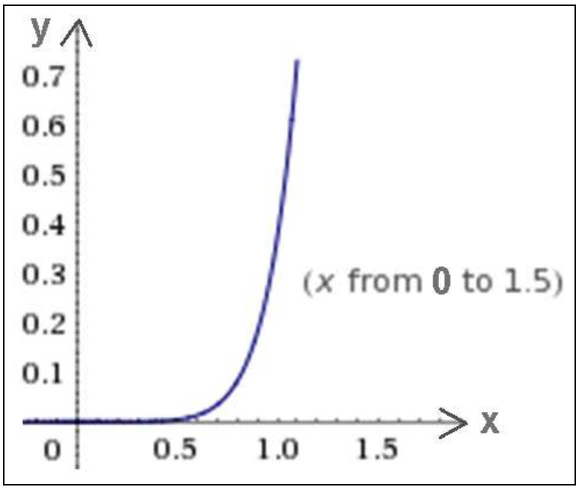
$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0; \\ y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{2x} + 2c_2 x \cdot e^{2x} + \frac{x^4}{4} \times e^{2x} + \frac{x^5}{10} \times e^{2x}; \\ y'(0) = 2c_1 + c_2 = 0\ ; \quad c_2 = 0; \end{cases}$$

y la solución particular buscada, ya obtenida anteriormente, será la siguiente:

$$y(x) = \frac{x^5}{20} \times e^{2x} \text{, c. s. q. d.}$$

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 \cdot e^{2x}}{20} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Ejemplo 3

Resolver la siguiente función de oferta de un bien normal, tal que cumple: $y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}$, siendo $y(0) = 2$ € , $y'(0) = 6$, con *x* expresada en miles de unidades e *y* en euros, y hallar la elasticidad arco correspondiente entre las cantidades x = 400 ud. y x = 800 ud. de producto.

Solución:

Al aplicar transformadas de Laplace a la ecuación dada recordaremos la fórmula de la transformada de las derivadas de una función, utilizaremos los valores de las condiciones iniciales y para la integral particular del segundo miembro la fórmula que da la transformada del producto de una función por una potencia de x. Todo esto nos lleva a:

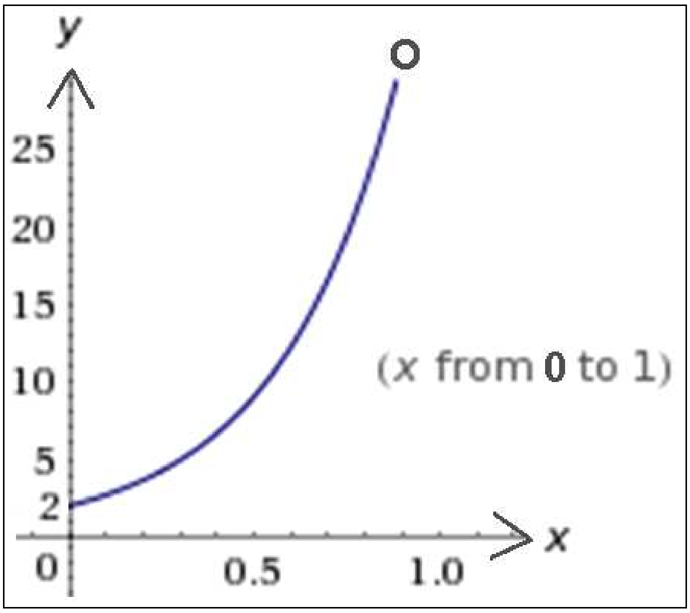
$$s^2L[y] - 2s - 6 - 6sL[y] + 12 + 9L[y] = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right).$$

Operando adecuadamente, queda:

$$\left(s^2 - 6s + 9\right)L[y] = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3} \quad \Rightarrow \quad L[y] = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}.$$

Observando que: $\frac{2}{(s-3)^5} = \frac{1}{12}\frac{d^4}{ds^4}\left(\frac{1}{s-3}\right) = \frac{1}{12}L^{-1}\left[x^4e^{3x}\right].$

La solución o integral particular buscada es, pues, la función generatriz Laplace siguiente: $y = 2e^{3x} + \frac{x^4e^{3x}}{12}$, con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x → ∞ también y → ∞. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2e^{3x}}{x} + \frac{x^3 \cdot e^{3x}}{12}\right) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Si ahora estudiamos la elasticidad arco entre los puntos de la curva de oferta O_1(0'4, 6'65) y O_2(0'8, 22'42), se tendrá que:

$$e_o = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{0'8 - 0'4}{0'8 + 0'4} \times \frac{22'42 + 6'65}{22'42 - 6'65} = \frac{1}{3} \times \frac{29'07}{15'77} = 0'61 < 1,$$

por lo que resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

Ejemplo 4

Determinar si la siguiente función económica de un bien normal es de oferta o de demanda: $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-x}$, siendo $y(0) = y'(0) = 0$.

Solución:

Al aplicar la transformación de Laplace a los dos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas, obtendremos que:

$$\left(s^2 + 4s + 6\right)L[y] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{s(s+1)} \Rightarrow L[y] = \frac{2s+1}{s(s+1)\left(s^2 + 4s + 6\right)}.$$

Descomponiendo esta fracción en suma de fracciones simples, se tendrá que:

$$\frac{2s+1}{s(s+1)\left(s^2+4s+6\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+6}\,.$$

Efectuado la suma e identificando los numeradores, se obtiene:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{1}{3} \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{s+1}{s(s+1)\left(s^2+4s+6\right)} = \frac{1}{6s} + \frac{1}{3(s+1)} - \frac{3s+10}{6\left(s^2+4s+6\right)}\,.$$

Para hallar la transformada inversa de la tercera fracción, la escribiremos del siguiente modo:

$$\frac{3s+10}{6\,(s^2+4s+6)} = 3\frac{s+2}{6\,[(s+2)^2+2]} + 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{6\,[(s+2)^2+2]}\,.$$

Con esto, la solución o integral particular pedida vendrá dada por la función generatriz Laplace siguiente:

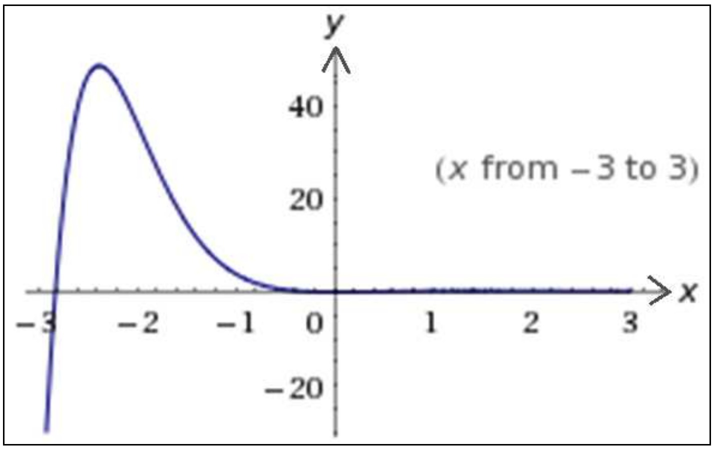
$$y = \frac{1}{6} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{1}{2}e^{-2x}\cos x\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2x}\sin x\sqrt{2} = \frac{1+2e^{-x}}{6} - e^{-2x}\left(\frac{\cos x\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sin x\sqrt{2}}{3}\right).$$

Es fácil darse cuenta que dicha función tiene una asíntota horizontal de ecuación: y = 1/6 € , puesto que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \frac{1}{6} = 0'166667,$ con los siguientes valores:

$$\begin{cases} x = 0\,, & y = 0 \\ x \approx 1\,, & y \approx 0.215766 \\ x \approx 2\,, & y \approx 0.217828 \\ x \approx 3\,, & y \approx 0.184865 \\ x \approx 4\,, & y \approx 0.172729 \\ x \approx 5\,, & y \approx 0.168881 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Luego, al ser decreciente, podría tratarse perfectamente de una función de demanda, con solo significación económica en el cuadrante positivo. Así:



Ejemplo 5

Resolver la siguiente función económica temporal de los resultados contables de una empresa: y'' + 16y = cos 4t , con los valores iniciales: y(0) = 0, y'(0) = 1, con *t* en décadas e *y* expresada en millones de euros. Se desea conocer, en la primera década de funcionamiento del negocio, los instantes temporales en que se anulen los beneficios y en que éstos sean máximos.

Solución:

Aplicando las transformadas de Laplace, se tiene que:

$$s^2 L[y] - 1 + 16 L[y] = \frac{s}{s^2+16} \Rightarrow L[y] = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2} .$$

Como: $\dfrac{s}{(s^2+16)^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+16}\right) = \dfrac{1}{2} L\left[\dfrac{t \sin 4t}{4}\right],$

y se tiene la solución o integral particular buscada:

$$y(t) = \frac{\sin 4t}{4} + \frac{t \cdot \sin 4t}{8} = \frac{(2+t)\sin 4t}{8},$$

y los beneficios se anularán para: sin 4t = 0 $\Rightarrow$ t = ($\pi \cdot$n)/4 , $\forall$ n $\in$ $\mathbf{N}$, y con n = 1 se obtiene t = 0'7854 $\cong$ 7'85 años.

Por otra parte, el beneficio máximo se alcanzará en el momento en que (condición necesaria o de primer grado):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sin 4t + 8 \cdot \cos 4t + 4t \cdot \cos 4t}{8} = 0,$$ que se cumple en los puntos:

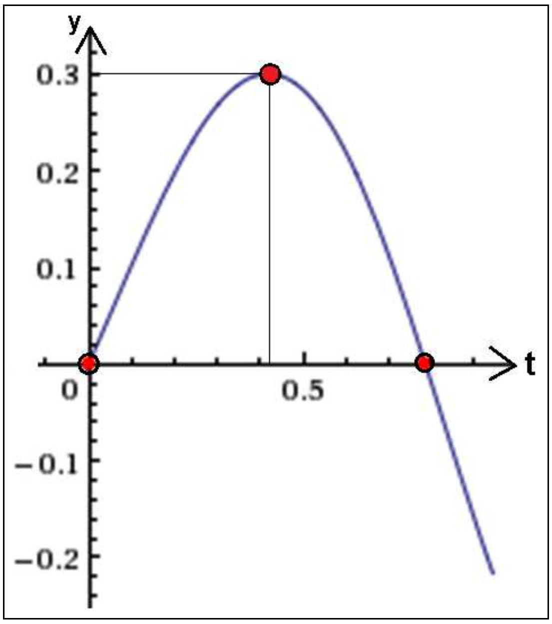
$$\begin{cases} t \approx 0{,}418450608815893\ldots \\ t \approx 1{,}19760345300961\ldots \\ t \approx 1{,}97918153882677\ldots \\ t \approx 2{,}76200625423664\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

, resultando el primer valor el único válido dentro de la primera década, o sea:

t = 0’4185 ≅ 4’19 años, con un valor de:

$$y = \frac{(2+t)\sin 4t}{8} = \frac{2'41845 \cdot \sin 1'6738}{8} \cong 0'30 \equiv 300.000 \text{ € }.$$

La correspondiente representación gráfica es la siguiente:



Ejemplo 6

La función de los resultados de una empresa viene dada por la expresión siguiente: y’’ + 4y = 5 sin 2t, siendo: y(0) = 1, $y'(0) = -\frac{5}{4}$. Se desea: a) describir analítica y gráficamente su trayectoria temporal, y b) averiguar cuál será el primer año en que dicha empresa comience a experimentar pérdidas.

Solución:

a) Al aplicar las transformadas de Laplace a ambos miembros de la ecuación diferencial ordinaria anterior y tener en cuenta las condiciones iniciales dadas, se obtiene la expresión:

$$s^2L[y]-s+\frac{5}{4}+4L[y]=\frac{10}{s^2+4}\text{, o también:}$$

$$L[y](s^2+4)-s+\frac{5}{4}=\frac{10}{s^2+4}\text{, esto es: } L[y]=\frac{10}{s^2+4}+s-\frac{5}{4}\text{,}$$

de donde se deduce que: $L[y]=\frac{10}{(s^2+4)^2}+\frac{s}{s^2+4}-\frac{5}{4(s^2+4)}$.

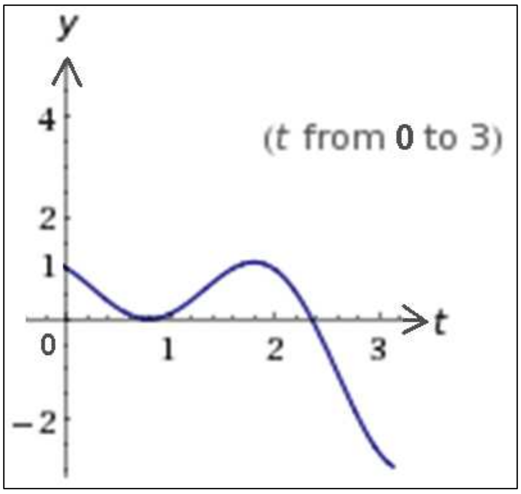
Para hallar la transformada inversa del primer sumando, procedemos del siguiente modo:

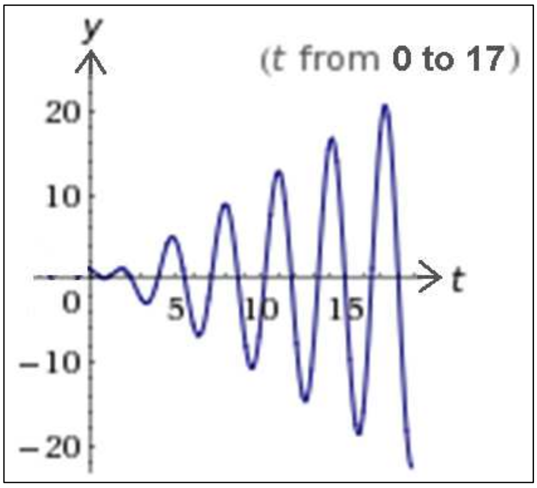
$$\frac{10}{(s^2+4)^2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\cdot\frac{2}{s^2+4}=\frac{5}{2}L[\sin 2t]\cdot L[\sin 2t]=\frac{5}{2}L[\sin 2t*\sin 2t]=$$
$$=\frac{5}{2}L\left[\int_0^t \sin 2u\sin 2(t-u)du\right]=-\frac{5}{4}L\left[\int_0^t[\cos 2t-\cos 2(2u-t)du]\right]=$$
$$=-\frac{5}{4}\left(t\cos 2t-\frac{\sin 2t}{2}\right)=-\frac{5}{4}(t\cos 2t-\sin t\cdot\cos t).$$

Las transformadas inversas de los otros dos sumandos, son inmediatas, por lo que la solución pedida es la siguiente:

$$y(t)=-\frac{5}{4}\left(t\cos 2t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+\cos 2t-\frac{5}{8}\sin 2t=\frac{-5t\cos 2t}{4}+\cos 2t=\cos 2t(1-\frac{5t}{4})$$

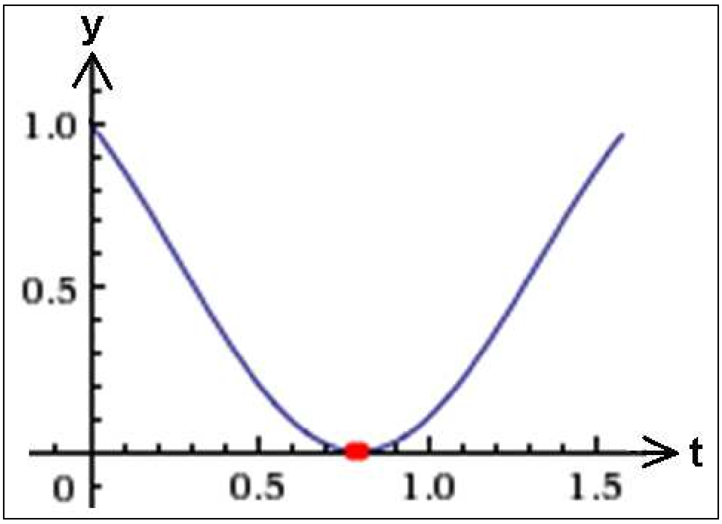
, con las siguientes representaciones gráficas:





b) Como puede verse gráficamente, a partir aproximadamente del segundo trimestre del segundo ejercicio económico, la empresa en cuestión comenzará a tener algunas pérdidas que alternará con ganancias en períodos sucesivos. También es digno de tener en cuenta que el primer resultado nulo (beneficios = pérdidas) se experimentará, según el detalle adjunto, en el instante temporal en que:

$\cos 2t(1-\frac{5t}{4}) = 0$, de donde: t = 4/5 = 0'80 años, o sea, 9'6 meses, puesto que según puede apreciarse con mayor detalle:



Ejemplo 7

Los resultados contables netos de sendos comercios de la misma cadena vienen dados por las ecuaciones respectivas: y'' + y' – 2y = t (con las condiciones iniciales: y(0) = 2 e y'(0) = -1) e y = 5t + 1, con *t* expresado en años e *y* en miles de euros. Hallar en qué instante temporal coincidirán los resultados contables netos de ambos establecimientos comerciales y en qué cuantía.

Solución:

La primera ecuación referida al primer comercio es una EDO que resolveremos por aplicación de las transformadas laplacianas, con lo que su transformada deberá verificar que:

$$p^2\eta - 2p + 1 + p\eta - 2 - 2\eta = 1/p^2;\ \eta(p^2 + p - 2) = 1/p^2 + 2p + 1,$$

de donde se deduce que:

$$\eta = \frac{2p^3 + p^2 + 1}{p^2(p^2 + p - 2)} = -\frac{1/2}{p^2} - \frac{1/4}{p} + \frac{4/3}{p-1} + \frac{11/12}{p+2},$$

cuya función generatriz Laplace es la siguiente:

$$y(t) = -L^{-1}(\frac{1/2}{p^2}) - L^{-1}(\frac{1/4}{p}) + L^{-1}(\frac{4/3}{p-1}) + L^{-1}(\frac{11/12}{p+2}) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3}e^t + \frac{11}{12}e^{-2t},$$

función que para t = 0 vale, efectivamente: $-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{11}{12} = 2$, y cuya primera derivada: y'(t) = $-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}e^t - \frac{11}{6}e^{-2t}$, para t = 0, vale, efectivamente, -1.

Como comprobación resulta evidente, por otra parte, que su integral general es:

$$y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + c_1e^t + c_2e^{-2t}$$, de donde también se cumple que:

y'(t) = $-\frac{1}{2} + c_1e^t - 2c_2e^{-2t}$, con lo que aplicando las condiciones iniciales dadas en el enunciado se obtiene que:

$$\begin{cases} y(0) = -\frac{1}{4} + c_1 + c_2 = 2 \\ y'(0) = -\frac{1}{2} + c_1 - 2c_2 = -1 \end{cases}$$

, sistema que resuelto ofrece los valores: c_1 = 4/3 y c_2 = 11/12, con lo que se tiene la integral particular:

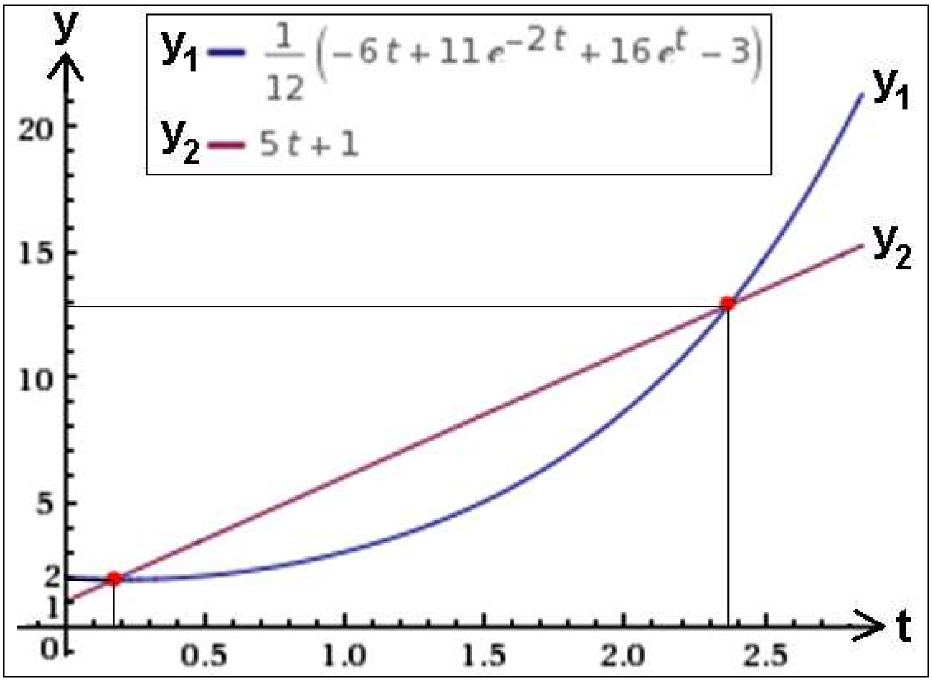
$$y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3}e^t + \frac{11}{12}e^{-2t}$$, c.s.q.d.

La ecuación correspondiente al segundo comercio dado en estudio es una recta, y la igualación de ambas ecuaciones conduce a la expresión:

$-\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{3}e^t + \frac{11}{12}e^{-2t}$ = 5t + 1, que ofrece las dos raíces reales que denotan la coincidencia de los respectivos resultados contables netos en las siguientes situaciones temporales:

t = 0'179195 ≈ 0'18 años ⇒ y = 1'895975 ≈ 1.895'98 €
t = 2'371576 ≈ 2'37 años ⇒ y = 12'85788 ≈ 12.857'88 €

, con la siguiente representación gráfica:


y
y1 — 1/12 (−6t + 11e^{−2t} + 16e^{t} − 3)
y2 — 5t + 1
y1
y2
20
15
10
5
2
1
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
t

Parte III:

Ecuaciones integrales y cálculo de variaciones.

- **Aplicaciones económicas de las ecuaciones integrales.**
- **Aplicaciones económicas de las ecuaciones integro-diferenciales.**
- **Cálculo de variaciones.**

* * * * * * *

CAPÍTULO 8a

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES I

1. TRANSFORMADA LAPLACE DE UNA INTEGRAL

Esta propiedad, de gran utilidad en el cálculo y resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales que trataremos en el presente capítulo de nuestro libro, establece que:

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(S)\text{, entonces } \int_0^t f(u)\cdot du \leftrightarrow \frac{F(S)}{S}.$$

Si definimos la función: $g(t) = \int_0^t f(u)\cdot du$, entonces, por el teorema fundamental del Cálculo Infinitesimal, se tendrá que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\cdot du = f(t) \quad y \quad g(0) = \int_0^0 f(u)\cdot du = 0.$$

Por lo tanto: $F(S) = L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = S\cdot G(S) - g(0)$.

De donde también: $F(S) = S\cdot G(S)$, y de aquí se obtiene que:

$$G(S) = L\{g(t)\} = L\left\{ \int_0^t f(u)\cdot du \right\} = \frac{F(S)}{S}.$$

Así pues, resulta que la transformada Laplace de la integral indefinida de una función (supuesta existente) es el cociente de la transformada de la función por su variable S.

2. ECUACIONES INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES RESOLUBLES POR TRANSFORMADAS DE LAPLACE

2.1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

La teoría de las ecuaciones integrales fue iniciada por Volterra y desarrollada posteriormente por Freedholm y Hilbert, a comienzos del pasado siglo XX. Problemas de índole muy diversa, que se plantean tanto en EDO como en EDP, se pueden reducir, por la vía de una función de Green apropiada, a ecuaciones integrales, proporcionando éstas una visión unificada de aquellos.

También, la teoría de las ecuaciones integrales (EI), presentada desde un punto de vista moderno, proporciona al alumno la posibilidad de entrar en contacto con el lenguaje y los métodos propios del Análisis funcional (espacios de Hilbert, desarrollos de funciones, operadores de diversa clase, etc.), disciplina clave en la investigación moderna de las ecuaciones diferenciales. Precisamente, la teoría de los espacios de Hilbert y operadores, tiene su origen en problemas planteados en ecuaciones integrales.

Este estudio fue continuado por David Hilbert mediante una serie de artículos publicados entre los años 1904 y 1910, los cuales permitieron no solo avanzar en el conocimiento de las ecuaciones integrales, sino establecer también los fundamentos de la teoría de espacios de Hilbert. Lo más curioso del caso (aunque no extraño, pues este tipo de cosas suceden en Matemáticas con cierta frecuencia), es que la teoría de espacios de Hilbert y operadores ha mostrado su utilidad no solo en el campo de las ecuaciones integrales que aquí nos ocupa, sino que a partir de mediados del siglo XX comenzó a utilizarse también en la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales (además, por supuesto, de en otras muchas ramas de la Matemática).

El tema de las ecuaciones integrales de Freedholm lineales y autoadjuntas alcanza su culminación en el desarrollo de Hilbert-Schmidt, que puede marcar el comienzo de una teoría general de desarrollos en serie de Fourier. El tratamiento de los problemas de contorno, cuyo estudio fue iniciado por Sturm y Liouville en el siglo XIX, se realiza con el punto de vista de Hilbert, que mediante el método de la función de Green los redujo a ecuaciones integrales. Esto proporciona una extraordinaria economía de métodos y demostraciones y, al mismo tiempo, supone una buena ilustración de la utilidad de las ecuaciones integrales, también por su aplicación en la Economía que es el objeto de nuestro estudio. En particular, se describe de manera muy fácil el conjunto de valores propios y funciones propias, además de algunas propiedades notables, como la complitud de tales funciones en ciertos espacios de funciones, lo que constituye un resultado importante, sin duda, para aplicar el método de separación de variables en el estudio de numerosos problemas de contorno o de tipo mixto para las EDP.

Una *ecuación integral* es una ecuación en que la función incógnita aparece dentro de una integral sin que aparezcan derivadas involucradas en la ecuación. Es decir, la incógnita forma parte también del integrando o función subintegral. Para dar solución a este problema se hace uso del mismo procedimiento empleado para solventar una ecuación diferencial ordinaria, donde debe encontrarse primero la función en términos de *s* y luego, a través de la correspondiente transformada inversa, encontrar la función en *t* que es incógnita. Como nos hallamos frente a una integral, debemos hacer uso del teorema de la convolución al objeto de encontrar la transformada de Laplace de dicha integral. En efecto, así como las ecuaciones diferenciales ligan una función incógnita de una o varias variables con sus derivadas totales o parciales, las ecuaciones integrales que aquí presentaremos someramente relacionan la función incógnita con una integral en cuyo integrando aparece la susodicha función. Se presentan tales ecuaciones en un buen número de cuestiones técnicas o económicas, proporcionando métodos que, en ocasiones, resultan harto más ventajosos que los usuales empleados en la teoría de las ecuaciones diferenciales que acabamos de estudiar, especialmente en la resolución de ciertos tipos de problemas en cuyo planteamiento intervienen condiciones de contorno.

Los tipos de ecuaciones integrales más frecuentes son los lineales, es decir, aquellos en que la función incógnita aparece linealmente bajo el signo de integración y se llaman *ecuaciones de Freedholm o de Volterra* (en honor de estos eminentes matemáticos, aunque su auténtico descubridor fue Abel[1]), según que los límites de la integral sean fijos o variables, y se clasifican en ecuaciones de *primera especie o clase* y de *segunda especie o clase* según que dicha función incógnita aparezca solamente en el integrando o también fuera de él. Valga, al respecto, el siguiente cuadro aclaratorio:

AUTOR	**ESPECIE**	**INHOMOGÉNEA**	**HOMOGÉNEA**
FREEDHOLM	1ª	$f(x) = \int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt = 0$
	2ª	$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$
VOLTERRA	1ª	$f(x) = \int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt = 0$
	2ª	$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$	$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,t)\cdot\varphi(t)\cdot dt$

Existe una conexión estrecha entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales, y de hecho algunos problemas pueden

[1] El nombre de Niels Henrik Abel (1802-1829) tiene un lugar privilegiado en el Olimpo Matemático, al lado de otros nombres gloriosos como Newton, Euler, Gauss, Cauchy o Riemann. A lo largo de su corta vida, realizó numerosas contribuciones matemáticas tan importantes como significativas. Aunque sus estudios se centraron fundamentalmente en el álgebra y en el cálculo integral, su nombre será siempre asociado a algunas ramas del análisis, particularmente a la teoría de las ecuaciones integrales, cuyo desarrollo sistemático llevaron a cabo Vito Volterra, Freedholm y Hilbert setenta años después de sus descubrimientos.

formularse como ecuación diferencial o equivalentemente como ecuación integral. Ver por ejemplo el modelo de Maxwell[2] de viscoelasticidad.

El tipo de ecuación integral más sencillo es el de una *ecuación de Freedholm* de primera clase o especie y lineal, a saber:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Donde:

φ(t) es una función desconocida o incógnita,
f(x) es una función conocida y
K(x,t) es una función de dos variables también conocida, llamada "núcleo de la ecuación integral" ("kernel"), que se supone continua y, por tanto, acotada en el intervalo completo cerrado de integración [a,b], lo mismo de la variable *x* que de la variable *t*.

El objeto del problema estriba en la determinación de la función desconocida φ(t). Nótese que los límites de integración son constantes; esto precisamente es lo que caracteriza a una *ecuación de Freedholm*. Si la función incógnita aparece también fuera de la integral, entonces se tiene una ecuación integral lineal completa de Freedholm de segunda clase o especie, esto es:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Básicamente, viene a expresar que el valor de una cantidad φ en un punto *x* es igual a un valor señalado f(x) más un promedio ponderado de su valor en los demás puntos. Las variables *x*, *t*, recorren aquí un intervalo prefijado [a,b]. La particularidad ya expresada de esta ecuación es su linealidad, en el sentido de que la función incógnita φ(t) entra en ella de modo lineal. Sin embargo, algunos problemas conducen a la

[2] **James Clerk Maxwell** (Edimburgo, Escocia, 13 de junio de 1831 – Cambridge, Inglaterra, 5 de noviembre de 1879). Físico escocés conocido principalmente por haber desarrollado la teoría electromagnética clásica, sintetizando todas las anteriores observaciones, experimentos y leyes sobre electricidad, magnetismo y aun sobre óptica, en una teoría consistente. Las ecuaciones de Maxwell demostraron que la electricidad, el magnetismo y hasta la luz, son manifestaciones del mismo fenómeno: el campo electromagnético. Desde ese momento, todas las otras leyes y ecuaciones clásicas de estas disciplinas se convirtieron en casos simplificados de las ecuaciones de Maxwell. Su trabajo sobre electromagnetismo ha sido llamado la "*segunda gran unificación en física*", después de la primera llevada a cabo por Newton. Además se le conoce por la estadística de Maxwell-Boltzmann en la teoría cinética de los gases. Maxwell fue una de las mentes matemáticas más preclaras de su tiempo, y muchos físicos lo consideran el científico del siglo XIX que más influencia tuvo sobre la física del siglo XX, habiendo hecho contribuciones fundamentales en la comprensión de la naturaleza. Muchos consideran que sus contribuciones a la ciencia son de la misma magnitud que las de Isaac Newton y Albert Einstein. En 1931, con motivo de la conmemoración del centenario de su nacimiento, Einstein describió el trabajo de Maxwell como «el más profundo y provechoso que la física ha experimentado desde los tiempos de Newton».

necesidad de considerar también ecuaciones integrales no lineales, como es el caso de la denominada *ecuación de Hammerstein* , a la que nos referiremos posteriormente y que también encontraremos en algún ejercicio suficientemente representativo de este mismo libro.

Las ecuaciones integrales surgen en problemas empíricos en los que se postula que el valor de una función en un punto depende del comportamiento de la función en una gran región de su dominio. Por consiguiente, en la exposición anterior, el valor de φ en *x* depende del integrando: K(x,t)·φ(t) integrado en el intervalo (a,b).

Como sucede con las ecuaciones diferenciales, aquella ecuación se llamará *homogénea* cuando f(x) ≡ 0, y *completa* en caso contrario. El parámetro numérico representado por la letra griega *lambda* de la segunda ecuación es un número real desconocido que desempeña el mismo papel que el de un valor propio en una expresión del álgebra lineal que ya hemos visto, por cierto, en el presente libro.

Si un límite de integración es variable, entonces se tiene una *ecuación de Volterra*. Las ecuaciones de Volterra (nombre acuñado así por el matemático rumano Train Lalesco en el año 1908), de primer y segundo tipo o especie, vienen dadas, respectivamente, por las expresiones:

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

La denominada *ecuación de Abel* pertenece a este tipo de ecuaciones integrales. De hecho, la ecuación de Volterra puede ser considerada como una ecuación de Freedholm en la que la función K(x,t) verifica la condición: "K(x,t) = 0, ∀t > x". Sin embargo, conviene destacar las ecuaciones de tipo Volterra como una clase especial ya que ellas poseen una serie de propiedades que no tienen lugar para ecuaciones arbitrarias de tipo Freedholm.

En todo lo anterior, pues, si la función *f(x)* es idénticamente nula, la ecuación integral se llama *ecuación integral homogénea*. Si *f(x)* no es cero, entonces se trata de una *ecuación integral inhomogénea* o *no homogénea*.

2.2. CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones integrales que aquí tratamos se clasifican según tres criterios dicotómicos que, combinados entre sí, dan hasta ocho tipos de ecuaciones diferentes, a saber:

- Límites de integración:
  - Ambos fijos: Ecuación integral de Freedholm.
  - Uno de ellos variable: Ecuación integral de Volterra.

- Lugar donde aparece la función incógnita:
  - Únicamente dentro de la integral: ecuación integral de primera clase o especie.
  - Tanto dentro de la integral como fuera de la misma: ecuación integral de segunda clase o especie.

- Homogeneidad, según que *f* sea o no nula:
  - Si *f* es idénticamente nula: ecuación integral homogénea.
  - Si *f* no es nula: ecuación integral inhomogénea o completa.

Las ecuaciones integrales son importantes, como ya hemos señalado, en numerosas aplicaciones. Los problemas en los que aparecen ecuaciones integrales incluyen los problemas de transferencia de energía por radiación, el problema de vibraciones de una cuerda o una membrana, los problemas de viscoelasticidad, los modelos económicos y algunos problemas de campos electromagnéticos. Algunos de estos otros problemas, como hemos visto, también pueden plantearse en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales. Tanto las ecuaciones de Freedholm como las de Volterra, son ejemplos de ecuaciones integrales lineales, debido a la linealidad de la integral respecto a la función incógnita φ(t) situada bajo la integral. Un ejemplo de ecuación integral de Volterra no-lineal de 2ª especie tendría la forma general:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, F(x,t,\varphi(t))\, dt.$$

, donde *F* es una función conocida y en que su dificultad de tratamiento sube de punto según sea la naturaleza de *F*.

Veamos, en fin, que las ecuaciones integrales suelen aparecer en determinados problemas económicos, como veremos a lo largo del presente capítulo de nuestro libro. Conviene analizar sus métodos de resolución por dos razones fundamentales:

1. Para resolver ecuaciones diferenciales con determinadas condiciones particulares de contorno. Recordemos que, en las ecuaciones de Bessel, la condición r = 0 determinaba si existía o no la función de Neumann $N_n(r)$ como solución. En las ecuaciones de Bessel modificadas, la condición $r \to \infty$ determinaba la existencia de la solución $I_n(r)$. Las ecuaciones integrales relacionan a la función incógnita, no sólo con sus valores en la frontera a través de las derivadas, sino también en

toda una región con unas condiciones previas, sin tener que añadir al final condiciones adicionales.

2. La forma de los núcleos depende de los valores de contorno. Por lo tanto, las ecuaciones integrales son compactas (autoconsistentes) y pueden ser una forma más poderosa o conveniente para resolver problemas que las ecuaciones diferenciales. Además, existen ciertos problemas económicos que no admiten una forma explícita como ecuación diferencial; de ahí la novedad de su tratamiento extenso, especialmente las lineales, con numerosos ejemplos prácticos, en nuestro libro.

2.3. ECUACIONES INTEGRALES COMO ECUACIONES DE VALORES PROPIOS

Algunas ecuaciones integrales lineales homogéneas pueden entenderse como el límite continuo de un problema de valores propios. Usando la notación de índices, tenemos que una ecuación de valores propios, en un espacio vectorial de dimensión finita, puede escribirse como:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j = \lambda v_i, \quad o \qquad \mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

, donde **M** es una matriz y **v** uno de sus vectores propios o autovector asociado al valor propio o autovalor λ.

Haciendo el límite continuo mediante el cambio de los índices discretos *i* y *j* por los índices continuos *x* e *y*, se tiene la siguiente expresión:

$$\int \mathrm{d}y\, K(x,y)\varphi(y) = \lambda\varphi(x)$$

, donde la suma sobre *j* ha sido substituida por una integral sobre *y*, y la matriz M_{ij} y el vector v_i han sido substituidos por el denominado "núcleo integral" *K(x,y)* y la autofunción $\varphi(y)$ (los límites de la integral son fijos de manera análoga a la suma sobre *j*).

En general, el núcleo de la ecuación integral *K(x,y)* puede ser una distribución o función generalizada, más que una función ordinaria. Si la distribución *K* tiene soporte sólo en el punto x = y, entonces la ecuación integral se reduce a una ecuación diferencial de autovalores. Pero también puede suceder al revés en algunos casos, como se contempla en el siguiente epígrafe.

2.4. ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIDAS A ECUACIONES INTEGRALES

La formulación de muchos problemas matemáticos, físicos o económicos puede plantearse directamente en forma de ecuación integral. Incluso, en ocasiones, puede interesar convertir una ecuación diferencial, como las que venimos estudiando en nuestro libro, en una ecuación integral equivalente, con la ventaja de que la ecuación integral, aparte de incluir las condiciones de contorno, maneja un operador acotado (de hecho, frecuentemente, un operador compacto), mientras que el operador diferencial era, en general, no acotado. Esto último permite echar mano de varios resultados conocidos para operadores compactos con el fin de resolver un problema planteado en términos de ecuaciones integrales con mayor facilidad.

Ese estrecho parentesco existente entre los problemas relativos a las ecuaciones diferenciales con otros equivalentes en ecuaciones integrales no se desprende de simples transformaciones formales, si no que tiene su raíz en la propia esencia física de los problemas que pueden plantearse directamente en una u otra forma, según el punto de vista que se adopte en cada caso. El principio físico de superposición de efectos de causas concomitantes puede traducirse expresando la suma de efectos infinitesimales, con lo que obtendremos ecuaciones integrales, o bien restando efectos, es decir, hallando incrementos infinitesimales, con lo que obtendremos entonces ecuaciones diferenciales. A la dualidad de planteamientos de un mismo fenómeno corresponderá, pues, una dualidad de lenguaje matemático para expresarlo. Un ejemplo sencillo de ello lo constituye el problema físico de la cuerda vibrante.

Veamos, en fin, que toda función continua de dos variables $K(x,t)$ puede aproximarse cuanto se desee mediante un polinomio entero $P(x,t)$ el cual constituye siempre un núcleo degenerado, entendiendo como tal el que puede descomponerse en suma de productos de funciones con las variables separadas. El método anterior es, pues, aplicable para resolver una ecuación de Freedholm de 2ª especie. Si la aproximación se efectúa mediante desarrollos en serie de Taylor, precisa exigir la analiticidad del núcleo o, por lo menos, su derivabilidad hasta el orden necesario a la aproximación. Si la aproximación se efectúa en media en el intervalo [a,b] de integración (lo que resulta harto más ventajoso, especialmente para intervalos grandes) se manejarán desarrollos en polinomios ortogonales y se precisará tan solo la integrabilidad del núcleo y de su cuadrado.

Un paso al límite en este proceso conduce a la determinación de los autovalores y autofunciones resolviendo sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas. La ecuación en λ que define los valores propios viene entonces expresada mediante un determinante infinito. Tales tipos de determinantes se presentaron lo mismo a Freedholm que a Hilbert[3] al querer fundamentar la teoría de las ecuaciones integrales lineales por métodos diversos y que no podemos desarrollar aquí por obvias razones de espacio y complejidad.

Por otra parte, existe un claro nexo de unión entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra. La resolución de la ecuación diferencial lineal no homogénea o completa siguiente:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = b(x), \qquad (1)$$

con coeficientes continuos $a_i(x)$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, n$) con las condiciones iniciales:

$$y(0) = C_0,\ y'(0) = C_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}, \qquad (2)$$

puede ser reducida a la resolución de cierta ecuación integral de Volterra de segunda especie. Demostremos esto en el siguiente ejemplo de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x), \qquad (1')$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \qquad (2')$$

Hagamos ahora: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x)$. (3)

De aquí, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales (2'), se halla sucesivamente:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, \qquad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + C_1 x + C_0. \qquad (4)$$

[3] Durante los años veinte del pasado siglo, la teoría espectral de operadores tuvo sorprendentes aplicaciones a problemas únicamente planteados en espacios de Hilbert. La aparición, en el año 1932, del libro de John von Neumann "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik" y de "Linear Transformations in Hilbert Spaces and Applications in Analysis" de Marshall Stone mostraron la aparición de la teoría de operadores (en espacios de Hilbert) como una parte propia pero íntimamente relacionada con lo que se conoce ahora por *Análisis Funcional Lineal*. Por aquellos años, dicho Análisis experimentó su primer gran desarrollo. Muchas de las ideas empleadas cristalizaron en principios generales que se formularon y demostraron. Varias técnicas evolucionaron para aplicarlas a problemas lineales más generales que los planteados en los espacios de Hilbert.

Aquí hemos aplicado la denominada *fórmula de las integrales iteradas*, que constituye un importante resultado de Cauchy[4] que recoge en una integral la generalización de este proceso, a saber:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x) \cdot dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z) \cdot dz = J^n f(x) = D^{-n} f(x) .$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3) y (4), escribamos la ecuación diferencial (1) así:

$$\phi(x) + \int_0^x a_1(x)\phi(t)dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x - t)\phi(t)dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = b(x),$$

o bien:

$$\phi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x - t)]\phi(t)dt = b(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x). \quad (5)$$

Haciendo ahora el núcleo integral:

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x) \cdot (x-t)], \qquad (6)$$

$$f(x) = b(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x \cdot a_2(x) - C_0 a_2(x), \quad (7)$$

reducimos la expresión (5) a la forma: $\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)dt + f(x)$, es decir, se llega a una ecuación integral inhomogénea de Volterra de segunda especie, con $\lambda = 1$.

La existencia de una solución única de la ecuación (8) se sigue de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy (1')-(2'), para la ecuación diferencial lineal con coeficientes continuos o variables en un entorno del punto x = 0.

Recíprocamente, resolviendo la ecuación integral (8) con K y f, determinadas mediante las fórmulas (6) y (7), y substituyendo la expresión obtenida para φ(x) en la última de las ecuaciones (4), se obtiene la solución única de la ecuación (1'), que satisface a las condiciones iniciales (2').

[4] La fórmula expresada de Cauchy resulta verificable para los valores n = 1, 2, 3, …, n - 1.

3. OTROS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

3.1. MÉTODO DE LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS

Supongamos que se tiene una ecuación integral lineal inhomogénea del tipo Volterra de segunda especie como la que sigue:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \cdot y(t) \cdot dt .$$

Supondremos que f(x) es continua en el intervalo [0, a], y que el núcleo K (x, t) es continuo para $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$.

Tomemos cierta función $y_0(x)$, continua en [0, a]. Substituyendo en el segundo miembro de la ecuación integral anterior la función $y_0(x)$ en lugar de y(x) se obtiene que:

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\, y_0(t) dt .$$

La función $y_1(x)$ definida de este modo es también continua en el segmento [0, a] de la recta real. Continuando este proceso se obtiene la siguiente sucesión de funciones:

$y_0(x)$, $y_1(x)$, …, $y_i(x)$, ..., $y_n(x)$, …, donde: $y_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) y_{n-1}(t) dt$.

Según las hipótesis hechas con respecto a f(x) y a K(x, t), la sucesión $\{y_n(x)\}$ converge para $n \to \infty$ hacia la solución y(x) de la ecuación integral. Si, en particular, se toma f(x) en calidad de $y_0(x)$, entonces $y_n(x)$ serán, precisamente, las sumas parciales de la serie que determina la solución buscada de la ecuación integral. Una elección acertada de la aproximación “nula” $y_0(x)$ puede conducir, sin duda, a una convergencia rápida de la sucesión $\{y_n(x)\}$ hacia la solución deseada de la ecuación integral de tal suerte planteada.

3.2. ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEO DEGENERADO

El núcleo K(x, t) de la ecuación integral de Freedholm de segunda especie se llama *degenerado*, si éste es la suma de un número finito de productos de una función solo de *x* por una función solo de *t*, es decir, si tiene la forma siguiente:

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t); \qquad (1)$$

las funciones $a_k(x)$ y $b_k(t)$ ($\forall k = 1, 2, \ldots, n$) se considerarán continuas en el cuadrado fundamental: $a \le x, t \le b$ y linealmente independientes. La ecuación integral con núcleo degenerado (1):

$$y(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\cdot b_k(t)\right]y(t)\cdot dt=f(x), \quad (2)$$

se resuelve del siguiente modo. Escribamos la expresión anterior (2) en la forma:

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\int_a^b b_k(t)\cdot y(t)\cdot dt, \qquad (3)$$

e introduzcamos las notaciones: $\int_a^b b_k(t)\cdot y(t)\cdot dt=C_k$ ($\forall k = 1, 2, \ldots, n$). (4)

Entonces, la expresión anterior (3) toma la forma:

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(x), \qquad (5)$$

donde C_k son constantes desconocidas (puesto que la función $y(x)$ no es conocida). De este modo, la resolución de una ecuación integral con núcleo degenerado se reduce a hallar las constantes C_k ($\forall k = 1, 2, \ldots, n$). Substituyendo la expresión (5) en la ecuación integral (2), después de efectuar sencillas transformaciones, se obtiene:

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{C_m-\int_a^b b_m(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(t)\right]dt\right\}a_m(x)=0.$$

En virtud de la independencia lineal de las funciones $a_m(x)$, ($\forall\, m = 1, 2, \ldots, n$); de aquí se deduce que:

$$C_m-\int_a^b b_m(t)\left[f(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(t)\right]dt=0,$$

o bien: $C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k\int_a^b a_k(t)b_m(t)dt=\int_a^b b_m(t)f(t)dt$ ($\forall\, m = 1, 2, \ldots, n$).

Introduciendo, para simplificar la escritura, las notaciones siguientes:

$$a_{km}=\int_a^b a_k(t)b_m(t)dt, \text{ y también: } f_m=\int_a^b b_m(t)f(t)dt,$$

se obtiene que: $C_m - \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{km}C_k = f_m$, ($\forall$m = 1, 2, …, n), o bien, en forma desarrollada:

$$\left.\begin{array}{l} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \cdots - \lambda a_{1n}C_n = f_1, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})C_2 - \cdots - \lambda a_{2n}C_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \cdots + (1-\lambda a_{nn})C_n = f_n \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

Para hallar las incógnitas C_k tenemos un sistema lineal heterogéneo o no homogéneo, compatible y determinado, de *n* ecuaciones algebraicas con *n* incógnitas. El determinante de este sistema es igual a:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Si realmente $\Delta(\lambda) \neq 0$, el sistema anterior (6) tiene una solución única C_1, C_2, …, C_n, que se obtiene comúnmente por aplicación de la regla de Cramer, método de triangularización de Gauss-Jordan, método de la matriz inversa, etc. Así, por ejemplo:

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & -\lambda a_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & -\lambda a_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \ (\forall k = 1, 2, \ldots, n). \ (8)$$

La solución de la ecuación integral planteada (2) será la función y(x), determinada por la igualdad siguiente:

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x),$$

donde los coeficientes C_k ($\forall$k =1, 2, …, n) se determinan por las fórmulas (8).

Observación. El sistema anterior (6) se puede obtener si ambos miembros de la igualdad (5) se multiplican sucesivamente por a_1(x), a_2(x), …, a_n(x) y se integra desde a hasta b, o bien, si se substituye la expresión (5) para y(x) en la igualdad (4), cambiando las variables *x* por *t*.

3.3. MÉTODO DE BUBNOV-GALIORKIN

La solución aproximada de la ecuación integral siguiente que, planteada de esta forma es lineal de Freedholm de 2ª especie:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \cdot y(t) \cdot dt, \qquad (1)$$

por el método de Bubnov-Galiorkin se busca así. Escojamos un sistema de funciones $\{u_n(x)\}$, completo en L_2 (a, b), tal que para cualquier *n* las funciones $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ sean linealmente independientes, y busquemos la solución aproximada $y_n(x)$ en la forma:

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \qquad (2)$$

Los coeficientes a_k ($\forall$ k = 1, 2, …, n) se determinan del siguiente sistema lineal:

$$(y_n(x),\ u_k(x)) = (f(x),\ u_k(x)) + \lambda\left(\int_a^b K(x,t) \cdot y_n(t) \cdot dt, u_k(x)\right), \qquad (3)$$

donde (f, g) significa que: $\int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx$, y en lugar de $y_n(x)$ hay que poner: $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$. Si el valor de λ en (1) no es característico, para valores de *n* suficientemente grandes, el sistema (3) tiene solución única, y para $n \to \infty$, la solución aproximada $y_n(x)$ (2) tiende en la métrica de L_2(a, b) hacia la solución exacta y(x) de la ecuación integral planteada (1).

3.4. ECUACIÓN INTEGRAL NO LINEAL DE HAMMERSTEIN

Muchos problemas de la Física y también de la Economía se pueden reducir, en nuestra opinión, a ecuaciones integrales no lineales del tipo Hammerstein. En efecto, la forma canónica de la ecuación de Hammerstein inhomogénea y del tipo Freedholm de 1ª especie es la siguiente:

$$y(x) = \int_a^b K(x,t) \cdot f(t, y(t)) \cdot dt, \qquad (1)$$

donde K(x, t), f(t, u) son funciones dadas; e y(x) es la función incógnita.

A ecuaciones del tipo (1) se reducen con facilidad las ecuaciones del tipo (2ª especie):

$$y(x) = \int_a^b K(x,t) \cdot f(t, y(t)) \cdot dt + \Psi(x), \qquad (1')$$

donde $\Psi(x)$ es una función conocida, de tal modo que la diferencia existente entre las ecuaciones homogéneas y no homogéneas, de importancia notable en el caso lineal, en el caso no lineal no tiene casi ningún valor. La función K(x, t) constituye, como sabemos, el núcleo de la ecuación (1).

Sea, pues, K(x, t) un núcleo degenerado, es decir, que:

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\, b_i(t). \qquad (2)$$

En este caso, la ecuación (1) anterior toma la forma:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\int_a^b b_i(t)\cdot f(t,y(t))dt, \qquad (3)$$

y a continuación, hagamos: $C_i=\int_a^b b_i(t)f(t,y(t))dt$, ($\forall$ i = 1, 2, …, m) (4)

donde C_i son constantes desconocidas por ahora. Entonces, en virtud de (3), tendremos que:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x). \qquad (5)$$

Substituyendo en las igualdades (4) la expresión (5) para y(x), se obtienen *m* ecuaciones (en general, trascendentes), que contienen *m* magnitudes desconocidas $C_1, C_2, \ldots, C_m$, a saber:

$$C_i= \Psi_i(C_1, C_2, \ldots, C_m) \quad (\forall\ i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (6)$$

En el caso en que f(t, u) sea un polinomio con respecto a *u*, es decir, si:

$$f(t, u) = p_0(t)+p_1(t)u+\ldots+p_n(t)u^n = \sum_{1=0}^{n} p_i(t)\cdot u^i, \quad (7)$$

donde $p_0(t), \ldots, p_n(t)$ son, por ejemplo, funciones continuas de *t* en el segmento [a, b], el sistema anterior (6) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas con respecto a $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Por otra parte, si existe una solución al sistema (6), es decir, si existen *m* números: $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_m^0$, tales que, al ser substituidos en el sistema (6), reducen sus ecuaciones a identidades, entonces existe una solución de la ecuación integral (3), que se determina por la igualdad (5), esto es:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i^0 a_i(x).$$

Resulta evidente que el número de soluciones (en general, complejas) de la ecuación integral (3) es igual al número de soluciones del sistema (6).

3.5. TEOREMA DE EFROS GENERALIZADO DEL PRODUCTO

La resolución de algunas ecuaciones integrales singulares puede llevarse a cabo mediante la aplicación del teorema de Efros (o teorema generalizado del producto). En efecto, sean:

$$\begin{cases} y(x) = L^{-1}[\phi(p)] \\ u(x,\tau) = L^{-1}[U(p)\cdot e^{-\tau q(p)}] \end{cases}$$

siendo U(p) y q(p) funciones analíticas. Entonces se cumple que:

$$\phi(q(p))\cdot U(p) = L^{-1}[\int_0^\infty y(\tau)\cdot u(x,\tau)\cdot d\tau].$$

Este es el *teorema generalizado del producto* (teorema de Efros). Si $u(x,\tau) = u(x-\tau)$, entonces q(p) ≡ p, y se obtiene el *teorema común del producto*, a saber:

$$\phi(p)\cdot U(p) = L^{-1}[\int_0^\infty y(\tau)\cdot u(x-\tau)\cdot d\tau].$$

Si $U(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, entonces también: $u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\cdot x}} e^{-\frac{\tau^2}{4x}}$.

Por esto, si se sabe que: ϕ(p) = L[y(x)], por el teorema de Efros se halla la función objeto para $\frac{\phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$, esto es:

$$\frac{\phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot x}}\int_0^\infty y(\tau)\cdot e^{-\frac{\tau^2}{4x}}\cdot d\tau].$$

4. APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

4.1. CONCEPTUALIZACIÓN

El cálculo de variaciones es un problema matemático consistente en buscar máximos y mínimos (o más generalmente extremos relativos) de funcionales continuos definidos sobre algún espacio funcional. Constituyen una generalización del cálculo elemental de máximos y mínimos de funciones reales de una variable. Como es sabido, uno de los problemas típicos en cálculo diferencial es el de encontrar el valor numérico de *x* para el cual la función f(x) alcanza un valor extremo (máximo o mínimo); el campo numérico en el cual hay que buscar estos valores posee propiedades perfectamente conocidas. En cambio, en el cálculo de variaciones el problema es encontrar una cierta función uniforme y = f(x), varias veces derivable, para la cual un funcional A(y) alcance un valor extremo. El funcional antedicho está compuesto por una integral que depende de *x*, de la función f(x) y, en su caso, además, de algunas de sus derivadas. Las incógnitas son aquí infinitas y el campo funcional en el que se buscan las soluciones es de un grado de arbitrariedad tan amplio que se impone restringirlo para hacerlo analíticamente manejable. Se comprende, así mismo, la dificultad de hallar condiciones suficientes que aseguren la existencia de la solución sin efectuar un estudio previo del campo funcional en que se opere.

El cálculo de variaciones se desarrolló a partir del problema de la curva braquistócrona, planteado inicialmente por Johann Bernouilli (1696). Inmediatamente este problema captó la atención de Jakob Bernouilli y del Marqués de L'Hôpital, aunque fue Leonhard Euler el primero que elaboró una teoría del cálculo variacional. Las contribuciones de Euler se iniciaron en 1733 con su *Elementa Calculi Variationum* ('Elementos del cálculo de variaciones') que da nombre a esta disciplina.

Lagrange contribuyó extensamente a la teoría y Legendre (1786) asentó un método, no enteramente satisfactorio para distinguir entre máximos y mínimos. Isaac Newton y Gottfried Leibniz también prestaron atención a este asunto. Otros trabajos destacados fueron los de Vincenzo Brunacci (1810), Carl Friedrich Gauss (1829), Siméon Poisson (1831), Mijaíl Ostrogradski (1834) y Carl Jacobi (1837).

Un trabajo general particularmente importante es el de Sarrus (1842) que fue resumido por Cauchy (1844). Otros trabajos destacados posteriores son los de Strauch (1849), Jellett (1850), Otto Hesse (1857), Alfred Clebsch (1858) y Carll (1885), aunque quizá el más relevante de los trabajos llevados a cabo durante el siglo XIX es el aportado por Weierstrass. Este importante trabajo fue una referencia estándar y es el primero que trata el cálculo de variaciones sobre una base firme y rigurosa.

Los problemas 20 y 23 de Hilbert, planteados en el año 1900, estimularon algunos desarrollos posteriores. Durante el siglo XX, David Hilbert, Emmy Noether, Leonida Tonelli, Henri Lebesgue y Jacques Hadamard, entre otros, hicieron contribuciones notables. Marston Morse aplicó el cálculo de variaciones a lo que actualmente se conoce como "teoría de Morse". Lev Semenovich Pontryagin, Ralph Rockafellar y Clarke desarrollaron nuevas herramientas matemáticas dentro de la teoría del control óptimo, generalizando el cálculo de variaciones.

4.2. EXTREMOS DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

4.2.1. Integrando con derivadas de primer orden

Sea φ(x, y, y') una función continua en la región a≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d, c' ≤ y' ≤ d', que posee derivadas parciales primeras y segundas también continuas y sea, además y = f(x) una función continua, definida en el intervalo [a,b] y con derivada continua en el intervalo a ≤ x ≤ b y tal que f(a) = b y f(b) = d.

Por tanto, la función φ[x, f(x), f'(x)] es función continua de x en el intervalo cerrado [a, b] y la integral definida:

$$A(y) = \int_a^b \varphi[x, f(x), f'(x)]\, dx ,$$

tendrá un valor finito, que dependerá de la función *f* elegida, esto es, la integral adquiere un valor perfectamente determinado para cada función *f*, que cumple las condiciones anteriores, por tanto es una funcional de f(x).

El primer problema del cálculo de variaciones es el de investigar si, entre todas las curvas planas que pasando por los puntos (a, c) y (b, d) y cumpliendo las citadas condiciones, existe alguna curva para la que A(y) alcance un valor máximo o un mínimo; una tal curva, si existe, recibe el nombre de "extremal", y solamente en ella puede alcanzarse un extremo de la funcional. Es fácil ver que el carácter extremal de una curva en [a,b] implica el mismo carácter en todo intervalo parcial [m,n], pues si existiera en [m,n] otro arco de curva que diera mayor (menor) valor a la integral anterior, complementándolo con los arcos de extremal entre a,m y entre n,b, tendríamos una curva que ofrecería, así mismo, mayor (menor) valor a la integral A(y) que la extremal considerada, en contra de la definición.

Ello posee singular interés por sus aplicaciones en la resolución de ecuaciones integrales de Freedholm que expresen funciones económicas que interese maximizar (de beneficio, de ingreso, de utilidad, de producción) o bien minimizar (caso de las funciones de coste).

Si la función f(x) es una extremal de la funcional A(y), se verificará que:

$$A(y) = \int_a^b \varphi[x, f(x), f'(x)]\, dx ,$$

será, en el recinto considerado, constantemente mayor o menor que:

$$A(\lambda) = \int_a^b \varphi[x, f(x) + \lambda\eta(x), f'(x) + \lambda\eta'(x)]\, dx ,$$

donde $\eta(x)$ es una función continua cualquiera, con derivada continua, tal que: $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y λ es un número que se puede tomar tan pequeño como se quiera. Obsérvese, por otra parte, que se cumple que: $A(0) = A$.

La función $A(\lambda)$ se puede desarrollar en serie de Taylor, obteniéndose:

$$A(\lambda) = A(0) + \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 + \frac{\lambda^3}{3!} A_3 + \dots \ ,$$

donde A_i representa precisamente el valor que toma la derivada i-ésima de $A(\lambda)$, para $\lambda = 0$.

El cálculo de variaciones tal como aquí se trata introduce la terminología y notación siguientes: λA_1, recibe el nombre de variación primera y se escribe δA; $\lambda^2 A_2$ se designa por variación segunda, notándose $\delta^2 A$, etc. Para que $A(0) = A$ se conserve constantemente mayor o menor que $A(\lambda)$, para un valor suficientemente pequeño de λ, es necesario que $A_1 = 0$, pues sino la diferencia:

$$A(\lambda) - A(0) = \lambda A_1 + \frac{\lambda^2}{2!} A_2 + \frac{\lambda^3}{3!} A_3 + \dots \ ,$$

no mantendría signo constante.

Por tanto, resulta que es condición necesaria para que f(x) sea extremal de $A(y) = \int_a^b \varphi(x, y, y')\, dx$,que la función f(x) anule a A_1 o, lo que es lo mismo, que anule a la variación primera de A, esto es: $\left[\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} = 0$ que se puede escribir así: $\int_a^b \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} \eta'(x)\right] dx = 0$, donde y e y' representan a f(x) y f'(x).

La expresión anterior, integrando por partes el segundo sumando del integrando o función subintegral, resulta ser la siguiente:

$$\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y} \eta(x) dx + \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y'} \eta'(x) dx = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial y} \eta(x) dx + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y'} \cdot \eta(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) \eta(x) dx =$$

$= \int_a^b \eta(x) \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right] dx$, puesto que $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y'} \eta(x)\right]_a^b$ se anula por las condiciones impuestas a $\eta(x)$.

Como para que se anule la última integral para cualquier $\eta(x)$, que cumpla las condiciones exigidas, basta que se cumpla:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 0 \ , \qquad [\mathrm{I}]$$

resulta que la condición necesaria de optimalidad para que f(x) sea extremal de A es que f(x) sea solución de la ecuación diferencial [I].

La ecuación diferencial anterior recibe el nombre de ecuación de Euler-Lagrange-Poisson. Su carácter *necesario* indica que sólo entre las soluciones así obtenidas se hallará la buscada. Criterios analíticos de *suficiencia* resultan difíciles de formular y serán sistemáticamente omitidos de nuestro estudio dado que, afortunadamente, en la mayoría de los problemas de aplicación económica su propia naturaleza basta para comprobar la validez de dichas soluciones.

Como además sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\cdot\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}y' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}y'' \ ,$$

resulta que la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson toma la forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}y' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0} \ ,$$

que resulta ser una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Insistimos en que la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson representa sólo una condición *necesaria* o de primer grado; los criterios de *suficiencia* o de segundo grado son, en general, de gran complicación, por lo que no encuadran en la línea elemental que hemos seguido; ahora bien, en la mayoría de los problemas prácticos, la misma naturaleza del problema económico proporciona elementos suficientes para la determinación de la solución correcta.

Por otra parte, la integración de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson proporcionará una función dependiente de dos constantes arbitrarias que, al menos teóricamente, quedarán determinadas por las condiciones de pasar la curva y = f(x) por los puntos (a, c) y (b, d), problema éste de contorno que, con frecuencia, resulta más difícil de resolver que la propia integración.

La integración de la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson puede presentar serias dificultades, pero en los siguientes casos, su integración se consigue con relativa facilidad, a saber:

a) Si la función φ no contiene explícitamente la *y*, se deduce de:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 0\,,$$

que: $\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \text{cte.}$ y la integración se logra por una única cuadratura.

b) Si φ no contiene a y', resulta análogamente que: $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$

Este será precisamente el caso usual en el que nos encontraremos en la resolución de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales, como tendremos ocasión de comprobar en algunos ejercicios del capítulo siguiente. Se tratará, entonces, de una ecuación algebraica que solo tendrá solución si, por casualidad, se cumplen las condiciones de frontera (la otra variable actúa como una constante).

c) Si φ sólo depende de y', la ecuación:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'}y' + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\,,$$

se reduce a la siguiente: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}y'' = 0$, esto es, a y" = 0, y por tanto, todos los extremales serán rectas.

d) Un caso interesante que puede presentarse en las aplicaciones económicas es aquél en el cual la función φ, no contiene la variable *x*. Entonces, su diferencial total es: $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy'$.

Por otra parte, de: $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)$, se obtiene que:

$$d\varphi = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)dy + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy' = y'd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}dy' = d\left(y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right).$$

Luego resultará que: $\varphi = \int d\left(y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + k$, ecuación que se resuelve mediante una única cuadratura y donde k es una constante arbitraria de integración.

4.2.2. Integrando con derivadas de orden superior al primero

Para fijar ideas, supongamos ahora que φ es función de x, y, y', e y''. Entonces la expresión de: $\left[\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=0} = 0$, sería:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta'(x) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\eta''(x)\right]\cdot dx = 0 .$$

Integrando por partes el segundo sumando una vez, el tercero dos veces, y teniendo en cuenta que η(a) = η(b) = 0, resultará:

$$\int_a^b \left[\eta(x)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right)\right]\cdot dx = 0 ,$$

de donde la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, en este caso, adopta la forma:

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right) = 0},$$

que constituye ecuación diferencial de cuarto orden cuya integración proporciona, en general, cuatro constantes que se determinan por las condiciones de pasar la extremal por los puntos dados y tener en dichos puntos tangentes dadas.

La generalización a que el integrando o función subintegral contenga derivadas de orden superior al segundo resulta inmediata.

4.2.3. Integrando con varias funciones

Sea:

$$A(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_a^b \varphi(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, ..., y_n, y'_n)\cdot dx .$$

Para determinar las condiciones necesarias de extremos de la funcional A, variemos una sola de las funciones, dejando las demás invariables, estando por tanto, en el caso general. Reiterando el procedimiento descrito, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'_i}\right) = 0, \qquad \forall\ i = 1, 2, \dots, n,$$

cuyas constantes de integración se determinan con las condiciones de contorno. Análogamente se procede si aparecen en el integrando más de dos funciones o bien si las derivadas de las mismas son de orden superior, llegándose entonces a sistemas de más ecuaciones o de mayor orden.

4.2.4. Integrando con funciones ligadas mediante relaciones

Hasta ahora hemos considerado diversos problemas de cálculo de variaciones en los cuales la función o funciones incógnitas podían ser variadas arbitrariamente, y justamente en la arbitrariedad de dichas variaciones fundábamos el razonamiento conducente a la ecuación diferencial o al sistema de ecuaciones entre cuyas soluciones deben hallarse las extremales buscadas, es decir, las curvas que hacen estacionaria la integral. En las aplicaciones económicas ocurre con frecuencia, no obstante, que las curvas extremales no admiten variaciones independientes sino ligadas por ciertas condiciones.

Sea: $A(y,z) = \int_a^b \varphi(x,y,y',z,z')\cdot dx$, estando ligadas z e y por la relación: F(x, y, z) = 0. El método seguido en el apartado anterior, deja aquí de ser válido, puesto que presuponía la independencia de las funciones consideradas.

Siguiendo el método anterior, podríamos escribir:

$$A(\lambda) = \int_a^b \varphi[x, y(x) + \lambda\eta_1(x), y'(x) + \lambda\eta'_1(x), z(x) + \lambda\eta_2(x), z'(x) + \lambda\eta'_2(x)]dx\ ,$$

o bien, en términos de variaciones[5]:

$$\delta A = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\right)\cdot\delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z'}\right)\right)\cdot\delta z\right]\cdot dx = 0\ ,$$

verificándose, a partir de la condición:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0\ .$$

[5] El símbolo de variación δ representa la diferencia infinitamente pequeña o variación de la función *y* al pasar de la curva extremal a otra infinitamente próxima y se expresa en los tratados clásicos por δy. Este símbolo es, pues, permutable con el de derivación respecto a la variable independiente, lo que permite llegar a la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson razonando a la manera clásica del Cálculo de variaciones y que conviene que el amable lector/a conozca por hallarse todavía reproducida en no pocos tratados al respecto.

Eliminando δy y δz, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)=0 \\ \lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)=0 \end{aligned}\right\}$$

que con F(x, y, z) = 0 determinan las soluciones buscadas.

Pero las dos primeras ecuaciones anteriores equivalen a:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda F+\varphi)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)=0 \\ \frac{\partial(\lambda F+\varphi)}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\right)=0 \end{aligned}\right\}$$

lo que equivale a aplicar el método general al funcional:

$$A^*(y,z)=\int_a^b[\lambda F+\varphi]\cdot dx\,,$$

método éste que recuerda el de los multiplicadores u operadores de Lagrange para la resolución de los extremos (máximos y mínimos) condicionados.

5. RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS

5.1. ECUACIONES INTEGRALES DE VOLTERRA

Ejemplo 1

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, como es el caso del pescado y del marisco, se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 40 - 8x \\ O \rightarrow y = x + \int_0^x y(t)\cdot \sin(x-t)\cdot dt \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/kg. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en toneladas/mes. Se trata de estudiar el equilibrio del mercado y el ingreso anual estimado del pescadero.

Solución:

La función de oferta viene expresada como una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie del tipo de convolución con λ = 1, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

Veamos que esta ecuación integral se puede escribir, teniendo en cuenta la definición de la convolución de las dos funciones *y(x)* y *sin x*, como: $y(x) = x + y(x)*\sin x$. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación y aplicando el teorema de convolución (véase el epígrafe 3 del capítulo anterior), se tendrá que:

$$L(y) = L(x) + L(y)\cdot L(\sin x) =$$

$$= \frac{1}{S^2} + \frac{L(y)}{S^2+1} = \frac{S^2+1}{S^2(S^2+1)} + \frac{S^2 \cdot L(y)}{S^2(S^2+1)} = \frac{S^2+1+S^2\cdot L(y)}{S^4+S^2}, \text{ de donde:}$$

$$L(y)\cdot(S^4 + S^2) = S^2 + 1 + S^2\cdot L(y) = S^4\cdot L(y) + S^2\cdot L(y), \text{ y entonces:}$$

$$L(y) = \frac{S^2+1}{S^4} = \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^4}, \text{ de donde se tiene la función generatriz Laplace:}$$

$$\boxed{y(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{S^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{S^4}\right) = x + \frac{x^3}{3!} = x + \frac{x^3}{6}},$$

que es, por cierto, la solución buscada, tal como se puede verificar por substitución directa como sigue:

$$y(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{6}\right)\cdot \sin(x-t)\cdot dt = x + \left[\frac{t^2}{6}[3\cdot\sin(x-t) + t\cdot\cos(x-t)]\right]_0^x = x + \frac{x^3}{6},$$

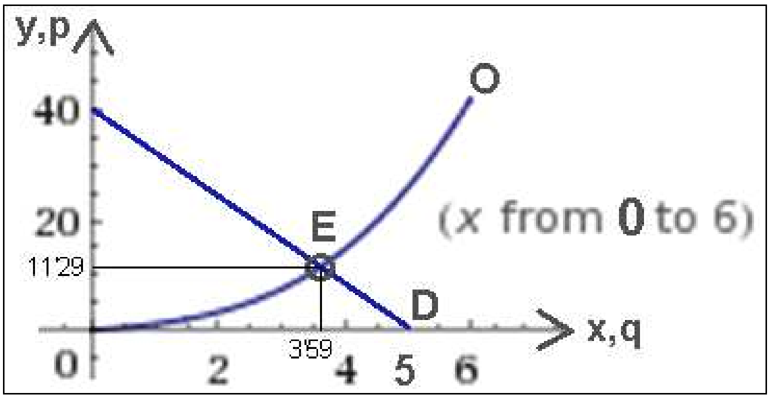
que puede comprobarse mediante la resolución de esta integral trigonométrica aplicando las fórmulas de integración por partes y de reducción pertinentes. Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 40 - 8x \\ O \rightarrow y = x + \dfrac{x^3}{6} \end{cases}$$

$40 - 8x = x + \frac{x^3}{6}$; $x^3 + 54x - 240 = 0$, cuya única solución real es:

x = 3'5886 ≈ 3'59. En este caso: y = 40 – 8·3'5886 = 11'29, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio medio de 11'29 €/kg. y una cantidad de 3.589 kg./mes de producto diverso (pescado y marisco).

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una parábola cúbica por lo que se refiere a la función de oferta, así como del punto de equilibrio del mercado, se exponen a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas cartesianas rectangulares):



Por otra parte, en el caso de la función de oferta se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x^2}{6} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Así mismo los ingresos brutos del pescadero vendrán dados por:

$$I = p \times q = 11'29 \text{ €/kg.} \times 3.589 \text{ kg./mes} \times 12 \text{ meses/año} = $$
$$= 486.237'72 \text{ €/año.}$$

Ejemplo 2

En una bodega de venta de vinos, que actúa en un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \to f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 11 \\ O \to y = 15x + 5 \end{cases}$$

, siendo *y* el precio medio (p) expresado en euros/bot. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de botellas/día. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad arco de la función de demanda entre los puntos en que se anula la cantidad del vino demandado y el de equilibrio, así como la elasticidad puntual en este último punto, c) de hallar los ingresos brutos anuales del bodeguero, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) La función de demanda viene expresada como una ecuación integral, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x)+\int_0^x f(u)\cdot du\right\}=L\{11\}\Rightarrow L\{f(x)\}+L\left\{\int_0^x f(u)\cdot du\right\}=L\{11\}\Rightarrow F(S)+\frac{F(S)}{S}=\frac{11}{S},$$

donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 11 \Rightarrow F(S)(S+1) = 11 \Rightarrow F(S)=\frac{11}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda o función generatriz Laplace, a saber:

$$\boxed{f(x)=L^{-1}\left\{\frac{11}{S+1}\right\}=11\cdot e^{-x}} \to \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$11\cdot e^{-x}+\int_0^x 11\cdot e^{-u}\cdot du=11$, o lo que es lo mismo: $e^{-x}+\int_0^x e^{-u}\cdot du=1$. En efecto:

$$e^{-x}-\left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x}-e^{-x}+e^0=1, \text{ c.s.q.d.}$$

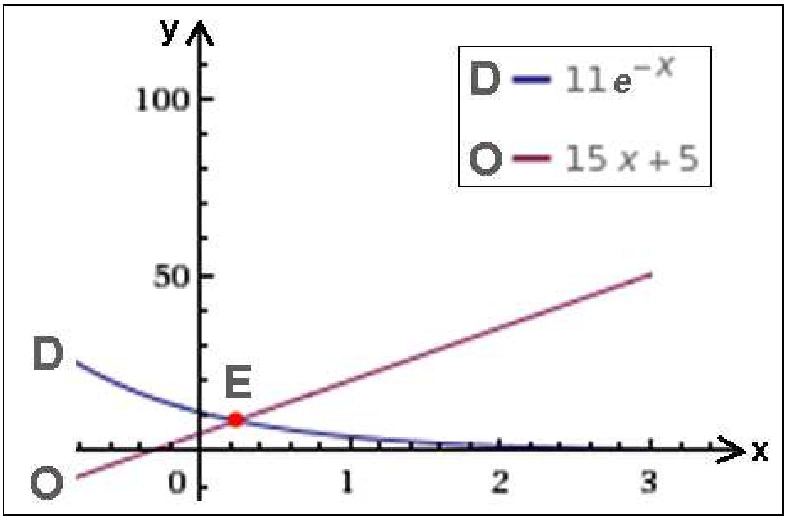
Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \to y = 11\cdot e^{-x} \\ O \to y = 15x + 5 \end{cases}$$

$11\cdot e^{-x} = 15x + 5 = 5(3x + 1)$, de donde se deduce que: $x \approx 0'242$.

En este caso: $y = 15\cdot 0'242 + 5 = 8'63$, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 8'63 €/bot. y una cantidad aproximada de 242 botellas/día de producto.

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial inversa (la demanda) y una recta (la oferta), se expone a continuación, con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas cartesianas rectangulares:



b) Se trata de calcular la elasticidad arco entre los puntos (0, 11) y (0’242, 8’63), con lo que:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{0'242 - 0}{0'242 + 0} \times \frac{8'63 + 11}{8'63 - 11} = (1) \times \frac{19'63}{-2'37} = -8'28 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Por otra parte, para el cálculo de la elasticidad puntual en el equilibrio (0’242, 8’63), debe tenerse en cuenta que:

$$y = \frac{11}{e^x} \rightarrow e^x = \frac{11}{y},$$

y la función de demanda también puede expresarse así:

$$x = \ln\frac{11}{y}; \text{ entonces: } \frac{dx}{dy} = \frac{-\frac{11}{y^2}}{\frac{11}{y}} = -\frac{1}{y}, \text{ y se tendrá que:}$$

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{1}{y} \times \frac{y}{x} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{0'242} = -4'13 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

c) Los ingresos brutos anuales del bodeguero vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 8’63 €/bot. $\times$ 242 bot./día $\times$ 240 días/año = 501.230’40 €/año.

Ejemplo 3

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \to 4y = 20 - x \\ O \to y = f(x) = 2x - 4\int_0^x \sin\tau \cdot f(x-\tau)\,d\tau \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día. Se trata de estudiar el equilibrio del mercado así como los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

La función de oferta viene expresada como una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie con λ = -4, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto:

$$F(S) = \frac{2}{S^2} - 4\left(\frac{1}{S^2+1}\right)F(S);\ F(S)\left(1 + \frac{4}{S^2+1}\right) = \frac{2}{S^2};$$

$$F(S)\left(\frac{S^2+1+4}{S^2+1}\right) = F(S)\left(\frac{S^2+5}{S^2+1}\right) = \frac{2}{S^2} \Rightarrow F(S) = \frac{2S^2+2}{S^2(S^2+5)}$$

Por aplicación del método de los coeficientes indeterminados a partir de las fracciones parciales, se tendrá:

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S^2} + \frac{CS+D}{S^2+5} = \frac{2S^2+2}{S^2(S^2+5)}$$

$$AS(S^2+5) + B(S^2+5) + (CS+D)S^2 = 2S^2+2$$

$$AS^3 + 5AS + BS^2 + 5B + CS^3 + DS^2 = 2S^2 + 2$$

, de donde se deduce que:

$$A + B = 0;\ \ B + D = 2$$

$$5A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$5B = 2 \Rightarrow B = 2/5 \Rightarrow D = 8/5$$

y la solución buscada mediante la función generatriz Laplace será:

$$\boxed{y(x) = \frac{2}{5}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\} + \frac{8}{5\sqrt{5}}\ L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{S^2+5}\right\} = \frac{2}{5}x + \frac{8}{5\sqrt{5}}\sin\ x\sqrt{5}}$$

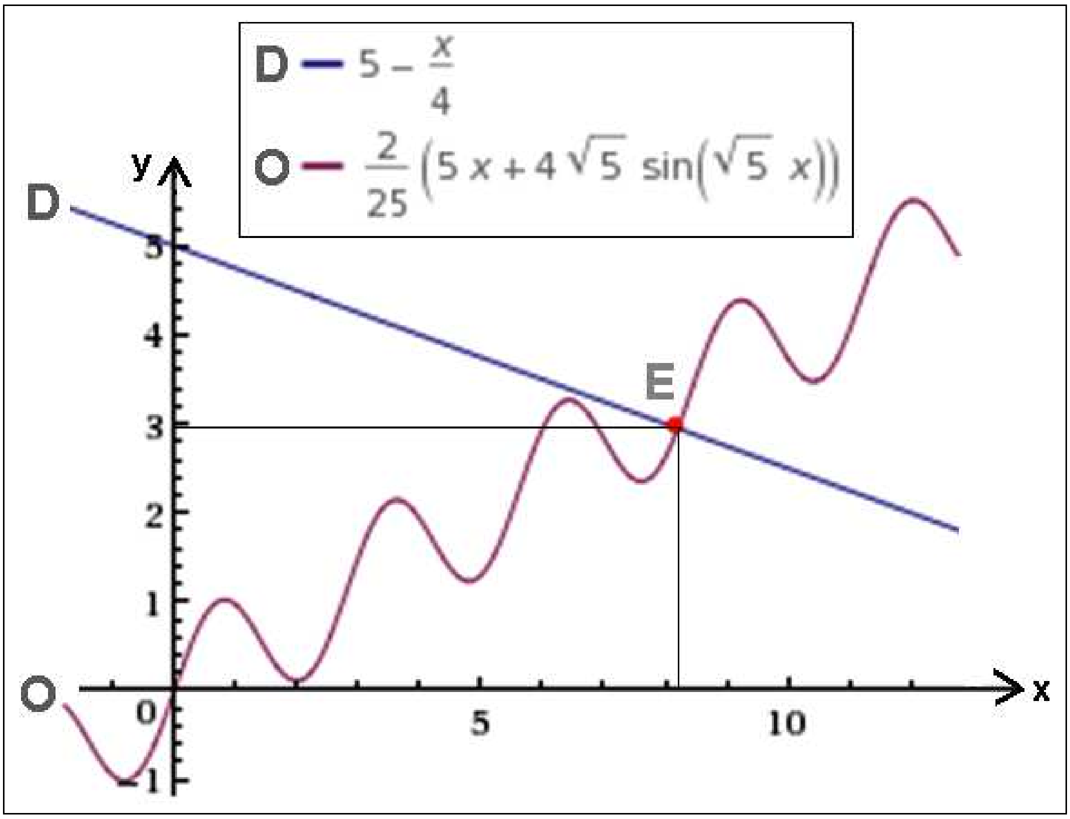
Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow 4y = 20 - x \\ O \rightarrow y = \dfrac{2x}{5} + \dfrac{8}{5\sqrt{5}} \sin x\sqrt{5} \end{cases}$$

$\dfrac{20-x}{4} = \dfrac{2x}{5} + \dfrac{8}{5\sqrt{5}} \sin x\sqrt{5}$, de donde se deduce que: x = 8’21056.

En este caso, y = $\dfrac{20-8'21056}{4} = 2'95$, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 2’95 €/ud. y una cantidad aproximada de 8.211 ud./día de producto.

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una función trigonométrica directa más una recta (en el caso de la función de oferta) y una recta (en el caso de la función de demanda), se expone a continuación:



Por último, los ingresos brutos anuales del productor u ofertante del bien en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 2'95 \text{ €/ud.} \times 8.211 \text{ ud./día} \times 240 \text{ días/año} =$$
$$= 5.813.388'00 \text{ €/año.}$$

Ejemplo 4

Sea la función de coste unitario de producción a corto plazo de una empresa dada por la expresión:

$$f(x) + 2\int_0^x f(\tau)d\tau \cdot \cos(x-\tau)d\tau = 4e^{-x} + \sin x\,.$$

Se desea conocer: a) la función algebraica de coste unitario de dicha empresa, así como b) dicho coste, para una producción de 3.000 ud., siendo *y* (euros/ud.) y *x* (miles de ud.).

Solución:

a) Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie con λ = -2. Tomando las transformadas de Laplace se tiene que:

$$F(S) + 2F(S)\left(\frac{S}{S^2+1}\right) = \frac{4}{S+1} + \frac{1}{S^2+1},$$

$$F(S)\left(\frac{S^2+2S+1}{S^2+1}\right) = \frac{4}{S+1} + \frac{1}{S^2+1} \Rightarrow F(S)\left(\frac{(S+1)^2}{S^2+1}\right) = \frac{4}{S+1} + \frac{1}{S^2+1},$$

$$F(S) = \frac{4(S^2+1)}{(S+1)(S+1)^2} + \frac{S^2+1}{(S^2+1)(S+1)^2} = \frac{4S^2+4}{(S+1)^3} + \frac{1}{(S+1)^2}.$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados a partir de las fracciones parciales, se tendrá:

$$\frac{A}{S+1} + \frac{B}{(S+1)^2} + \frac{C}{(S+1)^3} = \frac{4S^2+4}{(S+1)^3},$$

$$A(S+1)^2 + B(S+1) + C = 4S^2 + 4,$$

$$A = 4, B = -8,\ C = 8.$$

De donde se deduce que:

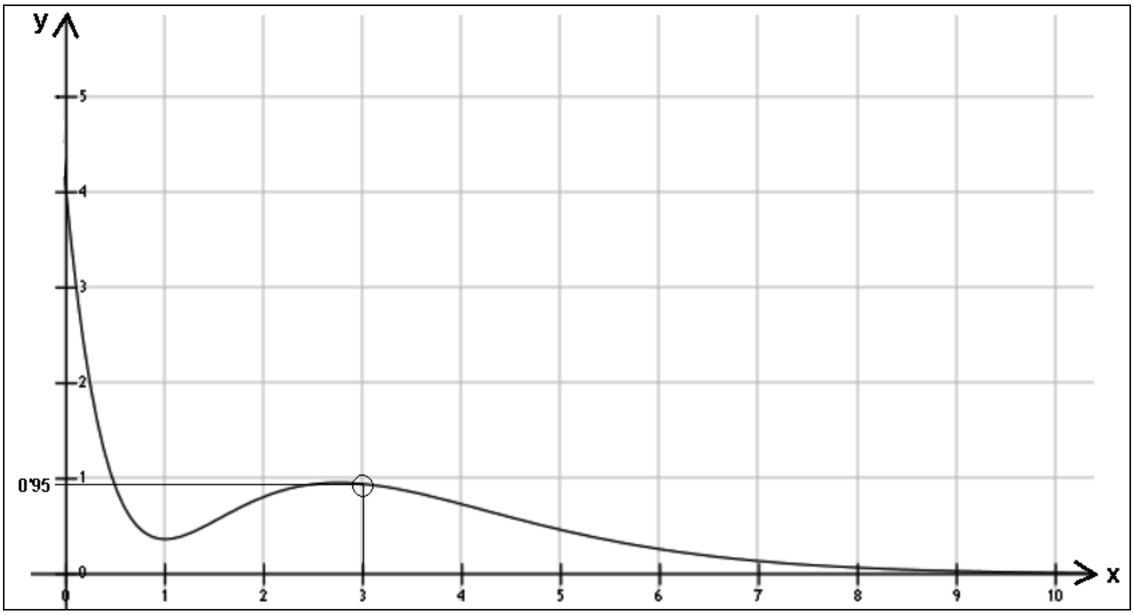
$$y(T) = L^{-1}\left\{\frac{4}{S+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2}\right\}\ ,$$

y la solución buscada será la función generatriz Laplace siguiente:

$$\boxed{y(x) = 4e^{-x} - 7x\cdot e^{-x} + 4x^2e^{-x} = e^{-x}(4x^2 - 7x + 4)}$$

b) En este caso, con x = 3, se tendrá que:

y = 19/20’085 ≈ 0’95 €/ud., con la siguiente representación gráfica:



Debe tenerse en cuenta que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - 7x + 4}{e^x} = 0$, por lo que el eje OX constituye una asíntota horizontal de la curva anterior.

Ejemplo 5

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \to y(x) = 2 - \int_0^x y(t)\cdot e^{x-t}\cdot dt \\ O \to y = x + 1 \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades/día. Se trata de estudiar: a) el equilibrio del mercado, b) la elasticidad puntual de la demanda en el punto de equilibrio y c) los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) La función de demanda viene expresada como una ecuación integral, del tipo de convolución, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aquí tenemos que: $y(x) = 2 - y(x) * e^x$. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación y aplicando el teorema de convolución (véase el epígrafe 3 del capítulo anterior), se tendrá que:

$$L(y) = L(2) - L(y) \cdot L(e^x) = \frac{2}{S} - L(y) \cdot \frac{1}{S-1};$$

$$L(y) = \frac{2(S-1)}{S(S-1)} - \frac{S \cdot L(y)}{S(S-1)} = \frac{2S - 2 - S \cdot L(y)}{S^2 - S};$$

$$L(y) \cdot (S^2 - S) = 2S - 2 - S \cdot L(y) = S^2 \cdot L(y) - S \cdot L(y), \text{ y de aquí:}$$

$L(y) = \frac{2S-2}{S^2} = \frac{2}{S} - \frac{2}{S^2}$, de donde se obtiene la solución buscada a través de la función generatriz Laplace:

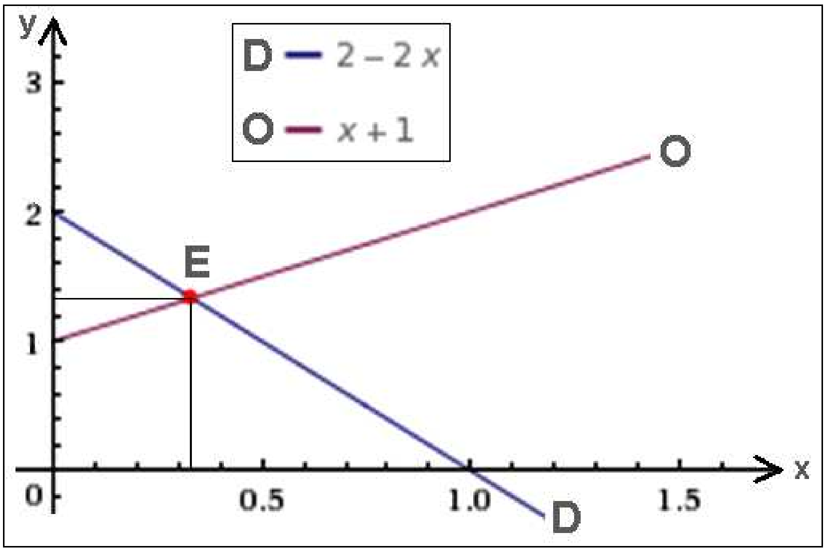
$$\boxed{y(x) = L^{-1}\left(\frac{2}{S}\right) - L^{-1}\left(\frac{2}{S^2}\right) = 2 - 2x = 2(1 - x)}$$

En el equilibrio (O = D) tendrá lugar que:

$2 - 2x = x + 1$; $x = 1/3 = 0'333$; de donde se deduce también que:

$$y = 1/3 + 1 = 4/3 = 1'33 \text{ €/ud., con } x = 333 \text{ ud/día.}$$

La representación gráfica de esta función de demanda, que es evidentemente una recta decreciente tratándose de un bien normal, se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas), junto con la correspondiente función de oferta (recta creciente):



b) La elasticidad puntual buscada de la función de demanda deberá considerar que:

$\frac{dy}{dx} = -2\,;\,\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}\,;\,e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \times \frac{4/3}{1/3} = -2 <$ -1, luego se trata de una demanda relativamente elástica.

c) Por último, los ingresos brutos anuales del productor u ofertante del bien en cuestión vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 1’33 €/ud. $\times$ 333 ud./día $\times$ 240 días/año = 106.293’60 €/año.

Ejemplo 6

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 20 - x \\ O \rightarrow y = f(x) = 4x - 3\int_0^x f(\tau)\cdot \sin(x-\tau)\,d\tau \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/mes. Se trata de estudiar el equilibrio del mercado y los ingresos brutos anuales estimados del productor.

Solución:

La función de oferta viene expresada como una ecuación integral lineal inhomogénea de Volterra de 2ª especie, con λ = -3, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

Se trata de una función de oferta cíclica y creciente. En efecto, aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación en cuestión, obtenemos que:

$$L\{f(x)\} = 4L\{x\} - 3L\left\{\int_0^x f(\tau)\cdot \sin(x-\tau)\,d\tau\right\},$$

$F(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{3F(s)}{s^2+1}$, entonces: $\left(1 + \frac{3}{s^2+1}\right)F(s) = \frac{4}{s^2}$ y entonces:

$$F(s) = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}.$$

Luego la función generatriz Laplace será la siguiente:

$$f(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 3 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = x + \frac{3}{2}\sin(2x) =$$

$$= x + 3 \cdot \sin x \cdot \cos x.$$

Ello puede comprobarse de tal modo que debe cumplirse la igualdad resultante de substituir dicha solución particular en la ecuación integral dada, así:

$$x + \frac{3}{2}\sin 2x = 4x - 3\int_0^x \left(\tau + \frac{3}{2}\sin 2\tau\right) \cdot \sin(x-\tau) \cdot d\tau\,;$$

o sea, debe cumplirse que:

$$x - \frac{\sin 2x}{2} = x - \sin x \cdot \cos x = \int_0^x \left(\tau + \frac{3}{2}\sin 2\tau\right) \cdot \sin(x-\tau) \cdot d\tau\,;$$

en efecto, se tiene que:

$$\int_0^x \left(\tau + \frac{3}{2}\sin 2\tau\right) \cdot \sin(x-\tau) \cdot d\tau = \left[\frac{2\tau \cdot \cos(\tau - x) + \sin\tau(\cos(2\tau - x) - 3\cos x)}{2}\right]_0^x =$$

$$= x - \sin x \cdot \cos x \text{, c. s. q. d.}$$

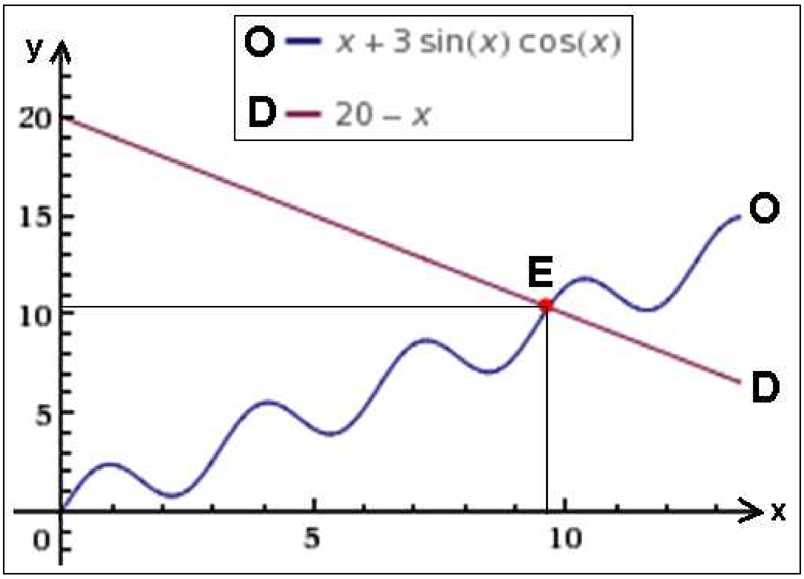
Así pues, en el equilibrio del mercado en cuestión, sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 20 - x \\ O \rightarrow y = x + (3/2) \cdot \sin 2x \end{cases}$$

O sea: 20 – x = x + (3/2)·sin 2x, de donde también se deduce que: $x \approx 9'66$.

En este caso, y = 20 – 9’66 = 10’34, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 10’34 €/ud. y una cantidad aproximada de 9.660 ud./mes de producto.

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una función cíclica creciente (en el caso de la función de oferta) y una recta decreciente (en el caso de la función de demanda), se expone a continuación:



Por último, los ingresos brutos anuales estimados del productor u ofertante del bien en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 10'34 \text{ €/ud.} \times 9.660 \text{ ud./mes} \times 12 \text{ meses/año} =$$
$$= 1.198.612'80 \text{ €/año.}$$

Ejemplo 7

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de oferta y demanda para un artículo concreto que produce una empresa:

$$\begin{cases} D \to 4y = 2'4 - 3x \\ O \to y = f(x) = x^3 + \int_0^x 4 \cdot f(\tau) \cdot d\tau \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad de ambas funciones en el punto de equilibrio, y c) de estimar los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) La función de oferta viene expresada como una ecuación integral del tipo de convolución, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. Se trata de una función de oferta creciente, correspondiente a un bien normal.

En efecto, aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación en cuestión, y aplicando el teorema de convolución (véase el epígrafe 3 del capítulo anterior), tenemos que: $y(x) = x^3 + 4*y(x)$.

$$L(y) = L(x^3) + L(4)\cdot L(y) = \frac{3!}{S^4} + L(y)\cdot\frac{4}{S};$$

$L(y) = \frac{6}{S^4} + \frac{4\cdot L(y)}{S} = \frac{6+4\cdot S^3\cdot L(y)}{S^4}$, de donde: $L(y)\cdot S^4 = 6 + 4\cdot S^3\cdot L(y)$;

$L(y)\cdot(S^4 - 4S^3) = 6$; $L(y) = \frac{6}{S^4 - 4S^3}$, lo que ofrece la solución buscada:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}\left(\frac{6}{S^4 - 4S^3}\right) = \frac{3}{32}(e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1)}$$

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow 4y = 2'4 - 3x \\ O \rightarrow y = \frac{3}{32}(e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1) \end{cases}$$

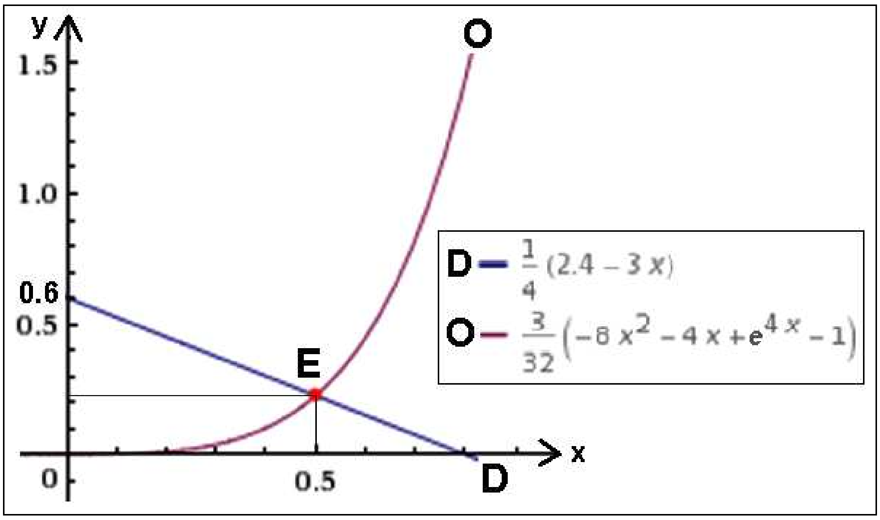
$\frac{2'4 - 3x}{4} = \frac{3}{32}(e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1)$, de donde se deduce que:

$$x = 0'500428 \approx 0'50.$$

En este caso, $y = \frac{2'4 - 3\cdot 0'5}{4} = 0'225$, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 0'22 €/ud. y una cantidad aproximada de 500 ud./día de producto.

Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \rightarrow \infty$ también $y \rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3(e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1)}{32x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en las proximidades del origen de coordenadas):



b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado E(0’50, 0’22), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ y = (2’4 – 3x)/4; dy/dx = -3/4; $\frac{dx}{dy} = -\frac{4}{3}$.

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \times \frac{2'4 - 3x}{4x} = -\frac{9'6 - 12x}{12x} = \frac{x - 0'8}{x} = \frac{0'22 - 0'8}{0'22} = -1'25 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica. Del mismo modo:

O $\Rightarrow$ y = $\frac{3}{32}(e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1)$; dy/dx = $\frac{3}{32}(4 \cdot e^{4x} - 16x - 4) = \frac{3e^{4x} - 12x - 3}{8}$;

$\frac{dx}{dy} = \frac{8}{3e^{4x} - 12x - 3}$. Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{8}{3e^{4x} - 12x - 3} \times \frac{0'22}{0'5} = \frac{3'52}{3 \cdot e^2 - 6 - 3} = \frac{3'52}{22'17 - 9} = 0'27 < 1,$$

luego se trata de una oferta relativamente inelástica.

c) Por último, los ingresos brutos anuales estimados del productor u ofertante del artículo en cuestión vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 0’22 €/ud. $\times$ 500 ud./día $\times$ 240 días/año = 26.400 €/año.

Ejemplo 8

Después del correspondiente estudio econométrico, se ha obtenido la ecuación diferencial de segundo orden que liga el precio medio con las cantidades de género vendidos en una determinada verdulería/frutería. Se desea: a) Formar la ecuación integral de oferta que corresponde a la ecuación diferencial siguiente: y’’ - 5y’ + 6y = 0, y también a las condiciones iniciales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; b) Hallar el punto de equilibrio del mercado para la siguiente función de demanda: $y = 4(1-x)$, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/kg. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de quilogramos/día.; c) Estimar los ingresos brutos anuales del comerciante verdulero, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) Aplicando el procedimiento del ejercicio anterior, como podrá comprobar el amable lector/a, resulta la siguiente ecuación integral equivalente de la oferta:

$$\varphi(x) = 5 - 6x + \int_0^x [5 - 6(x-t)]\cdot\varphi(t)\cdot dt\,,$$

que es inhomogénea de 2ª especie con $\lambda = 1$.

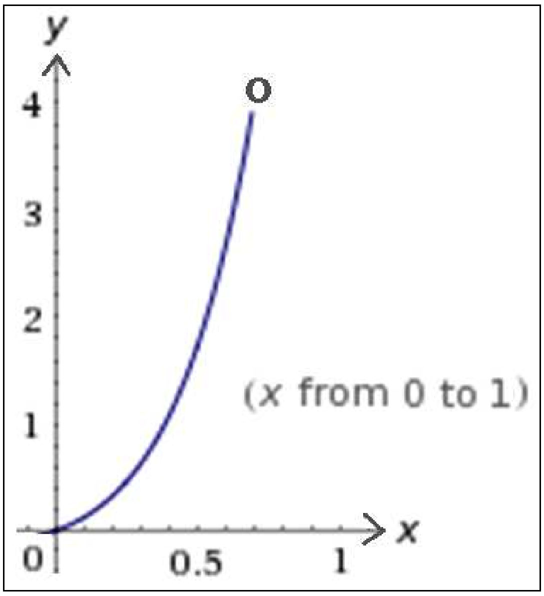
b) Por otra parte, la función de oferta anterior, dada como EDO homogénea, tiene la siguiente solución, formando la ecuación característica correspondiente: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, de donde: $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$, por lo que la integral general será: $y(x) = C_1\cdot e^{3x} + C_2\cdot e^{2x}$, y con las condiciones iniciales dadas, sucede que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = 3C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases}$$

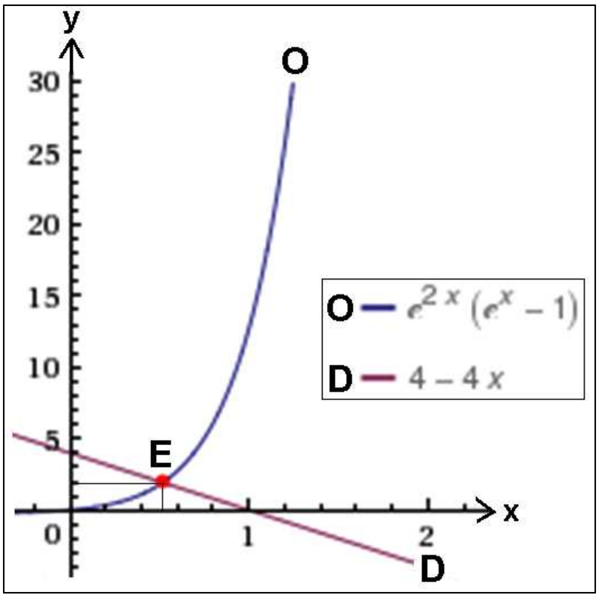
sistema sencillo de ecuaciones que resuelto proporciona los valores siguientes: $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$, con lo que resulta la integral particular:

$$y = e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1).$$

Se tiene, en definitiva, la siguiente representación gráfica:



De este modo, el equilibrio del mercado exige que: O = D, con lo que: $e^{2x}(e^x - 1) = 4 - 4x$, ecuación cuya resolución ofrece el punto de equilibrio: x = 0’519238 ≈ 0’52 Tm./día (519 kg./día); y ≈ 1’92 €/kg., con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume también en el caso de esta función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(e^x - 1)}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

c) Por último, los ingresos brutos anuales estimados del productor u ofertante del bien en cuestión vendrán dados por:

I = p × q = 1’92 €/kg. × 519 kg./día × 240 días/año = 239.155’20 €/año.

Ejemplo 9

La demanda total q (expresada en miles de ud./día) de un artículo de gran consumo de un mercado, en función del precio p (expresado en euros/ud.), varía de acuerdo con la tabla siguiente:

$p \equiv y$	$q \equiv x$
5	10.000
4	20.000
3	35.000
2	60.000
1	100.000

Se pide: a) Determinar la elasticidad arco de la demanda en el tramo comprendido entre los precios: p = 3 €/ud. y p = 2 €/ud.; b) Resolver la función de oferta dada por la ecuación integral:

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt ,$$

por el método de las aproximaciones sucesivas, tomando $y_0(x) \equiv 0$. c) Estudiar el equilibrio del mercado, los ingresos brutos anuales del vendedor (considerando un calendario laboral de 240 días/año) así como la elasticidad de la oferta en dicho punto de equilibrio.

Solución:

a) La elasticidad arco pedida vendrá dada por la expresión:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{60 - 35}{60 + 35} \times \frac{2 + 3}{2 - 3} = (\frac{25}{95}) \times (-5) = -1'32 < -1,$$

por lo que se trata de una demanda relativamente elástica.

b) Como $y_0(x) \equiv 0$, entonces $y_1(x) = 1$. Luego también:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_2(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot dt = 1 + x , \\ y_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} , \\ y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}}$$

Es evidente, por inducción, que: $y_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. De esta manera, $y_n(x)$ es la n-ésima suma parcial de la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1 + 2n + x)}{(1 + 2n)!}$, $\forall$ x;n $\in$ **N**, constituyendo el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial[6]. También representa el

[6] En efecto, ello es así puesto que se obtiene:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad ,\forall x \in R$$

De hecho se trata de la suma de una serie de términos positivos $\forall$ x ≥ 0, al objeto de que la variable *x* (cantidad ofertada o demandada del artículo en cuestión) posea un significado económico.

límite de la sucesión: $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Para la determinación del carácter de esta serie de términos positivos, aplicaremos los siguientes criterios de convergencia:

1) *Término general*: es condición necesaria pero no suficiente, pues existen series como las armónicas o pseudo-armónicas que lo incumplen. En nuestro caso, por aplicación de la aproximación o fórmula de Stirling, el término general resulta ser:

$$a_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{e^{-n}\cdot n^n\cdot\sqrt{2\pi n}} = \frac{(x\cdot e)^n}{n^n\cdot\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\left(\frac{x\cdot e}{n}\right)^n \text{; y entonces:}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x\cdot e}{n}\right)^n = 0\,,$$

luego podría ser de carácter CONVERGENTE.

2) *D'Alembert o del cociente*: aquí procede calcular la expresión:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}\cdot n!}{x^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1} = 0 < 1\,,$$

por lo tanto la serie será CONVERGENTE.

3**)** *Raabe o Rolf*: en este caso procede calcular la expresión:

$$\lim_{n\to\infty}.n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}.n\left(1-\frac{x}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}.\frac{n^2+n-nx}{n+1} = \infty > 1,$$

por lo tanto la serie en cuestión será CONVERGENTE.

Se trata, en definitiva, de una serie de potencias que converge absolutamente $\forall x \in \Re$. De aquí se deduce también que $y_n(x) \to e^x$. No resulta difícil comprobar que la función $y(x) = e^x$ es la solución de la ecuación integral dada, que representa la función de oferta del artículo en cuestión. En efecto, habrá que demostrar que:

$\int_0^x e^t\cdot dt = e^x - 1$. En efecto, pues: $\int_0^x e^t\cdot dt = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1$, c. s. q. d.

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

c) Para hallar la ecuación analítica de la función de demanda, con los datos del problema, sería conveniente la realización de un ajuste minimocuadrático no lineal mediante una regresión exponencial natural o neperiana del tipo: $y = A \cdot e^{Bx}$, que ofrece, en este caso, excelentes resultados como puede comprobarse, constituyendo una regresión prácticamente perfecta. Dicha expresión puede linealizarse tomando logaritmos, así:

$$\ln y = \ln A + B \cdot x.$$

En efecto, se obtienen los siguientes valores:

A = 5’7545 (término constante)
B = -0’0176 (coeficiente de regresión)
r = -0’99915 (coeficiente de correlación no lineal)
$R = r^2$ = 0’9983 (coeficiente de determinación o crítico)

Resulta, pues, la siguiente función ajustada de demanda:

$$y = 5'7545 \cdot e^{-0'0176 \cdot x},$$

con los siguientes valores estimados y sus discrepancias con los valores realmente observados:

	x_i	y_i	$y_{est.}$	d_i
	10	5	4’83	+0’17
	20	4	4’05	-0’05
	35	3	3’11	-0’11
	60	2	2’00	±0
	100	1	0’99	+0’01
$\sum_{i=1}^{5}$	**225**	**15**	**14’98**	**+0’02 ≅ 0**

En el equilibrio tendrá lugar que: O = D, con lo que:

$e^x = 5'7545 \cdot e^{-0'0176 \cdot x}$, esto es: $e^x \cdot e^{0'0176 \cdot x} = 5'7545$; y tomando logaritmos neperianos resulta:

1’0176·x = ln 5’7545 = 1’7499822; de donde: $x \approx$ 1’72 (1.720 ud./día), a lo que corresponde un precio de: $y = e^{1'72}$ = 5’58 €/ud.

O sea, tendremos un punto de equilibrio con las coordenadas E(1’72, 5’58).

Así pues, resulta la siguiente representación gráfica:

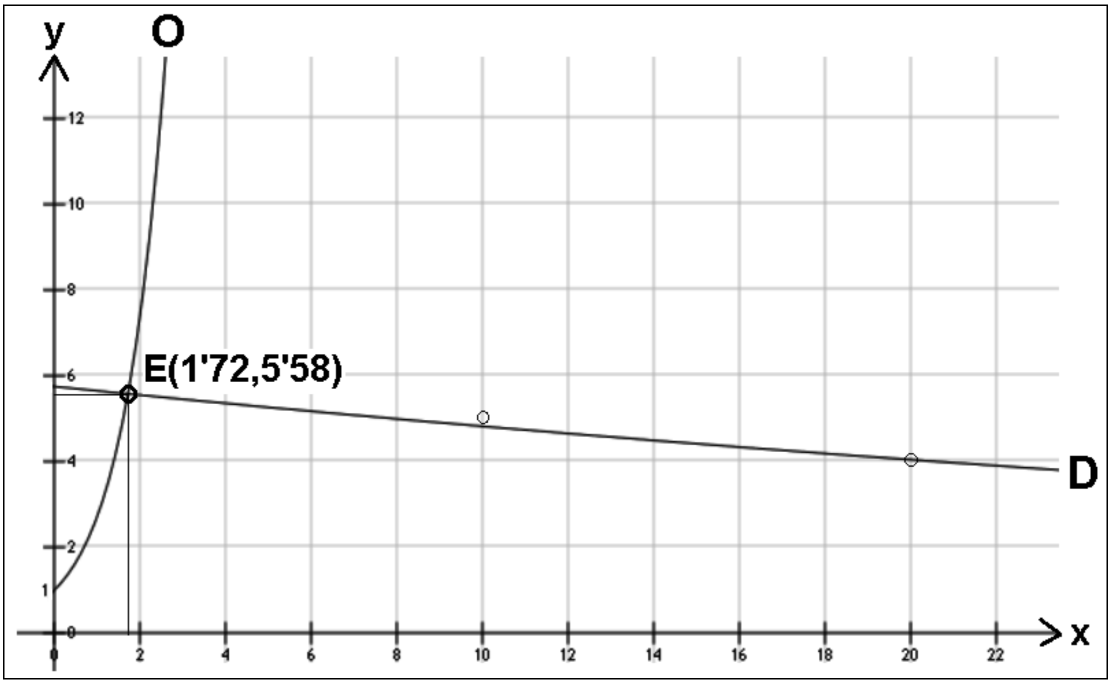


FIG. 8.1. Oferta, demanda y punto de equilibrio (I).

Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del bien en cuestión vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 5’58 €/ud. $\times$ 1.720 ud./día $\times$ 240 días/año = 2.303.424 €/año.

Por último, veamos que la elasticidad de la función obtenida de oferta ($y = e^x$) en el punto de equilibrio anteriormente hallado resulta ser la siguiente:

$$dy/dx = e^x;\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x};\ \text{y la elasticidad buscada de esta función será:}$$

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{e^x} \times \frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{1'72} = 0'58 < 1,$$

por lo que la oferta en este punto resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

Ejemplo 10

Se pide: a) Estudiar el equilibrio del mercado de un bien normal cuya ecuación de oferta viene dada por la expresión: y'' + y '- 2y = x, con las siguientes condiciones iniciales: y(0) = 2, y'(0) = -1, y la función de demanda viene dada por la ecuación integral:

$$f(x) + 2\int_0^x f(\tau)\cdot d\tau \cdot \cos(x-\tau)\cdot d\tau = 4e^{-x} + \sin x \, .$$

b) Determinar los ingresos brutos anuales del vendedor (considerando un calendario laboral de 240 días/año) siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades/día.

Solución:

a) Al aplicar el operador de Laplace a los dos miembros de la ecuación dada de la oferta y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se obtiene:

$$s^2L[y] = -2s + 1 + sL[y] - 2 - 2L[y] = \frac{1}{s^2}\text{, de donde:}$$

$$L[y] = \frac{2s^3 + s^2 + 1}{s^2(s^2 + s - 2)} = -\frac{1}{4s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{4}{3(s-1)} + \frac{11}{12(s-2)}\,,$$

después de aplicar el método de las fracciones simples y los coeficientes indeterminados. Invirtiendo la transformación, se obtiene la integral particular buscada o función generatriz Laplace siguiente:

$$y(x) = -L^{-1}(\frac{1}{4s}) - L^{-1}(\frac{1}{2s^2}) + L^{-1}(\frac{4}{3(s-1)}) + L^{-1}(\frac{11}{12(s-2)}) = -\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{4}{3}e^x + \frac{11}{12}e^{-2x}\,,$$

que constituye la solución pedida de la función de oferta.

Puede comprobarse alternativamente la solución buscada operando por el método clásico, con lo que formando la ecuación característica de la homogénea se obtiene que:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0\,; \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 = \lambda_1 \\ -2 = \lambda_2 \end{array} \right.$$

y la solución de la homogénea es: $y^* = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x}$.

Ensayamos ahora una solución polinómica particular de la ecuación completa del tipo:

$$\left.\begin{array}{l} y_p = ax + b \\ y'_p = a \\ y''_p = 0 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a - 2(ax + b) = x \\ a - 2ax - 2b = x \\ -2a = 1;\ a = -\dfrac{1}{2};\ a = 2b;\ b = -\dfrac{1}{4} \end{array}$$

La solución o integral general será:

$$y = y^* + y_p = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4};\quad y' = C_1 e^x - 2C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 - \dfrac{1}{4} = 2 \\ y'(0) = C_1 - 2C_2 - \dfrac{1}{2} - 1 \end{array}\right\};\qquad \left.\begin{array}{l} 2C_1 + 2C_2 - \dfrac{1}{2} = 4 \\ C_1 - 2C_2 - \dfrac{1}{2} = -1 \end{array}\right\}$$

$$3C_1 - 1 = 3;\quad C_1 = \frac{4}{3};\ C_2 = 2 + \frac{1}{4} - C_1 = \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{27}{12} - \frac{16}{12} = \frac{11}{12}.$$

De este modo, la solución o integral particular buscada será:

$$y(x) = \frac{4}{3}e^x + \frac{11}{12}e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{, c.s.q.d.}$$

Por lo que se refiere a la función de demanda, veamos que aplicando también el método de las transformadas laplacianas a esta ecuación integral se tiene que:

$$F(S) + 2F(S)\left(\frac{S}{S^2 + 1}\right) = \frac{4}{S+1} + \frac{1}{S^2+1};$$

$$F(S)\left(\frac{S^2 + 2S + 1}{S^2 + 1}\right) = \frac{4}{S+1} + \frac{1}{S^2+1} \Rightarrow F(S)\left(\frac{(S+1)^2}{S^2 + 1}\right) = \frac{4}{S+1} + \frac{1}{S^2+1};$$

$$F(S) = \frac{4(S^2+1)}{(S+1)(S+1)^2} + \frac{S^2+1}{(S^2+1)(S+1)^2} = \frac{4S^2+4}{(S+1)^3} + \frac{1}{(S+1)^2}.$$

Aplicando ahora el método de los coeficientes indeterminados y de las fracciones simples a la primera fracción sumando, se tendrá:

$$\frac{A}{S+1} + \frac{B}{(S+1)^2} + \frac{C}{(S+1)^3} = \frac{4S^2+4}{(S+1)^3}; A(S+1)^2 + B(S+1) + C = 4S^2 + 4;$$
$$A = 4, B = -8, C = 8.$$

De donde se deduce que:

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{4}{S+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8}{(S+1)^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2}\right\},$$

y la solución buscada será la función generatriz Laplace siguiente:

$$y(x) = 4e^{-x} - 7x \cdot e^{-x} + 4x^2 \cdot e^{-x} = e^{-x}(4x^2 - 7x + 4),$$

con lo que la representación gráfica del equilibrio del mercado (O = D) será la siguiente a partir de la igualdad:

$$\frac{4}{3}e^x + \frac{11}{12}e^{-2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = e^{-x}(4x^2 - 7x + 4),$$

teniendo en cuenta que, en el caso de la función de oferta, se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:
$x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es, además se cumple que: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{4} + \frac{11 \cdot e^{-2x}}{12} + \frac{4 \cdot e^x}{3} - \frac{x}{2}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Esto es:

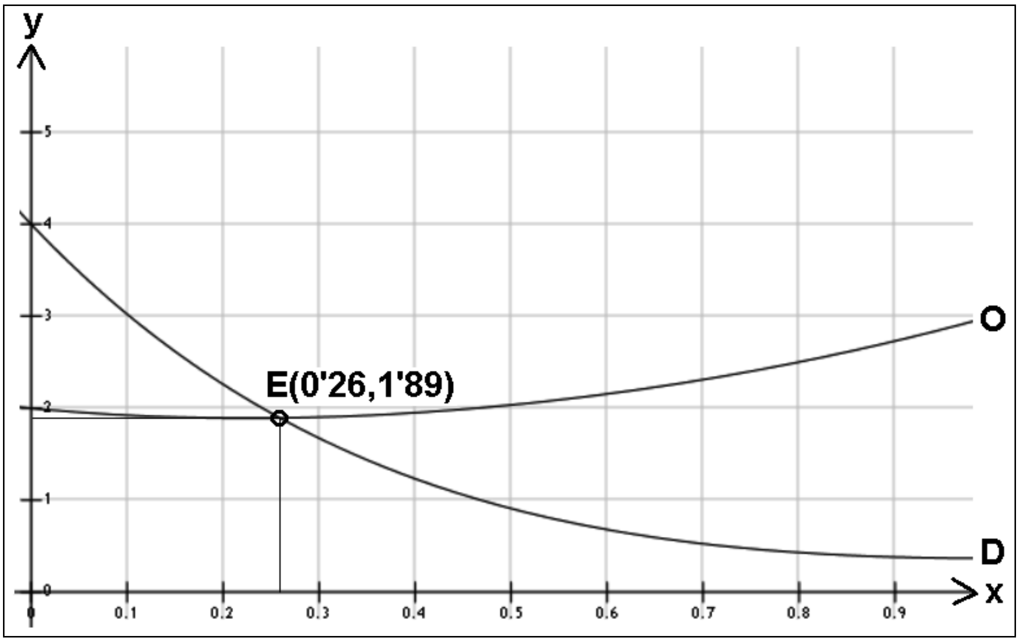


FIG. 8.2. Oferta, demanda y punto de equilibrio (II).

, teniendo lugar dicho equilibrio para los valores siguientes:

x = 0’259171 ≈ 0’26 (259 ud./día) e y = 1’8941 ≈ 1’89 €/ud., correspondiente al punto de equilibrio de coordenadas: E(0’26, 1’89).

b) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del bien en cuestión vendrán dados por:

I = p × q = 1’89 €/ud. × 259 ud./día × 240 días/año = 117.482’40 €/año.

Ejemplo 11

Se pide: a) Resolver la ecuación integral siguiente que representa una función de oferta de un bien normal: $y(x)=\int_0^x \frac{1+y^2(t)}{1+t^2}dt$, por el método de las aproximaciones sucesivas, tomando como aproximación nula, respectivamente: 1) $y_0(x) = 0$; 2) $y_0(x) = x$. b) Estudiar el equilibrio del mercado resultante para la siguiente función de demanda: $f(x)+\int_0^x f(u)\cdot du=12$. c) Estimar los ingresos brutos anuales del vendedor (considerando un calendario laboral de 240 días/año), siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades/día.

Solución:

a) Se trata de una ecuación integral lineal homogénea de 2ª especie. Aplicando aproximaciones sucesivas sucede que:

1) Sea $y_0(x) = 0$. Entonces se tendrá que:

$$\begin{cases} y_1(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\text{arctg}\,x\,, \\[2ex] y_2(x)=\int_0^x \frac{1+\text{arctg}^2 t}{1+t^2}dt=\text{arctg}\,x+\frac{1}{3}\text{arctg}^3 x\,, \\[2ex] y_3(x)=\int_0^x \frac{1+\left(\text{arctg} t+\frac{1}{3}\text{arctg}^3 t\right)^2}{1+t^2}dt=\text{arctg}\,x+\frac{1}{3}\text{arctg}^3 x+\frac{2}{3\cdot 5}\text{arctg}^5 x+\frac{1}{7\cdot 9}\text{arctg}^7 x, \\[2ex] y_4(x)=\int_0^x \frac{1+y_3^2(t)}{1+t^2}dt=\text{arctg}\,x+\frac{1}{3}\text{artg}^3 x+\frac{2}{3\cdot 5}\text{arctg}^5 x+\frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}\text{arctg}^7 x+ \\ +\frac{38}{5\cdot 7\cdot 9^2}\text{arctg}^9 x+\frac{134}{9\cdot 11\cdot 21\cdot 25}\text{arctg}^{11} x+\frac{4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}\text{arctg}^{13} x+\frac{1}{7^2\cdot 9^2\cdot 15}\text{arctg}^{15} x,... \end{cases}$$

y así sucesivamente.

Designando ahora arctg x = u y comparando las expresiones de $y_n(x)$ con el desarrollo:

$$\operatorname{tg} u = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{2^{2v}\left(2^{2v}-1\right)}{(2v)!} B_{2v} u^{2v-1}, \quad \text{siendo: } |u| < \frac{\pi}{2},$$

donde B_v son los números de Bernouilli[7], y se advierte que:

$$y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

No es difícil comprobar, en fin, que la función y(x) = x es la solución de la ecuación integral dada. En definitiva, habrá que demostrar que se cumple que: $\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2} \cdot dt = x$, lo que resulta inmediato, puesto que: $\int_0^x dt = [t]_0^x = x$, c. s. q. d.

2) Sea, en este caso, $y_0(x) = x$. Entonces sucede que:

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = [t]_0^x = x.$$

De forma análoga se halla que: $y_n(x) = x$ ($\forall$ n = 2, 3, …).

De este modo, la sucesión $\{y_n(x)\}$ es la sucesión estacionaria $\{x\}$, cuyo límite es: y(x) = x. La solución de la ecuación integral dada se obtiene de inmediato y resulta coincidente con la recta bisectriz del primer cuadrante, a saber:

$$y(x) = x.$$

b) La ecuación de demanda dada, o sea: $f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 12$, tiene como solución, operando con transformadas de Laplace:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du\right\} = L\{12\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u) \cdot du\right\} = L\{12\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{12}{S},$$

donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

---

[7] Los números de Bernouilli B_{2v+1} con índices impares son iguales a cero, a excepción de: $B_1 = -\frac{1}{2}$. El número $B_o = 1$; los números B_{2_v} se determinan por las fórmulas de recurrencia siguientes:

$$B_{2_v} = -\frac{1}{2v+1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{2v-2} \frac{2v(2v-1)\dots(2v-2k+2)}{k!} B_k.$$

$$S\cdot F(S) + F(S) = 12 \Rightarrow F(S)(S+1) = 12 \Rightarrow F(S) = \frac{12}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{12}{S+1}\right\} = 12\cdot e^{-x}} \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$12\cdot e^{-x} + \int_0^x 12\cdot e^{-u}\cdot du = 12$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u}\cdot du = 1$. En efecto:

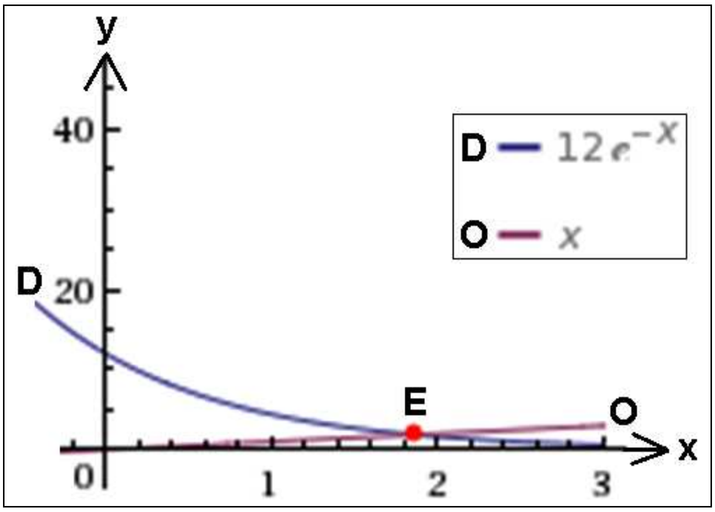
$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 12\cdot e^{-x} \\ O \rightarrow y = x \end{cases}$$

$12\cdot e^{-x} = x$, de donde se deduce que: $x \approx 1'86$; $y \approx 1'86$.

O sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 1'86 €/ud. y una cantidad aproximada de 1.860 ud./día de producto. Se tiene, al respecto, la siguiente representación gráfica, con E(1'86, 1'86):



c) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del bien en cuestión vendrán dados por:

I = p × q = 1'86 €/ud. × 1.860 ud./día × 240 días/año = 830.304'00 €/año.

Ejemplo 12

Estudiar el equilibrio del mercado y los ingresos brutos anuales del vendedor de un bien normal cuya función de oferta viene dada por la siguiente ecuación integral: $y(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x - t)\cdot y(t)\cdot dt$, mientras que la función de demanda es: y(x) = $e^{-x} + \int_x^{\infty} y(t)\cdot dt$, viniendo *y* expresada en euros/ud. y *x* en miles de unidades diarias del bien en cuestión.

Solución:

Por lo que se refiere a la función de oferta, inhomogénea y de 2ª especie, con λ = 2, es sabido que: $\sin x = L^{-1}[\frac{1}{p^2+1}]$, $\cos x = L^{-1}[\frac{p}{p^2+1}]$.

Sea: y(x) = $L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta además el teorema del producto (de la imagen de una convolución) se obtiene que:

$\phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1}\phi(p)$. De aquí que: $\phi(p)\left[1 - \frac{2p}{p^2+1}\right] = \frac{1}{p^2+1}$, de donde:

$$\phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2+1}}{1 - \frac{2p}{p^2+1}} = \frac{\frac{1}{p^2+1}}{\frac{p^2+1-2p}{p^2+1}} = \frac{1}{(p-1)^2},$$

o bien la función generatriz Laplace: y(x) = $L^{-1}[\phi(p)] = L^{-1}[\frac{1}{(p-1)^2}] = x\cdot e^x$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación integral dada de la oferta es:

$$y(x) = x\cdot e^x.$$

Este resultado también se puede demostrar teniendo en cuenta que: $\int_0^x \cos(x-t)\cdot t\cdot e^t\cdot dt = \frac{x\cdot e^x - \sin x}{2}$. En efecto:

$$\int_0^x \cos(x-t)\cdot t\cdot e^t\cdot dt = \frac{1}{2}\left[e^t((t-1)\sin(t-x) + t\cdot\cos(t-x))\right]_0^x =$$

$= \frac{x\cdot e^x - \sin x}{2}$, c. s. q. d.

Así mismo, por lo que se refiere a la función de demanda dada, también inhomogénea y de 2ª especie, con λ = 1, veamos que su solución es la siguiente, una vez realizados los cálculos oportunos:

$$y(x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

Entonces, el equilibrio del mercado exige que O = D, esto es:

$x\cdot e^{x} = e^{-x}(1 - x)$, que ofrece los valores:

$x = 0'3374 \approx 0'34$ (337 ud./día); $y = 0'4728 \approx 0'47$ €/ud.; E(0'34, 0'47).

Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del artículo concreto en cuestión vendrán dados por:

$I = p \times q$ = 0'47 €/ud. $\times$ 337 ud./día $\times$ 240 días/año = 38.013'60 €/año.

Por último, la representación gráfica correspondiente es la siguiente:

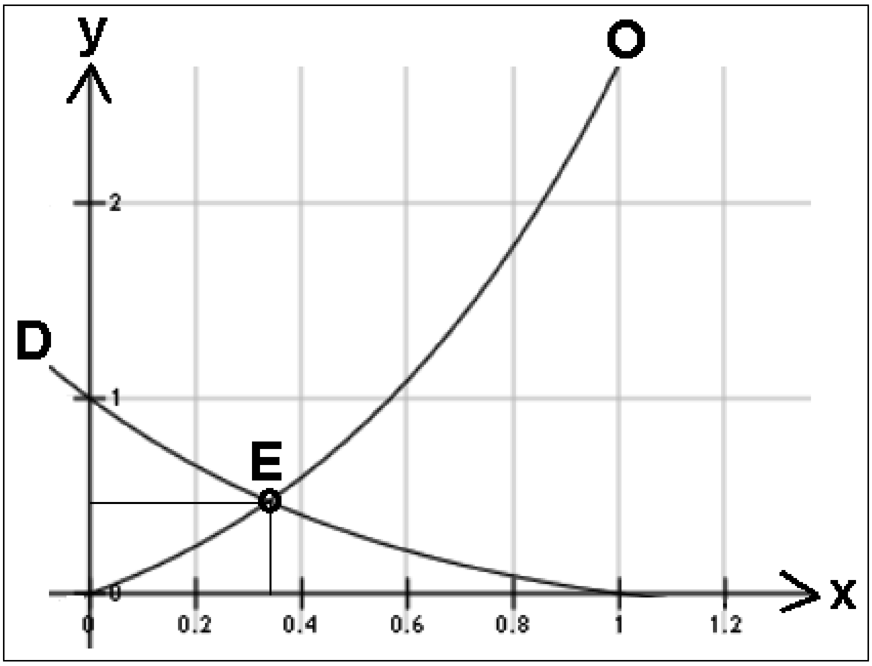


FIG. 8.3. Oferta, demanda y punto de equilibrio (III).

Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 13

La demanda total media q (expresada en miles de ud./mes) de un pequeño electrodoméstico en un mercado, en función del precio p (expresado en euros/ud.), varía de acuerdo con la tabla siguiente:

p(y)	q(x)
200	0
175	5.000
145	10.000
120	15.000
100	20.000
75	25.000

Se pide: a) Determinar la elasticidad arco de la demanda en el tramo comprendido entre los precios: p = 175 €/ud. y p = 120 €/ud.; b) Resolver la función de oferta dada por la ecuación integral: $y(x) = x + \int_x^{\infty} e^{2(t-x)} y(t) dt$, con la condición inicial: y(0) = 3. c) Estudiar el equilibrio del mercado así como la elasticidad de la oferta en dicho punto de equilibrio. d) Estimar los ingresos brutos anuales del vendedor del aparato en cuestión por este concepto.

Solución:

a) La elasticidad arco pedida vendrá dada por la expresión:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{15 - 5}{15 + 5} \times \frac{120 + 175}{120 - 175} = (\frac{1}{2}) \times (\frac{295}{-55}) = -2'68 < -1,$$

por lo que se trata de una demanda relativamente elástica.

b) En el caso dado se cumple que: f(x) = x, K(x) = e^{2x}. Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie y λ = 1. Por esto, también:

$$F(p) = \frac{1}{p^2}, \tilde{K}(-p) = \int_0^{\infty} e^{-2x} e^{px} dx = \frac{1}{2-p}, \text{Re}p < 2.$$

De este modo, obtenemos la siguiente ecuación operacional:

$$\phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2-p}\phi(p), \text{ de tal forma que: } \phi(p) = \frac{p-2}{p^2(p-1)}.$$

De aquí se obtiene la expresión de la función generatriz Laplace:

$$y(x) = L^{-1}\left(\frac{p-2}{p^3-p^2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px}dp\,,\ \ (\forall\gamma / 0 < \gamma < 2).$$

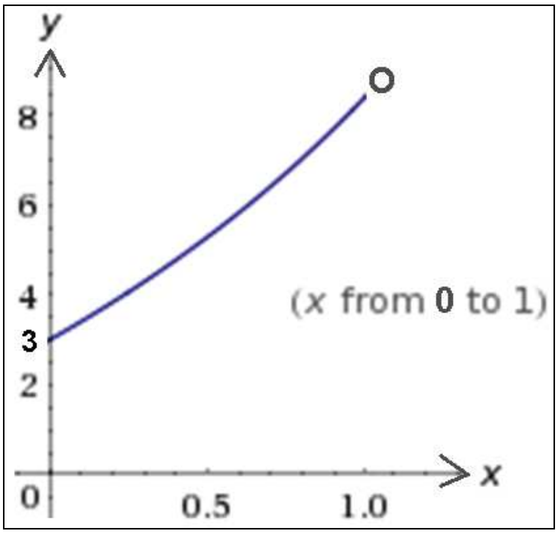
La integral anterior puede ser calculada por la fórmula integral de Cauchy. La función subintegral (integrando) tiene un polo doble p = 0 y uno simple, p = 1, el cual aparece para $\gamma > 1$; esto está ligado con la inclusión o no en la solución de la ecuación integral planteada de las soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, a saber:

$$y(x) = \int_x^{\infty} e^{2(x-t)}y(t)dt\,,\ \text{con } \lambda = 1.$$

Hallemos seguidamente los residuos de la función subintegral o integrando en sus polos:

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right) = 2x+1, \qquad \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right) = -e^x\,.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación integral buscada es: $y(x) = 2x + 1 + C\cdot e^x$ (donde C es una constante arbitraria). Pero con la condición inicial dada, se tendrá que: y(0) = 1 + C = 3, de donde: C = 2, y resulta la solución particular: $y(x) = 2x + 1 + 2e^x = 2(e^x + x) + 1$, con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(e^x + x)+1}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

c) Para hallar la ecuación analítica de la función de la demanda, con los datos del problema planteado, sería conveniente la realización de un ajuste minimocuadrático no lineal mediante una regresión exponencial natural o neperiana del tipo: $y = A \cdot e^{Bx}$, que ofrece, en este caso, excelentes resultados como puede comprobarse, constituyendo una regresión prácticamente perfecta. Dicha expresión puede linealizarse tomando logaritmos neperianos, así:

$$\ln y = \ln A + B \cdot x.$$

En efecto, se obtienen los siguientes valores:

A = 208’94317 (término constante)
B = -0’0387 (coeficiente de regresión)
r = -0’994 (coeficiente de correlación no lineal)
$R = r^2$ = 0’988 (coeficiente de determinación o crítico)

Resulta, pues, la siguiente función ajustada de la demanda:

$$y = 208'94317 \cdot e^{-0'0387 \cdot x},$$

que tiende evidentemente a 0 cuando x tiende a $+\infty$, por lo que el eje de abscisas constituye una asíntota horizontal de la misma, con los siguientes valores estimados y sus discrepancias con los valores realmente observados:

	x_i	y_i	$y_{est.}$	d_i
	0	200	208’94	-8’94
	5	175	172’19	+2’81
	10	145	141’89	+3’11
	15	120	116’93	+3’07
	20	100	96’36	+3’64
	25	75	79’41	-4’41
$\sum_{i=1}^{6}$	**75**	**815**	**815’72**	**-0’72 ≅ 0**

En el equilibrio tendrá lugar que: O = D, con lo que:

$2(e^x + x) + 1 = 208'94317 \cdot e^{-0'0387 \cdot x}$, ecuación que resuelta ofrece los valores: $x \approx 4'42$ (4.420 ud./mes) $\Rightarrow$ $y \approx 176'03$ €/ud. O sea, tendremos un punto de equilibrio de coordenadas E(4’42, 176’03).

Así pues, resulta la siguiente representación gráfica:

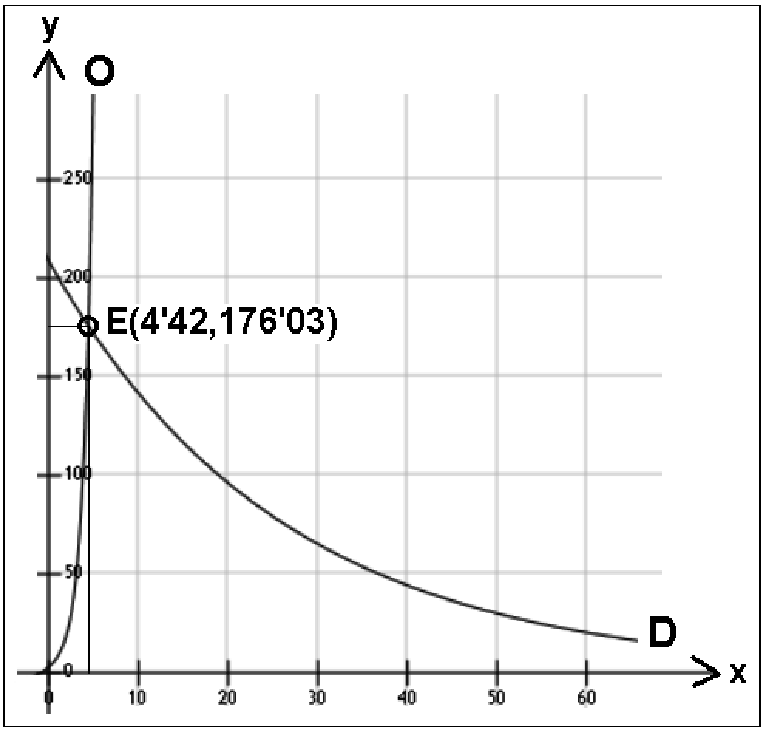


FIG. 8.4. Oferta, demanda y punto de equilibrio (IV).

Por último, la elasticidad de la función de oferta: $y = 2(e^x + x) + 1$, en el punto de equilibrio hallado, resulta ser la siguiente:
$dy/dx = 2(e^x + 1)$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2(e^x+1)}$; y la elasticidad buscada de esta función será: $e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{2(e^x+1)} \times \frac{y}{x} = \frac{176'03}{743'41} = 0'24 < 1$, por lo que la oferta en este punto resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

d) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del artículo concreto en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 176'03 \text{ €/ud.} \times 4.420 \text{ ud./mes} \times 12 \text{ meses/año} =$$
$$= 9.336.631'20 \text{ €/año}.$$

Ejemplo 14

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow \int_0^x e^{x-t} y(t)dt = x \\ O \rightarrow \int_0^x y(t)y(x-t)dt = \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades diarias. Se trata de estudiar el equilibrio del mercado, determinar la elasticidad de ambas funciones económicas en dicho punto de equilibrio y estimar los ingresos brutos anuales del vendedor (considerando un calendario laboral de 240 días/año).

Solución:

Tanto la función de oferta como la de demanda vienen expresadas como una ecuación integral homogénea de 2ª especie, con $\lambda = 1$, por lo que las resolveremos como tales por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, en el caso de la función de demanda, aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación planteada, se obtiene que:

$\frac{1}{p-1}\phi(p) = \frac{1}{p^2}$, de donde se deduce que la función generatriz Laplace es:

$$\phi(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}; y(x) = L^{-1}[\phi(p)] = 1 - x\,.$$

Así pues, la función $y_d(x) = 1-x$ es la solución de la ecuación de demanda planteada.

Por lo que se refiere a la función de oferta, sea $y(x) = L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando a ambos miembros de la ecuación integral anterior la transformación de Laplace se obtiene que:

$$\phi^2(p) = \frac{1}{p^4}, \quad \text{de donde:} \quad \phi(p) = \sqrt{\frac{1}{p^4}} = \pm\frac{1}{p^2}\,.$$

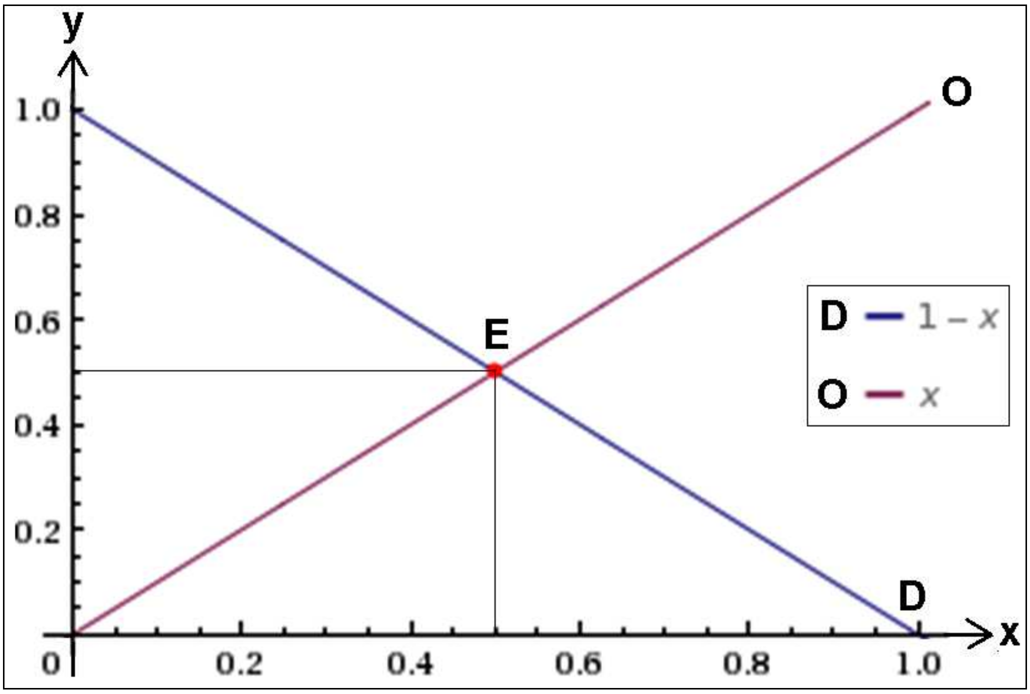
Las funciones: $y_1(x) = L^{-1}[\frac{1}{p^2}] = x$, e $y_2(x) = L^{-1}[-\frac{1}{p^2}] = -x$, serán ambas teóricamente soluciones de la ecuación integral planteada (dicha solución no es única) y aquí tomaremos en consideración únicamente la primera de ellas $y_o(x) = x$ (recta bisectriz del primer cuadrante), por carecer la segunda de significación económica.

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 1 - x \\ O \rightarrow y = x \end{cases}$$

1-x = x; x = ½ = 0’5 (500 ud./día) e y = 0’50 €/ud.

o sea, el punto de equilibrio tiene lugar para E(0’50, 0’50), con la siguiente representación gráfica:



Por lo que se refiere a la elasticidad de ambas funciones económicas, veamos que:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -1 \times \frac{y}{x} = \frac{x-1}{x} = -\frac{0'50}{0'50} = -1,$$ y del mismo modo:

$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = 1 \times \frac{y}{x} = \frac{x}{x} = 1$, luego en ambos casos se trata de elasticidades unitarias.

Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del artículo concreto en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 0'50 \text{ €/ud.} \times 500 \text{ ud./día} \times 240 \text{ días/año} = 60.000'00 \text{ €/año.}$$

Ejemplo 15

La función de demanda de un bien normal viene dada por la ecuación integral siguiente, con significación económica en el primer cuadrante del círculo: $\int_0^x e^{x-t} \cdot y(t) \cdot dt = \sin x$, y la función de oferta viene dada por la ecuación: 4y = 3x. Se pide: a) Estudiar el equilibrio del mercado, viniendo *y* expresada en €/ud. y *x* en millones de ud. b) Hallar el beneficio neto del ofertante si sus gastos totales son del orden del 73% de su cifra de negocio, con una fiscalidad del 25%.

Solución:

a) La función de demanda constituye una ecuación integral inhomogénea de Volterra de 1ª especie. El término no homogéneo es la función trigonométrica: g(x) = sin x, y el núcleo es: $K(x,t) = e^{x-t}$, siendo ambas funciones continuas y derivables. Derivando ambos miembros con respecto a x, se obtiene que:

$$e^{x-x}\cdot y(x)+\int_0^x \frac{\delta e^{x-t}}{\delta x}\cdot y(t)\cdot dt = \cos x \text{ ; de donde se deduce que:}$$

$$y(x)+\int_0^x e^{x-t}\cdot y(t)\cdot dt = \cos x\,.$$

Aplicando las transformadas de Laplace se tiene que:

$$L[y(x)] + L[e^x]\cdot L[y(x)] = \frac{p}{1+p^2} = L[y(x)]+\frac{L[y(x)]}{p-1} = L[y(x)](1+\frac{1}{p-1})\,.$$

$$\text{O sea: } L[y(x)]\cdot\frac{p}{p-1} = \frac{p}{1+p^2} \Rightarrow L[y(x)] = \frac{p-1}{p^2+1},$$

y de aquí se obtiene, como siempre, la función generatriz Laplace siguiente:

$$y(x) = L^{-1}[\frac{p-1}{p^2+1}] = L^{-1}[\frac{p}{p^2+1}] - L^{-1}[\frac{1}{p^2+1}] = \cos x - \sin x\,.$$

El equilibrio del mercado tendrá lugar para D = O, esto es:

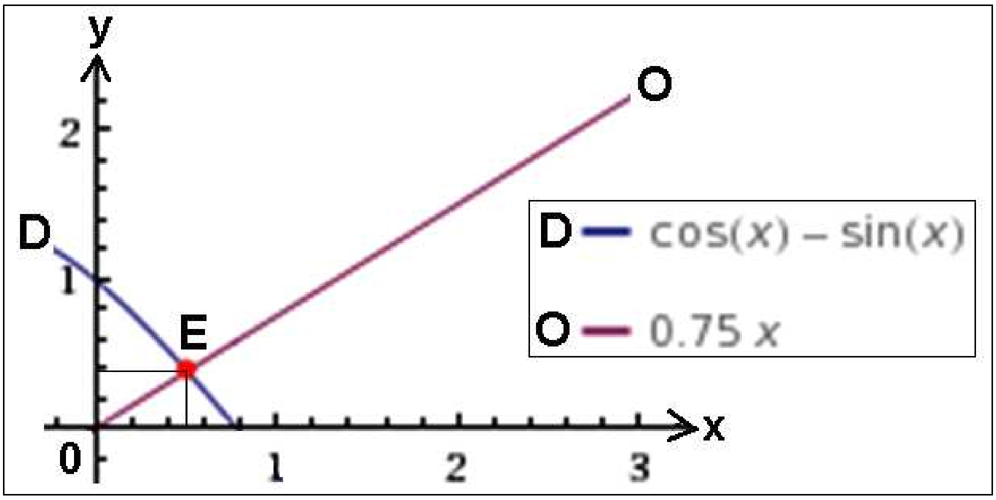
$\cos x - \sin x = \frac{3x}{4} \Rightarrow$ x = 0’511 (511.000 ud.) e y = 0’75·0’511 ≈

≈ 0’38 €/ud., o sea, se trata del punto de coordenadas cartesianas rectangulares: E(0’511, 0’38).

En todo caso, la función de demanda se anula para un valor de:

$$x = \pi - \frac{3\pi}{4} = \pi(1-\frac{3}{4}) = 0'25\cdot\pi = 0'785\,(785.398\,\text{ud.}),$$

con la siguiente representación gráfica:



b) El ingreso bruto del ofertante vendrá dado por:

$$I = p \times q = 0'38\ €/ud. \times 511.000\ ud. = 194.180\ €\ ,$$

y su beneficio antes de impuestos será de:

$$\pi = I - G = I - 0'73 \cdot I = 0'27 \cdot I = 0'27 \cdot 194.180 = 52.428'60\ €\ ,$$

mientras que su beneficio neto anual, descontando la fiscalidad, será:

$$B = 0'75 \cdot \pi = 0'75 \cdot 52.428'60 = 39.321'45\ €\ .$$

Ejemplo 16

Los resultados contables de una empresa vienen dados, en función del tiempo, por la siguiente ecuación integral: $y(t) = t - \int_0^t e^{t-u} \cdot y(u) \cdot du$. Se desea averiguar cuándo se alcanzan los máximos beneficios y a partir de qué instante temporal dichos resultados comienzan a ser negativos, viniendo *y* expresada en millones de euros y *x* en años (ejercicios económicos).

Solución:

Se trata de una ecuación integral de Volterra, inhomogénea de 2ª especie, con $\lambda = -1$, con el núcleo siguiente: $K(t,u) = e^{t-u}$. Dicho núcleo es de desplazamiento, el término no homogéneo es $g(t) = t$, y $\lambda = -1$. Aplicando el operador estudiado denominado “transformada de Laplace”, y teniendo en cuenta que (véase la tabla correspondiente del capítulo anterior 7):

$$L[t] = \frac{1}{p^2};\ L[e^t] = \frac{1}{p-1}$$, y entonces se tiene:

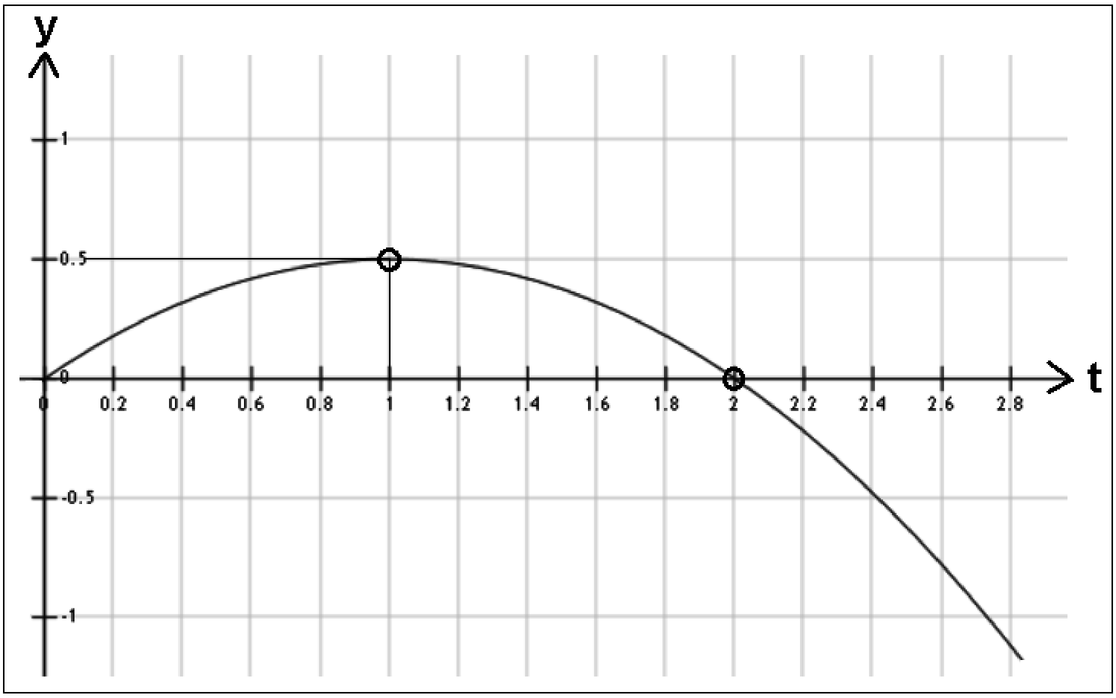
$$\phi(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{\phi(p)}{p-1}; \phi(p) + \frac{\phi(p)}{p-1} = \frac{1}{p^2} = \phi(p)\frac{p}{p-1};$$ de donde se deduce que:

$$\phi(p) = \frac{1}{p^2} : \frac{p}{p-1} = \frac{p-1}{p^3} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}.$$

Teniendo en cuenta ahora que: $L\left[\frac{t^n}{n!}\right] = \frac{1}{p^{n+1}}$, se obtiene, por fin, la solución buscada mediante la función generatriz de Laplace, esto es:

$$y(t) = L^{-1}(\frac{1}{p^2}) - L^{-1}(\frac{1}{p^3}) = t - \frac{t^2}{2} = t(1 - \frac{t}{2}),$$

con la siguiente representación gráfica:



Los resultados negativos comienzan a experimentarse, como puede verse en el gráfico anterior, a partir del 2º ejercicio económico, y los máximos resultados contables positivos tienen lugar justo al final del primer ejercicio, con un montante correspondiente de:

$$y = 0'5 \equiv 500.000\ €\ .$$

Ejemplo 17

Se supone que la función de productividad total variable de una empresa, con un "input" variable, viene dada por la ecuación integral siguiente: $y(x) = x - \int_0^x sh(x-t) \cdot y(t) \cdot dt$. Se pide: a) Determinar la función de producción total, así como la cantidad máxima de "output" que podría obtenerse por la empresa, sabiendo que a un nivel nulo de "input" corresponde una producción de q = 800 ud., viniendo todas las variables expresadas en miles de unidades; b) Representar analítica y gráficamente las curvas de productividad total, media (variable y total) y marginal.

Solución:

a) Hay que tener en cuenta que en el integrando o función subintegral nos aparece la función hiperbólica directa:

sh(x-t) = $\frac{e^{x-t} - e^{t-x}}{2}$, por lo que la ecuación integral, que es inhomogénea de 2ª especie, con λ = -1, también puede escribirse así:

$$y(x) = x - \int_0^x \left(\frac{e^{x-t} - e^{t-x}}{2}\right) \cdot y(t) \cdot dt = x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{x-t} \cdot y(t) \cdot dt + \frac{1}{2}\int_0^x e^{t-x} \cdot y(t) \cdot dt,$$

que una vez resuelta ofrece la solución siguiente: y(x) = $x - \frac{x^3}{6}$, como puede comprobar el amable lector/a a modo de ejercicio recapitulatorio.

Teniendo en cuenta que la productividad fija dada es PF = 0'8 (800 ud.), se tendrá una función de productividad total de:

$$q = PT = PV + PF = x - \frac{x^3}{6} + 0'8.$$

La cantidad máxima de "output" vendrá dada por la anulación de la productividad marginal, esto es:

$$PMa = \frac{dq}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = +\sqrt{2} = 1'414 \text{ (1.414 ud.)},$$

puesto que solo posee sentido económico la raíz positiva hallada. Para este nivel de "input", corresponde una producción de:

$q = 1'414 - \frac{1'414^3}{6} + 0'8 = 1'743$ (1.743 ud.), que es el máximo de la curva de productividad total.

b) Lógicamente, el punto de inflexión de la curva de productividad total coincide con el máximo de la curva de PMa, con lo que se tendrá que:

- *Condición de primer grado o necesaria:*

$\frac{d\,PMa}{dx} = -x = 0 \Rightarrow x = 0$, que es un máximo absoluto de la curva PMa en el punto (0, 1).

- *Condición de segundo grado o suficiente:*

$\frac{d^2PMa}{dx^2} = -1 < 0 \Rightarrow$ luego existe un máximo en este punto que es también un punto de inflexión en la curva de la función de producción de la empresa, así:

$q = 0 - \frac{0^3}{6} + 0'8 = 0'8$, o sea, correspondería al punto de coordenadas cartesianas rectangulares (0, 0'8) en la curva de productividad total.

Por otra parte, la productividad media variable (PMeV) es el cociente de la productividad total variable (PV) por la cantidad de "input", o sea: $PMeV = \frac{q}{x} = 1 - \frac{x^2}{6}$, de tal suerte que ambas curvas de PMa y PMeV se igualan en el punto (0, 1) y también en el máximo de la curva de PMeV si es que tal punto existe. En efecto:

$\frac{d}{dx}(PMeV) = -\frac{x}{3} = 0$; de donde: x = 0, al que corresponde una cantidad de: q = 1 (1.000 ud.). Ello puede comprobarse también por igualación de ambas funciones, o sea: (PMa = PMeV):

$$1 - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{6}$$; esto es necesariamente: x = 0, c.s.q.d.

La productividad media total, en fin, vendrá dada por la ecuación:

PMe = $\frac{PT}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{0'8}{x}$, y tanto esta curva como la de PT se anulan en el punto que resulta de la ecuación:

$$x^3 - 6x - 4'8 = 0 \Rightarrow x = 2'77971 \approx 2.780 \text{ ud.},$$

que constituye la única raíz positiva.

La representación gráfica pedida correspondiente a estas ecuaciones será la siguiente:

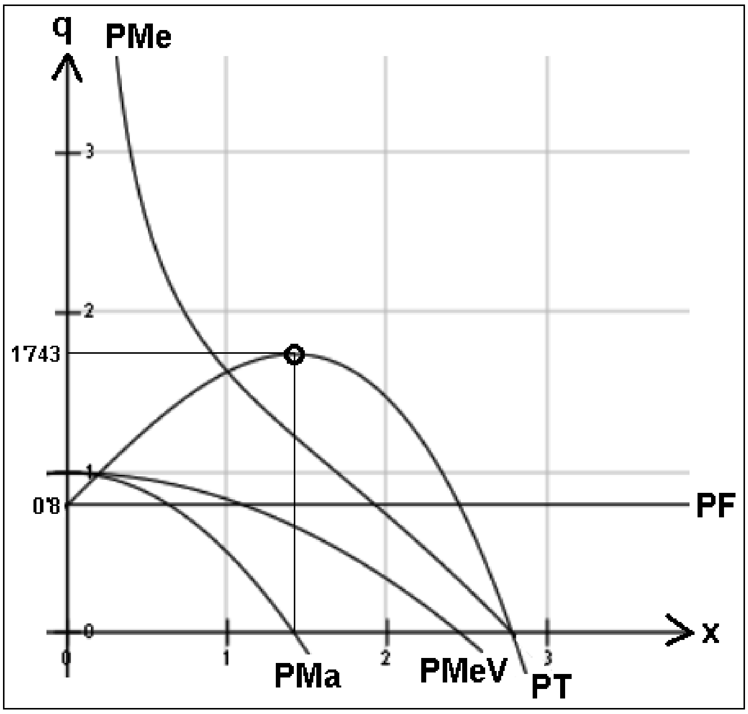


FIG. 8.5. Diferentes curvas de productividad.

Ejemplo 18

Un comercio de venta de marcos para fotografías actúa en un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, y se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow \int_0^x \sqrt{x-\tau}\cdot y(\tau)\cdot d\tau = \pi\cdot x \\ O \rightarrow y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-\tau}\cdot y(\tau)\cdot d\tau \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) de marcos expresada en miles de unidades diarias. Se trata de estudiar el equilibrio del mercado, hallando el ingreso bruto anual del comerciante considerando un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

La función de oferta (inhomogénea de 2ª especie, con λ = 1) y la de demanda (inhomogénea de 1ª especie) dadas vienen expresadas como sendas ecuaciones integrales cuyas soluciones, como puede comprobar el amable lector/a, son respectivamente:

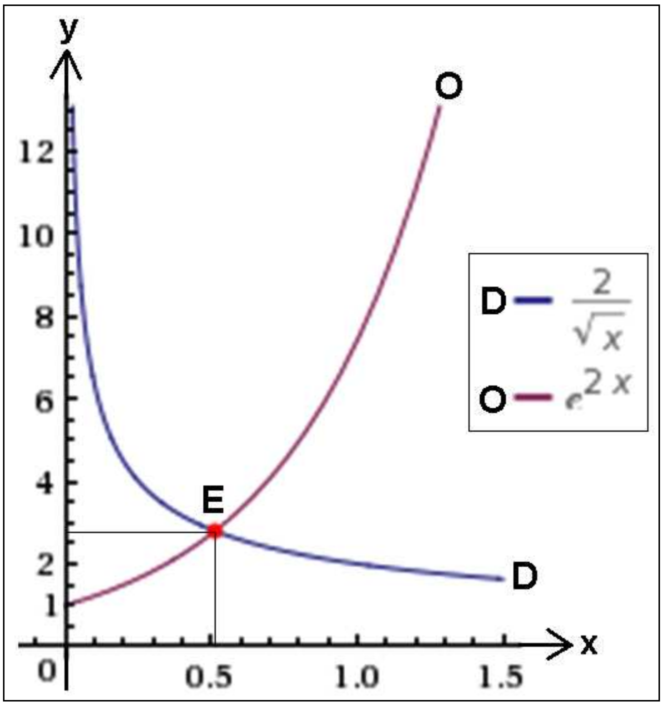
$$D \Rightarrow y(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}; \; O \Rightarrow y(x) = e^{2x}.$$

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O), esto es:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = e^{2x}, \text{ de lo que se deduce que:}$$

$$x = 0'513 \text{ (513 ud./día); } y = \frac{2}{\sqrt{0'513}} = 2'79€/ud.,$$

con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, en el caso de la función de oferta se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Los ingresos brutos anuales del comerciante vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 2'79 €/ud. $\times$ 513 ud./día $\times$ 240 días/año = 343.504'80 €/año.

Ejemplo 19

Una frutería vende cerezas en un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta, comportándose dicha fruta como un bien normal. Se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du = 21 \\ \\ O \rightarrow y(x) = 1 + x + \int_0^x e^{-2(x-\tau)}\cdot y(\tau)\cdot d\tau \end{cases}$$

, siendo *y* el precio de venta al público (p) expresado en euros/kg. y *x* la cantidad media (q) de cerezas en toneladas métricas mensuales. Se trata de estudiar el equilibrio del mercado, hallando el ingreso bruto anual del comerciante por la venta concreta de tan exquisita drupa, sabiendo que la temporada se extiende a lo largo de dos meses al año.

Solución:

La función de demanda la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{21\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{21\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{21}{S}$$

, donde: f(x) $\leftrightarrow$ F(S). De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 21 \Rightarrow F(S)(S+1) = 21 \Rightarrow F(S) = \frac{21}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa obtenemos, mediante la correspondiente función generatriz Laplace, el resultado deseado de la función de demanda, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{21}{S+1}\right\} = 21\cdot e^{-x}} \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$21 \cdot e^{-x} + \int_0^x 21 \cdot e^{-u} \cdot du = 21$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u} \cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Por otra parte, la función de oferta (inhomogénea de 2ª especie, con $\lambda = 1$) constituye una ecuación integral de convolución, cuya solución viene dada por la siguiente función generatriz Laplace, como podrá comprobar el amable lector/a:

$$y(x) = 1 + 2x.$$

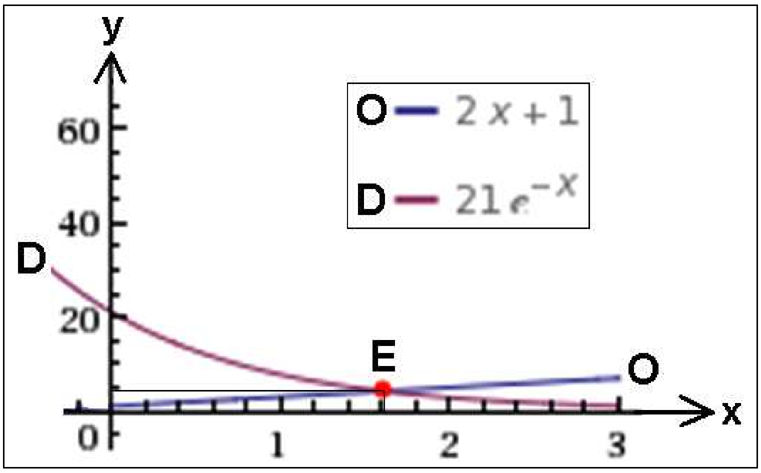
Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 21 \cdot e^{-x} \\ O \rightarrow y = 2x + 1 \end{cases}$$

Esto es: $21 \cdot e^{-x} = 2x + 1$, de donde se deduce que: $x \approx 1'61$ (1.610 kg./mes).

En este caso: $y = 2 \times 1'61 + 1 = 4'22$, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 4’22 €/kg. y una cantidad aproximada de 1.610 kg./mes de la fruta (1’61 Tm./mes).

La representación gráfica de esta solución particular, que es evidentemente una función exponencial inversa (la demanda) y una recta creciente (la oferta), se expone a continuación, con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas cartesianas rectangulares:



Los ingresos brutos anuales del comerciante frutero vendrán dados, en concepto de la venta exclusiva de cerezas, por:

I = p × q = 4’22 €/kg. × 1.610 kg./mes × 2 meses/año = 13.588’40 €/año.

Ejemplo 20

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow y(x) = e^{-x} + \int_x^{\infty} e^{x-\tau} \cdot y(\tau) \cdot d\tau \text{, con la condición: } y(0) = 4 \\ O \rightarrow y(x) = x \cdot 3^x - \int_0^x 3^{x-\tau} \cdot y(\tau) \cdot d\tau \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades diarias. Se trata de estudiar el equilibrio del mercado, hallando el ingreso bruto anual del productor considerando un calendario laboral de 240 días/año.

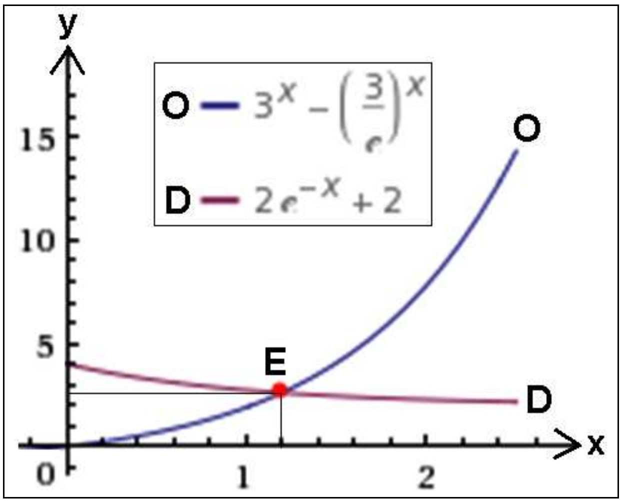
Solución:

La función de oferta y la de demanda dadas vienen expresadas como sendas ecuaciones integrales de Volterra inhomogéneas de 2ª especie (con λ = -1 y λ = 1, respectivamente), cuyas soluciones, como puede comprobar el amable lector/a, son:

$$D \Rightarrow y(x) = c + 2 \cdot e^{-x};\ O \Rightarrow y(x) = 3^x(1 - e^{-x})\ .$$

Desde luego, la función de demanda tiene el valor inicial: y(0) = 4, con lo que podremos hallar el valor de la constante: y(0) = c + 2 = 4; de donde: $c = 2 \Rightarrow y(x) = 2 + 2 \cdot e^{-x} = 2(1 + e^{-x})$. En el equilibrio: D = 0, con lo que: $2(1 + e^{-x}) = 3^x(1 - e^{-x}) \Rightarrow 5e^{-x} = 3x - 2$, de donde se deduce que:

$x = 1'198$ (1.198 ud./día) e $y = 2 + 2 \cdot e^{-1'198} = 2'60$ €/ud., lo que supone un punto de equilibrio de: E(1'198, 2'60), con la siguiente representación gráfica:



Los ingresos brutos anuales del productor vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 2’60 €/ud. $\times$ 1.198 ud./día $\times$ 240 días/año = 747.552’00 €/año.

Por otra parte, en el caso de la función de oferta se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: x $\to \infty$ también y $\to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x - (3/e)^x}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 21

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tiene la siguiente función de demanda una vez realizado el pertinente análisis econométrico: $\int_0^x e^{x-t} y(t) dt = x$, que alcanza el equilibrio para x = 600 ud./día, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades diarias. Se trata de resolver las siguientes cuestiones: estudiar el equilibrio del mercado, determinar la elasticidad de las funciones de oferta y demanda en dicho punto de equilibrio y estimar los ingresos brutos anuales del vendedor (considerando un calendario laboral de 240 días/año), sabiendo que la función de oferta es lineal y se anula para un precio de 0’20 €/ud.

Solución:

La función de demanda dada, que es inhomogénea de 1ª especie, se resolverá aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación planteada, y entonces se obtiene que:

$\frac{1}{p-1}\phi(p) = \frac{1}{p^2}$, de donde se deduce que la función generatriz Laplace es:

$$\phi(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}; y(x) = L^{-1}[\phi(p)] = 1 - x .$$

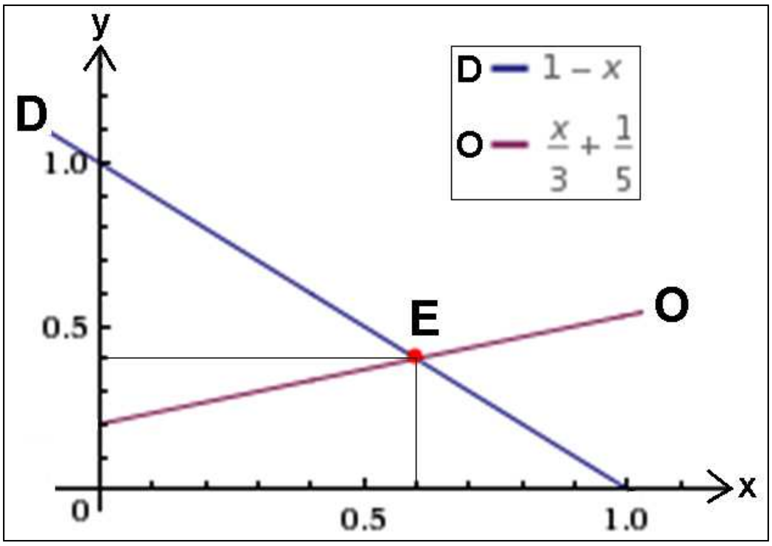
Así pues, la función $y_d(x)$ = 1-x es la solución de la ecuación de demanda planteada. El punto de equilibrio tiene lugar para x = 0’6, esto es: y = 1 – 0’6 = 0’4 (0’40 €/ud.), y los ingresos brutos anuales del vendedor pueden estimarse del orden de:

I = p $\times$ q = 0’40 €/ud. $\times$ 600 ud./día $\times$ 240 días/año = 57.600’00 €/año.

Por otra parte, la función de oferta será una recta que pasa por dos puntos conocidos, a saber: P_1(0'0, 0'20) y el de equilibrio P_2(0'6, 0'40), por lo que su ecuación analítica vendrá dada por la expresión:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$; esto es: $\frac{x-0}{0'6-0}=\frac{y-0'2}{0'4-0'2}$; de donde resulta que:

O $\rightarrow$ $\frac{5x+3}{15}$ = $y_o(x)$, con la siguiente representación gráfica del equilibrio:



Por último, en el punto de equilibrio del mercado hallado, a saber: E(0'6, 0'40) se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ y = 1 - x; dy/dx = -1; $\frac{dx}{dy}=-1$, e_d = $\frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x}=-1\times\frac{0'40}{0'6}=-0'67$.

Entonces se tiene que: $e_d \in$ (-1,0), por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Del mismo modo, por lo que se refiere a la función de oferta, se tendrá que:

O $\Rightarrow$ y = $\frac{5x+3}{15}$; dy/dx = $\frac{1}{3}$; $\frac{dx}{dy}=3$. Y entonces:

$$e_o = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x}=3\times\frac{0'40}{0'6}=2'00>1,$$

y en este caso, la función en estudio resulta relativamente elástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción mayor.

Ejemplo 22

Dos agencias de viajes tienen sus resultados contables[8] netos expresados por las siguientes ecuaciones integrales:

$$f(t) + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau) \cdot d\tau = t \quad \text{(agencia 1)}$$
$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau) \cdot d\tau = 4e^{-t} + \sin t \quad \text{(agencia 2)}$$

, donde el tiempo *t* viene expresado en decenios e *y* (resultados contables) en millones de euros. Se pide determinar la trayectoria temporal de dichos resultados en el primer decenio de la actividad económica de ambas empresas, así como en qué momentos se produce, si es el caso, la coincidencia de la cuantía de sus resultados contables.

Solución:

La ecuación integral correspondiente a la primera empresa ofrece, como hemos visto, la siguiente ecuación integral: $f(t) + \int_0^t (t-\tau)\, f(\tau) \cdot d\tau = t$, que es inhomogénea de 2ª especie. Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la misma se obtiene que:

$$F(S) + \frac{F(S)}{S^2} = \frac{1}{S^2};\; F(S)\left(1 + \frac{1}{S^2}\right) = \frac{1}{S^2};\; F(S) = \frac{\frac{1}{S^2}}{\frac{S^2+1}{S^2}};\; F(S) = \frac{S^2}{S^2(S^2+1)} = \frac{1}{S^2+1}.$$

De donde se deduce que, invirtiendo la transformación realizada, se tiene la siguiente función generatriz Laplace: y = f(t) = sin t.

Por otra parte, la ecuación integral correspondiente a la segunda empresa, también inhomogénea de 2ª especie, ofrece la expresión:

$$f(t) + 2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = 4e^{-t} + \sin t\,.$$

---

[8] El resultado fiscal o tributario del ejercicio, es decir, lo que conocemos como *base imponible*, se obtiene en régimen de estimación directa a partir del resultado contable antes de impuestos, el cual sólo puede ser modificado como consecuencia de la aplicación de normas específicas del TRLIS a determinadas operaciones: dichas modificaciones supondrán ajustar o corregir el resultado contable antes de impuestos, aumentándolo o bien disminuyéndolo. Los ajustes anteriores provocarán, por lo tanto, diferencias entre ambos resultados que serán positivas si hacen que el resultado fiscal aumente por encima del resultado contable y negativas si el efecto es el contrario. A su vez, estas diferencias positivas o negativas tendrán carácter temporal, cuando se compensen o reviertan con signo contrario en ejercicios futuros o carácter permanente en caso contrario, si no van a compensarse en ejercicios futuros.

Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la misma se obtiene que:

$$F(S)+2F(S)\left(\frac{S}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1}=F(S)\left(1+\frac{2S}{S^2+1}\right);$$

$$F(S)\left(\frac{S^2+2S+1}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1}\Rightarrow F(S)\left(\frac{(S+1)^2}{S^2+1}\right)=\frac{4}{S+1}+\frac{1}{S^2+1};$$

$$F(S)=\frac{4(S^2+1)}{(S+1)(S+1)^2}+\frac{S^2+1}{(S^2+1)(S+1)^2}=\frac{4S^2+4}{(S+1)^3}+\frac{1}{(S+1)^2}=\frac{4S^2+S+5}{(S+1)^3}.$$

Aplicando ahora el método de las fracciones simples y los coeficientes indeterminados a la primera fracción sumando de la expresión anterior, se tendrá que:

$$\frac{A}{S+1}+\frac{B}{(S+1)^2}+\frac{C}{(S+1)^3}=\frac{4S^2+4}{(S+1)^3}\text{; esto es:}$$

$$A(S+1)^2+B(S+1)+C=4S^2+4=AS^2+(2A+B)S+A+B+C,$$

de donde se sigue que: A = 4, B = -8, C = 8.

De aquí se deduce que, invirtiendo la transformación realizada, se obtiene la función generatriz Laplace siguiente que nos ofrece la función buscada:

$$y=f(t)=L^{-1}\left(\frac{4S^2+S+5}{(S+1)^3}\right)=4e^{-t}-8te^{-t}+4t^2e^{-t}+te^{-t}=e^{-t}(4-7t+4t^2).$$

Se trata, pues, de resolver la ecuación: $\sin t = e^{-t}(4-7t+4t^2)$, que en el primer decenio de la existencia de ambas empresas ofrece los siguientes resultados de coincidencia temporal:

$t \approx 0.645715208857771\ldots \approx$ 0'646 años; y = 601.769'80 €
$t \approx 2.11558543017027\ldots \approx$ 2'116 años; y = 855.236'60 €
$t \approx 6.47876735659964\ldots \approx$ 6'479 años; y = 194.337'40 €
$t \approx 9.40066221417954\ldots \approx$ 9'401 años; y = 24.113'40 €

, con la siguiente representación gráfica de las trayectorias temporales solicitadas:

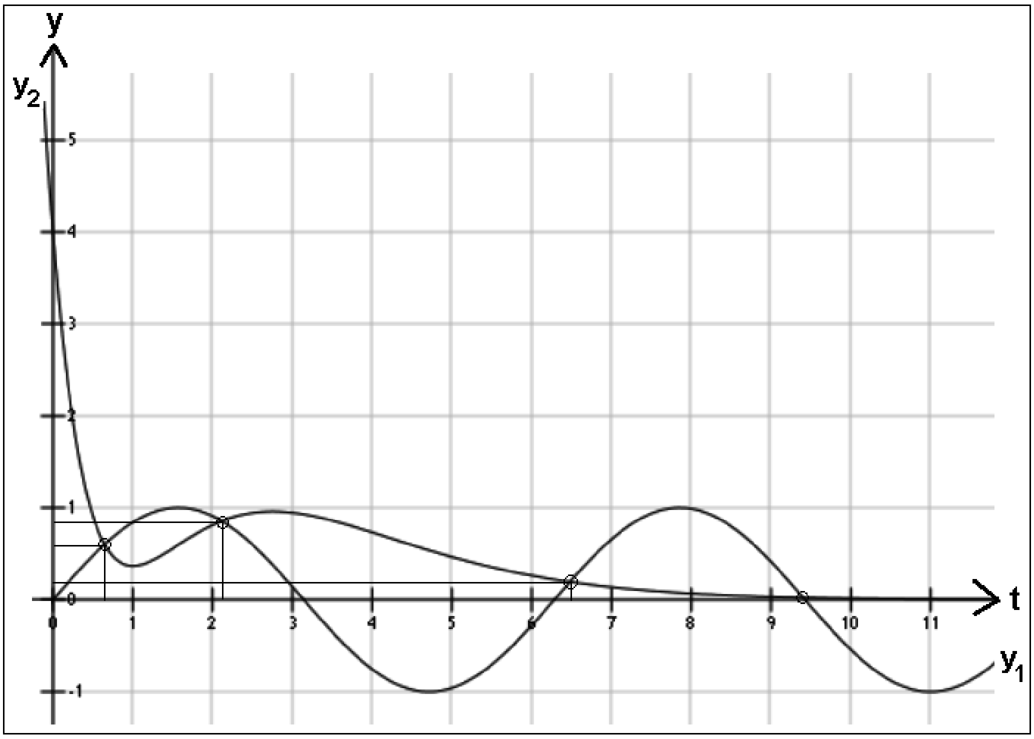


FIG. 8.6. Trayectoria temporal de los resultados contables (I).

Ejemplo 23

Una jefa de almacén descubre que la proporción de mercancías que queda sin vender en el instante t, tras haber comprado las mercancías, viene dada por $f(t) = e^{-1'5t}$. Quiere calcular el ritmo al que debería adquirir las mercancías para que las existencias del almacén permanezcan constantes.

Solución:

Se trata de un problema de gestión de stocks. Supóngase que el almacén comienza su abastecimiento con la compra de una cierta cantidad A de mercancías en el instante t = 0 y que, posteriormente, va adquiriendo más a un ritmo r(t). Durante un corto período de tiempo dado por: $u \leq t \leq u + \Delta u$, el almacén adquiere una cantidad $r(t)\cdot\Delta u$; y en el instante *t*, la parte que permanece sin venderse es: $e^{-1'5(t-u)}r(u)\cdot\Delta u$. Entonces, la cantidad de mercancías adquiridas previamente que no se han vendido en el instante *t* viene dada por la expresión:

$$A\cdot e^{-1'5t} + \int_0^t e^{-1'5(t-u)} r(u)\cdot du\,.$$

Puesto que éste es el inventario total del almacén y dado que la jefa del almacén desea que permanezca constante en su valor inicial, debemos tener:

$$A = A\cdot e^{-1'5t} + \int_0^t e^{-1'5(t-u)} r(u)\cdot du\,,$$

y el requerido ritmo r(t) de reposición de existencias es la solución de esta ecuación integral.

Si observamos detalladamente la integral del lado derecho de esta última ecuación, reconoceremos algo familiar sobre su forma: se asemeja a una convolución; de hecho es $e^{-1'5t} * r(t)$.

Ahora podemos reescribir la ecuación integral anterior en la forma siguiente:

$$A = A\cdot e^{-1'5t} + [e^{-1'5t} * r(t)].$$

Si tomamos la transformada de Laplace de cada miembro y suponemos que R(s) = L[r(t)], obtenemos que:

$$L[A] = A\cdot L[e^{-1'5t}] + L[e^{-1'5t} * r(t)] = \frac{A}{s+1'5} + \frac{1}{s+1'5}\cdot R(s)\text{, con lo que:}$$

$$\frac{A}{s} = \frac{A}{s+1'5} + \frac{1}{s+1'5}\cdot R(s)\text{, de donde se deduce que:}$$

$$(s+1'5)\cdot\left(\frac{A}{s} - \frac{A}{s+1'5}\right) = R(s)\text{; y también:}$$

$$(s+1'5)\cdot\left(\frac{A(s+1'5)}{s(s+1'5)} - \frac{As}{s(s+1'5)}\right) = R(s) = \frac{1'5A(s+1'5)}{s(s+1'5)} = \frac{1'5A}{s}\,,$$

y si ahora aplicamos las transformadas de Laplace a cada miembro, hallaremos que: $1'5\cdot L^{-1}\left(\frac{A}{s}\right) = L^{-1}R(s)$; que proporciona la función generatriz Laplace siguiente: 1'5·A = r(t).

Es decir, que el reaprovisionamiento buscado debería ser una cantidad constante de cuantía exactamente igual a una vez y media veces la cantidad originalmente adquirida A.

Ejemplo 24

Los resultados contables de una empresa, expresados en miles de euros, vienen dados en relación al tiempo por la ecuación integral:

$$y(t) + \int_0^t (t-v)^2 y(v)dv = t^3 + 3$$

Se pregunta ¿cuáles serán dichos resultados en el instante inicial de su constitución?

Solución:

Se trata de una ecuación inhomogénea de 2ª especie, con λ = -1. Haciendo:

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

, y tomando las correspondientes transformadas de Laplace, se tendrá que:

$$Y(s) + L\{t^2 * y(t)\} = \frac{3!}{s^4} + \frac{3}{s}$$

, puesto que se trata de un problema de convolución, y resultará:

$$Y(s) = \frac{6}{s(s^3+2)} + \frac{3s^2}{s^3+2}\ .$$

O bien:

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 12 + 3s^2}{s(s^3+2)^2}$$

, o lo que es lo mismo:

$$Y(s) = -\frac{3s^2}{s^3+2} + \frac{3s}{(s^3+2)^2} + \frac{3}{s}\ .$$

Por lo que se refiere a la primera fracción sumando, se tendrá que:

$$L^{-1}\left\{\frac{-3s^2}{s^3+2}\right\} = -3L^{-1}\left\{s^2\,\frac{1}{s^3+2}\right\}$$, y también:

$$-3L^{-1}\left\{\frac{s^{\frac{3}{2}}}{(s^{\frac{3}{2}})^2 + (\sqrt{2})^2}\,s^{\frac{1}{2}}\right\} = -3(\cos(\sqrt{2}t) * L^{-1}\left\{s^{\frac{1}{2}}\right\})\ .$$

En cualquier caso, hallando las respectivas transformadas inversas laplacianas se obtiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3\,s^2}{s^3+2}\right\} = 2\,e^{\frac{t}{2^{\frac{2}{3}}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2^{\frac{2}{3}}}\right) + e^{-2^{\frac{1}{3}}\,t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3\,s}{(s^3+2)^2}\right\} = e^{\frac{t}{2^{\frac{2}{3}}}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2^{\frac{2}{3}}}\right)}{2^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}} + \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2^{\frac{2}{3}}}\right)}{3\,2^{\frac{4}{3}}}\right) - \frac{e^{-2^{\frac{1}{3}}\,t}}{3\,2^{\frac{4}{3}}}$$

$$- t\frac{e^{\frac{t}{2^{\frac{2}{3}}}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2^{\frac{2}{3}}}\right)}{3} - t\frac{e^{-2^{\frac{1}{3}}\,t}}{6}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} = 3$$

, con lo que la función generatriz Laplace será, en definitiva, para t = 0:

$$y(0) = 0 + 0 + 3 = 3,$$

o sea, que en el instante de la constitución de la empresa el resultado contable (extraordinario) es de 3.000 € , como también puede comprobarse directamente de la propia ecuación integral dada.

Ejemplo 25

Las ventas de un determinado producto en un establecimiento comercial vienen dadas por la siguiente ecuación integral:

$$y(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2 - s^2} \cdot y(s) \cdot ds,$$

viniendo las ventas anuales y = f(t) expresadas en miles de unidades y *t* en décadas. Se trata de determinar el valor de la cifra de ventas a los diez años del inicio de su actividad económica, considerando un precio del bien comercializado de 92’50 €/ud.

Solución:

Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie, con $\lambda = 1$. Aquí se tiene que: $g(t) = e^{t^2}$, y $k(t,s) = e^{t^2-s^2}$, y sabemos que si ambas funciones son continuas en I y S respectivamente, la única solución continua de la ecuación integral: $y(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s) \cdot y(s) \cdot ds$, $\forall\ t \in I$, está dada por la expresión: $y(t) = g(t) + \int_0^t \Gamma(t,s) \cdot g(s) \cdot ds$.

Hallamos los sucesivos núcleos iterados, con lo que:

$$\begin{cases} k_1(t,s) = e^{t^2-s^2} \\ k_2(t,s) = e^{t^2-s^2}(t-s) \\ k_3(t,s) = e^{t^2-s^2}\dfrac{(t-s)^2}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Y así por inducción tenemos que: $k_n(t,s) = e^{t^2-s^2}\dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$,

Luego: $\Gamma(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{t^2-s^2}\dfrac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} = e^{t^2-s^2} \cdot e^{t-s}$, y entonces, según el teorema pertinente (puede consultarse en los tratados adecuados existentes al respecto), y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^t (e^{t^2+t-s}) \cdot ds = \int_0^t (e^{t^2} \cdot e^t \cdot e^{-s}) \cdot ds = e^{t^2+t}\left[-e^{-s}\right]_0^t = -e^{t^2+t}(e^{-t}-1) = e^{t^2+t} - e^{t^2},$$

se tendrá también que:

$$y(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2} \cdot e^{t-s} \cdot e^{s^2} \cdot ds = e^{t^2} - e^{t^2} + e^{t^2+t} = e^{t^2+t}.$$

En efecto, substituyendo en la ecuación inicialmente dada, podemos comprobar que:

$$e^{t^2+t} = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2} \cdot e^{s^2+s} \cdot ds = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2+s} \cdot ds = e^{t^2} + e^{t^2} \cdot \int_0^t e^s \cdot ds = e^{t^2} + e^{t^2} \cdot \left[e^s\right]_0^t =$$

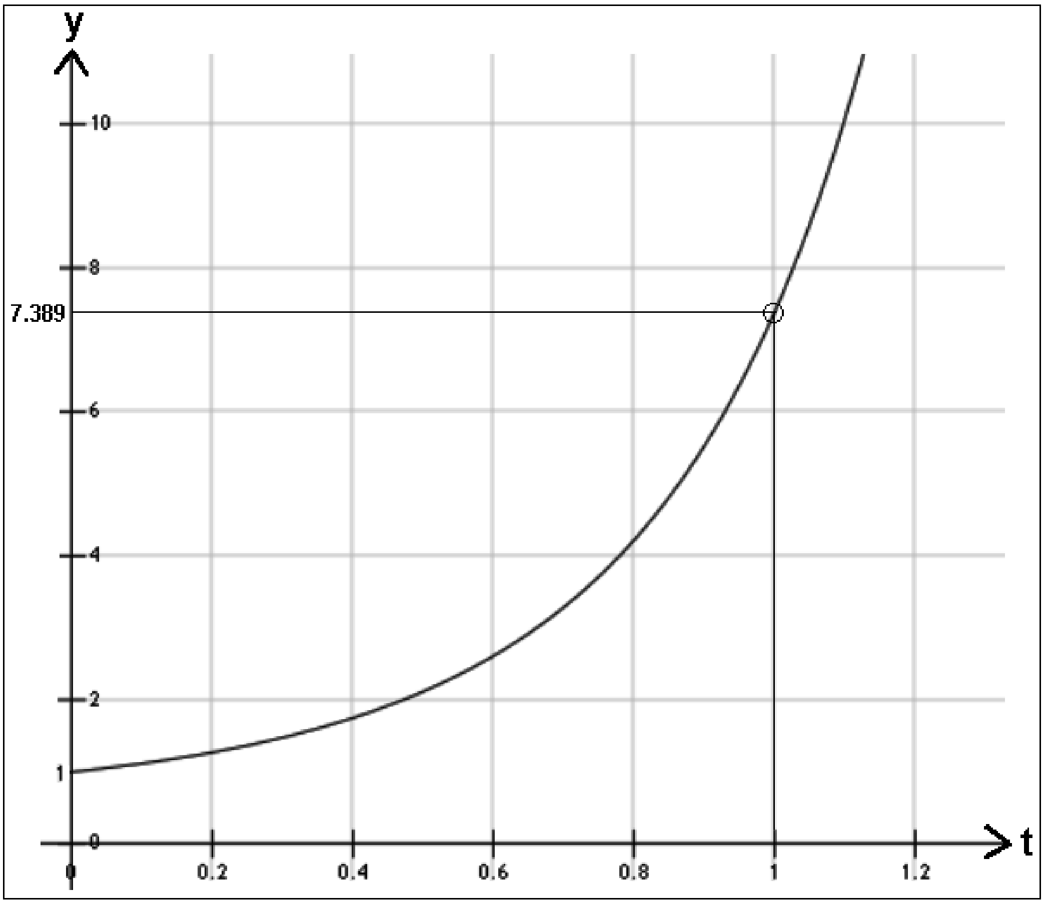
$$= e^{t^2} + e^{t^2}(e^t - 1) = e^{t^2} + e^{t^2+t} - e^{t^2} = e^{t^2+t}, \quad \text{c.s.q.d.}$$

Obviamente, a los 10 años se producirá una cantidad de venta del producto de:

$$(t = 1) \Rightarrow e^2 \approx 7'389 \equiv 7.389 \text{ ud.},$$

Por otra parte, en el caso de esta función se presume, también en este caso, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y}{t} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{t^2+t}}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Se tendría, en fin, la siguiente representación gráfica:



Así pues, cuando t = 10 años, se tendrá un volumen de ventas de:

V = p $\times$ q = 92’50 €/ud. $\times$ 7.389 ud. = 683.482’50 € .

Ejemplo 26

La producción en el tiempo de sendas fábricas de bienes de equipo F_1 y F_2 de una misma empresa viene dada por la siguiente ecuación integral: f(t) = 1 + $\int_0^t e^{\alpha(t-s)}\cdot f(s)\cdot ds$, con α = 0’02 y 0’15, respectivamente, para cada fábrica, viniendo la producción anual y = f(t) expresada en miles de unidades y *t* en décadas. Se trata de comparar el valor de la producción de ambas fábricas a los veintidós años del inicio de su actividad económica, considerando un precio del bien producido de 8.900 €/ud.

Solución:

Se trata de hallar la solución de la ecuación integral de Volterra dada por:

$$f(t) = 1 + \int_0^t e^{\alpha(t-s)}\cdot f(s)\cdot ds\ .$$

Para este ejemplo, tenemos que: g* = 1/p; $k^* = \frac{1}{p-\alpha}$,

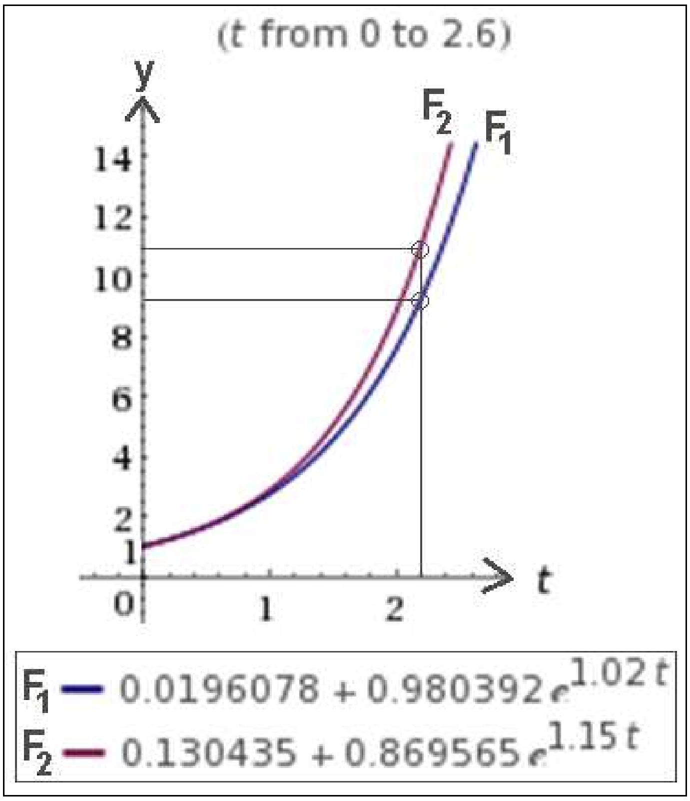
luego: $f^* = \frac{p-\alpha}{p(p-\alpha-1)}$, de donde se tiene que:

$$f^* = \frac{1}{p} - \frac{1}{(\alpha+1)p} + \frac{1}{(\alpha+1)(p-\alpha-1)}.$$

Tomando la transformada inversa tenemos que la función generatriz Laplace será:

$$f(t) = L^{-1}(\frac{1}{p}) - L^{-1}(\frac{1}{(\alpha+1)p}) + \frac{1}{(\alpha+1)} L^{-1}(\frac{1}{p-\alpha-1}) = 1 - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} e^{t(\alpha+1)},$$

con la representación gráfica siguiente para los valores de α = 0'02 y 0'15:



En el año t = 22, se tendrá, pues, una producción previsible de cada fábrica de:

$$\begin{cases} F_1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1'02} + \frac{1}{1'02} e^{1'02 \cdot t} = (t = 2'2) = 9'26567 \approx 9.266 \text{ ud.} \\ F_2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{1'15} + \frac{1}{1'15} e^{1'15 \cdot t} = (t = 2'2) = 11'0465 \approx 11.047 \text{ ud.} \end{cases}$$

, con unos valores correspondientes de las cifras de negocios[9] respectivas de (a precios de salida de fábrica):

$$\begin{cases} F_1 \Rightarrow 9.266 \text{ ud.} \times 8.900 \text{ €/ud.} = 82.467.400 \text{ €} \\ F_2 \Rightarrow 11.047 \text{ ud.} \times 8.900 \text{ €/ud.} = 98.318.300 \text{ €} \end{cases}$$

Desde luego, en el caso de las funciones que nos ocupan se presume también la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existen sendas ramas parabólicas según el eje OY (verticales, hacia arriba).

Ejemplo 27

Un inversor desea obtener el traspaso de un gran establecimiento comercial para lo que tiene tres ofertas de similares características en cuanto a situación, costes de traspaso, arriendo del local y otras tasas y gastos de establecimiento. Los resultados contables brutos *y = f(t)* de cada negocio, que la han sido suministrados, vienen expresados por las siguientes ecuaciones integrales:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(t) = e^{-t} + 2t + \int_0^t e^{s-t} f(s) ds \text{ (comercio 1)} \\ f(t) = 1 + \int_0^t f(s) \cdot \sin(t-s) ds \text{ (comercio 2)} \\ f(t) = 1 - t - \frac{t^2}{2} + \int_0^t f(s) \cdot (t-s) ds \text{ (comercio 3)} \end{array}}$$

, donde el tiempo *t* viene expresado en decenios (estudiar el caso para un primer periodo de 10 años, o sea, $0 \leq t \leq 1$) e *y* (resultados contables brutos) en millones de euros. Se pide: a) determinar la trayectoria temporal prospectiva de dichos resultados en el primer decenio de la actividad económica de los tres comercios, así como cuál de ellos resulta más interesante contratar, con las correspondientes representaciones gráficas, y b) calcular el importe supuesto de los pertinentes resultados contables netos en el quinto ejercicio, considerando una fiscalidad del 25%.

[9] La *cifra de negocios*, o *volumen de negocio*, es la cifra total de los ingresos de una sociedad habidos en un determinado periodo de tiempo. Cabe distinguir este concepto del denominado *Importe Neto de la Cifra de Negocios* que es el resultado que se obtiene de deducir del importe de las ventas de productos, mercaderías y similares, y de las prestaciones de servicios correspondientes a las actividades ordinarias de la empresa, el importe de los descuentos y demás bonificaciones sobre las ventas, así como el IVA y otros impuestos directamente relacionados. Su contenido se corresponde con la suma de los importes relativos a las ventas netas de productos, ventas netas de mercaderías y prestaciones de servicios.

Solución:

a) Por lo que se refiere al C_1, se tiene que la solución exacta de la ecuación integral planteada, inhomogénea de 2ª especie, con $\lambda = 1$, es: $f(t) = t^2 + 2t + 1$.

En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que:

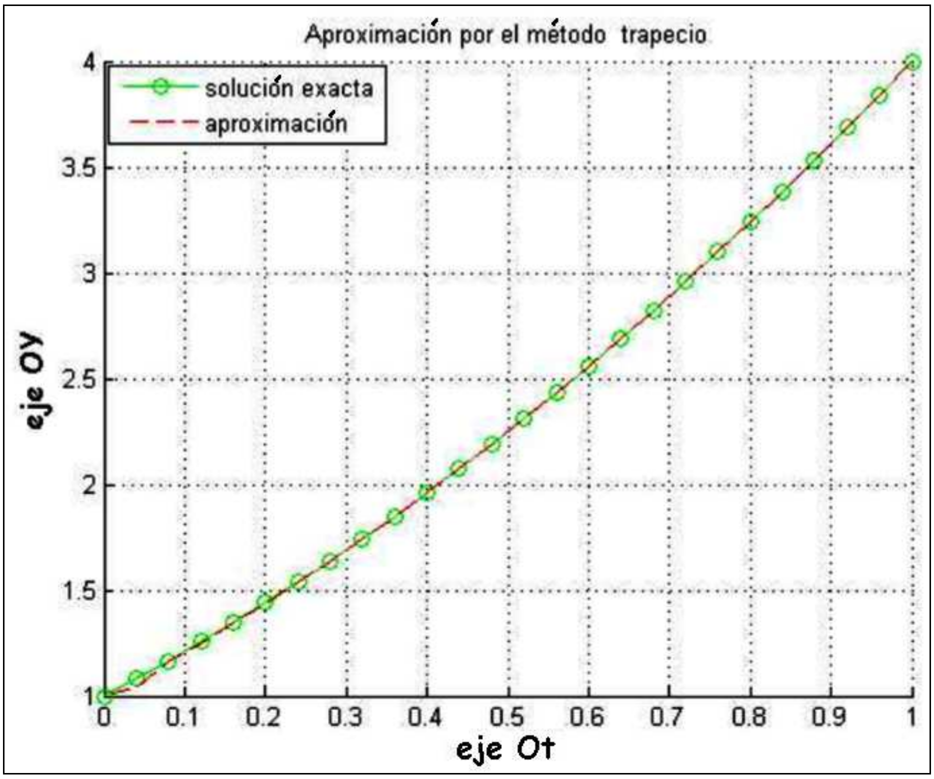
$$t^2 + 2t + 1 = e^{-t} + 2t + \frac{1}{e^t}\int_0^t e^s (s^2 + 2s + 1)\cdot ds =$$

$$= e^{-t} + 2t + \frac{1}{e^t}\left[e^t(t^2 + 1) - 1\right] = e^{-t} + 2t + t^2 + 1 - \frac{1}{e^t} = t^2 + 2t + 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Por otra parte, en el caso de esta función se presume, también en este caso, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} (t + 2 + 1/t) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Le corresponde la siguiente representación gráfica:



a la que corresponde la siguiente tabla que muestra el error existente en algunos nodos para diferentes tamaños de paso *h*:

t(i)	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.1	0.10974540	0.00241087	0.00059481
0.2	0.00923953	0.00224578	0.00055354
0.3	0.00852535	0.00206734	0.00050893
0.4	0.00775601	0.00187514	0.00046089
0.5	0.00692984	0.00166876	0.00040931
0.6	0.00604518	0.00144779	0.00035408
0.7	0.00510034	0.00121181	0.00029510
0.8	0.00409365	0.00096040	0.00023226
0.9	0.00302343	0.00069315	0.00016547
1.0	0.00188802	0.00040963	0.00009461

Por lo que se refiere al C_2, se tiene que la solución exacta de la ecuación integral planteada viene dada por la expresión:

$$f(t) = 1 + t^2/2.$$

En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que:

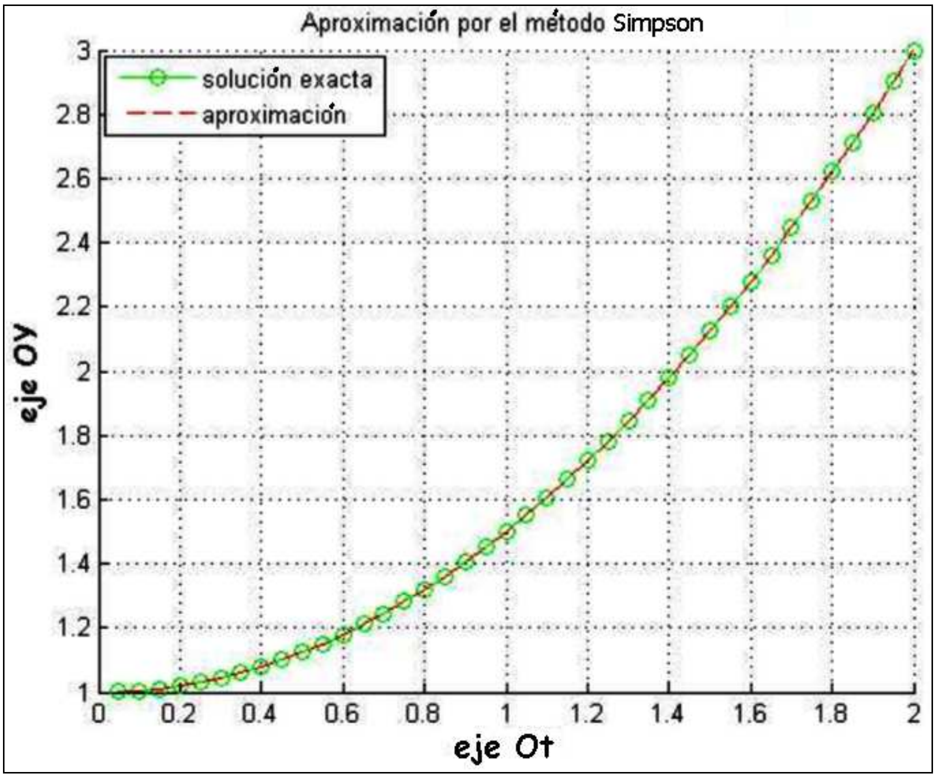
$$1+\frac{t^2}{2}=1+\int_0^t \sin(t-s)\cdot\left(1+\frac{s^2}{2}\right)\cdot ds =$$

$$=1+\left[\frac{s}{2}(2\cdot\sin(t-s)+s\cdot\cos(t-s))\right]_0^t=1+\frac{t^2}{2}, \text{c.s.q.d.}$$

Por otra parte, en el caso de esta función se presume también, en este caso, la existencia de ramas parabólicas[10], puesto que si: $t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y}{t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+\frac{t}{2}\right)=+\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Le corresponde, en definitiva, la siguiente representación gráfica:

[10] El estudio del comportamiento de las denominadas “ramas infinitas” puede tener interés para la interpretación de la mayoría de los fenómenos económicos; de ahí su determinación en la mayoría de los ejercicios resueltos en el presenta manual. Y así, cuando hacemos tender *x* a infinito (nos alejamos indefinidamente por el eje de abscisas a la derecha o la izquierda) la función puede tener distintos comportamientos: aproximarse cada vez más a una dirección (*asíntota o rama hiperbólica*) o bien parecerse a una rama de parábola, sin tender a una dirección como límite (*rama parabólica*)**.**



a la que corresponde la siguiente tabla que muestra el error en algunos nodos para diferentes tamaños de paso *h*:

t(i)	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.2	0.00013307	0.00000012	0.00000001
0.4	0.00000777	0.00000038	0.00000001
0.6	0.00001566	0.00000065	0.00000003
0.8	0.00002392	0.00000096	0.00000004
1.0	0.00004356	0.00000129	0.00000005
1.2	0.00004166	0.00000164	0.00000007
1.4	0.00007104	0.00000202	0.00000008
1.6	0.00006148	0.00000242	0.00000010
1.8	0.00009652	0.00000283	0.00000011
2.0	0.00008330	0.00000325	0.00000013

Por lo que se refiere al C_3, se tiene que la solución exacta de la ecuación integral planteada, que resulta ser inhomogénea de 2ª especie, con $\lambda = 1$, es: $f(t) = 1 - \sinh(t)$.

En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que se cumple:

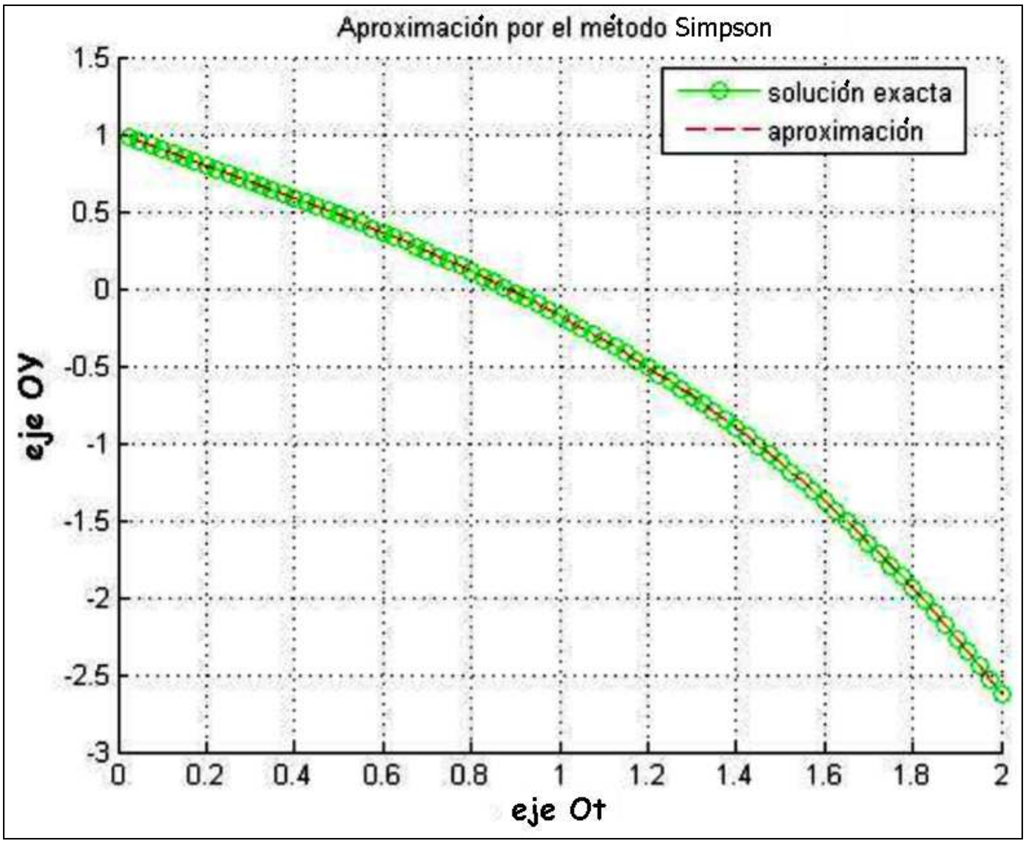
$$1-\sinh(t)=1-\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=\frac{2-e^{t}+e^{-t}}{2}=1-t-\frac{t^2}{2}+\int_0^t (t-s)\cdot(1-\sinh(s))\cdot ds=$$

$$=1-t-\frac{t^2}{2}+\left[-\frac{s^2}{2}+st-t\cdot\cosh(s)-\sinh(s)+s\cdot\cosh(s)\right]_0^t=$$

$$=1-t-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}(t+2)-\sinh(t)=1-\sinh(t), \text{c.s.q.d.}$$

Por otra parte, en el caso de esta función se presume, también en este caso, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $t \to +\infty$ también $y \to -\infty$. Esto es: $m=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}[1-\sinh(t)]/t=-\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia abajo).

Le corresponde, en definitiva, la siguiente representación gráfica:

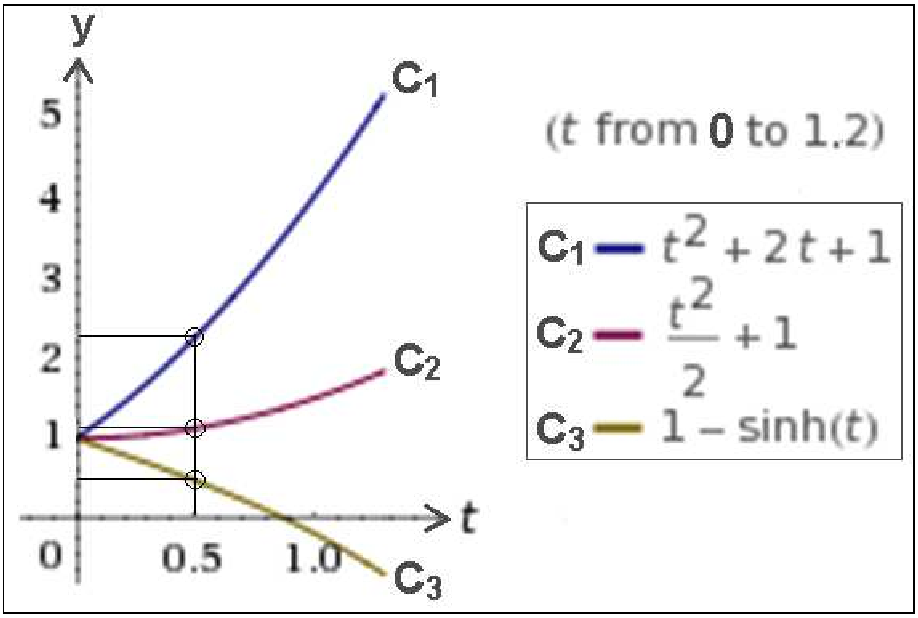


a la que corresponde la siguiente tabla que muestra el error existente en algunos nodos para diferentes tamaños de paso *h*, concretamente:

h = 0’100; h = 0’050; h = 0’025.

t(i)	h=0.1	h=0.05	h=0.025
0.10000000	0.10516675	0.00017092	0.00051427
0.30000000	0.00238354	0.00086224	0.00196555
0.50000000	0.00487236	0.00158461	0.00370449
0.70000000	0.00757985	0.00236424	0.00599226
0.90000000	0.01062586	0.00322970	0.00918176
1.10000000	0.01414339	0.00421315	0.00000000
1.30000000	0.01828376	0.00535161	0.00000000
1.50000000	0.02322257	0.00668855	0.00000000
1.70000000	0.02916658	0.00827558	0.00000000
1.90000000	0.03636197	0.01017462	0.00000000

La trayectoria temporal de los resultados contables brutos de los tres comercios en estudio puede verse en el gráfico siguiente:



Consecuentemente, el inversor se decidirá *ceteris paribus* por contratar el traspaso del primer establecimiento estudiado. Concretamente, el comercio C_3 empieza a entrar en pérdidas poco antes del noveno ejercicio económico, puesto que:

$$1 = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \text{ de donde: } 2 = e^t - e^{-t} = e^t - \frac{1}{e^t} = a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a},$$

habiendo hecho el cambio de variable: $e^t = a$, y resultando la ecuación:

$a^2 - 2a - 1 = 0$, cuya única raíz real positiva es: $a = 1 + \sqrt{2}$, de donde:

$$t = \ln 2'4142136 \approx 0'8814 = 8'814 \text{ años.}$$

b) En el quinto ejercicio económico, los resultados contables netos de los tres comercios analizados serían los siguientes:

$$\begin{cases} C_1 \Rightarrow \pi_1 = 0'5^2 + 2\cdot 0'5 + 1 = 2'25;\ B_1 = 0'75\cdot 2.250.000 = 1.687.500'00 \text{ € .} \\ C_2 \Rightarrow \pi_2 = 0'5^2/2 + 1 = 1'125;\ B_2 = 0'75\cdot 1.125.000 = 843.750'00 \text{ € .} \\ C_3 \Rightarrow \pi_3 = 1 - 0'5211 = 0'4789;\ B_3 = 0'75\cdot 478.900 = 359.175'00 \text{ € .} \end{cases}$$

Ejemplo 28

Dos empresas del mismo grupo tienen sus resultados contables brutos expresados por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} f'(t) - 2t = 0, \text{ con } y(0) = f(0) = \ln 1 \text{ (empresa 1)} \\ f(t) = t^2 + t\left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + 1 - t\cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{t}\right) + \int_1^t \frac{f(s)}{t^2 + s^2} ds \text{ (empresa 2)} \end{cases}$$

, donde el tiempo *t* viene expresado en decenios e *y* (resultados contables) en millones de euros. Se pide: a) determinar la trayectoria temporal de dichos resultados en el primer decenio de la actividad económica de ambas empresas, así como en qué momentos se produce, si es el caso, la coincidencia de la cuantía de sus resultados contables, y b) la cuantía de sus resultados contables netos en el noveno ejercicio económico, considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

a) La primera ecuación es una sencilla EDO de primer orden, puesto que: $y' - 2t = 0$; $dy/dt = 2t$, e integrando resultará que:

$y(t) = \int dy = 2\int t\cdot dt = t^2 + C;$ pero según la condición inicial:
$y(0) = C = \ln 1 = 0$, y se tiene la integral particular: $y(t) = f(t) = t^2$.

Por otra parte, la segunda es una ecuación integral, inhomogénea de 2ª especie, con $\lambda = 1$. El núcleo es $k(t,s) = \frac{1}{t^2 + s^2}$, $t_0 = 1$ y tomemos $\phi(t) = t^{-2}$, y todas las condiciones del teorema correspondiente son satisfechas con $l^* = \frac{1}{2}$, mientras que la solución exacta de esta ecuación integral es, también, la parábola cuadrática: $f(t) = t^2$.

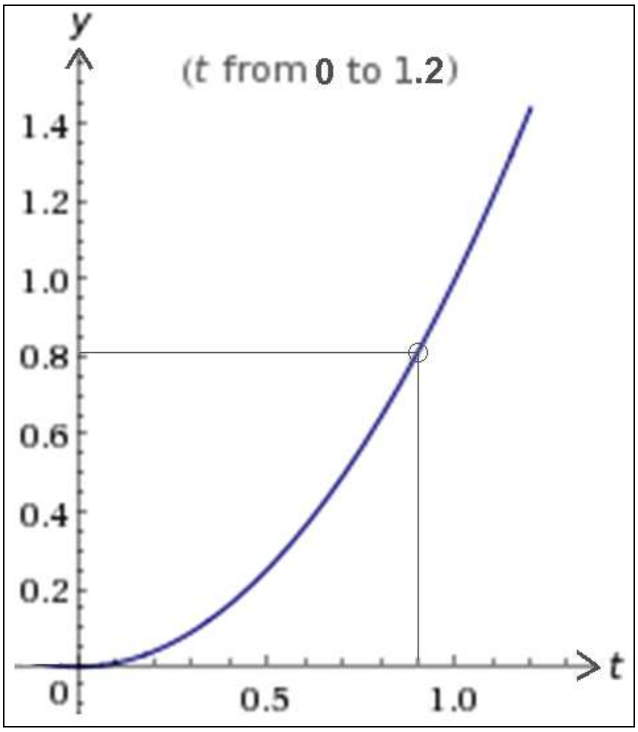
Como comprobación, habrá que demostrar que se cumple que:

$$t - \frac{\pi \cdot t}{4} - 1 + t \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{t}\right) = \int_1^t \frac{f(s)}{t^2 + s^2} ds. \text{ En efecto:}$$

$$\int_1^t \frac{f(s)}{t^2+s^2} ds = \int_1^t \frac{s^2}{t^2+s^2} ds = \left[s - t \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{s}{t}\right)\right]_1^t = (t - t \cdot \text{arc.tg} 1) - (1 - t \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{t}\right)) =$$

$$= t - \frac{\pi}{4} t - 1 + t \cdot \text{arc.tg}\left(\frac{1}{t}\right), \text{c.s.q.d.}$$

Así pues, ambas empresas tienen, en todo momento, la misma trayectoria temporal de sus resultados contables brutos, que vienen representados en la siguiente figura:



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{y}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} t = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) En el noveno año sucederá que:

π = f(0’9) = 0’9^2 = 0’81 ≡ 810.000’00 € , y los resultados contables netos serán del orden de: B = 0’75·π = 607.500’00 € .

Ejemplo 29

Un inversor desea obtener el traspaso de un gran establecimiento comercial para lo que tiene dos ofertas de similares características en cuanto a situación, costes de traspaso, arriendo del local y otras tasas y gastos de establecimiento. Los resultados contables brutos *y = f(t)* de cada negocio, que la han sido suministrados, vienen expresados por las siguientes ecuaciones integrales:

$$\int_0^t \frac{f(t)}{t^2+s^2}ds = t \quad \text{(comercio 1)}$$

$$f(t) = e^t + \int_0^t 2 \cdot f(s) \cdot \cos(t-s) \cdot ds \quad \text{(comercio 2)}$$

, donde el tiempo *t* viene expresado en decenios (estudiar el caso para un primer periodo de 10 años, o sea, $0 \leq t \leq 1$) e *y* (resultados contables brutos) en millones de euros. Se pide: a) determinar la trayectoria temporal prospectiva de dichos resultados en el primer decenio de la actividad económica de los dos comercios, así como cuál de ellos resulta más interesante contratar, con las correspondientes representaciones gráficas, y b) calcular el importe supuesto de los pertinentes resultados contables netos en el octavo ejercicio, considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

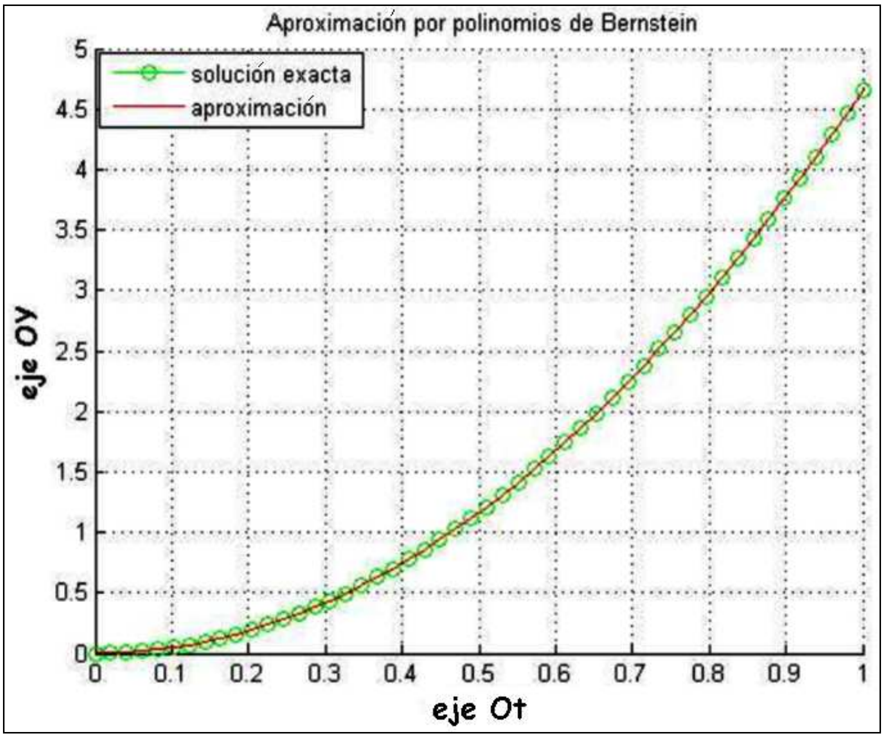
a) Por lo que se refiere al C_1, se tiene que la solución exacta de la ecuación integral de primera especie e inhomogénea de tal suerte planteada es: f(t) = $\frac{4}{4-\pi}t^2$. En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que:

$$\frac{4}{4-\pi}\int_0^t \frac{s^2}{t^2+s^2}ds = t. \text{ En efecto, se cumple que:}$$

$$\int_0^t \frac{s^2}{t^2+s^2}ds = \left[s - t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{s}{t}\right)\right]_0^t = t - t \cdot \operatorname{arctg} 1 = t - \frac{\pi \cdot t}{4} = \frac{t(4-\pi)}{4}, \text{ de donde:}$$

$$\frac{4}{4-\pi} \times \frac{t(4-\pi)}{4} = t, \quad \text{c.s.q.d.}$$

Corresponde aquí la siguiente representación gráfica con aproximación mediante 8 polinomios de Bernstein:



a la que corresponde la siguiente tabla:

t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.09090909	0.03851068	0.03851068	0.00000000
0.18181818	0.15404272	0.15404272	0.00000000
0.27272727	0.34659613	0.34659613	0.00000000
0.36363636	0.61617089	0.61617089	0.00000000
0.45454545	0.96276702	0.96276702	0.00000000
0.54545455	1.38638451	1.38638451	0.00000000
0.63636364	1.88702336	1.88702336	0.00000000
0.72727273	2.46468357	2.46468357	0.00000000
0.81818182	3.11936514	3.11936514	0.00000000
0.90909091	3.85106807	3.85106807	0.00000000

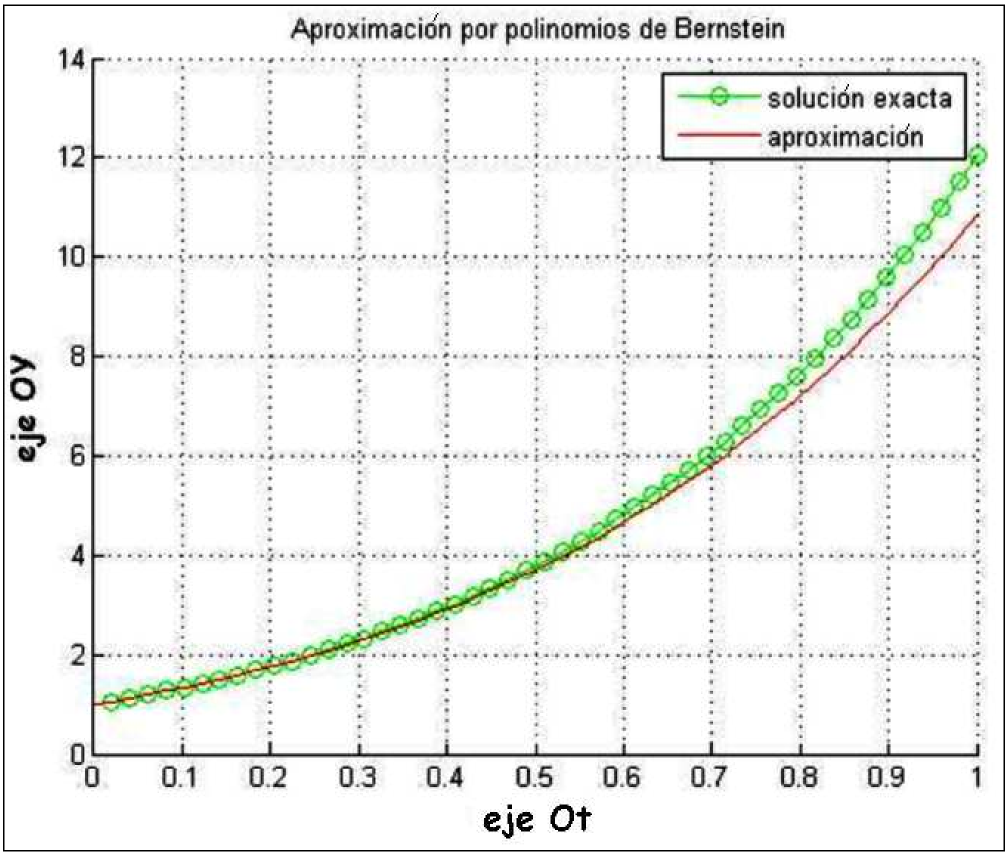
Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{4t}{4-\pi} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Por lo que se refiere al C_2, se tiene que la solución exacta de la ecuación integral de segunda especie e inhomogénea de tal suerte planteada, con $\lambda = 1$, es: $f(t) = e^t(t + 1)^2$. En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que se cumple:

$$e^t(t+1)^2 = e^t + 2\int_0^t \cos(t-s)\cdot e^s(s+1)^2\cdot ds = e^t + 2\left[\frac{1}{2}e^s\cdot s(s\cdot\sin(s-t)+(s+2)\cdot\cos(s-t))\right]_0^t =$$
$$= e^t + t\cdot e^t(t+2) = e^t(1+t^2+2t) = e^t(t+1)^2,\ \text{c. s. q. d.}$$

Le corresponde la siguiente representación gráfica, considerando una aproximación con 8 y 15 polinomios de Bernstein[11]:



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^t(t+2+1/t) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Le corresponden las siguientes tablas para aproximaciones de 8 y 15 polinomios, respectivamente:

[11] Los *polinomios de Bernstein* o *polinomios en la base de Bernstein* son una clase particular de polinomios en el campo de los números reales, que son utilizados dentro del ámbito del análisis numérico. El nombre hace referencia al matemático ucraniano Sergei Natanovich Bernstein. El algoritmo de evaluación más numéricamente estable es el de de Casteljau. Los polinomios de Bernstein son utilizados para demostrar el teorema de aproximación de Weierstrass y por esto son también utilizados para efectuar aproximaciones e interpolaciones de funciones como, por ejemplo, la curva de Beziér, así como para la estimación de las funciones de densidad de probabilidad.

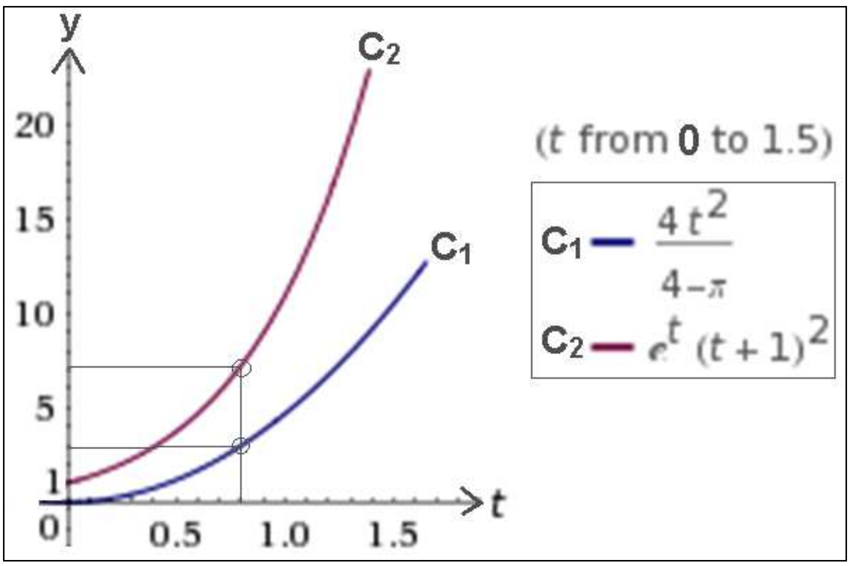
Aproximación con 8 polinomios

t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00000000	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.11111111	1.38017866	1.37965317	0.00052548
0.22222222	1.87039811	1.86556436	0.00483375
0.33333333	2.49985564	2.48108876	0.01876688
0.44444444	3.30522739	3.25402927	0.05119812
0.55555556	4.33255453	4.21740943	0.11514510
0.66666667	5.63960171	5.41037234	0.22922938
0.77777778	7.29880574	6.87922546	0.41958028
0.88888889	9.40096168	8.67865378	0.72230790

Aproximación con 15 polinomios

t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00000000	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.09523810	1.31973043	1.31940602	0.00032440
0.19047619	1.71753024	1.71460540	0.00292484
0.28571429	2.21087771	2.19974874	0.01112897
0.38095238	2.82102811	2.79127691	0.02975120
0.47619048	3.57381725	3.50825938	0.06555788
0.57142857	4.50063458	4.37277937	0.12785520
0.66666667	5.63960175	5.41037234	0.22922941
0.76190476	7.03699982	6.65052442	0.38647540
0.85714286	8.74899731	8.12723912	0.52175819
0.95238095	10.84374247	9.87968087	0.86406161

La trayectoria temporal de los resultados contables brutos de los dos comercios en estudio puede verse en el gráfico siguiente:



b) En el octavo ejercicio económico, los resultados contables netos de los dos comercios analizados serían los siguientes:

$$\begin{cases} C_1 \Rightarrow \pi_1 = \dfrac{4 \times 0'8^2}{4-\pi} = 2'9822673;\ B_1 = 0'75 \times 2.982.267'30 = 2.236.700'50\ €\ . \\ \\ C_2 \Rightarrow \pi_2 = e^{0'8}(0'8+1)^2 = 7'2107526;\ B_2 = 0'75 \times 7.210.752'60 = 5.408.064'50\ €\ . \end{cases}$$

Ejemplo 30

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow\ f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du = 34 \\ O \rightarrow\ f(x) = e^{4x} - \dfrac{1}{x+4}\left(e^{x(x+4)}\right) - e^{-(x+4)} + \int_{-1}^x e^{xs} f(s) ds \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día. Se trata de estudiar: a) el equilibrio del mercado así como los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año, y b) la elasticidad puntual de la demanda en el punto de equilibrio.

Solución:

a) La función de demanda viene expresada como una ecuación integral, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{34\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{34\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{34}{S},$$

donde: f(x) $\leftrightarrow$ F(S). De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 34 \Rightarrow F(S)(S+1) = 34 \Rightarrow F(S) = \frac{34}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda o función generatriz Laplace, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{34}{S+1}\right\} = 34\cdot e^{-x}} \rightarrow \text{I.P.}$$

, siendo evidente que existe una asíntota horizontal en el propio eje de abscisas OX para esta función de demanda.

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$34 \cdot e^{-x} + \int_0^x 34 \cdot e^{-u} \cdot du = 34$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u} \cdot du = 1$. En efecto:

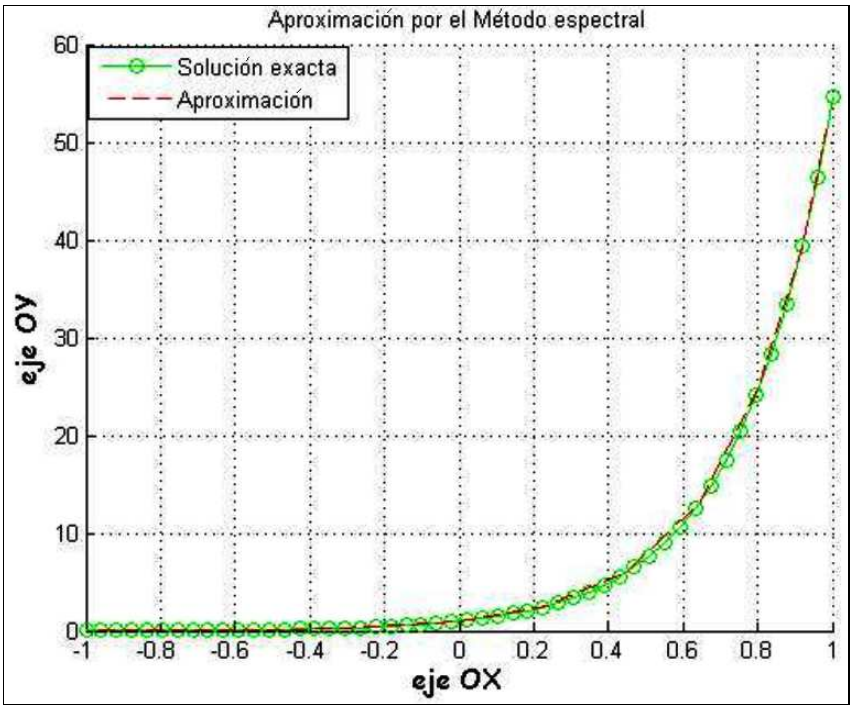
$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Por otra parte, la función de oferta planteada viene expresada como una ecuación integral de Volterra inhomogénea de segunda especie, con $\lambda = 1$, cuya solución exacta es: $f(x) = e^{4x}$. Como comprobación, habrá que demostrar que:

$$\int_{-1}^{x} e^{xs} \cdot e^{4s} \cdot ds = \frac{1}{x+4}\left[e^{x(x+4)} - e^{-(x+4)}\right]. \text{ En efecto:}$$

$$\int_{-1}^{x} e^{s(x+4)} \cdot ds = \left[\frac{e^{s(x+4)}}{x+4}\right]_{-1}^{x} = \frac{e^{x(x+4)}}{x+4} - \frac{e^{-(x+4)}}{x+4} = \frac{1}{x+4}\left[e^{x(x+4)} - e^{-(x+4)}\right], \text{ c. s. q. d.}$$

Le corresponde la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, en el caso de esta función de oferta se presume, también en este caso, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{4x}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Le corresponde, en fin, la siguiente tabla:

t(i)	f_i	f(t(i))	error
-0.98418305	0.01951174	0.01951187	0.00000013
-0.91759840	0.02546662	0.02546644	0.00000018
-0.80157809	0.04050552	0.04050571	0.00000019
-0.64234934	0.07658187	0.07658168	0.00000018
-0.44849275	0.16629831	0.16629848	0.00000017
-0.23045832	0.39778929	0.39778912	0.00000017
0.00000000	0.99999983	1.00000000	0.00000017
0.23045832	2.51389499	2.51389480	0.00000019
0.44849275	6.01328367	6.01328389	0.00000023
0.64234934	13.05795308	13.05795280	0.00000028
0.80157809	24.68787788	24.68787822	0.00000034
0.91759840	39.26735870	39.26735833	0.00000038
0.98418305	51.25085049	51.25085080	0.00000031

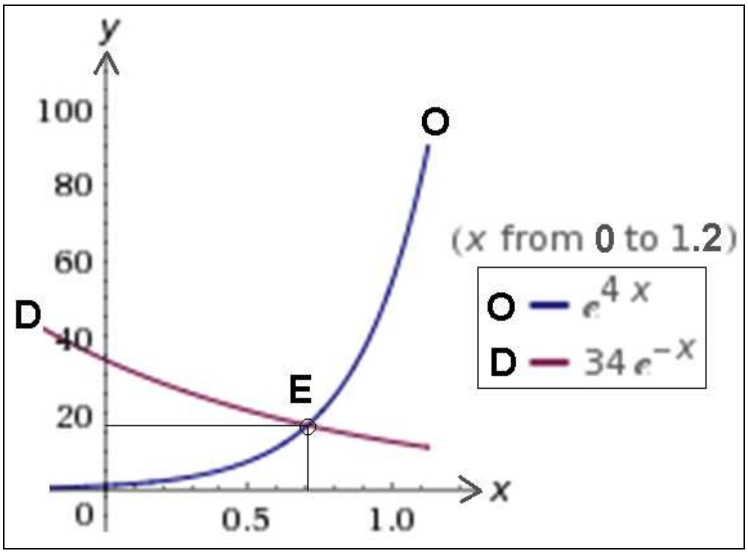
Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \rightarrow y = 34 \cdot e^{-x} \\ O \rightarrow y = e^{4x} \end{cases}$$

$34 = e^{5x}$, de donde se deduce que: x = (ln 34)/5 = 0'7053 ≈ 705 ud./día.

En este caso, $y = e^{2'8212} = 16'797$, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 16'80 €/ud. y una cantidad aproximada de 705 ud./día de producto.

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación:



Por último, los ingresos brutos anuales del productor u ofertante del bien en cuestión vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 16’80 €/ud. $\times$ 705 ud./día $\times$ 240 días/año = 2.842.560’00 €/año.

b) La elasticidad puntual buscada de la función de demanda deberá considerar que:

$$\frac{dy}{dx} = -34 \cdot e^{-x}\,;\ \frac{dx}{dy} = -\frac{e^{x}}{34}\,;\ e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{e^{x}}{34} \times \frac{34 \cdot e^{-x}}{x} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{0'7053} \approx$$

$\approx$ -1’42 < -1, luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Ejemplo 31

Un inversor desea obtener el traspaso de un gran establecimiento comercial para lo que tiene dos ofertas de similares características en cuanto a situación, costes de traspaso, arriendo del local y otras tasas y gastos de establecimiento. Los resultados contables brutos *y = f(t)* de cada negocio, que la han sido suministrados, vienen expresados por las siguientes ecuaciones integrales:

$$f(t) = -\frac{t^8}{56} + t^6 - \frac{t}{7} - \frac{1}{8} + \int_{-1}^{t} (t-s) \cdot f(s) \cdot ds \quad \text{(comercio 1)}$$
$$f(t) = \sin(2t) + \frac{1}{2}(\cos(2t) - \cos(2)) + \int_{-1}^{t} f(s) ds \quad \text{(comercio 2)}$$

, donde el tiempo *t* viene expresado en decenios (estudiar el caso para un primer periodo de 10 años, o sea, $0 \leq t \leq 1$) e *y* (resultados contables brutos) en millones de euros. Se pide: a) determinar la trayectoria temporal prospectiva de dichos resultados en el primer decenio de la actividad económica de los dos comercios, así como cuál de ellos resulta más interesante contratar, con las correspondientes representaciones gráficas, y b) calcular el importe supuesto de los pertinentes resultados contables netos en el sexto ejercicio, considerando una fiscalidad del 25%, así como averiguar cuándo y por qué importe se produce la coincidencia en dichos resultados.

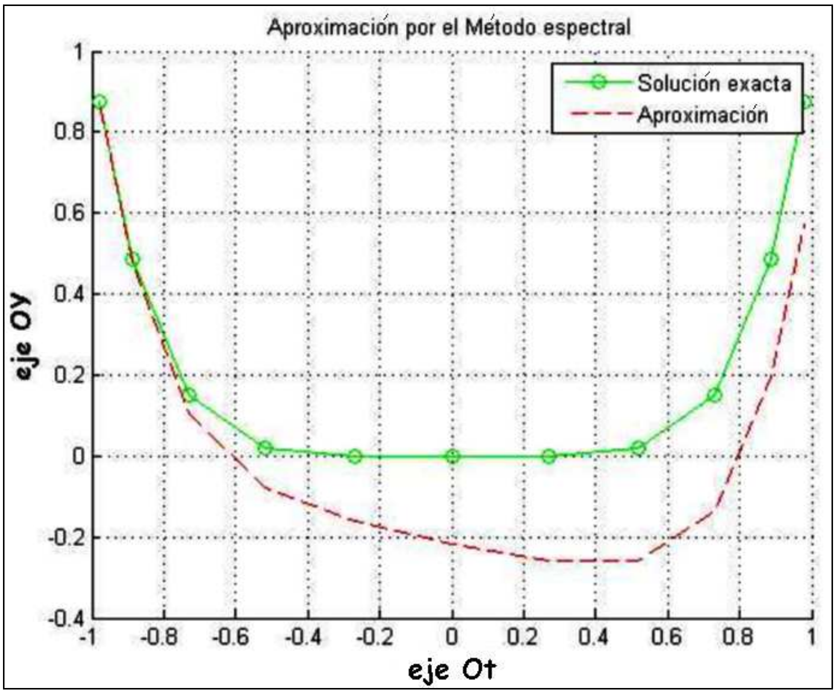
Solución:

a) Por lo que se refiere al C_1, se tiene que la solución exacta de la ecuación integral inhomogénea de segunda especie de tal suerte planteada, con $\lambda = 1$, es: $f(t) = t^6$. En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que:

$\frac{t^8}{56}+\frac{t}{7}+\frac{1}{8}=\int_{-1}^{t}(t-s)\cdot s^6\cdot ds$. En efecto, se cumple que:

$$\int_{-1}^{t}(t-s)\cdot s^6\cdot ds=\left[\frac{s^7\cdot t}{7}-\frac{s^8}{8}\right]_{-1}^{t}=\left(\frac{t^8}{7}-\frac{t^8}{8}\right)-\left(-\frac{t}{7}-\frac{1}{8}\right)=\frac{t^8}{56}+\frac{t}{7}+\frac{1}{8}\text{, c.s.q.d.}$$

Corresponde aquí la siguiente representación gráfica (la curva aproximada lo ha sido mediante 8 polinomios de Tchevishev):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

$t\to\infty$ también $y\to\infty$. Esto es: $m=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{y}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}t^5=+\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Le corresponde la siguiente tabla:

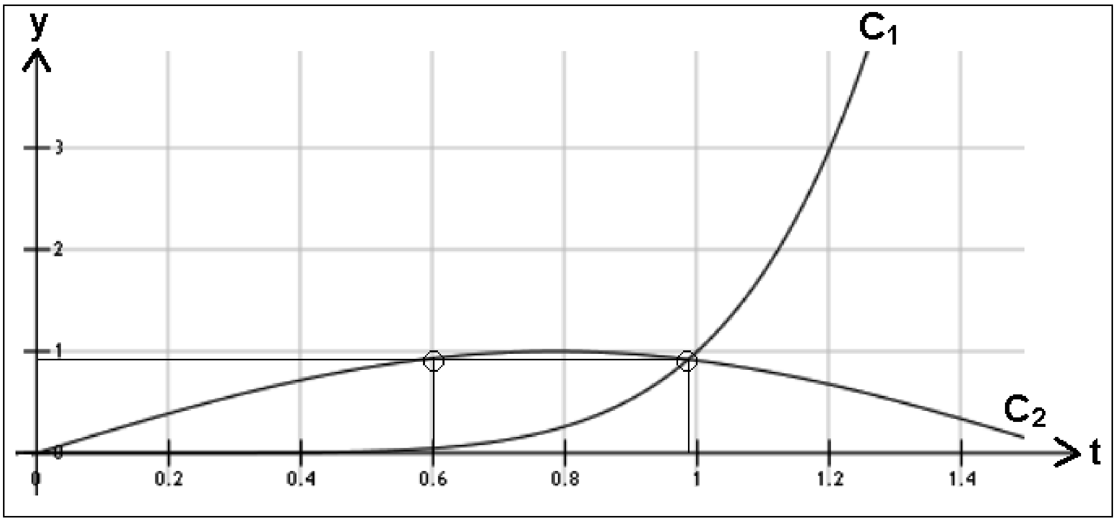
t(i)	f(t(i))	f_i	error
-0.96816024	0.82258601	0.82353765	0.00095164
-0.83603111	0.32184818	0.34145590	0.01960772
-0.61337143	-0.02099753	0.05325266	0.07425019
-0.32425342	-0.14753258	0.00116227	0.14869485
0.00000000	-0.21802756	0.00000000	0.21802756
0.32425342	-0.26348337	0.00116227	0.26464564
0.61337143	-0.23048974	0.05325266	0.28374240
0.83603111	0.05181118	0.34145590	0.28964472
0.96816024	0.52275854	0.82353765	0.30077911

Por lo que se refiere al C_2, al igual que en el caso anterior, se tiene que la solución exacta de la ecuación integral inhomogénea de segunda especie de Volterra planteada, con $\lambda = 1$, es la función trigonométrica siguiente: $f(t) = \sin 2t = 2\cdot\sin t\cdot\cos t$. En efecto, substituyendo en la ecuación dada, podemos comprobar que se cumple que:

$$\int_{-1}^{t} f(s)\cdot ds = \frac{\cos 2 - \cos 2t}{2}$$. En efecto, se tiene que:

$$\int_{-1}^{t} \sin 2s\cdot ds = -\frac{1}{2}[\cos 2s]_{-1}^{tx} = -\frac{1}{2}(\cos 2t - \cos(-2)) = \frac{\cos 2 - \cos 2t}{2}, \text{c.s.q.d.}$$

La trayectoria temporal de los resultados contables brutos de los dos comercios en estudio puede verse en el gráfico siguiente:



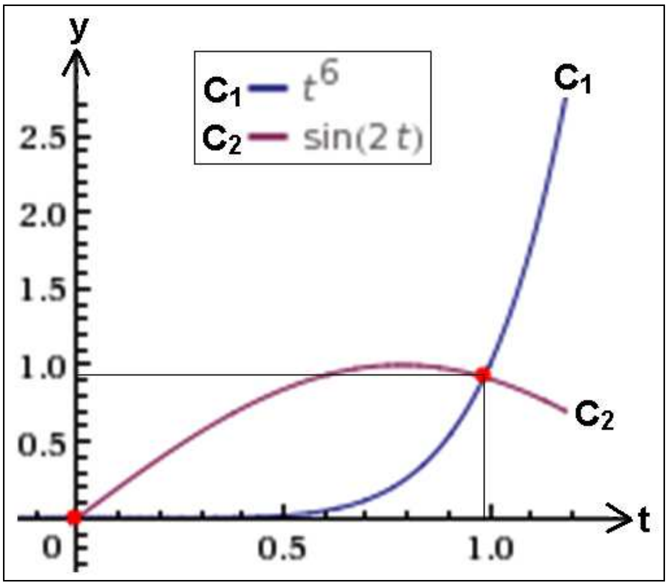
Así pues, por lo menos en el primer decenio de la actividad económica, parece más interesante contratar el comercio C_2 aunque, a partir de aquí, será más interesante contratar el comercio C_1, lo cual deberá ser tenido bien en cuenta en la política del inversor.

b) En el sexto ejercicio económico, los resultados contables netos de los dos comercios analizados serían los siguientes:

$$\begin{cases} C_1 \Rightarrow \pi_1 = 0'6^6 = 0'046656;\ B_1 = 0'75 \times 46.656 = 34.992'00\ € . \\ C_2 \Rightarrow \pi_2 = \sin 1'2 = 0'932039;\ B_2 = 0'75 \times 932.039 = 699.029'25\ € . \end{cases}$$

A la vista de la gráfica anterior, se deduce que la coincidencia de los resultados contables de ambos comercios se producirá en:

$t^6 = \sin 2t$, ecuación que posee dos soluciones reales según puede verse con mayor detalle en la gráfica siguiente, a saber: $t_1 = 0$ y $t_2 = 0'986268$:



Así pues, amén de la coincidencia de resultados contables en el instante inicial de la actividad económica de ambos comercios con resultados nulos, ello también tendrá lugar en el instante en que t = 9’86 años, con unos resultados contables brutos de cuantía:

$$\pi = 0'986268^6 = 0'9203852 \equiv 920.385'20 \text{ € .}$$

Ejemplo 32

Dos empresas tienen sus resultados contables netos expresados por las siguientes ecuaciones integrales:

$$f(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2} \cdot f(s) ds \quad \text{(empresa 1)}$$

$$f(t) = \int_{-1}^{t} e^{2(t-s)} \cdot \sin(t-s) \cdot f(s) \cdot ds \quad \text{(empresa 2)}$$

, donde el tiempo *t* viene expresado en decenios e *y* (resultados contables) en miles de euros. Se pide: a) determinar la trayectoria temporal de dichos resultados en el primer decenio de la actividad económica de ambas empresas, así como los resultados contables al inicio de la actividad, y b) determinar la cuantía de sus resultados contables antes de impuestos en el séptimo ejercicio de su actividad económica, considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

a) Para resolver la primera ecuación integral, que es inhomogénea de 2ª especie, con λ = 1, se tiene que: g(t) = e^{t^2}, y k(t,s) = $e^{t^2-s^2}$, y sabemos que si ambas funciones son continuas en I y S respectivamente, la única solución continua de la ecuación integral: $f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s) \cdot f(s) ds$, $\forall$ t $\in$ I, está dada por la expresión:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \Gamma(t,s) \cdot g(s) ds.$$

Hallamos los sucesivos núcleos iterados, con lo que:

$$\begin{cases} k_1(t,s) = e^{t^2-s^2} \\ k_2(t,s) = e^{t^2-s^2}(t-s) \\ k_3(t,s) = e^{t^2-s^2}\dfrac{(t-s)^2}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Y así por inducción tenemos que: $k_n(t,s) = e^{t^2-s^2}\dfrac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$,

Luego: $\Gamma(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{t^2-s^2}\dfrac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} = e^{t^2-s^2} \cdot e^{t-s}$, y entonces, según el teorema pertinente, y teniendo en cuenta que:

$$\int_0^t (e^{t^2+t-s}) \cdot ds = \int_0^t (e^{t^2} \cdot e^t \cdot e^{-s}) \cdot ds = e^{t^2+t}\left[-e^{-s}\right]_0^t = -e^{t^2+t}(e^{-t}-1) = e^{t^2+t} - e^{t^2},$$

se tendrá también que:

$$f(t) = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2} \cdot e^{t-s} \cdot e^{s^2} \cdot ds = e^{t^2} - e^{t^2} + e^{t^2+t} = e^{t^2+t}.$$

En efecto, substituyendo en la ecuación inicialmente dada, podemos comprobar que:

$$e^{t^2+t} = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2-s^2} \cdot e^{s^2+s} \cdot ds = e^{t^2} + \int_0^t e^{t^2+s} \cdot ds = e^{t^2} + e^{t^2} \cdot \int_0^t e^s \cdot ds = e^{t^2} + e^{t^2} \cdot \left[e^s\right]_0^t =$$

$$= e^{t^2} + e^{t^2}(e^t - 1) = e^{t^2} + e^{t^2+t} - e^{t^2} = e^{t^2+t}, \quad \text{c.s.q.d.}$$

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si:

t $\to \infty$ también y $\to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{y}{t} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{e^{t^2+t}}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY u OB (vertical, hacia arriba).

La segunda ecuación integral es homogénea de segunda especie, con λ = 1, y cuya solución exacta es: $f(t) = -\dfrac{5}{2} - \left(t + \dfrac{1}{2}\right)e^{2t+2}$.

Como comprobación, habrá que demostrar que se cumple que:

$$-\frac{1}{2}-\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{2t+2}=\int_{-1}^{t} e^{2(t-s)}\cdot\sin(t-s)\cdot\left[-\frac{5}{2}-\left(s+\frac{1}{2}\right)e^{2s+2}\right]\cdot ds=$$

$$=-e^{2t}\int_{-1}^{t}\frac{\sin(t-s)}{e^{2s}}\left[\frac{5}{2}+\left(s+\frac{1}{2}\right)e^{2s+2}\right]\cdot ds=$$

$$=-e^{2t}\left(\int_{-1}^{t}\frac{5\sin(t-s)}{2\cdot e^{2s}}+\int_{-1}^{t}\frac{2s+1}{2}\cdot e^{2s+2}\cdot\frac{\sin(t-s)}{e^{2s}}ds\right)=$$

$$=-e^{2t}\left[\frac{5}{2}\int_{-1}^{t}\frac{\sin(t-s)}{e^{2s}}\cdot ds+\frac{e^{2}}{2}\int_{-1}^{t}(2s+1)\sin(t-s)\cdot ds\right]=$$

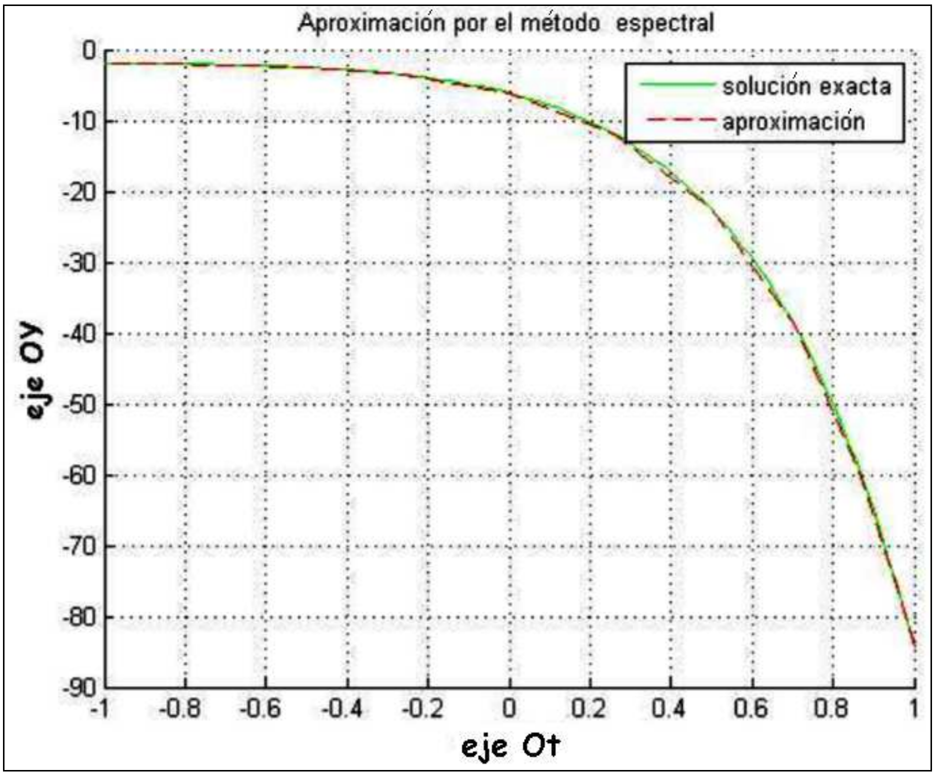
$$=-\frac{e^{2t}}{2}\left[e^{-2t}-e^{2}(\cos(t+1)-2\sin(t+1))+e^{2}(2t-2\sin(t+1)+\cos(t+1)+1)\right]=$$

$$=-\frac{e^{2t}}{2}\left[e^{-2t}-e^{2}\cdot\cos(t+1)+2e^{2}\cdot\sin(t+1)+2e^{2}t-2e^{2}\sin(t+1)+e^{2}\cdot\cos(t+1)+e^{2}\right]=$$

$$=-\frac{e^{2t}}{2}\left(e^{-2t}+2e^{2}t+e^{2}\right)=-\frac{1}{2}-t\cdot e^{2(t+1)}-\frac{e^{2(t+1)}}{2}=$$

$$=-\frac{1}{2}-e^{2(t+1)}\left(t+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{2t+2},\quad \text{c. s. q. d.}$$

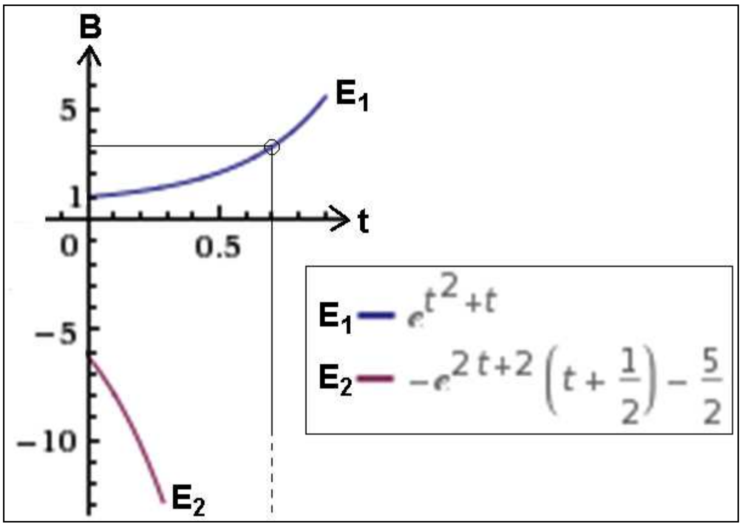
Le corresponde la siguiente representación gráfica:



, a la que corresponde también la siguiente tabla:

t(i)	f(t(i))	f_i	error
-1.00000000	-2.00000000	-2.00000000	0.00000000
-0.96592583	-2.00121517	-2.00124269	0.00002752
-0.86602540	-2.02150205	-2.02143052	0.00007153
-0.70710678	-2.12795272	-2.12803193	0.00007921
-0.50000000	-2.50000000	-2.49997122	0.00002878
-0.25881905	-3.56200022	-3.56184011	0.00016012
-0.00000000	-6.19452805	-6.19522476	0.00069671
0.25881905	-11.90880683	-11.90696409	0.00184275
0.50000000	-22.58553692	-22.58831984	0.00278292
0.70710678	-39.18764203	-39.18573235	0.00190967
0.86602540	-59.55160253	-59.55163209	0.00002956
0.96592583	-77.26416247	-77.26421436	0.00005189
1.00000000	-84.39722505	-84.39715864	0.00006641

La trayectoria temporal de los resultados contables netos de las dos empresas en estudio puede verse en el gráfico siguiente:



Como consecuencia, los resultados contables netos de ambas empresas en el instante inicial (t = 0) vendrán dados por:

$$\begin{cases} \text{Empresa 1} \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \equiv 1.000'00 \text{ € .} \\ \text{Empresa 2} \rightarrow f(0) = -2'5 - 0'5 \cdot e^2 = -6'194528 \equiv -6.194'53 \text{ € .} \end{cases}$$

Así pues, la segunda empresa siempre experimentará pérdidas contables a lo largo de su trayectoria temporal.

b) En el séptimo ejercicio (t = 0'7) de la actividad económica de ambas empresas, se tendrán los siguientes resultados contables netos:

$$\begin{cases} \text{Empresa 1} \rightarrow B = e^{0'7^2+0'7} = e^{1'19} = 3'28708 \equiv 3.287'08 \text{ € ,} \\ \text{Empresa 2} \rightarrow B = -2'5 - (0'7 + 0'5) \cdot e^{3'4} = -38'45692 \equiv -38.456'92 \text{ € ,} \end{cases}$$

a los que corresponden los siguientes resultados contables brutos:

$$\begin{cases} \text{Empresa 1} \rightarrow \pi = \dfrac{3.287'08}{0'75} = 4.382'77 \text{ € (ganancias)} \\ \text{Empresa 2} \rightarrow \pi = -\ 38.456'92 \text{ € (pérdidas).} \end{cases}$$

Ejemplo 33

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tiene que la tasa a la que cambia su precio de venta *y* respecto a su oferta *x* viene dada por la EDO: $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, sabiendo que cuando el precio es de 0 € no existe oferta alguna del bien y que, en este caso, la pendiente de la curva de oferta es igual a 2 y su segunda derivada es igual a 4.

Por otra parte, la ecuación de demanda viene dada por la expresión:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t \cdot \varphi(t)}{1+x^2} \cdot dt.$$

Se pide: a) estudiar el equilibrio del mercado, así como los ingresos anuales de los vendedores, viniendo el precio y(p) expresado en €/ud. y la cantidad del bien x(q) en miles de unidades diarias, considerando un calendario laboral de 240 días/año, y b) calcular la elasticidad de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio.

Solución:

a) En el caso de la función de oferta, se trata de resolver la ecuación diferencial y el problema de valor inicial siguiente:

$$x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad \text{con } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 4 \end{cases}.$$

Se trata de una EDO del tipo Euler-Cauchy, por lo que efectuaremos el cambio de variable habitual en estos casos, a saber:

$$x = e^t\ ; \quad dx = e^t \cdot dt\ ; \quad t = \ln x\ ; \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}\ ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

con lo que substituyendo estas expresiones en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0; \text{ con lo que resulta: } \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0;$$

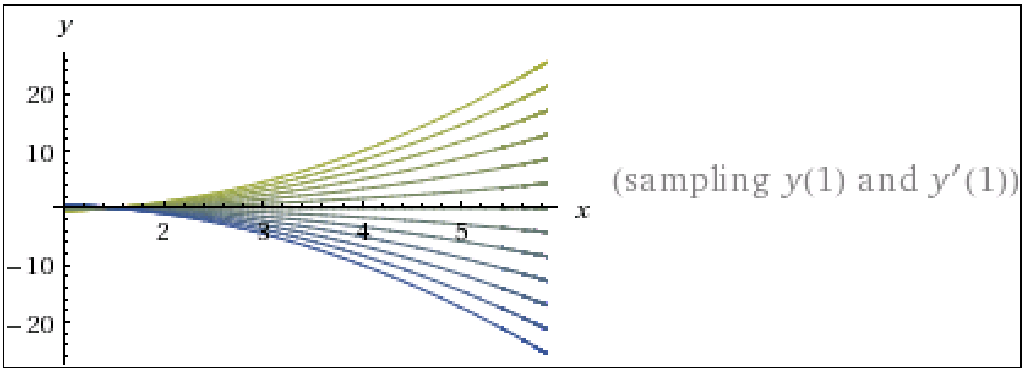
que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases},$$

y la integral general vendrá dada por la expresión:

$$y = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{t} = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x \,.$$

La representación gráfica correspondiente del haz o familia de soluciones es la siguiente:



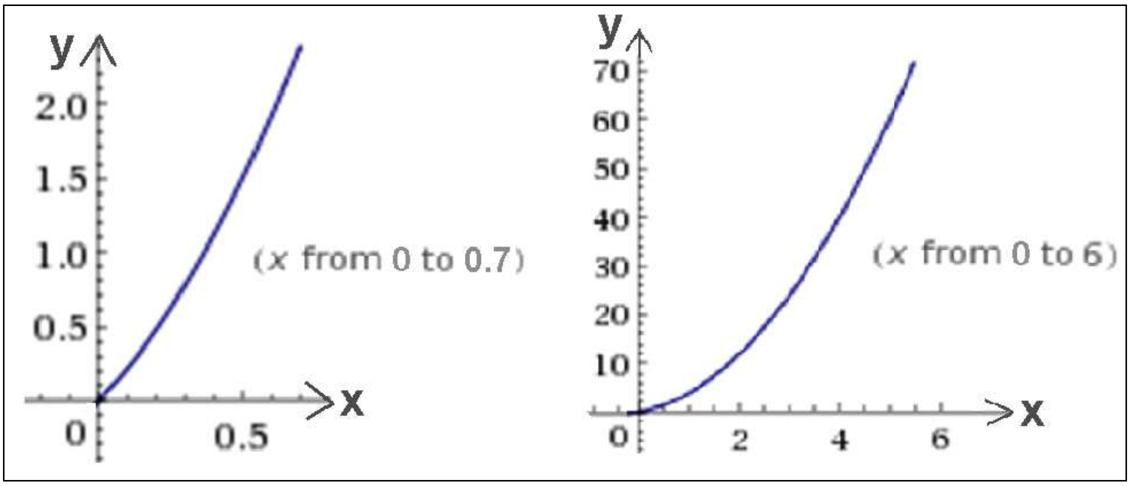
Por otra parte, las condiciones iniciales dadas del problema exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \; ; \\ y'(x) = 2c_1 x + c_2 \; ; \quad y'(0) = c_2 = 2 \; ; \\ y''(x) = 2c_1 \; ; \; y''(0) = 2c_1 = 4 \; ; \; c_1 = 2 \; ; \end{cases}$$

por lo que, con dichas condiciones iniciales prefijadas, se obtendría la solución particular buscada siguiente:

$$y(x) = 2x^2 + 2x = 2(x + x^2).$$

La representación gráfica correspondiente de esta solución particular pedida es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):



Además, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2(x+1) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Por otra parte, se trata, en el caso de la función de demanda, de una ecuación integral inhomogénea de Volterra de 2ª especie, con $\lambda = -1$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y a = 0, esto es:

$$\varphi(x) = 1/(1+x^2) - \int_0^x [\varphi(t) \cdot t/(1+x^2)]\,dt.$$

A continuación realizaremos el ejercicio de comprobar que la función $\varphi(x) = 1/(1+x^2)^{3/2}$ es solución de la ecuación dada. Esto servirá para repasar el procedimiento de la resolución de integrales.

En primer lugar multiplicaremos ambos miembros de la ecuación por $1+x^2$. De esta forma, el $1/(1+x^2)$ dejará de estar dentro de la integral, pero podemos hacerlo ya que la integración es con respecto a t, lo que significa que la expresión $1/(1+x^2)$, que está situada dentro de la integral, actúa de hecho como una constante.

Nos queda entonces que: $\varphi(x)\cdot(1+x^2) = 1 - \int_0^x [\varphi(t)\cdot t]\,dt.$

Substituimos $\varphi(t)$ por su valor, con lo que:

$$\varphi(x)\cdot(1+x^2) = 1 - \int_0^x \left[1/(1+t^2)^{3/2} \cdot t\right]dt = 1 - \int_0^x t/(1+t^2)^{3/2}\,dt.$$

Multiplicamos y dividimos por 2 la integral, de modo que en el numerador nos queda la derivada de lo que está dentro del paréntesis en el denominador. Así:

$$\varphi(x)\cdot\left(1+x^2\right)=1-(1/2)\cdot\int_0^x 2t/\left(1+t^2\right)^{3/2}dt\,.$$

Para resolver la integral basta entonces con hacer el cambio de variable: $z = 1+t^2$, con lo que:

$$z = 1+t^2\ ;\ dz = (1+t^2)'dt = 2t\cdot dt.$$

Puesto que se trata de una integral definida no debemos olvidar calcular los nuevos límites de integración, a saber:

$$\begin{cases} t = x \Rightarrow a = 1 + x^2 \\ t = 0 \Rightarrow b = 1 + 0^2 = 1. \end{cases}$$

La ecuación quedará, entonces, establecida de esta forma:

$$\varphi(x)\cdot\left(1+x^2\right)=1-(1/2)\cdot\int_0^x 1/z^{3/2}dz\,.$$

Operando adecuadamente, resulta que:

$$2\cdot\phi(x)\cdot\left(1+x^2\right)=2-\left[z^{-1/2}/(-1/2)\right]_1^{1+x^2}=2-\left|\left(1+x^2\right)^{-1/2}/(-1/2)-1^{-1/2}/(-1/2)\right|=$$

$$=2-\left|-2\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}+2\right|=2+2\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}-2=2\cdot\left(1+x^2\right)^{-1/2}$$; o sea:

$\varphi(x)\cdot\left(1+x^2\right)=\left(1+x^2\right)^{-1/2}$, y resulta, por fin, la solución buscada:

$$\varphi(x) = (1+x^2)^{-3/2},$$ c. s. q. d.

El equilibrio del mercado exige que:

$O=D\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}=2\left(x+x^2\right),\quad \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^{3}}=\left(2x+2x^2\right)^2$; esto es:

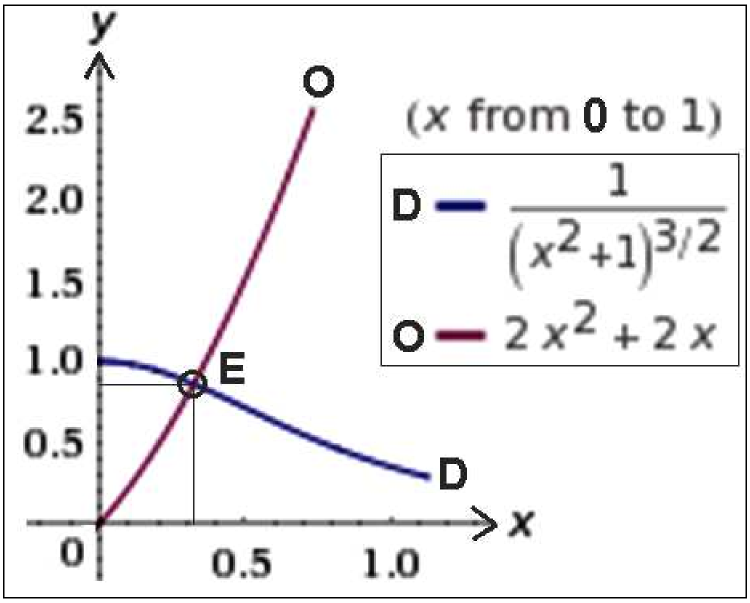
$\dfrac{1}{x^6+3x^4+3x^2+1}=4x^4+4x^2+8x^3$, o sea, resulta la ecuación:

$$4x^{10} + 8x^9 + 16x^8 + 24x^7 + 24x^6 + 24x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 1 = 0,$$

ecuación que resuelta proporciona la raíz real positiva:

$x = 0'324736 \equiv 325$ ud./día, y consecuentemente también:

$y = 2(0'324736 + 0'324736^2) = 0'860379 \equiv 0'86$ €/ud., y se tiene el punto de equilibrio: E (0'325, 0'86), con la siguiente representación gráfica:



Los ingresos anuales de los vendedores vendrán dados por:

I = p x q = (0'86 x 325) €/día x 240 días/año = 67.080'00 € .

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado, se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

$$D \Rightarrow y = (1+x^2)^{-3/2};\ \frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}};\ \frac{dx}{dy} = -\frac{(1+x^2)^{5/2}}{3x}.$$

$$e_d = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x} = -\frac{(1+x^2)^{5/2}}{3x}\times\frac{(1+x^2)^{-3/2}}{x} = -\frac{1+x^2}{3x^2} = -\frac{1+0'325^2}{3\times 0'325^2} = -\frac{1'105625}{0'316875} = -3'49 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Del mismo modo, por lo que se refiere a la función de oferta:

$$O \Rightarrow y = 2x^2 + 2x;\ dy/dx = 4x + 2;\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x+2}.$$

Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será la siguiente:

$$e_o = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x} = \frac{1}{4x+2}\times\frac{2x(x+1)}{x} = \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1'325}{1'65} = 0'80 < 1,$$

luego se trata de una oferta relativamente inelástica.

Ejemplo 34

La trayectoria temporal del resultado presupuestario anual[12] y(t) = f(t) de tres ayuntamientos A_1, A_2 y A_3 de la misma comarca viene dada, respectivamente, por las siguientes ecuaciones integrales:

$$\begin{cases} A_1 \to y(t) + 3\int_0^t y(\tau)\cdot \sin(t-\tau)\cdot d\tau = e^{-t} \\ A_2 \to f(t) + \int_0^t f(u)\cdot du = -2 \\ A_3 \to f(t) = 2t - 4\int_0^t \sin\tau \cdot f(t-\tau)\cdot d\tau \end{cases}$$

siendo *y* el importe del presupuesto ordinario equilibrado expresado en miles de euros corrientes (Ingresos = Gastos) respectivo y *t* el tiempo expresado en decenios. Comparar los tres resultados obtenidos en la primera década analizada, determinando si existe alguna anulación o coincidencia.

Solución:

Para ello habrá que solucionar cada una de las tres ecuaciones integrales anteriores. Por lo que se refiere a la primera de ellas, referente al ayuntamiento A_1, veamos que se trata de una ecuación de Volterra inhomogénea, de 2ª especie, con λ = -3. Aplicando las transformadas de Laplace, obtendremos que:

$$Y(s) + 3Y(s)\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s+1}$$. Despejando Y(s) se tendrá que:

$$Y(s)\left[\frac{s^2+1+3}{s^2+1}\right] = \frac{1}{s+1}; \quad Y(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+4)}.$$

Antitransformando, se obtiene: y(t) = R(-1) + R(2i) + R(-2i).

Respectivamente, se tendrá que:

[12] Puesto que el presupuesto es el eje de la actividad económico-financiera de las entidades públicas como los ayuntamientos, el Resultado Presupuestario facilitará información relevante para la evaluación de la viabilidad financiera, la actuación de la gerencia y el control de legalidad. Un resultado presupuestario positivo indica que los ingresos presupuestarios del ejercicio han sido suficientes para financiar el gasto presupuestario, sin recurrir a operaciones de endeudamiento. Por el contrario, un resultado presupuestario negativo pondrá de manifiesto que los ingresos presupuestarios no han sido suficientes para financiar el gasto presupuestario.

$$\begin{cases} R(-1) = \dfrac{2}{5}e^{-t} \\ R(2i) = \dfrac{-4+1}{(2i+1)4i}e^{i2t} = \dfrac{-3(1-2i)}{4i\cdot 5}e^{i2t} \\ R(-2i) = \dfrac{-4+1}{(-2i+1)(-4i)}e^{-i2t} = \dfrac{3(1+2i)}{4i\cdot 5}e^{-i2t} \end{cases}$$

La función buscada será, pues:

$$y(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{20i}\left[e^{-i2t} + e^{-i2t} + 2i(e^{i2t} + e^{-i2t}\right] = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{20i}(-2i\cdot\sin 2t + 4i\cdot\cos 2t)\,,$$

resultando, en definitiva, la IP siguiente:

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\sin 2t} \quad (A_1)$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$$\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\sin 2t + 3\int_0^t \left(\frac{2e^{-\tau}}{5} + \frac{3\cos 2\tau}{5} - \frac{3}{10}\sin 2\tau\right)\cdot\sin(t-\tau)\cdot d\tau = e^{-t}\ .$$

Llamando ahora I a la integral definida del primer miembro de la expresión anterior, y resolviéndola, se tiene que:

$$I = \int_0^t \left(\frac{2e^{-\tau}}{5} + \frac{3\cos 2\tau}{5} - \frac{3}{10}\sin 2\tau\right)\cdot\sin(t-\tau)\cdot d\tau =$$

$$= \frac{1}{10}[\cos(t-3\tau) + \frac{1}{2}(\sin(t-3\tau) - 4e^{-\tau}\cdot\sin(t-\tau) + 3\sin(t+\tau) +$$

$$+ 4e^{-\tau}\cdot\cos(t-\tau) - 6\cos(t+\tau))]_0^t =$$

$$= \frac{1}{10}[\cos(-2t) + \frac{1}{2}(\sin(-2t) + 3\sin 2t + 4e^{-t} - 6\cos 2t) -$$

$$-\cos t - \frac{1}{2}(\sin t - 4\sin t + 3\sin t + 4\cos t - 6\cos t)] =$$

$$= \frac{1}{10}[\cos 2t + \frac{1}{2}(2\sin 2t + 4e^{-t} - 6\cos 2t) - \cos t - \frac{1}{2}(-2\cos t)] =$$

$$= \frac{1}{10}(\cos 2t + \sin 2t + 2e^{-t} - 3\cos 2t - \cos t + \cos t) =$$

$$= \frac{1}{10}(\sin 2t + 2e^{-t} - 2\cos 2t) =$$

$$= 1/5\,(e^{-t} – \cos 2t + \sin t \cdot \cos t),$$

con lo cual, el primer miembro de la ecuación anterior quedará así (simplificando términos):

$$\frac{2\cdot e^{-t}}{5} + \frac{3\cdot\cos 2t}{5} - \frac{3\cdot\sin 2t}{10} + \frac{3\cdot e^{-t}}{5} - \frac{3\cdot\cos 2t}{5} + \frac{3\cdot\sin t\cdot\cos t}{5} = e^{-t}\text{, c.s.q.d.}$$

Por lo que se refiere a la ecuación del ayuntamiento A_2, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(t) + \int_0^t f(u)\cdot du\right\} = L\{-2\} \Rightarrow L\{f(t)\} + L\left\{\int_0^t f(u)\cdot du\right\} = L\{-2\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = -\frac{2}{S}$$

, donde: $f(t) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = -2 \Rightarrow F(S)(S+1) = -2 \Rightarrow F(S) = -\frac{2}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa de Laplace, obtenemos el resultado deseado de la función en cuestión, a saber:

$$\boxed{f(t) = L^{-1}\left\{-\frac{2}{S+1}\right\} = -2\cdot e^{-t}} \quad (A_2)$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que también se cumple la igualdad siguiente:

$-2\cdot e^{-t} - \int_0^t 2\cdot e^{-u}\cdot du = -2$, o lo que es lo mismo: $e^{-t} + \int_0^t e^{-u}\cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-t} - \left[e^{-u}\right]_0^t = e^{-t} - e^{-t} + e^0 = 1\text{, c.s.q.d.}$$

Por último, por lo que se refiere a la ecuación correspondiente al ayuntamiento A_3, veamos que:

$$F(S) = \frac{2}{S^2} - 4\left(\frac{1}{S^2+1}\right)F(S);\ F(S)\left(1 + \frac{4}{S^2+1}\right) = \frac{2}{S^2};\ \text{y despejando } F(S):$$

$$F(S)\left(\frac{S^2+1+4}{S^2+1}\right) = F(S)\left(\frac{S^2+5}{S^2+1}\right) = \frac{2}{S^2} \Rightarrow F(S) = \frac{2S^2+2}{S^2(S^2+5)}.$$

Por aplicación del método de los coeficientes indeterminados, se tendrá:

$$\frac{A}{S}+\frac{B}{S^2}+\frac{CS+D}{S^2+5}=\frac{2S^2+2}{S^2(S^2+5)}$$
$$AS(S^2+5)+B(S^2+5)+(CS+D)S^2=2S^2+2$$
$$AS^3+5AS+BS^2+5B+CS^3+DS^2=2S^2+2$$

, de donde se deduce que:

$$A+B=0\,;\quad B+D=2$$
$$5A=0\Rightarrow A=0\Rightarrow C=0$$
$$5B=2\Rightarrow B=2/5\Rightarrow D=8/5$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{y(t)=\frac{2}{5}\;L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\}+\frac{8}{5\sqrt{5}}\;L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{5}}{S^2+5}\right\}=\frac{2}{5}t+\frac{8}{5\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5})}\;(A_3)$$

Este resultado también puede comprobarse efectuando la substitución en la ecuación inicialmente dada, con lo que deberá cumplirse la igualdad:

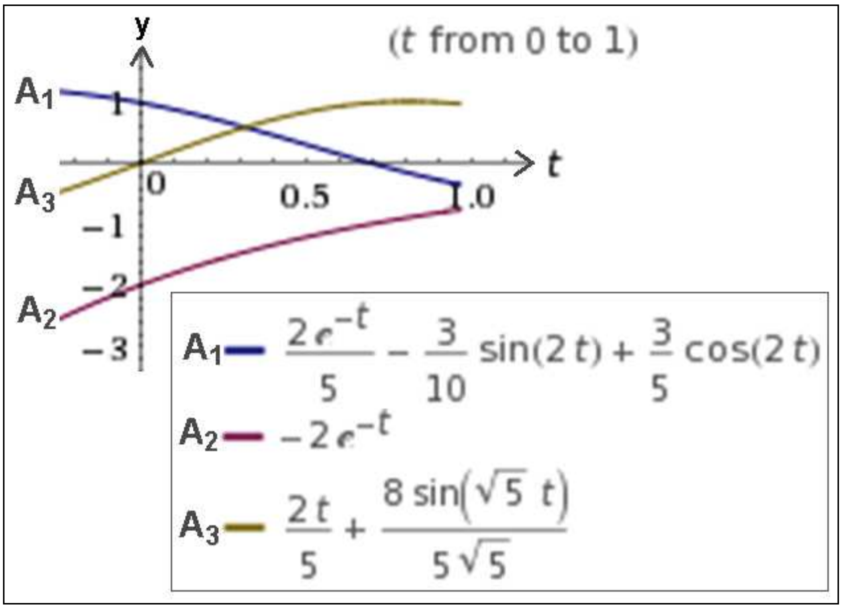
$$\frac{2t}{5}+\frac{8}{5\sqrt{5}}\cdot\sin t\sqrt{5}=2t-4\int_0^t\sin\tau\cdot\left[\frac{2(t-\tau)}{5}+\frac{8}{5\sqrt{5}}\sin((t-\tau)\sqrt{5})\right]\cdot d\tau=2t-4\cdot I.$$

Debe tenerse en cuenta que la integral definida del segundo miembro de la expresión anterior es:

$$I=\frac{2}{25}\left[\cos\tau\cdot(\sqrt{5}\cdot\sin(\sqrt{5}(t-\tau))-5t+5\tau)-10\sin\tau\cdot\sin^2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}(t-\tau)\right)\right]_0^t,$$

y convendría desarrollarla separadamente, tal como se ha realizado en el cálculo anterior correspondiente a la ecuación del ayuntamiento A_1. El resto de la comprobación, como también hacemos en otras ocasiones, la dejamos en manos del amable lector/a, por obvias razones de espacio y oportunidad.

De este modo, se tendrá la siguiente representación gráfica de las tres trayectorias temporales municipales analizadas:

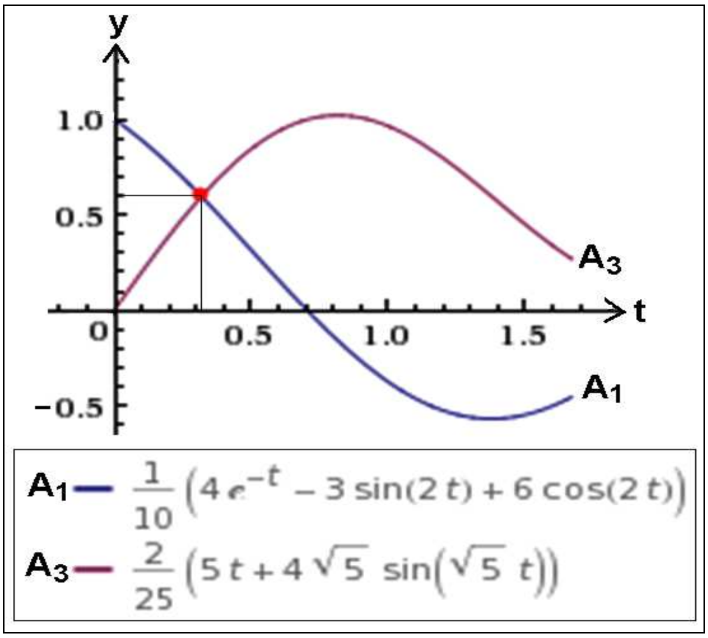


Veamos que las funciones correspondientes a los ayuntamientos A_1 y A_3 son periódicas. En concreto, la primera de ellas se anula, en el período de tiempo analizado, en el punto de abscisa:

$$\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\sin 2t = 0 \Rightarrow t = 0'7034 \equiv 7'034 \text{ años.}$$

Además, ambos resultados presupuestarios coincidirán en el instante en que se cumpla que: t = 0'318432107 ≡ 3'184 años, circunstancia ésta que puede apreciarse, con mayor detalle, en el gráfico siguiente:

$$\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{3}{5}\cos 2t - \frac{3}{10}\sin 2t = \frac{2}{5}t + \frac{8}{5\sqrt{5}}\sin(t\sqrt{5})\,.$$



Por lo que se refiere, en definitiva, a la trayectoria temporal del ayuntamiento A_2, se observa que el saldo presupuestario siempre será negativo, tendiendo asintóticamente (cuando $t \to \infty$) a anularse[13].

[13] Debe tenerse en cuenta, a este respecto, que el resultado presupuestario de un ejercicio económico, en la contabilidad pública o presupuestaria, viene determinado por la diferencia existente entre los derechos reconocidos netos y las obligaciones reconocidas netas. Forma parte del estado de liquidación del presupuesto y, en caso de resultar negativo, como el que aquí nos ocupa, puede ser compensado con los créditos gastados financiados con remanente de tesorería procedente de ejercicios anteriores (si lo hubiere) así como con las desviaciones de financiación negativas en gastos con financiación afectada, de tal suerte que no exista superávit o bien déficit de financiación del ejercicio en cuestión.

CAPÍTULO 8b

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES II

5.2. ECUACIONES INTEGRALES DE FREEDHOLM

Ejemplo 1

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$\begin{cases} D \rightarrow f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du = 11 \\ O \rightarrow y = f(x) = \lambda\int_0^1 (x+\xi)\cdot y(\xi)\cdot d\xi \text{ , } \forall\ y(0) = 1\ € \text{ .} \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad de ambas funciones en el punto de equilibrio, c) de estimar los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año, y d) ¿en qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional de oferta que se da en el enunciado del problema?

Solución:

a) La función de demanda viene expresada como una ecuación integral de Volterra, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{11\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{11\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{11}{S}$$

, donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 11 \Rightarrow F(S)(S+1) = 11 \Rightarrow F(S) = \frac{11}{S+1}\text{ .}$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{11}{S+1}\right\} = 11 \cdot e^{-x}} \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad: $11 \cdot e^{-x} + \int_0^x 11 \cdot e^{-u} \cdot du = 11$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u} \cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Por otra parte, la función dada de oferta constituye una ecuación integral de Freedholm de 2ª especie, homogénea y con núcleo degenerado, esto es, que puede descomponerse en suma de productos de funciones con las variables separadas. Su resolución se efectuará por aplicación del método conocido de las raíces características y funciones propias.

Aquí puede suponerse que:

$$x + \xi = \sum_{i=1}^{2} u_i(x) \cdot v_i(x) = u_1(x) \cdot v_1(\xi) + u_2(x) \cdot v_2(\xi),$$

con la condición de ser las $u_i(x)$ funciones linealmente independientes. Resulta lógica, sin duda, esta condición, puesto que *a sensu contrario* podría expresarse una de las u_i linealmente mediante las demás, disminuyendo el número de sumandos de la suma. Y la misma razón podemos aplicar para suponer linealmente independientes las v_i.

En nuestro caso, con $\left\{\begin{matrix} u_1 = x\,;\ u_2 = 1 \\ v_1 = 1;\ v_2 = \xi \end{matrix}\right\}$, lo que ofrece:

$$\left\{\begin{matrix} (u_1 v_1) = \int_0^1 \xi \cdot d\xi = \frac{1}{2};\ (u_2 v_1) = \int_0^1 d\xi = 1 \\ (u_1 v_2) = \int_0^1 \xi^2 \cdot d\xi = \frac{1}{3};\ (u_2 v_2) = \int_0^1 \xi \cdot d\xi = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

Si ahora hacemos $D(\lambda) = 0$, la ecuación homogénea de oferta dada tendrá soluciones distintas de la trivial que diferirán tan solo en un factor constante. Esto es:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1-\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 0$$, o sea: $1+\frac{\lambda^2}{4}-\lambda-\frac{\lambda^2}{3}=0 \to \lambda^2 + 12\lambda - 12 = 0.$

$\lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{144+48}}{2} = \frac{-12 \pm 8\sqrt{3}}{2}$, de lo que resultan los valores propios siguientes:

$$\lambda_1 = -6+4\sqrt{3} \text{ y } \lambda_2 = -6-4\sqrt{3}.$$

Hallemos ahora la función propia y_1 correspondiente a λ_1. El sistema de ecuaciones que dará: a_1a_2 en: $y_1 = a_1u_1(x) + a_2u_2(x)$ es el siguiente, expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda_1}{2} & -\lambda_1 \\ -\frac{\lambda_1}{3} & 1-\frac{\lambda_1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Trátase de un sistema homogéneo que admite una solución distinta de la trivial ($a_1 = a_2 = 0$), dado que: $D(\lambda) = 0$, como ya se ha dicho. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \left(1-\frac{\lambda_1}{2}\right)\cdot a_1 - \lambda_1 \cdot a_2 = 0 \\ -\frac{\lambda_1}{3}\cdot a_1 + \left(1-\frac{\lambda_1}{2}\right)\cdot a_2 = 0 \end{array}\right\} \frac{a_1}{a_2} = 3\frac{a_2}{a_1};\ a_1 = \sqrt{3}\cdot a_2,$$

y podemos poner y_1 en la forma: $a_2(\sqrt{3}\,u_1 + u_2)$, quedándonos las expresiones: $y_1(x) = C_1(x\sqrt{3}+1)$, y análogamente: $y_2(x) = C_2(-x\sqrt{3}+1)$.

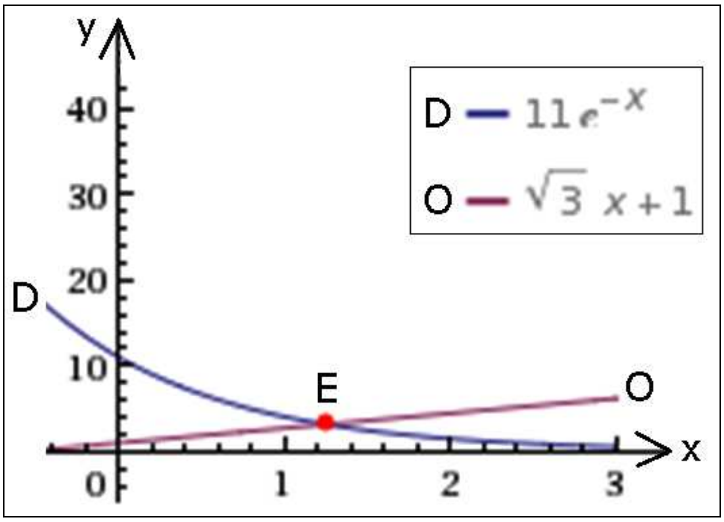
En nuestro caso, adoptaremos la primera de ellas y rechazamos la segunda, habida cuenta del carácter necesariamente creciente al tratarse de la función de oferta de un bien normal, con la condición inicial dada $y(0) = 1$, con lo que:

$$y(x) = C(x\sqrt{3}+1) \Rightarrow (x = 0) \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 + x\sqrt{3}},$$

que constituye la I.P. de la función de oferta buscada.

El punto de equilibrio del mercado se obtiene así:

D = O; $11 \cdot e^{-x} = 1 + x\sqrt{3}$, de donde se deduce que: x = 1'24 (1.240 ud./día) $\Rightarrow$ y = $1 + 1'24\sqrt{3}$ = 3'15 €/ud., con la representación gráfica siguiente:



, siendo evidente que existe una asíntota horizontal en el propio eje de abscisas OX para la función de demanda.

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado E(1'24, 3'15), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ y = $11 \cdot e^{-x}$; dy/dx = $-11 \cdot e^{-x}$; $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{11 \cdot e^{-x}} = -\frac{e^{x}}{11}$.

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{e^x}{11} \times \frac{11 \cdot e^{-x}}{x} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{1'24} = -0'81.$$

Entonces se tiene que: $e_d \in (-1,0)$, por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

Del mismo modo, por lo que se refiere a la función de oferta, se tendrá que:

O $\Rightarrow$ y = $1 + x\sqrt{3}$; dy/dx = $\sqrt{3}$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Y entonces:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1 + x\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{x\sqrt{3}} + 1 = \frac{1}{1'24\sqrt{3}} + 1 = 1'47 > 1.$$

En este caso, la función en estudio resulta relativamente elástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción mayor.

c) Veamos que los ingresos brutos anuales estimados del productor u ofertante del bien en cuestión vendrán dados por:

I = p × q = 3'15 €/ud. × 1.240 ud./día × 240 días/año = 937.440 €/año.

d) Habrá que plantearse la siguiente integral definida a optimizar (maximizar o minimizar), teniendo en cuenta que, en base a la solución obtenida anteriormente, se tiene:

$$y(x) = 1 + x\sqrt{3}\text{; o sea: } y(\xi) = 1 + \xi\sqrt{3}\text{. Con ello:}$$

$$A = \int_0^1 (x+\xi)\cdot y(\xi)\cdot d\xi = \int_0^1 (x+\xi)\cdot\left(1+\xi\sqrt{3}\right)\cdot d\xi = \int_0^1\left(x + x\cdot\xi\sqrt{3} + \xi + \xi^2\sqrt{3}\right)\cdot d\xi =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x+1\right)\xi^2 + x\cdot\xi + \frac{\xi^3}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{x\sqrt{3}}{2} + x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}.$$

Por otra parte se tiene que: $\varphi(\xi, x) = x + x\cdot\xi\cdot\sqrt{3} + \xi + \xi^2\cdot\sqrt{3}$;

y por aplicación de la fórmula de Euler-Lagrange-Poisson, resultará que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 + \xi\sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \xi = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ejemplo 2

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} O \rightarrow y(x) = 6x + \int_0^x y(\tau)\sin(x-\tau)d\tau \\ D \rightarrow y = f(x) = \lambda\int_0^1 (x+\xi)\cdot y(\xi)\cdot d\xi\text{ , } \forall\, y(0) = 1\text{ € .} \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad de ambas funciones en el punto de equilibrio, y c) de estimar los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) La función de oferta viene expresada como una ecuación integral de Volterra inhomogénea, de 2ª especie, del tipo de convolución, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, esta ecuación se puede escribir en la forma:

$y(x) = 6x + y(x) * \text{sen } x$, y transformando ambos miembros se obtiene la ecuación algebraica siguiente:

$Y(s) = \frac{6}{s^2} + Y(s)\frac{1}{s^2+1}$, cuya solución es: $Y(s) = \frac{6}{s^2} : \frac{s^2}{s^2+1} = 6(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4})$, y por lo tanto se tiene la siguiente función generatriz Laplace:

$\boxed{y(x) = L^{-1}(\frac{6(s^2+1)}{s^4}) = 6(x + \frac{x^3}{6}) = 6x + x^3}$, que constituye la I.P. de la función de oferta buscada.

Por otra parte, la función de demanda ya ha sido estudiada en el ejercicio anterior por el método de las raíces características y funciones propias, obteniéndose como soluciones posibles las expresiones:

$y_1(x) = C_1(x\sqrt{3}+1)$, y análogamente: $y_2(x) = C_2(-x\sqrt{3}+1)$.

En nuestro caso, adoptaremos la segunda de ellas y rechazamos la primera, habida cuenta de su carácter decreciente al tratarse de la función de demanda de un bien normal, con la condición inicial dada siguiente: y(0) = 1, con lo que:

$$y(x) = C\ (-x\sqrt{3}+1) \Rightarrow (x = 0) \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \boxed{y(x) = 1 - x\sqrt{3}},$$

que constituye la I.P. de la función de demanda buscada.

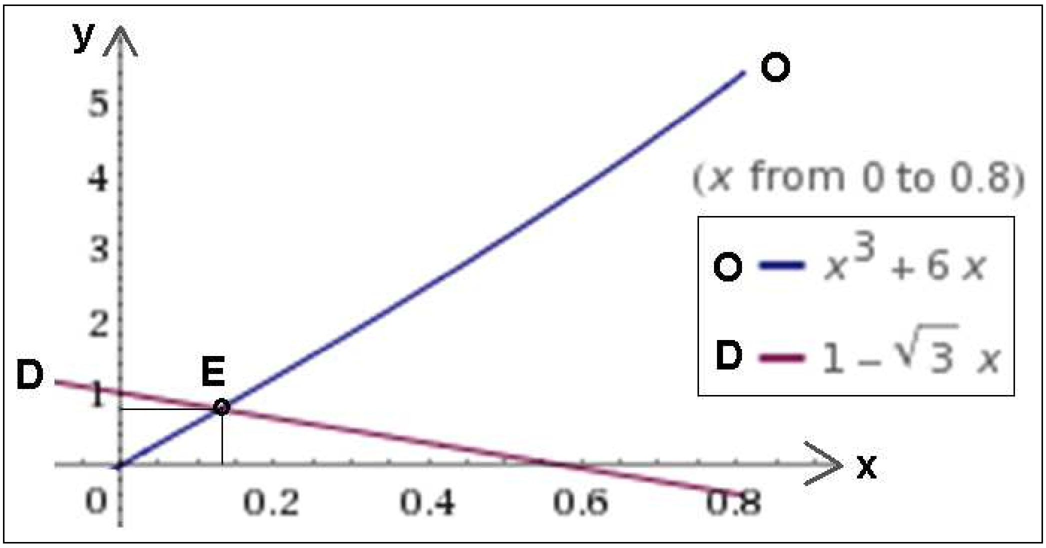
El punto de equilibrio del mercado resultará de: O = D, con lo que:

$6x + x^3 = 1 - x\sqrt{3}$; y resulta la parábola cúbica de ecuación:

$x^3 + (6+\sqrt{3})x - 1 = 0$, cuya única solución real y positiva es:

$$x = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(9+\sqrt{3\left(1107+444\sqrt{3}\right)}\right)}}{3^{2/3}} - \left(6+\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\frac{2}{3\left(9+\sqrt{3\left(1107+444\sqrt{3}\right)}\right)}} \approx 0.12905$$

O sea: x = 129 ud./día, o sea: y = $1-x\sqrt{3}$ = 1 - 0'12905·1'73205 ≅ 0'78 €/ud., y el punto de equilibrio del mercado será E(0'129, 0'78), con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x → ∞ también la y → ∞. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} (6 + x^2) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D ⇒ y = $1-x\sqrt{3}$; dy/dx = $-\sqrt{3}$; $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{0'78}{0'129} = -3'49.$$

Entonces se tiene que: $e_d < -1$, por lo que se trata de una demanda relativamente elástica.

Del mismo modo, por lo que se refiere a la función de oferta, se tendrá que:

O ⇒ y = 6x + x^3; dy/dx = $3x^2$ + 6; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2+6}$. Y entonces:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{x^2+6}{3x^2+6} \cong 1,$$

por lo que se trata prácticamente de una elasticidad unitaria.

c) Por último, los ingresos brutos anuales estimados del productor u ofertante por la venta de este artículo en concreto vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 0'78 €/ud. $\times$ 129 ud./día $\times$ 240 días/año = 24.148'80 €/año.

Ejemplo 3

Se desea: a) Formar la ecuación integral de demanda de un bien normal que corresponde a la ecuación diferencial siguiente: y'' + xy' + y = 0, y a las condiciones iniciales: y(0) = 1, y'(0) = 0; b) Hallar el punto de equilibrio del mercado para la siguiente función de oferta: 5y = 2x + 1, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades/día.; c) Estimar los ingresos brutos anuales del productor, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) Hacemos: $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)$ en esta EDO lineal de segundo orden. Entonces, se tendrá que:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)dt, \text{ o sea: } \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1.$$

Substituyendo las expresiones anteriores en la ecuación diferencial dada, se halla:

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0, \text{o bien: } \varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt.$$

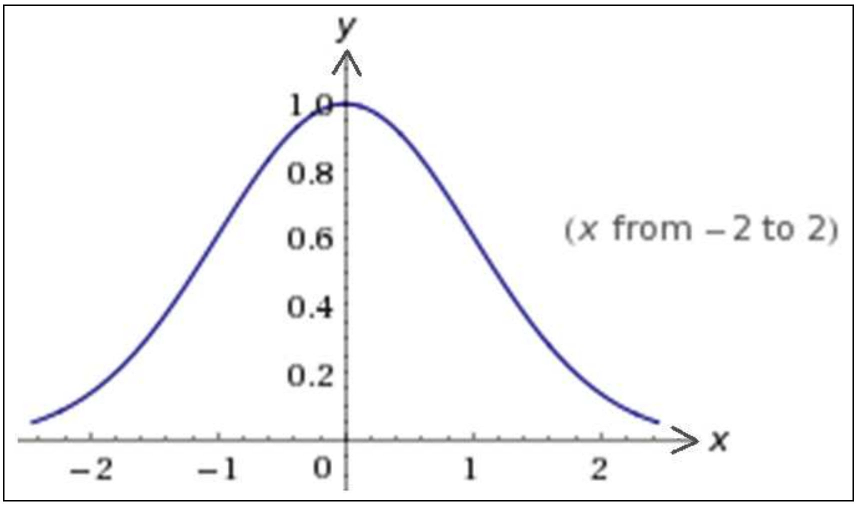
En cualquier caso, la solución de la EDO planteada conduce a la expresión de la integral general:

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, c_1\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{erfi}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_2\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

, mientras que, con las condiciones iniciales dadas, se tiene la integral particular:

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

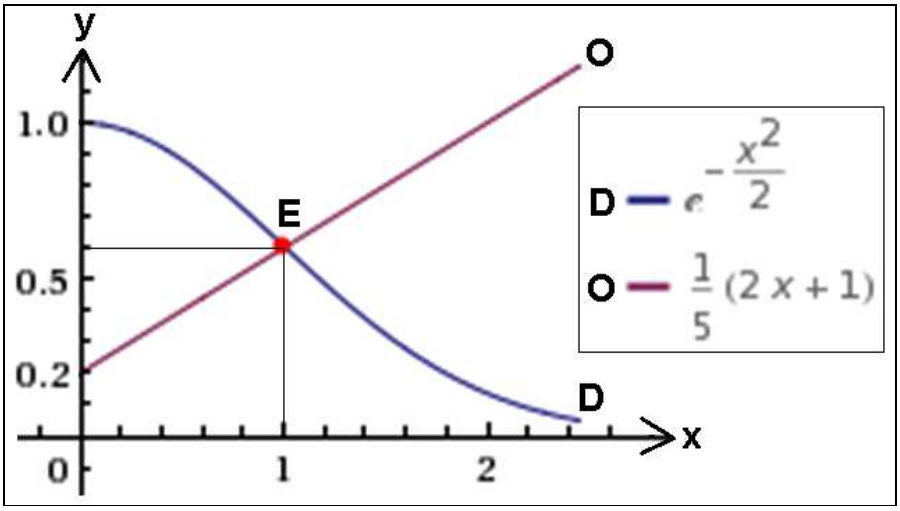
con la siguiente representación gráfica:



, por lo que habida cuenta de su carácter decreciente en el primer cuadrante del círculo podría tratarse, efectivamente, de una función de demanda de un bien normal, con el eje de abscisas como asíntota horizontal, puesto que cuando x $\to \infty \Rightarrow$ y $\to$ 0.

b) Como siempre, en estos casos, el equilibrio del mercado vendrá dado por la igualdad: D = O, con lo que:

$$\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{2x+1}{5}; e^{\frac{x^2}{2}}(2x+1) = 5;$$



, con el punto de equilibrio E en x = 1’00649 ≈ 1.006 ud./día e y ≈ 0’60 €/ud.

c) Por último, los ingresos brutos anuales estimados del productor u ofertante por la venta de este artículo en concreto vendrán dados por:

I = p × q = 0’60 €/ud. × 1.006 ud./día × 240 días/año = 144.864 €/año.

Ejemplo 4

Los resultados contables brutos mensuales medios de un comercio (y), en función de su gasto en publicidad[1] (x), expresados ambos en miles de euros, vienen dados por la ecuación integral:

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t\right) y(t) dt = x, \text{ con } \lambda = 100.$$

Se pide calcular el beneficio neto de la actividad, considerando una fiscalidad del 25%, para un gasto por este concepto de 54.000 €/año.

Solución:

Escribamos la ecuación integral dada, que es inhomogénea de 2ª especie, en la siguiente forma:

$$y(x) = \lambda \cdot x \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cdot \cos t \cdot dt + \lambda \cdot \sin x \int_{-\pi}^{\pi} t^2 y(t) \cdot dt + \lambda \cdot \cos x \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cdot \sin t \cdot dt + x.$$

Introduzcamos ahora las notaciones:

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos t\, dt; \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 y(t) dt; \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin t\, dt, \qquad (1)$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes desconocidas. Entonces la ecuación planteada toma la forma:

$$y(x) = C_1 \lambda x + C_2 \lambda \sin x + C_3 \lambda \cos x + x. \qquad (2)$$

Substituyendo la expresión (2) en las igualdades (1), se obtiene:

$$\begin{cases} C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t\right) \cos t \cdot dt, \\ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t\right) t^2 \cdot dt, \\ C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(C_1 \lambda t + C_2 \lambda \sin t + C_3 \lambda \cos t + t\right) \sin t \cdot dt \end{cases}$$

o bien:

[1] Los gastos empresariales en publicidad y propaganda son gastos discrecionales y pueden ser uno de los primeros elementos de gastos a reducir en tiempos difíciles. En ocasiones, cuando los directivos intentan reducirlos, descubren que se han comprometido gastos de publicidad para el futuro; por ello, el sistema presupuestario, y los controles resultantes, deberían incorporar planes que reflejen adecuadamente la programación temporal y el montante de los compromisos previamente adquiridos.

$$C_1\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt\right)-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^3dt+C_2\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin t\,dt\right)-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} t^3dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt+C_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t\,dt\right)=\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt.$$

Calculando las integrales que figuran en estas ecuaciones, se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas preciso para hallar las tres incógnitas: C_1, C_2, C_3, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} C_1-\lambda\pi C_3=0 \\ C_2+4\lambda\pi C_3=0 \\ -2\lambda\pi C_1-\lambda\pi C_2+C_3=2\pi \end{array}\right\} \qquad (3)$$

El determinante de este sistema no homogéneo, compatible y determinado, es el siguiente:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix}=1+2\lambda^2\pi^2\neq 0\,.$$

Así pues, el sistema anterior (3) tiene una solución única, que se puede obtener por aplicación de la regla de Cramer, inversión de la matriz o bien por el método de triangularización de Gauss-Jordan, a saber:

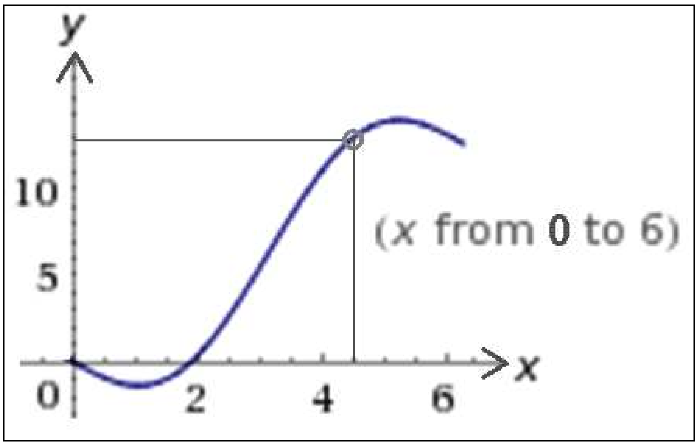
$$C_1=\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\,;\quad C_2=\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\,;\quad C_3=\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}\,.$$

Substituyendo los valores hallados de C_1, C_2 y C_3 en la expresión (2) se obtiene, en definitiva, la solución de la ecuación integral dada, esto es:

$y(x)=\frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x-4\lambda\pi\sin x+\cos x)+x$, que, con $\lambda = 100$, implica:

$$y(x)=\frac{20\pi}{1+200\pi^2}(10\pi x-40\pi\sin x+\cos x)+x\,,$$

cuya representación gráfica de los beneficios brutos (antes de impuestos) puede verse en la figura siguiente:



Para un gasto en publicidad de 54.000 €/año = 4.500 €/mes (x = 4'50), se tendrán unos beneficios netos (descontando la fiscalidad) de:

B = 0'75 x 12'8992 = 9'6744 = 9.674'40 €/mes = 116.092'80 €/año.

Ejemplo 5

Las funciones de oferta de cierto producto, por parte de sendos fabricantes (1 y 2), son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Productor 1} \rightarrow \int_0^x \cos(x-t)\cdot y(t)\cdot dt = x \\ \text{Productor 2} \rightarrow y(x) = x + \int_{-1}^{1} x\cdot t\cdot y(t)dt\,. \end{cases}$$

Se desea saber para qué precios, si es el caso, se ofertan las mismas cantidades de producto por parte de ambos fabricantes, representando gráficamente ambas funciones de oferta.

Solución:

Por lo que se refiere a la ecuación de oferta del productor 1, veamos que las funciones f(x) = x, y el núcleo K(x, t) = cos(x-t), satisfacen a las condiciones de continuidad y derivabilidad formuladas más arriba. Derivando ambos miembros de la ecuación integral dada con respecto a *x*, se obtiene que:

$$y(x)\cos 0 - \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = 1, \text{ o bien: } y(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt\,.$$

La ecuación anterior es una ecuación integral de Volterra de segunda especie, del tipo de convolución. Aplicando la transformación de Laplace se halla su solución, esto es:

$$\phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1}\phi(p), \text{ de donde } \phi(p) = \frac{p^2+1}{p^3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}.$$

De tal suerte, la función generatriz Laplace: $y_1(x) = L^{-1}[\phi(p)] = 1 + \frac{x^2}{2}$ será la solución de la ecuación anterior y, por lo tanto, también de la ecuación dada, lo cual puede comprobar con facilidad el amable lector/a por substitución directa en la ecuación integral inicial.

Por otra parte, en referencia a la ecuación integral dada de oferta del productor 2, que es de Freedholm de 2ª especie e inhomogénea, con $\lambda = 1$, para su resolución emplearemos el método de Bubnov-Galiorkin. Para ello, tomemos como sistema completo de funciones en [-1, 1] el sistema de polinomios de Legendre $P_n(x)$ ($\forall n = 0, 1, 2, \ldots$). La solución aproximada $y_n(x)$ de la ecuación planteada la buscaremos en la forma:

$$y_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2}.$$

Substituyendo $y_3(x)$ en lugar de $y(x)$ en la ecuación integral planteada, tendremos que:

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt\left(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2-1}{2}\right)dt,$$

o bien: $a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + x\frac{2}{3}a_2$.

Multiplicando ambos miembros de esta última ecuación sucesivamente por 1, x, $\frac{3x^2-1}{2}$ e integrando respecto a x desde -1 hasta 1, se halla que:

$$2a_1 = 0, \quad \frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}a_2, \quad \frac{2}{5}a_3 = 0.$$

De aquí se obtienen los valores: $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, por lo que $y_2(x) = 3x$. No es difícil comprobar que ésta es precisamente la solución exacta de la ecuación planteada de oferta del productor 2.

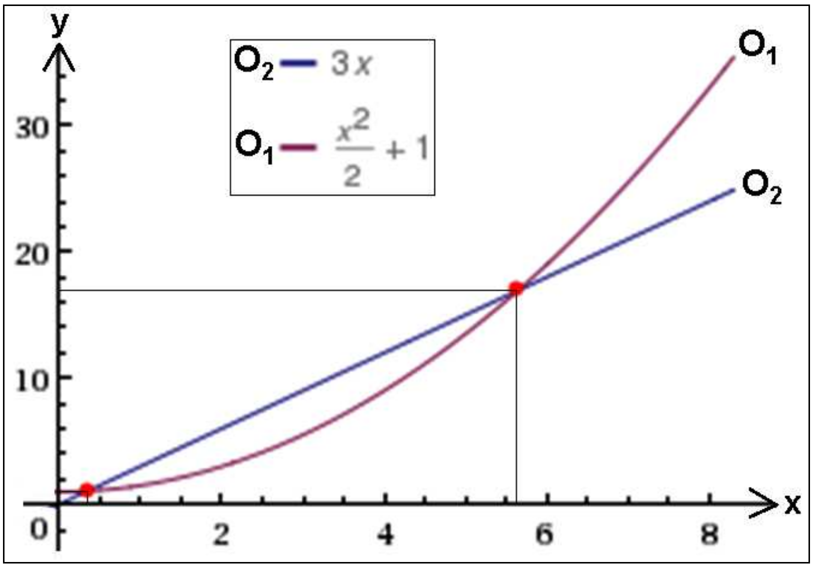
Así pues, la coincidencia de ofertas se producirá cuando: $O_1 = O_2$, o sea:

$$1 + \frac{x^2}{2} = 3x, \text{ esto es: } x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$x_1 = 3 + \sqrt{7}$ = 5'646 (5.646 ud.) ; $x_2 = 3 - \sqrt{7}$ = 0'354 (354 ud.) ;

$$y_1 = 16'94 \text{ €/ud.} \; ; \; y_2 = 1'06 \text{ €/ud.}$$

, lo cual puede verse gráficamente en la siguiente figura:



Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta O_1 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba), mientras que la función de oferta O_2 es una recta creciente que pasa por el origen de las coordenadas cartesianas rectangulares.

Ejemplo 6

Los resultados contables netos *y* de una empresa determinada en función del gasto en publicidad *x* vienen dados por la ecuación integral siguiente:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 x \cdot t \cdot y^2(t) \cdot dt \,,$$

siendo $\lambda \in \{N\} = \{Z^+\}$ un parámetro numérico tal que: $2 \leq \lambda \leq 6$, y sabiendo que los resultados contables están en función del gasto en publicidad. Representar gráficamente las diferentes alternativas de resultados en función del valor de $\lambda \in \{N\}$.

Solución:

Hagamos: $C = \int_0^1 t \cdot y^2(t) \cdot dt$. Entonces $y(x) = C\lambda x$. Substituyendo $y(x)$ por el segundo miembro de esta expresión en la relación anterior, se tendrá que:

$$C = \int_0^1 t\lambda^2 C^2 t^2 dt \text{, de donde } C = \frac{\lambda^2}{4} C^2 \text{, o sea:}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{4}{\lambda^2}$.

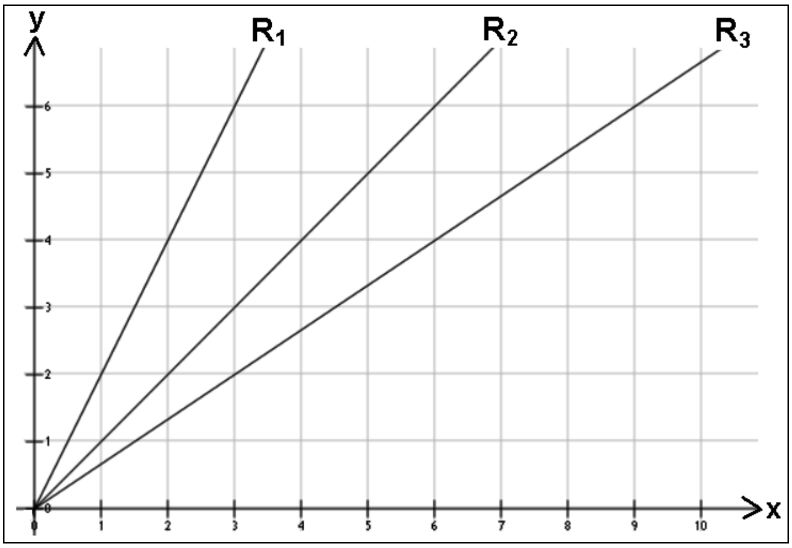
Por lo tanto, la ecuación integral planteada tiene también dos soluciones para cualquier $\lambda \neq 0$, a saber:

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = \frac{4}{\lambda} x \,.$$

La primera de ellas resulta rechazable desde el punto de vista de su significado económico, habida cuenta de que no depende del expresado parámetro λ. Por lo que se refiere a la segunda solución, según los condicionantes del problema planteado se presentan tres opciones diferentes, según que $\lambda \in (2, 4, 6)$, a saber:

$$\begin{cases} \lambda = 2 \rightarrow R_1(x) = 2x \\ \lambda = 4 \rightarrow R_2(x) = x \\ \lambda = 6 \rightarrow R_3(x) = (2/3)x \end{cases}$$

, cuya representación gráfica puede verse en la siguiente figura:



Ejemplo 7

Después del correspondiente estudio, se concluye que la función de oferta de una camisería masculina viene dada por la expresión: $y(x) - \lambda \int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 y(t) dt = e^x$, con λ = 4, mientras que la función de demanda es: y(x) = $\frac{240 - 80x}{3}$, con *y* expresado en €/ud. y *x* en miles de ud./mes. Estudiar y representar gráficamente el equilibrio del mercado, estimando los ingresos brutos anuales del comerciante vendedor.

Solución:

Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie. Tenemos que: $y(x) = C\lambda(5x^2 - 3) + e^x$, (1)

donde $C = \int_0^1 t^2 y(t)dt$, (2). Substituyendo (2) en (1), se obtiene que:

$$C = C\lambda\int_0^1 (5t^4 - 3t^2)dt + \int_0^1 t^2 e^t dt, \text{ de donde } C = e - 2.$$

La ecuación integral dada de la oferta tiene la solución única:

$$y(x) = \lambda(e - 2)(5x^2 - 3) + e^x,$$

para λ cualesquiera, y la ecuación homogénea correspondiente:

$$y(x) - \lambda\int_0^1 (5x^2 - 3)t^2 y(t)dt = 0,$$

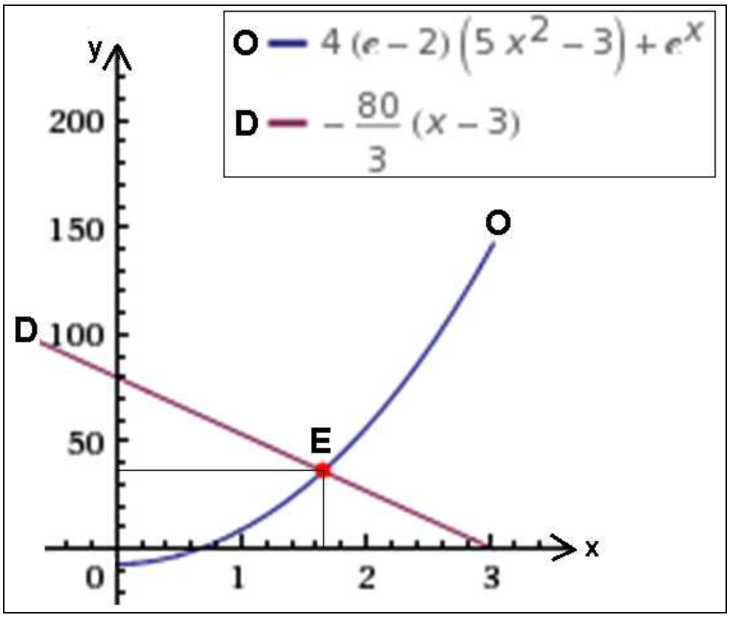
tiene solo la solución nula $y(x) \equiv 0$.

El equilibrio del mercado se producirá cuando: O = D, esto es, para $\lambda = 4$:

$$4(e - 2)(5x^2 - 3) + e^x = \frac{240 - 80x}{3}, \text{ lo que tiene lugar para:}$$

$$x = 1'65381 \text{ (1.654 ud./mes)} \Rightarrow y = 35'90 \text{ €/ud.},$$

con la representación gráfica siguiente:



Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x $\rightarrow \infty$ también sucede que y $\rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4(e-2)(5x^2-3)+e^x}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del producto en cuestión vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 35'90 €/ud. $\times$ 1.654 ud./mes $\times$ 12 meses/año =
= 712.543'20 €/año.

Ejemplo 8

Una región, a lo largo de una serie histórica o cronológica suficientemente representativa, viene observando en su contabilidad pública que su resultado presupuestario anual (y) viene evolucionando en función del saldo (x) de la balanza por cuenta corriente, expresado en millones de euros, mediante la siguiente ecuación integral:

$$y(x) = xe^{-x} + \lambda\int_0^\infty j_0\left(2\sqrt{xt}\right)y(t)dt, \text{ con } |\lambda| = 2 \neq 1.$$

Averiguar: a) a partir de qué saldo de dicha balanza el resultado presupuestario se anula, y b) ¿cuál será el resultado presupuestario anual regional para un nivel de importaciones de 20 millones de euros, con un índice de cobertura del 65%?

Solución:

a) Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 2ª especie. Sea la función generatriz: y(x) = $L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación planteada y teniendo en cuenta el teorema de Efros generalizado del producto (ver introducción teórica), hallamos que:

$$\phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \lambda\frac{1}{p}\phi\left(\frac{1}{p}\right).$$

Substituyendo p por $\frac{1}{p}$, se obtiene $\phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p\phi(p)$.

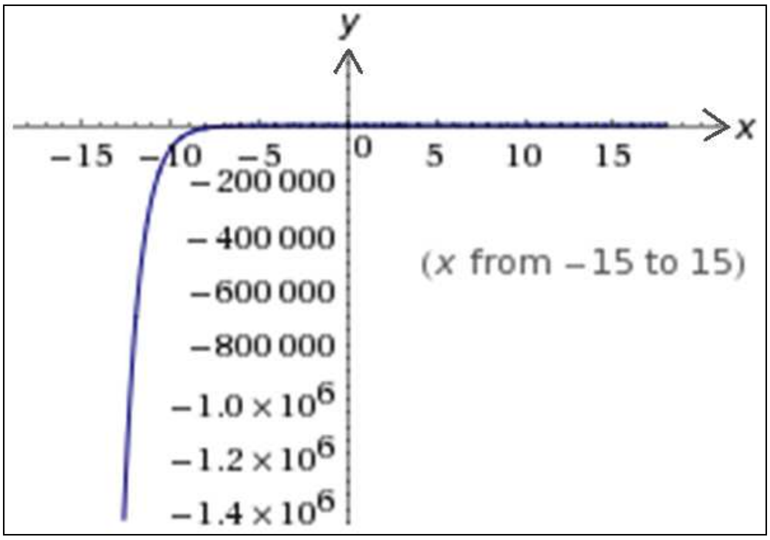
De las anteriores expresiones se halla que:

$$\phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda}{p}\left[\frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p\phi(p)\right], \text{ o bien } \phi(p) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda p}{(p+1)^2}\right].$$

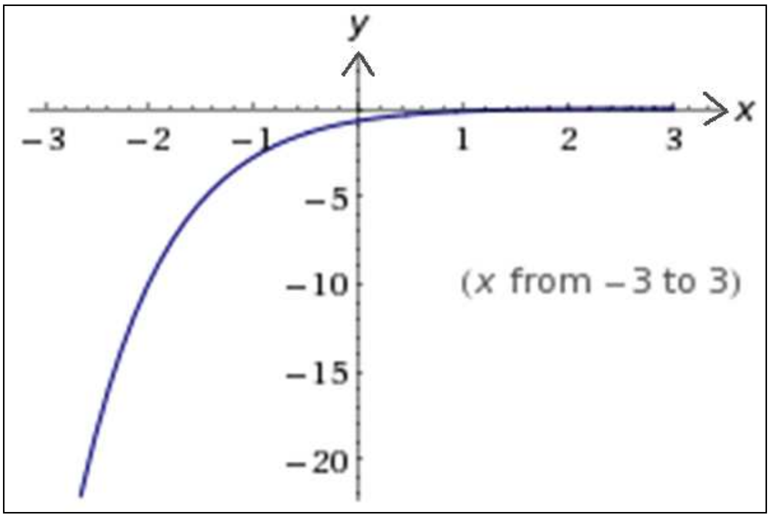
De aquí se obtiene la solución general buscada mediante la función generatriz Laplace, o sea: $y(x) = L^{-1}[\phi(p)] = e^{-x}\left(\frac{x}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right)$, que, en nuestro caso, con λ = 2, resulta ser la función:

$$y(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{x-2}{3e^x},$$

con la siguiente representación gráfica:



, que también puede observarse con mayor detalle en las proximidades del centro de coordenadas cartesianas rectangulares, así:



Así pues, en este caso, el saldo de la balanza por cuenta corriente, como resultado de la diferencia entre el valor de las exportaciones (X) y las importaciones (M) de la región en cuestión x = X – M, si es negativo implicará que se está absorbiendo más recursos de los que se producen en la región y el déficit resultante debe equivaler al préstamo recibido del resto del mundo.

Para y(x) = 0, se exige que la demanda externa: x = X – M = 2.000.000 € , y el resultado presupuestario negativo de la región prácticamente se anula a partir de dicha cifra.

b) El nivel de importaciones es: M = 20 x 10^6 € , por lo que el nivel de exportaciones será: X = 0'65 $\times$ M = 0'65 $\times$ 20.000.000 = 13.000.000 € , y el saldo de la balanza por cuenta corriente será:

x = X – M = 13.000.000 – 20.000.000 = - 7.000.000 € , (x = -7),

con lo que substituyendo este valor en la ecuación obtenida se tendrá un resultado presupuestario correspondiente (negativo) de:

$$y = \frac{x-2}{3e^x} = \frac{-9}{3 \cdot e^{-7}} = -3 \cdot e^7 = -3.290 \text{ €} .$$

Ejemplo 9

Una región, a lo largo de una serie histórica o cronológica suficientemente representativa, viene observando en su contabilidad pública que su resultado presupuestario anual (y) viene evolucionando en función del saldo (x) de la balanza por cuenta corriente, expresadas ambas variables en millones de euros, mediante la siguiente ecuación integral:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4x}} \cdot y(t) \cdot dt = 1.$$

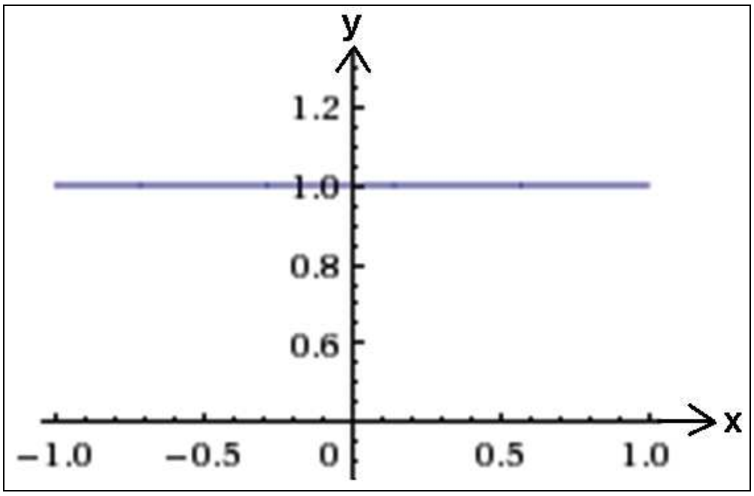
Averiguar la relación existente entre ambas variables macroeconómicas.

Solución:

Se trata de una ecuación integral inhomogénea de 1ª especie. Sea y(x) = $L^{-1}[\phi(p)]$. Aplicando a ambos miembros de la ecuación integral planteada la transformación de Laplace, de acuerdo con la fórmula correspondiente del teorema de Erfros (ver introducción teórica), se obtiene que:

$\frac{\phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p}$, de donde $\frac{\phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2}$, o bien: $\phi(p) = \frac{1}{p}$, y entonces se tendrá la función generatriz Laplace siguiente: y(x) = $L^{-1}[\frac{1}{p}]$ = 1.

Por consiguiente, $y(x) = 1$ es la solución de la ecuación integral planteada. Es obvio, en su consecuencia, que el resultado presupuestario anual es constantemente positivo e igual a un millón de euros, por lo que resulta independiente de la cuantía (positiva o negativa) que experimente el saldo de la balanza por cuenta corriente de la región en cuestión. Esto es, gráficamente:



Ejemplo 10

La función de oferta de cierto servicio viene dada por la ecuación integral siguiente: $y(x) - \lambda \int_0^1 (1 + xt) \cdot y(t) \cdot dt = 0$, mientras que la función de demanda es: $y = 3 - x$, viniendo *y* expresada en €/ud. y *x* en miles de ud./día. Se desea: a) estudiar el equilibrio del mercado del servicio en cuestión, b) hallar la elasticidad de ambas funciones económicas en dicho punto de equilibrio, y c) hallar el beneficio neto anual del prestador del servicio si sus gastos totales son del orden del 70% de su cifra de negocios, considerando una fiscalidad del 25% y 250 días de trabajo al año.

Solución:

a) En el estudio de la función de oferta, que es una ecuación integral no lineal, dedúcese que el núcleo resulta evidentemente positivo. El operador es degenerado y es posible buscar una solución de la forma: $y(x) = a_1 + a_2x$.

Substituyendo esto en la ecuación integral dada se llegaría a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & \left(1-\frac{\lambda}{3}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que, a su vez, conlleva el siguiente sistema algebraico homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} (1-\lambda)a_1 - \frac{\lambda}{2}a_2 = 0 \\ -\frac{\lambda}{2}a_1 + (1-\frac{\lambda}{3})a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

El determinante del sistema anterior es:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & \left(1-\frac{\lambda}{3}\right) \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\frac{\lambda}{3}) - \frac{\lambda^2}{4} = 1 - \frac{\lambda}{3} - \lambda + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^2}{4} = 1 - \frac{4\lambda}{3} + \frac{\lambda^2}{12} = 0\,,$$

o también: $\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$, de lo que resultan los dos valores propios positivos siguientes:

$$\lambda = \frac{16 \pm \sqrt{256-48}}{2} = \frac{16 \pm 2\sqrt{52}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 8 + 2\sqrt{13} \\ \lambda_2 = 8 - 2\sqrt{13} \end{array} \right. .$$

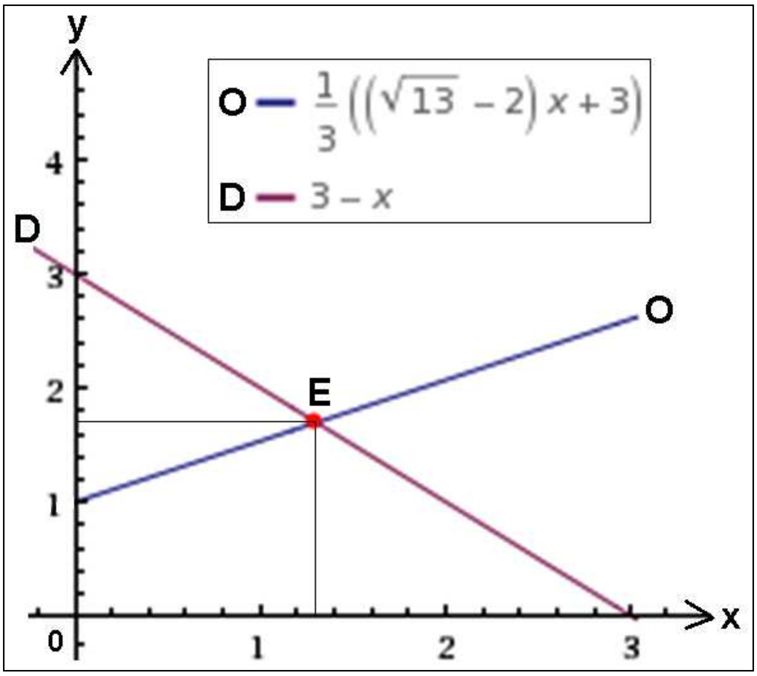
Las funciones propias correspondientes vienen dadas por:

$$\begin{cases} y_1 = 1 - \frac{\sqrt{13}+2}{3}x \\ y_2 = 1 + \frac{\sqrt{13}-2}{3}x \end{cases}$$

Se observa que solamente y_2 es positivo y creciente, lo que garantiza los condicionamientos teóricos así como los económicos al tratarse de la función de oferta de un bien normal.

Por otra parte, en el equilibrio del mercado se producirá, como siempre, que: D = O, con lo que:

$3 - x = 1 + \frac{\sqrt{13}-2}{3}x$; de donde: $x = \frac{6}{1+\sqrt{13}}$ = 1'303 (1.303 ud./día), al que corresponde un valor de: y = 3 – 1'303 ≈ 1'70 €/ud., con la siguiente representación gráfica:



b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado, a saber: E(1’303, 1’70) se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

$$D \Rightarrow y = 3\text{-}x;\ dy/dx = -1;\ \frac{dx}{dy} = -1,\ e_d = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x} = -1\times\frac{1'70}{1'303} = -1'30.$$

Entonces se tiene que: $e_d < -1$, por lo que se trata de una demanda relativamente elástica.

Del mismo modo, por lo que se refiere a la función de oferta, se tendrá que:

$$O \Rightarrow y = 1+\frac{\sqrt{13}-2}{3}x;\ dy/dx = \frac{\sqrt{13}-2}{3};\ \frac{dx}{dy} = \frac{3}{\sqrt{13}-2}.\ \text{Y entonces:}$$

$$e_o = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x} = \frac{3}{\sqrt{13}-2}\times\frac{1'70}{1'303} = 2'44 > 1,$$

y en este caso, la función en estudio resulta relativamente elástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción mayor.

c) El ingreso bruto del prestador del servicio vendrá dado por:

$$I = p \times q = 1'70\ €/ud. \times 1.303\ ud./día = 2.215'10\ €/día,$$

y su beneficio antes de impuestos será de:

$$\pi = I - G = I - 0'7 \cdot I = 0'3 \cdot I = 0'3 \cdot 2.215'10 = 664'53 \text{ €/día},$$

mientras que su beneficio neto anual, descontando la fiscalidad, será:

$$B = (0'75 \cdot \pi) \text{ €/día} \times 250 \text{ días/año} = 0'75 \times 664'53 \times 250 = 124.599'38 \text{ €} .$$

Ejemplo 11

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{cases} D \rightarrow \phi(x) + \int_0^x \phi(u) \cdot du = 3 \\ O \rightarrow \phi(x) = \lambda \cdot \int_0^1 x \cdot t \cdot \phi^2(t) \cdot dt \end{cases}$$

, donde se tiene el parámetro $\lambda = 2$, siendo ϕ el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades diarias. Se trata de: a) estudiar el equilibrio del mercado, hallando el ingreso bruto anual del productor considerando un calendario laboral de 250 días/año, y b) calcular la elasticidad de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio.

Solución:

a) La función de demanda viene expresada como una ecuación integral de Volterra, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{\phi(x) + \int_0^x \phi(u) \cdot du\right\} = L\{3\} \Rightarrow L\{\phi(x)\} + L\left\{\int_0^x \phi(u) \cdot du\right\} = L\{3\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{3}{S},$$

donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S \cdot F(S) + F(S) = 3 \Rightarrow F(S)(S+1) = 3 \Rightarrow F(S) = \frac{3}{S+1} .$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda o función generatriz Laplace, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{3}{S+1}\right\} = 3 \cdot e^{-x}} \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$3\cdot e^{-x} + \int_0^x 3\cdot e^{-u}\cdot du = 3$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u}\cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^{0} = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Por lo que se refiere a la función de oferta, veamos que se trata de una ecuación integral no lineal de Hammerstein. Haciendo:

$$c = \int_0^1 t\cdot\phi^2(t)\cdot dt \ . \qquad (1)$$

Entonces resultará que:

$$\phi(x) = c\cdot\lambda\cdot x \ . \qquad (2)$$

Substituyendo $\phi(x)$ por el segundo miembro de (2) en la relación (1), se tendrá:

$$c = \int_0^1 t\cdot\lambda^2\cdot c^2\cdot t^2\cdot dt = \lambda^2 c^2\cdot\int_0^1 t^3\cdot dt = \lambda^2 c^2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\lambda^2 c^2}{4} .$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones, a saber:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{4}{\lambda^2} .$$

Por lo tanto, la ecuación integral problema tiene también dos soluciones para cualquier $\lambda \neq 0$, esto es:

$\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = \frac{4}{\lambda}x$, que al tratarse de un bien normal, para una función de oferta, con $\lambda = 2$, se tiene que: $\phi(x) = 2x$, es la función buscada.

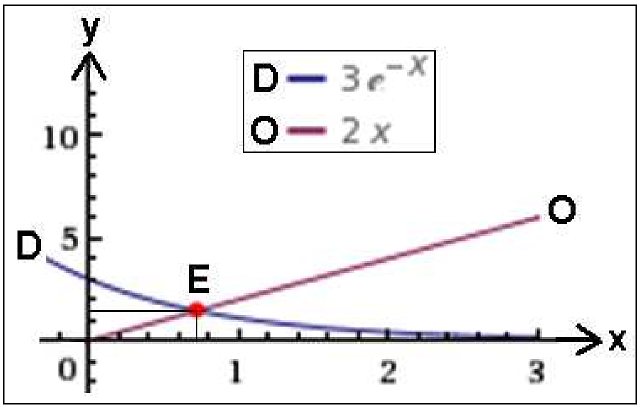
En el equilibrio tendrá lugar que: O = D, con lo que:

$3\cdot e^{-x} = 2x$, de donde: $x \approx 0'726$ (726 ud./día), a lo que corresponde un precio de: $y = 2\cdot 0'726 \approx 1'45$ €/ud. O sea, tendremos un punto de equilibrio de coordenadas E(0'726, 1'45).

Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del productor del artículo concreto en cuestión vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 1'45 €/ud. $\times$ 726 ud./día $\times$ 250 días/año = 263.175'00 €/año.

Así pues, resulta la siguiente representación gráfica:



b) Por último, en el punto de equilibrio del mercado hallado, a saber: E(0'726, 1'45) se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

$$D \Rightarrow y = 3\cdot e^{-x};\ dy/dx = -3\cdot e^{-x};\ \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{3\cdot e^{-x}} = -\frac{e^{x}}{3};\ \text{y entonces:}$$

$$e_d = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x} = -\frac{e^{x}}{3}\times\frac{1'45}{0'726} = -\frac{2}{3}e^{0'726} = -1'38.\ \text{También: } e_d = -1/x\ .$$

Entonces se tiene que: $e_d \in (-\infty,-1)$, por lo que se trata de una demanda relativamente elástica.

Del mismo modo, por lo que se refiere a la función de oferta, se tendrá que:

$$O \Rightarrow y = 2x;\ dy/dx = 2;\ \frac{dx}{dy} = 1/2.\ \text{Y entonces:}$$

$$e_o = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\times\frac{1'45}{0'726} = 1'00,$$

y en este caso, la función en estudio de oferta posee una elasticidad unitaria.

Ejemplo 12

El resultado presupuestario anual $\phi(x)$ de dos ayuntamientos A_1 y A_2 de la misma comarca viene dado, respectivamente, por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} A_1 \to \phi(x) - \lambda\int_0^1 (3x-2)\cdot t\cdot\phi(t)\cdot dt = 0 \\ A_2 \to \phi(x) - \lambda\int_0^1 \left(\sqrt{x}\cdot t - \sqrt{t}\cdot x\right)\phi(t)\cdot dt = 0 \end{cases},$$

siendo *x* el importe del presupuesto ordinario equilibrado (Ingresos = Gastos) respectivo. Comparar ambos resultados.

Solución:

La ecuación integral homogénea de Freedholm de 2ª especie, correspondiente al ayuntamiento A_1, esto es:

$$\phi(x) - \lambda \int_0^1 (3x - 2)t \cdot \phi(t) \cdot dt = 0$$

no tiene raíces características y funciones propias. En efecto, tenemos que:

$$\phi(x) = \lambda(3x - 2)\int_0^1 t \cdot \phi(t) \cdot dt.$$

Haciendo ahora: $c = \int_0^1 t \cdot \phi(t) \cdot dt$ (1), se obtiene que:

$$\phi(x) = c \cdot \lambda(3x-2). \qquad (2)$$

Substituyendo (2) en (1) obtenemos, entonces:

$$\left[1 - \lambda \int_0^1 (3t^2 - 2t) \cdot dt\right] c = 0 \qquad (3)$$

Pero, como $\int_0^1 (3t^2 - 2t) dt = 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1 - 1 = 0$, la ecuación (3) da c = 0 y, por consiguiente también: $\phi(x) = 0$, con lo que el resultado presupuestario de este ayuntamiento A_1 es nulo.

De este modo, la ecuación homogénea dada tiene solo la solución nula $\phi(x) = 0$ para un λ cualquiera; por lo tanto, ésta no posee raíces características y funciones propias.

Por otra parte, la ecuación integral homogénea de Freedholm de 2ª especie, correspondiente al ayuntamiento A_2, esto es: $\phi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\sqrt{x}t - \sqrt{t}x\right)\phi(t) \cdot dt = 0$, no tiene raíces características reales y funciones propias. En efecto, tenemos que: $\phi(x) = c_1 \lambda \sqrt{x} - c_2 \lambda \cdot x$ donde:

$$c_1 = \int_0^1 t\phi(t) \cdot dt, \qquad c_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\phi(t) \cdot dt.$$

Haciendo la substitución $\phi(t)$ en c_1 y c_2 se tiene que:

$c_1 = \int_0^1 t\left(c_1\lambda\sqrt{t} - c_2\lambda t\right)dt$, $c_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\left(c_1\lambda\sqrt{t} - c_2\lambda t\right)dt$, de donde se deduce que:

$c_1 = c_1\lambda\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt - c_2\lambda\int_0^1 t^2 dt$; $c_2 = c_1\lambda\int_0^1 t\,dt - c_2\lambda\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt$, que ofrecen, a su vez:

$$c_1 = c_1\cdot\lambda\cdot\left[\frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 - c_2\cdot\lambda\cdot\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\cdot c_1\cdot\lambda}{5} - \frac{c_2\cdot\lambda}{3};\ \frac{2\cdot c_1\cdot\lambda}{5} - \frac{5\cdot c_1}{5} - \frac{c_2\cdot\lambda}{3} = 0$$, y también:

$$c_2 = c_1\cdot\lambda\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - c_2\cdot\lambda\cdot\left[\frac{t^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{c_1\cdot\lambda}{2} - \frac{2\cdot c_2\cdot\lambda}{5};\ \frac{c_1\cdot\lambda}{2} - \frac{2\cdot c_2\cdot\lambda}{5} - \frac{5\cdot c_2}{5} = 0,$$

obteniéndose, en fin, el sistema homogéneo de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)c_1 + \frac{\lambda}{3}c_2 = 0 \\ -\frac{\lambda}{2}c_1 + \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right)c_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

El determinante del sistema es:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 - \frac{4\lambda^2}{25} + \frac{\lambda^2}{6} = 1 + \frac{\lambda^2}{150} \neq 0\,.$$

Para cualquier valor de λ real, este determinante no se anula, por lo que el sistema anterior resulta compatible y determinado, y de (4) se obtiene la solución trivial: $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$. Por lo tanto, para todas las λ reales, la ecuación dada tiene solo la solución: $\phi(x) \equiv 0$.

De esta manera, la ecuación integral dada: $\phi(x) - \lambda\int_0^1\left(\sqrt{x}t - \sqrt{t}x\right)\phi(t)\cdot dt = 0$, no posee raíces características reales y funciones propias.

Como consecuencia de todo ello, el resultado presupuestario de ambos ayuntamientos (que junto con el remanente de tesorería nos proporciona una información fundamental acerca del estado de las finanzas municipales del ejercicio en cuestión) es igualmente nulo, y representa la diferencia existente entre la totalidad de los derechos reconocidos netos liquidados en el ejercicio y las obligaciones reconocidas netas.

Ejemplo 13

El resultado presupuestario anual u(x) de un ayuntamiento de un municipio de 24.000 habitantes, expresado en miles de euros, una vez realizado el análisis econométrico pertinente, viene dado por la ecuación integral:

$$u(x) = 1 + \int_0^1 (1+x+y+xy)^{-1/2} \cdot u(y) \cdot dy\,,$$

siendo *x* el importe del presupuesto ordinario equilibrado (Ingresos = Gastos) expresado en millones de euros. Se pide: a) expresar el resultado presupuestario en función del importe global del presupuesto ordinario anual municipal, y b) determinar el resultado presupuestario considerando que se prevé un gasto por habitante de 1.000 € .

Solución:

a) Se trata, en definitiva, de resolver la ecuación integral siguiente:

$$u(x) = 1 + \int_0^1 (1+x+y+xy)^{-1/2} u(y) dy\,.$$

Escribimos k(x, y) como: $k(x, y) = (1+x)^{-1/2} \cdot (1+y)^{-1/2}$, y definimos:

$$f_1(x) = (1+x)^{-1/2} \text{ y } g_1(y) = (1+y)^{-1/2}.$$

Luego: $h_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$ y $K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2\,.$

Así obtenemos:

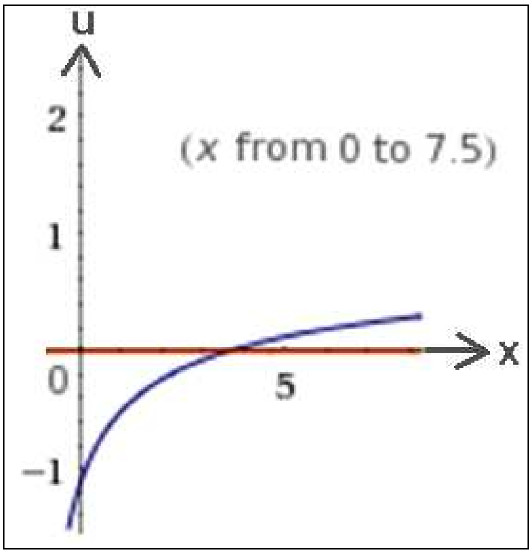
$$u_1 = h_1 + K_{11} u_1 = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{(1-2\ln 2)}\,.$$

Así, por la teoría, sabemos que una solución es:

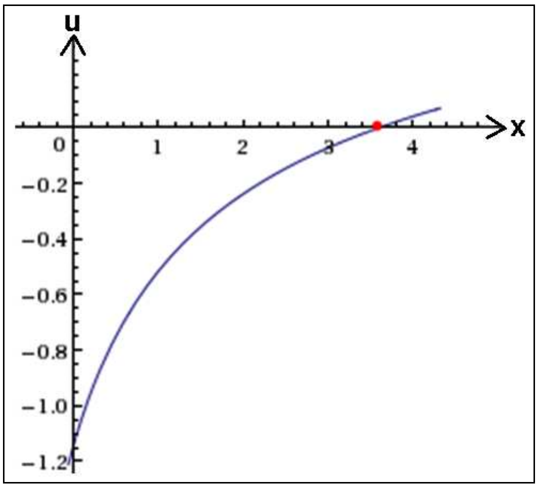
$$u(x) = 1 + \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{x+1}(1-2\ln 2)}\text{. Entonces:}$$

$$\begin{cases} \text{para } x = 0 \;\Rightarrow\; u(x) = 1 + \dfrac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{1-2\ln 2} = 1 - \dfrac{0'8284271}{0'3862943} = -1'1445 \;\; (-1.144'50\text{ € }) \\[2ex] \text{para } u(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{11-8\sqrt{2}-4x\ln^2 2 + \ln 16}{(\ln 4 - 1)^2} = \\[2ex] = \dfrac{11 - 11'313708 - 1'9218121 + 2'772589}{0'1492233} \cong 3'6 \;\; (+3.600.000\text{ € }). \end{cases}$$

, lo que supone la siguiente representación gráfica:



O bien con mayor detalle:



Obsérvese que existe una asíntota horizontal de ecuación: u(x) = 1 (1.000 €), por lo que, al menos teóricamente, éste sería el máximo resultado presupuestario alcanzable, puesto que:

$$\lim_{x \to +\infty} . (1 + \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{x+1}(1 - 2 \cdot \ln 2)}) = 1.$$

b) En este caso, el presupuesto tendrá un importe de:

x = 24.000 hab. × 1.000 €/hab. = 24.000.000 € , con lo que el resultado presupuestario vendrá dado por la expresión:

$$u = 1 + \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{25}(1 - 2 \cdot \ln 2)} = 1 - \frac{0'8284271}{5 \times 0'3862943} = 0'57109 = 571'09 \text{ €} .$$

Ejemplo 14

El resultado presupuestario anual u(x) de un ayuntamiento de un municipio de 32.500 habitantes, expresado en miles de euros, una vez realizado el análisis econométrico pertinente, viene dado por la ecuación integral:

$$u(x) = h(x) + c\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\cdot u(y)\cdot dy \ ,$$

siendo *x* el importe del presupuesto ordinario equilibrado (Ingresos = Gastos) expresado en millones de euros. Se pide: a) expresar el resultado presupuestario en función del importe global del presupuesto ordinario anual municipal, y b) determinar el resultado presupuestario considerando que se prevé un gasto por habitante de 1.200 € .

Solución:

a) Se trata, en definitiva, de resolver la ecuación integral inhomogénea y de 2ª especie siguiente:

$$u(x) = h(x) + c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} u(y) dy \text{ , con } \lambda = c,$$

Se tratará de obtener un núcleo resolvente con el núcleo separable: $k(x,y) = e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$.

Identificamos: $f_1(x) = e^{-x^2}$ y a $g_1(y) = e^{-y^2}$. Luego el coeficiente, K_{11} de la matriz K es:

$$K_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi} \ ,$$

y así $K = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi}$. Luego se deduce que:

$$M = 1 - c\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\pi} = \frac{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2} \ ,$$

y entonces sucede que: $M^{-1} = \frac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}$, para todo c distinto de $\sqrt{2/\pi}$, puesto que de lo contrario la expresión anterior sería infinita. Por lo tanto el núcleo resolvente de la ecuación planteada es:

$$R(x,y;c) = \left(\frac{2}{2 - c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right) e^{-x^2}\cdot e^{-y^2} \ .$$

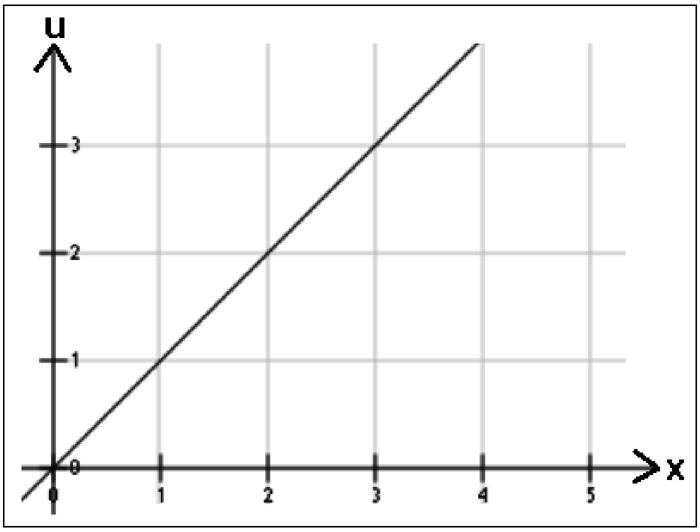
Ahora bien, si h(x) = x entonces la solución para la ecuación planteada es, de acuerdo a la teoría, la siguiente:

$$u(x)=x+\int_{-\infty}^{+\infty}c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\cdot y\cdot dy = x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\cdot y\cdot dy=$$

$$=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot\left(-\left[\frac{e^{-y^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty}\right)=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot[-\frac{1}{2}(e^{-\infty}-e^{-\infty})]=$$

$$=x+c\left(\frac{2}{2-c\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\cdot 0=x\,,$$

solución ésta que gráficamente viene dada por la recta bisectriz del primer cuadrante del círculo. Esto es:



Ahora bien, ¿qué ocurre si $c=\sqrt{2/\pi}$?. La primera respuesta, aunque pueda parecer obvia, es que M no posee inversa y por tanto el núcleo resolverte R(x, y; c) no existe. La segunda es que no podemos resolver la ecuación por el método de los núcleos separables, puesto que K_{11} = 1 y $u_1 = h_1 + K_{11}u_1 = 0 + u_1 = u_1$, no obteniendo resultado alguno. Esto no quiere decir, no obstante, que la ecuación planteada no tenga solución. En efecto, para resolver la ecuación en cuestión podemos hacer lo siguiente:

Derivando la ecuación integral inicial con respecto a *x*, y suponiendo que *h* es una función continua y derivable, se tiene que:

$$u'(x)=h'(x)-2xce^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}u(y)dy=h'(x)-2x\big(u(x)-h(x)\big) = h'(x) - 2x\cdot g(x),$$

habiendo definido: g(x) = u(x) – h(x), y obtenemos que:

g'(x) = u'(x) – h'(x) = -2x·g(x), que es una ecuación lineal de primer orden homogénea, con X = 2x y X_1 = 0 (ver cap. 2), cuya solución viene dada por:

$$g(x) = e^{\int_0^x -2t\,dt + k} = e^{-x^2+k} = A\cdot e^{-x^2}, \left(\text{con } A = e^k\right).$$

En cualquier caso, se trata de una sencilla EDO de variables separables, puesto que: $\frac{dg(x)}{g(x)} = -2x \cdot dx$, y mediante una cuadratura resulta que: $\int \frac{dg(x)}{g(x)} = -2\int x\cdot dx$; de donde:

$$\ln g(x) = -x^2 + K \Rightarrow g(x) = e^{-x^2+K}, \text{ c.s.q.d.}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación planteada en el enunciado del problema es:

$$u(x) = h(x) + A\cdot e^{-x^2}.$$

Tal como en el caso anterior si h(x) = x, obtendremos la solución $u(x) = x + A\cdot e^{-x^2}$, que para A = 0 coincide con la solución anteriormente obtenida, lo que exigiría que k = -∞ y también g(x) = $e^{-\infty}$ = 0, con lo que: u(x) = h(x) = x, c.s.q.d.

b) En este caso, el presupuesto municipal tendrá un importe de:

x = 32.500 hab. × 1.200 €/hab. = 39.000.000 € , con lo que el resultado presupuestario vendrá dado, correlativamente, por la expresión:

u(x) = x = 39 ⇒ 39.000'00 € .

Ejemplo 15

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta, la demanda de un cierto servicio viene dada por la ecuación integral:

$$u(x) = 1 + \int_0^1 (1 + x + y + x\cdot y)^{-1/2}\cdot u(y)\cdot dy.$$

Sabiendo que la oferta viene dada por la ecuación: u(x) = 1+x, se pide: a) estudiar el equilibrio del mercado y los ingresos de los prestadores del servicio, b) calcular la elasticidad de ambas funciones en el punto de equilibrio, y c) ¿en qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional de demanda que se da en el enunciado del problema?

Solución:

a) Se trata de una ecuación integral de Freedholm. Escribimos el núcleo, k(x,y) como:

$$k(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x+y+xy}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+y)}} = (1+x)^{-1/2}(1+y)^{-1/2},$$

y definimos $f_1(x):=(1+x)^{-1/2}$ y $g_1(y):=(1+y)^{-1/2}$. Luego:

$$h_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left[2\sqrt{x+1}\right]_0^1 = 2\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ y } K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2\,.$$

Así obtenemos $u_1 = h_1 + K_{11}u_1 = \dfrac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{(1-\ln 2)} \cong 2'70$, puesto que:

$$u_1(1 - K_{11}) = u_1 - K_{11}\cdot u_1 = h_1;\ u_1 = \frac{h_1}{1-K_{11}} = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{1-\ln 2}, \text{ c. s. q. d.}$$

Así sabemos que una solución es:

$$u(x) = 1 + \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{x+1}(1-\ln 2)} = 1 + \frac{2'70}{\sqrt{x+1}}\,.$$

Para ello habrá que comprobar que se cumple, substituyendo en la ecuación inicial, que:

$$1 + \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{x+1}(1-\ln 2)} = 1 + \int_0^1 (1+x+y+x\cdot y)^{-1/2}\cdot u(y)\cdot dy\,,$$

o lo que es lo mismo, que se cumple la igualdad:

$$1 + \frac{2'70}{\sqrt{x+1}} = 1 + \int_0^1 (1+x+y+x\cdot y)^{-1/2} \times \left(1 + \frac{2'70}{\sqrt{y+1}}\right)\cdot dy = 1 + I\,;$$

veamos que, efectivamente se cumple, puesto que:

$$I = \int_0^1 (1+x+y+x\cdot y)^{-1/2} \times \left(1 + \frac{2'70}{\sqrt{y+1}}\right)\cdot dy = \frac{0'8284}{\sqrt{x+1}} + 2'70\int_0^1 \frac{(1+x+y+x\cdot y)^{-1/2}}{\sqrt{y+1}}\,dy\,,$$

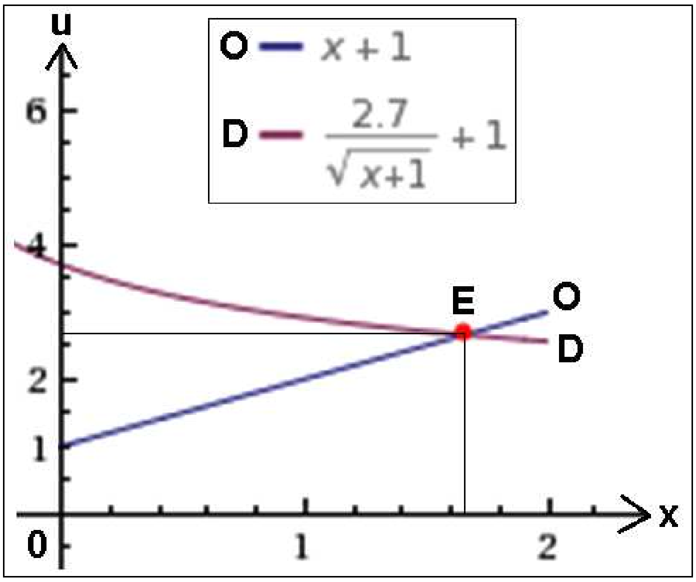
ya que:

$$\int_0^1 (1+x+y+xy)^{-1/2}dy = \left[\frac{2(y+1)}{\sqrt{(x+1)(y+1)}}\right]_0^1 = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{x+1}} = \frac{0'8284}{\sqrt{x+1}}$$, y también:

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y+1}\times\sqrt{1+x+y+xy}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+x+2y+2xy+y^2+xy^2}} = \left[\frac{(y+1)\cdot \ln(y+1)}{\sqrt{(x+1)\cdot(y+1)^2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\ln 2}{\sqrt{x+1}}$$; y entonces se tiene que: $I = \frac{0'8284}{\sqrt{x+1}} + \frac{2'70\times \ln 2}{\sqrt{x+1}} = \frac{2'70}{\sqrt{x+1}}$, c.s.q.d.

Esta solución posee un asíntota horizontal de valor u = 1, puesto que: $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2'70}{\sqrt{x+1}}\right) = 1+0 = 1$, y la representación gráfica del equilibrio de mercado, viene dada por:



El equilibrio del mercado exige que: O = D, esto es: $1+x = 1+\frac{2'70}{\sqrt{x+1}}$; o sea, se tiene la ecuación: $x^3 + x^2 - 7'29 = 0$, de la que se deduce la raíz real: x = 1'6566 ⇒ u(x) = 2'6566, con lo que el punto de equilibrio es: E(1'6566, 2'6566), lo que implica q = 1.657 ud./día y p = 2'66 €/ud., por lo que, considerando un calendario laboral de 240 días/año, se tendrán unos ingresos anuales del prestador del servicio de:

I = p x q = (2'66 x 1.657) €/día x 240 días/año = 1.057.828'80 €/año.

b) Así pues, en el punto de equilibrio E se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

$$O \Rightarrow y = 1 + x;\ \frac{dy}{dx} = 2;\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2};$$

$e_0 = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \times \frac{1+x}{x} = \frac{1+x}{2x} = \frac{2'6566}{3'3132} = 0'80 < 1$, luego se trata de una oferta relativamente inelástica.

Por otra parte, $D \Rightarrow y = 1 + \frac{2'70}{\sqrt{x+1}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{2'70}{2\sqrt{x+1}(x+1)} = -\frac{1'35}{(x+1)^{3/2}}$; $\frac{dx}{dy} = -\frac{(x+1)^{3/2}}{1'35}$; y entonces se tiene la elasticidad buscada de demanda:

$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{(x+1)^{3/2}}{1'35} \times \frac{2'6566}{1'6566} = -\frac{2'6566^{5/2}}{2'23641} = -5'14 < -1$, luego se trata de una demanda relativamente elástica.

c) Para la determinación de los posibles extremales pedidos, habrá que plantearse la siguiente integral definida:

$$A = \int_0^1 (1+x+y+xy)^{-1/2} x \left(1 + \frac{2'70}{\sqrt{y+1}}\right) \cdot dy =$$

$$= \left[\frac{20(y+1) + 27\sqrt{y+1} \times \ln(y+1)}{10\sqrt{(x+1)(y+1)}}\right]_0^1 = \frac{2'70}{\sqrt{x+1}}.$$

En este caso, se tiene que: $\varphi(x,y) = (1+x+y+xy)^{1/2} \times \left(1 + \frac{2'70}{\sqrt{y+1}}\right)$.

Como sucede que la anterior función subintegral no contiene a x', resulta que, por aplicación de la fórmula de Euler-Lagrange-Poisson:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{(y+1)\left(\frac{2'70}{\sqrt{y+1}} + 1\right)}{2(1+x+y+xy)^{3/2}} = 0; \quad \Rightarrow \text{ y no existe solución.}$$

Ejemplo 16

En un mercado supuesto en régimen de competencia perfecta, la oferta viene dada por la ecuación: $u(x) = h(x) + \int_0^1 (xy)^{-1/2} u(y) dy$, mientras que la demanda viene dada por: $f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 2$, siendo u(x) el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades/día. Se pide: a) estudiar el equilibrio del mercado con la representación gráfica correspondiente, hallando los ingresos de los vendedores, considerando un calendario laboral anual de 240 días, b) calcular las elasticidades de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio, y c) ¿en qué curvas puede alcanzar su extremo la funcional de oferta que se da en el enunciado del problema?

Solución:

a) La función de oferta es una ecuación integral inhomogénea de Freedholm de 2ª especie, con $\lambda = 1$. En ese caso la integral:

$K_{11} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = \ln \frac{1}{0} = +\infty$, diverge y no podemos formar u(x) por el procedimiento normal. Ahora bien, esto no quiere decir que la ecuación integral propuesta no tenga solución. En efecto, una solución de la ecuación integral propuesta es: u(x) = x, esto es:

$$u(y) = y \quad \text{para} \quad h(x) = x - x^{-1/2} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot dy .$$

Ello puede comprobarse substituyendo en la ecuación inicial del siguiente modo:

$u(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{y} \cdot dy + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot y \cdot dy = x - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy$, por la propiedad aditiva del integrando. O sea, debe cumplirse que: $\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^1 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy = 0$. Veamos que, en efecto, se cumple que: $\int_0^1 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{y}} \right) dy = 0$. Así pues, la solución de esta ecuación de oferta es, efectivamente: y = u(x) = x.

Por otra parte, la función de demanda es la ecuación integral de Volterra: $f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 2$, que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du\right\} = L\{2\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u) \cdot du\right\} = L\{2\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{2}{S},$$

donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S \cdot F(S) + F(S) = 2 \Rightarrow F(S)(S+1) = 2 \Rightarrow F(S) = \frac{2}{S+1} .$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda o función generatriz Laplace, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{2}{S+1}\right\} = 2 \cdot e^{-x}} \rightarrow \text{I.P.}$$

con lo que su solución ofrece: y = u(x) = 2·e^{-x}.

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$2 \cdot e^{-x} + \int_0^x 2 \cdot e^{-u} \cdot du = 2$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u} \cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

El equilibrio del mercado exige que: O = D, esto es:

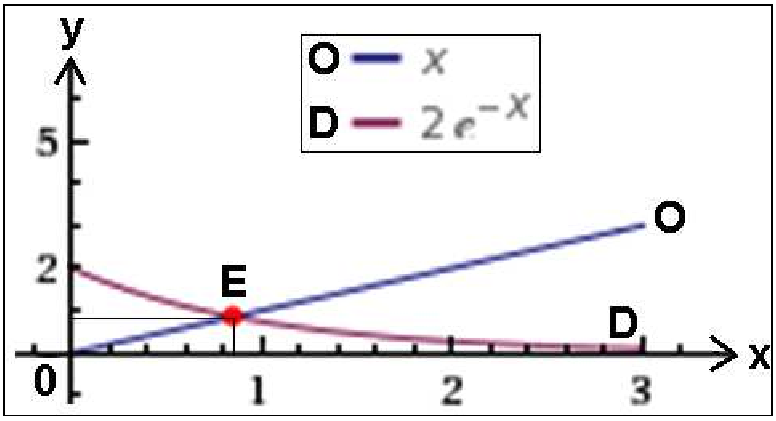
x = 2·e^{-x}; x·e^{x} = 2; que ofrece la solución real:

x = 0'852606 ⇒ y = 0'852606,

con lo que el mencionado punto de equilibrio es: E (0'8526, 0'8526), lo que implica los valores: q = 853 ud./día y p = 0'85 €/ud., por lo que considerando un calendario laboral de 240 días/año, se tendrán unos ingresos anuales del vendedor de:

I = p x q = (0'85 x 853) €/día x 240 días/año = 174.012'00 €/año.

La correspondiente representación gráfica será:



b) Así pues, en el punto de equilibrio hallado se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

O ⇒ y = x; $\frac{dy}{dx} = 1$; $\frac{dx}{dy} = 1$; $e_0 = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = 1$, luego se trata de una oferta de elasticidad unitaria.

Por otra parte, D $\Rightarrow$ y = 2·e^{-x}; $\frac{dy}{dx} = -2 \cdot e^{-x}$; $\frac{dx}{dy} = -\frac{e^x}{2}$; y entonces:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{e^x}{2} \times \frac{2 \cdot e^{-x}}{x} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{0'8526} = -1'17 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

c) En este caso, operando como en el ejercicio anterior, habrá que plantearse la siguiente integral definida a optimizar (maximizar o minimizar):

$$A = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{xy}} \cdot dy = \left[\frac{2y^2}{3\sqrt{xy}} \right]_0^1 = \frac{2}{3\sqrt{x}}, \text{ donde: } \varphi(x, y) = \frac{y}{\sqrt{xy}},$$

de tal modo que, por aplicación de la fórmula de Euler-Lagrange-Poisson:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y^2}{2(xy)^{3/2}} = 0; \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ , } \forall x \neq 0.$$

Ejemplo 17

Dadas las siguientes funciones económicas:

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi_1(x) = \lambda \int_0^{10} x \cdot \varepsilon \cdot \varphi_1(\varepsilon) \cdot d\varepsilon + e^x \\ \varphi_2(x) = x + \lambda \int_0^1 (x - \varepsilon) \cdot \varphi_2(\varepsilon) \cdot d\varepsilon \\ , \forall\ x \in [0, 10] \end{array}}$$

con λ = 1, se desea averiguar si alguna de ellas puede ser una función de oferta para un bien normal y, en tal caso, calcular su elasticidad-arco entre los puntos x = 3 y x = 8.

Solución:

La primera ecuación integral propuesta es una de Freedholm de 2ª especie, lineal e inhomogénea, con núcleo separable.

Si ahora hacemos: $C = \int_0^{10} \varepsilon \cdot \varphi_1(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$ [1]

será: $\varphi_1(x) = \lambda \cdot x \int_0^{10} \varepsilon \cdot \varphi_1(\varepsilon) \cdot d\varepsilon + e^x = \lambda \cdot x \cdot C + e^x$. [2]

Substituyendo en la igualdad [1], se tendrá que:

$$C = \int_0^{10} \varepsilon \cdot \varphi_1(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = \int_0^{10} \varepsilon\left(\lambda \cdot C \cdot \varepsilon + e^{\varepsilon}\right) \cdot d\varepsilon = \lambda C \int_0^{10} \varepsilon^2 \cdot d\varepsilon + \int_0^{10} \varepsilon \cdot e^{\varepsilon} \cdot d\varepsilon = \frac{1.000 \cdot \lambda \cdot C}{3} +$$

$$+ (\varepsilon - 1) \cdot e^{\varepsilon}\Big|_0^{10} = \frac{1.000 \cdot \lambda C}{3} + (10-1) \cdot e^{10} - (0-1) \cdot e^0 = \frac{1.000 \cdot \lambda C}{3} + 9 \cdot e^{10} + 1.$$

Si ahora despejamos C, resultará:

$$C\left(1 - \frac{1.000\lambda}{3}\right) = 9 \cdot e^{10} + 1 \rightarrow C = \frac{3 + 27 \cdot e^{10}}{3 - 1.000\lambda} .$$

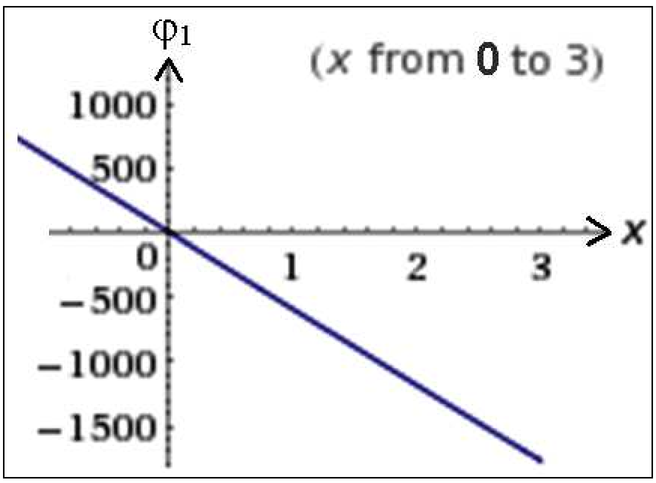
Para obtener la expresión de la solución substituimos en [2]:

$$\varphi_1(x) = \frac{3\lambda + 27\lambda e^{10}}{3 - 1.000\lambda} x + e^x ,$$

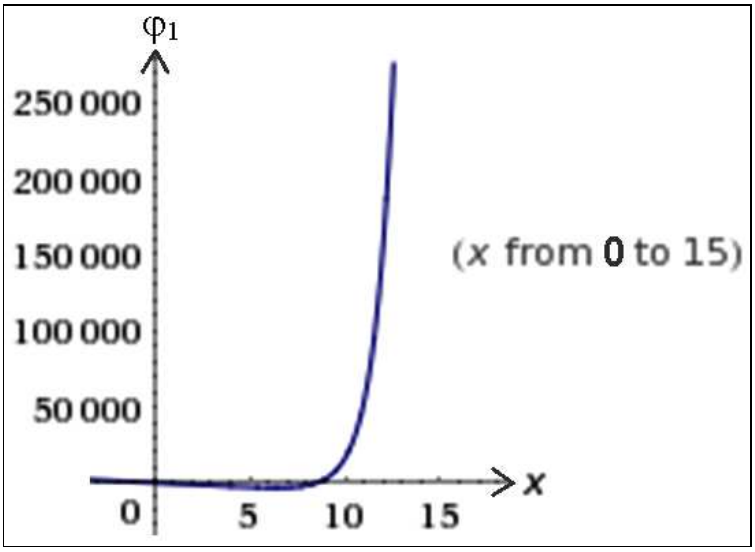
que para λ = 1 ofrece la solución: $\varphi_1(x) = -\frac{3 + 27 \cdot e^{10}}{997} x + e^x = e^x - 596'51 \cdot x$.

Por otra parte, se presume en el caso de esta función la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \rightarrow \infty$ también $\varphi_1 \rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi_1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 596'51 x}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje Oφ (vertical, hacia arriba).

Su representación gráfica puede verse seguidamente:



, o bien con una escala de los ejes mucho mayor:



La segunda ecuación integral lineal propuesta es también una de Freedholm de 2ª especie, lineal e inhomogénea, con núcleo separable, esto es:

$$\varphi_2(x) = x + \lambda\int_0^1 (x-\varepsilon)\cdot\varphi_2(\varepsilon)\cdot d\varepsilon .$$

Si ahora hacemos $C_1 = \int_0^1 \varphi_2(\varepsilon)\cdot d\varepsilon$, $\quad C_2 = \int_0^1 \varepsilon\cdot\varphi_2(\varepsilon)\cdot d\varepsilon$, [3]

será: $\varphi_2(x) = x + \lambda\cdot x\int_0^1 \varphi_2(\varepsilon)\cdot d\varepsilon - \lambda\int_0^1 \varepsilon\cdot\varphi_2(\varepsilon)\cdot d\varepsilon = x + \lambda\cdot x\cdot C_1 - \lambda C_2$.

Substituyendo en cada una de las dos igualdades [3], se tiene que:

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^1 \varphi_2(\varepsilon)\cdot d\varepsilon = \int_0^1 (\varepsilon + \lambda C_1\varepsilon - \lambda C_2)\cdot d\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}C_1 - \lambda C_2 \\ C_2 = \int_0^1 \varepsilon\cdot\varphi_2(\varepsilon)\cdot d\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon(\varepsilon + \lambda C_1\varepsilon - \lambda C_2)\cdot d\varepsilon = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{3}C_1 - \frac{\lambda}{2}C_2 \end{cases}$$

Simplificando y ordenando, resultará que:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)C_1 + \lambda C_2 = \frac{1}{2} \\ -\frac{\lambda}{3}C_1 + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)C_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

, sistema que matricialmente también se puede expresar así:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & \lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1+\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La discusión del sistema anterior con respecto al parámetro λ nos conduciría al valor del determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas del problema:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & \lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1+\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\lambda^2}{3} = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{3} = 1 + \frac{\lambda^2}{12}.$$

Así pues, el determinante |M| no será nulo cualquiera que sea el valor del número real λ. Es decir, que el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas del sistema es 2, igual al número de incógnitas y tiene, por tanto, solución única.

Para obtener la solución resolvemos el sistema mediante la aplicación de la regla de Cramer (también podríamos hacerlo por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), puesto que se trata de un sistema heterogéneo, compatible y determinado, así:

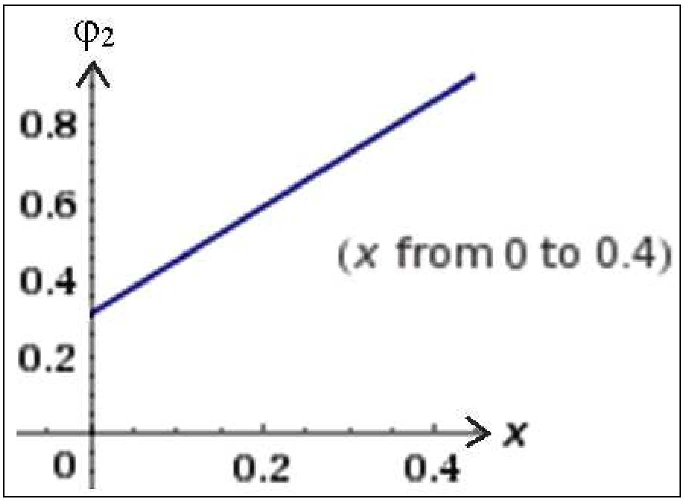
$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1/2 & \lambda \\ 1/3 & 1+\lambda/2 \end{vmatrix}}{1+\frac{\lambda^2}{12}} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{3}}{1+\frac{\lambda^2}{12}} = \dfrac{6-\lambda}{12+\lambda^2} \\[2ex] C_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda/2 & 1/2 \\ -\lambda/3 & 1/3 \end{vmatrix}}{1+\frac{\lambda^2}{12}} = \dfrac{\frac{1}{3}-\frac{\lambda}{6}+\frac{\lambda}{6}}{1+\frac{\lambda^2}{12}} = \dfrac{4}{12+\lambda^2} \end{cases}$$

Así pues, la solución buscada vendrá dada por:

$$\varphi_2(x) = x + \lambda C_1 x + \lambda C_2 = x + \frac{6\lambda-\lambda^2}{12+\lambda^2}x + \frac{4\lambda}{12+\lambda^2} = \frac{12+6\lambda}{12+\lambda^2}x + \frac{4\lambda}{12+\lambda^2} =$$

$= \dfrac{4\lambda + x(12+6\lambda)}{12+\lambda^2}$, que para $\lambda = 1$ ofrece la solución: $\varphi_2(x) = \dfrac{4+18x}{13}$,

cuya representación gráfica es una recta que puede verse seguidamente:



A continuación, se presenta la siguiente tabla de valores de las dos funciones económicas ya calculadas $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$:

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$
0	1	0’31
1	-593’79	1’69
2	-1.185’63	3’08
3	-1.769’44	4’46
4	-2.331’44	5’85
5	-2.834’14	7’23
6	-3.175’63	8’62
7	-3.078’94	10’00
8	-1.791’12	11’38
9	2.734’49	12’77
10	16.061’40	14’15

La $\varphi_1(x)$ empieza en ser positiva a partir del valor: $x \cong 8'53531$, mientras que la $\varphi_2(x)$ es siempre positiva y creciente, como puede comprobarse de la tabla y gráfico antecedentes.

De ello se deduce que sólo la $\varphi_2(x)$ será una función económica de oferta. Por último, la elasticidad–arco entre los puntos x = 3 y x = 8 será la siguiente:

$$e_0 = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{8-3}{8+3} \times \frac{11'38 + 4'46}{11'38 - 4'46} = \frac{5}{11} \times \frac{15'84}{6'92} = 1'04 > 1,$$

lo que significa que, aunque por poco, esta función de oferta resulta ser relativamente elástica, y ante una variación en el precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción mayor.

6. RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS DE ECUACIONES INTEGRO-DIFERENCIALES

Hemos visto la definición y el método de resolución de las ecuaciones integrales. Pues bien, las ecuaciones integro-diferenciales se denominan así porque constan de operaciones diferenciales e integrales de la función incógnita en su expresión.

Existen algunos métodos para su resolución, y entre los más empleados están: el de las transformadas de Laplace, los métodos numéricos (para computadora, las odes en *matlab*), los métodos lineales multipaso para ecuaciones de orden fraccionario en espacios de Banach, el método de Hartree-Fock-Roothaan (HFR) y los métodos analíticos de resolución manual.

Se denomina *ecuación integro-diferencial lineal* a la ecuación del tipo siguiente:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot y(x)+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x,t)\cdot y^{(m)}(t)\cdot dt=f(x). \quad (1)$$

Aquí $a_0(x)$, …, $a_n(x)$, $f(x)$, $K_m(x, t)$ ($\forall m = 0, 1, \ldots, s$) son funciones conocidas, e $y(x)$ es la función incógnita.

Al resolver las ecuaciones integro-diferenciales, a diferencia de lo que sucedía en el caso de las ecuaciones integrales, para la función incógnita $y(x)$ se plantean condiciones iniciales (PVI) del tipo:

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

Supongamos que en (1) los coeficientes $a_k(x)$ = cte. ($\forall$ k = 0, 1, …, n), y que el núcleo $K_m(x, t) = K_m(x - t)$ ($\forall$ m = 0, 1, …, s), es decir, que todas las K_m dependen solo de la diferencia $(x – t)$ de los argumentos. Sin detrimento de la generalidad, se puede considerar que $a_0 = 1$. Entonces la ecuación anterior (1) toma la forma siguiente:

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_ny(x)+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x-t)\cdot y^{(m)}(t)\cdot dt=f(x)\,(a_1,\ldots,a_n-\text{cte.}). \quad (3)$$

Supongamos, además, que las funciones $f(x)$ y $K_m(x)$ son funciones-objeto y que:

$$f(x) = L^{-1}[F(p)],\quad K_m(x)=L^{-1}[\widetilde{K}_m(p)]\ ,\quad (\forall\ m = 0, 1, \ldots, s).$$

Entonces la función $y(x)$ tendrá también su imagen según Laplace, así:

$$y(x) = L^{-1}[\phi(p)].$$

Apliquemos ahora a ambos miembros de la expresión (3) la transformación de Laplace. En virtud del teorema sobre la imagen de la derivada, se cumplirá que:

$$y^{(k)}(x) = L^{-1}[p^{(k)}\phi(p) - p^{k-1}y_0 - p^{k-2}y_0^{'} - \ldots - y_0^{(k-1)}] \quad (4)$$

$$(\forall\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Según el teorema del producto, se tiene que:

$$\int_0^x K_m(x-t)\cdot y^{(m)}(t)\cdot dt = L^{-1}[\widetilde{K}_m(p)\left[p^m\phi(p) - p^{m-1}y_0 - \ldots - y_0^{(m-1)}\right]] \qquad (5)$$

$$(\forall\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ s).$$

Por esto, la ecuación (3) se transforma en la siguiente:

$$\varphi(p)\left[p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n + \sum_{m=0}^{s}\widetilde{K}(p)p^m\right] = A(p),$$

donde A(p) es una función conocida de p.

De la igualdad anterior se halla $\phi(p)$ que es la solución operacional del problema (3)-(2). Por último, hallando la función-objeto para $\phi(p)$, se obtiene la solución o función generatriz Laplace y(x) de la ecuación integro-diferencial (3), que satisface a las condiciones iniciales del problema planteado (2).

A continuación se resolverán diversos ejercicios también aquí, en todos los casos, como hemos realizado con las ecuaciones integrales, por aplicación del método de las transformadas de Laplace, y será necesario disponer del dato o datos de la condición inicial, según el orden de la derivada que en ella figure.

A saber:

Ejemplo 1

Se trata de resolver:

a) la función económica de demanda y(x) a partir de la ecuación integro-diferencial siguiente:

$\frac{dy}{dx} + 6y(x) + 9\int_0^x y(\tau) d\tau = 1$, con la condición inicial: $y(0) = 0$, viniendo la variable *y* expresada en miles de euros/ud. y la *x* en miles de ud. de producto;

b) ¿para qué precio la demanda *x* será de 1.000, 2.000 y 3.000 ud. de producto?; y

c) ¿cuál será la elasticidad arco entre los tres puntos anteriores, así como la elasticidad puntual en el punto intermedio anterior?

Solución:

Respectivamente:

a) Se trata de una ecuación integro-diferencial de Volterra. Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación infinitesimal en cuestión, se tendrá que:

$$Sy_s - y(0) + 6y_s + 9\frac{y_s}{S} = \frac{1}{S}; y_s\left(S + 6 + \frac{9}{S}\right) = \frac{1}{S} \Rightarrow y_s = \frac{1}{S^2 + 6S + 9} = \frac{1}{(S+3)^2},$$

y la solución buscada, obtenida mediante la función generatriz Laplace, será la siguiente:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+3)^2}\right\} = x \cdot e^{-3x}}$$

Ello puede comprobarse sin más que tener en cuenta que:

$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x} = e^{-3x}(1 - 3x)$; luego substituyendo en la EID dada, deberá cumplirse que: $e^{-3x}(1 - 3x) + 6x \cdot e^{-3x} + 9\int_0^x \left(\tau \cdot e^{-3\tau}\right) \cdot d\tau = 1.$ (1)

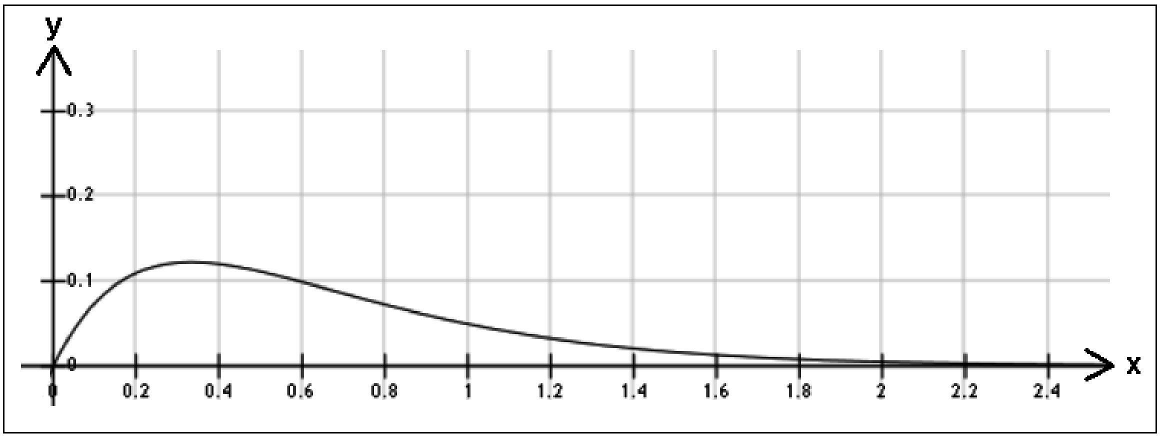
Veamos, al respecto, que:

$\int_0^x \tau \cdot e^{-3\tau} \cdot d\tau = \left[e^{-3\tau}\left(-\frac{\tau}{3} - \frac{1}{9}\right)\right]_0^x = \frac{1}{9} - \frac{e^{-3x}}{9}(3x + 1)$. Con lo que substituyendo en la anterior expresión (1) obtendremos:

$e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x} + 6x \cdot e^{-3x} + 1 - e^{-3x}(3x + 1) = 1$; y, en definitiva, se obtiene:

$$e^{-3x} + 3x \cdot e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x} - e^{-3x} = 0, \text{ c.s.q.d.}$$

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en el intervalo [0,2’4], a partir del cual se pierde el detalle visual):



Debe tenerse en cuenta que: $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{3x}}\right) =$

= (criterio de Stolz del cociente) =

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x - (x - 1)}{e^{3x} - e^{3(x-1)}} = = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{3x} - \frac{e^{3x}}{e^3}} = = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{3x}(1-1/e^3)} = 0,$ por lo que el eje OX constituye una asíntota horizontal de esta función.

b) Respectivamente, al tratarse de un bien normal, la demanda evolucionará a la baja a partir del máximo global del siguiente modo:

- Para x = 1.000 ud. $\Rightarrow$ y = $1/e^3$ = 0'049787 $\approx$ 49'79 € .
- Para x = 2.000 ud. $\Rightarrow$ y = $2/e^6$ = 0'004958 $\approx$ 4'96 € .
- Para x = 3.000 ud. $\Rightarrow$ y = $3/e^9$ = 0'000370 $\approx$ 0'37 € .

En cualquier caso, dicho máximo de la curva se alcanzará en el punto en que: $y' = dy/dx = e^{-3x} - 3x\cdot e^{-3x} = e^{-3x}(1-3x) = 0$, por lo que:

x = 1/3 (333 ud.) e y = 1/(3e) = 0'1226264 (122'63 €/ud.).

c) Se trata de calcular la elasticidad arco entre los puntos: (1.000, 49'79) y (3.000, 0'37), con lo que:

$$e_a = \frac{q_2 - q_1}{q_2 + q_1} \times \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} = \frac{3.000 - 1.000}{3.000 + 1.000} \times \frac{0'37 + 49'79}{0'37 - 49'79} =$$

$$= (0'5) \times \frac{50'16}{-49'42} = -0'51 \in (-1, 0),$$

por lo que se trata de una función de demanda relativamente inelástica.

Por otra parte, la elasticidad puntual en (2.000, 4’96) será:

$y = x \cdot e^{-3x} = \frac{x}{e^{3x}}$; $\frac{dy}{dx} = e^{-3x}$ (1-3x), y también: $\frac{dx}{dy} = \frac{e^{3x}}{1-3x}$. Así pues:

$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{e^6}{1-6} \times \frac{0'004958}{2} = -0'20 \in$ (-1,0), por lo que se trata de una demanda relativamente inelástica.

A la misma conclusión hubiéramos llegado considerando que:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{e^{3x}}{1-3x} \times \frac{x \cdot e^{-3x}}{x} = \frac{1}{1-3x} = -\frac{1}{5} = -0'20 \text{, c.s.q.d.}$$

Ejemplo 2

Se trata de resolver la función económica y(x) a partir de la ecuación integro-diferencial siguiente, con validez $\forall$ x $\in$ (0,2):

$\frac{dy}{dx} = 1 - \sin x - \int_0^x y(\tau) d\tau$, con la condición inicial: $y(0) = 0$. Se pide: a) ¿a qué valor de y corresponderá x = 1’5?, b) hallar las elasticidades de la función y de la variable explicativa en este punto.

Solución:

a) Se trata de una ecuación integro-diferencial de Volterra. Tomando las transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación en cuestión, se tendrá que:

$$Sy_s - y(0) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} - \frac{y_s}{S};$$

$$y_s\left(S + \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{S} - \frac{1}{S^2+1} \Rightarrow y_s = \frac{1}{S^2+1} - \frac{S}{(S^2+1)^2} = \frac{S^2 - S + 1}{(S^2+1)^2},$$

y la solución buscada, obtenida mediante la función generatriz Laplace, será:

$$\boxed{y(x) = L^{-1}[\frac{1}{S^2+1}] - L^{-1}[\frac{S}{(S^2+1)^2}] = \sin x - \frac{1}{2} x \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \frac{x}{2})}.$$

No resulta difícil comprobar este resultado teniendo en cuenta que:

$y'(x) = \cos x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{\sin x}{2}$, luego substituyendo en la EID dada, deberá cumplirse que:

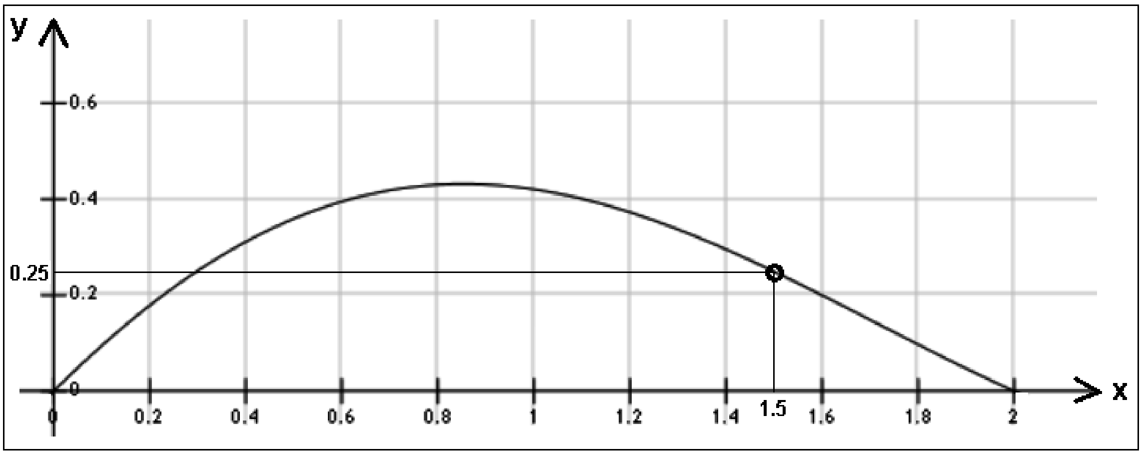
$$\cos x\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{\sin x}{2}=1-\sin x-\int_0^x \sin\tau\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\cdot d\tau \quad \text{(1). En efecto:}$$

$\int_0^x \sin\tau\left(1-\frac{\tau}{2}\right)\cdot d\tau=\left[\frac{t\cdot\cos t}{2}-\frac{\sin t}{2}-\cos t\right]_0^x=\frac{1}{2}[(x-2)\cos x-\sin x+2]$. Con lo que substituyendo en la expresión anterior (1) se obtiene que:

$$\cos x-\frac{x\cdot\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}=1-\sin x-\frac{(x-2)\cdot\cos x}{2}+\frac{\sin x}{2}-1=$$

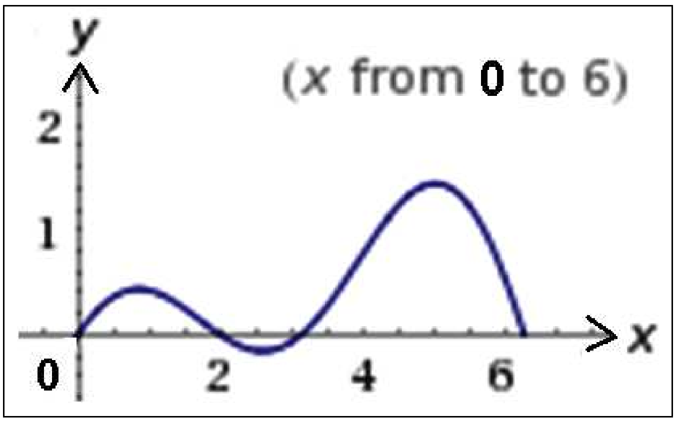
$$=-\sin x-\frac{x\cdot\cos x-2\cos x}{2}+\frac{\sin x}{2}=-\frac{\sin x}{2}-\frac{x\cdot\cos x}{2}+\cos x\text{, c. s. q. d.}$$

La representación gráfica de esta solución en el primer cuadrante del círculo, se expone a continuación (con detalle suficiente en el intervalo [0,2]):



Al valor de x = 1’5 corresponde y = 0’25 · sin 1’5 ≈ 0’25.

A partir del valor x = 2 se pierde el significado económico, tal como indica el enunciado del problema, cuestión que puede constatarse en el siguiente gráfico:



b) Por otra parte, se tendrá que: $\frac{dy}{dx} = \cos x\,(1\text{-}\frac{x}{2}) - \frac{\sin x}{2}$, y entonces:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x\,(1\text{-}\frac{x}{2}) - \frac{\sin x}{2}}$$

, o también puede expresarse así:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2}{\sin x + (x-2)\cos x}$$

. Se tendrán, en definitiva, los siguientes valores:

- Elasticidad puntual de la variable explicativa (independiente):

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{\sin x\,(1\text{-}\frac{x}{2})}{x \cdot \cos x\,(1\text{-}\frac{x}{2}) - \frac{x \cdot \sin x}{2}} = \frac{\sin 1'5\,(1\text{-}\frac{1'5}{2})}{1'5 \cdot \cos 1'5\,(1\text{-}\frac{1'5}{2}) - \frac{1'5 \cdot \sin 1'5}{2}} =$$

$= \frac{0'25}{0'0265 - 0'75} = -0'35 \in$ (-1,0), por lo que se trata probablemente de una función de demanda relativamente inelástica.

- Elasticidad puntual de la variable funcional (dependiente):

$$e_p = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} = -\frac{1}{0'35} = -2'86\,.$$

Ejemplo 3

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$\begin{cases} D \rightarrow 5y = 20 - 4x \\ O \rightarrow y' + 2y - 3\int_0^x y \cdot dx = 5 + 5x\,,\ \forall\ y(0) = 2. \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien expresada en miles de unidades diarias. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio, y c) de estimar los ingresos brutos anuales del vendedor (considerando un calendario laboral de 240 días/año).

Solución:

a) Evidentemente, la función de demanda es una recta decreciente en el primer cuadrante del círculo desde el punto (0,4) al (5,0), mientras que la función de oferta viene dada por una ecuación integro-diferencial de Volterra, que resolveremos tomando transformadas de Laplace en ambos miembros de la ecuación, con lo que:

$$L[y'] + 2L[y] - 3L\left[\int_0^x y \cdot dx\right] = L[5] + 5L[x].$$

Obsérvese que ahora *x* es variable independiente, razón por la cual: $L[x] = \frac{1}{s^2}$, y la ecuación anterior, haciendo: L[y] = Y(s), se convierte en: $s\cdot Y(s) - 2 + 2\cdot Y(s) - 3\frac{Y(s)}{s} = \frac{5}{s} + \frac{5}{s^2}$, o también puede expresarse del siguiente modo:

$$Y(s)(s + 2 - 3/s) = \frac{5}{s} + \frac{5}{s^2} + 2 = \frac{2s^2 + 5s + 5}{s^2};\ Y(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{s(s^2 + 2s - 3)}.$$

Las raíces del polinomio del denominador son todas ellas reales y simples, de valores: 0, 1 y -3, puesto que de: $s^2 + 2s - 3 = 0$, se tiene que: $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = (1,-3)$. Ello nos permite la aplicación del método de las fracciones parciales y coeficientes indeterminados del siguiente modo:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3} = \frac{2s^2 + 5s + 5}{s(s-1)(s+3)}, \text{ esto es:}$$

$$A(s-1)(s+3) + B\cdot s(s+3) + C\cdot s(s-1) = 2s^2 + 5s + 5;$$

$$A(s^2 + 2s - 3) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 - s) = 2s^2 + 5s + 5;$$

$(A + B + C)s^2 + (2A + 3B - C)s - 3A = 2s^2 + 5s + 5$; y resulta el sistema compatible y determinado siguiente:

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ 2A + 3B - C = 5 \\ -3A = 5 \end{cases}$$

, del que se obtienen los siguientes valores: A = -5/3, B = 3 y C = 2/3, con lo que la función generatriz Laplace será:

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{-5/3}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{3}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2/3}{s+3}\right\} = -\frac{5}{3} + 3e^{x} + \frac{2}{3}e^{-3x},$$

que constituye la I.P. buscada. Ello puede comprobarse también teniendo en cuenta que: $y' = \frac{dy}{dx} = 3e^{x} - 2 \cdot e^{-3x}$, luego substituyendo en la EID dada deberá cumplirse que:

$$3e^{x} - 2 \cdot e^{-3x} - \frac{10}{3} + 6e^{x} + \frac{4}{3}e^{-3x} - 3\int_0^x \left(-\frac{5}{3} + 3e^{x} + \frac{2}{3}e^{-3x}\right)dx = 5 + 5x \,. \quad (1)$$

Veamos que:

$$\int_0^x \left(-\frac{5}{3} + 3 \cdot e^{x} + \frac{2}{3}e^{-3x}\right)dx = \left[-\frac{5x}{3} - \frac{2e^{-3x}}{9} + 3e^{x}\right]_0^x = -\frac{5}{9}(3x+5) - \frac{2e^{-3x}}{9} + 3e^{x},$$

con lo que substituyendo en la expresión anterior (1) se tendrá que:

$$9e^{x} - \frac{2}{3}e^{-3x} - \frac{10}{3} + \frac{15}{9}(3x+5) + \frac{6e^{-3x}}{9} - 9e^{x} = 5 + 5x\text{; y entonces:}$$

$$-\frac{10}{3} + \frac{5}{3}(3x+5) = -\frac{10}{3} + 5x + \frac{25}{3} = \frac{15}{3} + 5x = 5 + 5x\text{, c. s. q. d.}$$

Por otra parte, de la expresión dada de la EID deberá cumplirse que:

$$\begin{cases} y'(0) = 3 - 2 = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$, con lo que también: 1 + 4 = 5, c. s. q. d.

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$\frac{20 - 4x}{5} = -\frac{5}{3} + 3e^{x} + \frac{2}{3}e^{-3x}$, de donde se deduce que la única raíz positiva es: x = 0’532.

En este caso, y = $\frac{20 - 4 \cdot 0'532}{5} = 3'57$, o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 3’57 €/ud. y una cantidad aproximada de 532 ud./día de producto.

Por otra parte, se presume también en el caso de la función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x $\to \infty$ también sucede que y → ∞. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9e^x + 2e^{-3x} - 5}{3x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución, se expone a continuación (con detalle suficiente en las proximidades del origen de coordenadas):

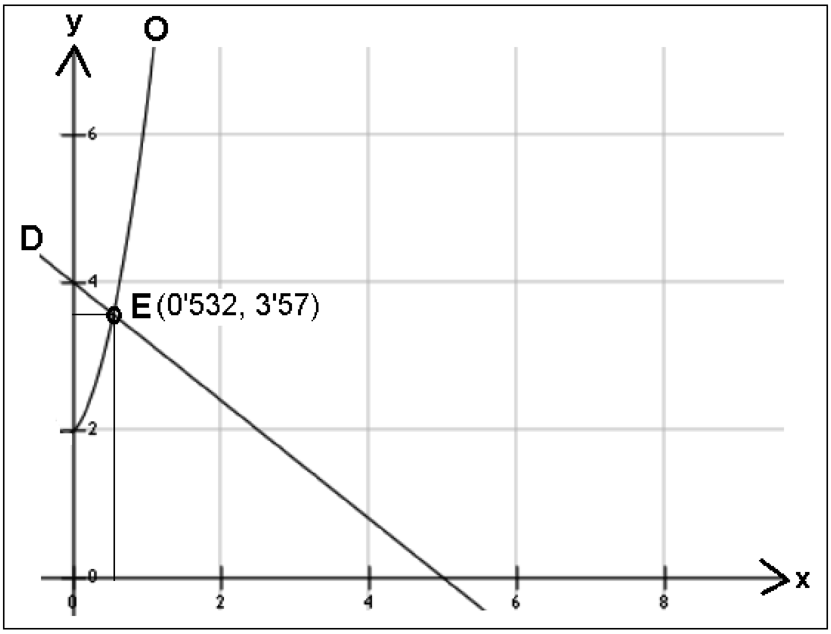


FIG. 8.7. Oferta, demanda y punto de equilibrio (V).

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado anteriormente E(0'532, 3'57), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D ⇒ y = (20 – 4x)/5; dy/dx = -4/5; $\frac{dx}{dy} = -\frac{5}{4}$. Y la elasticidad de la función de demanda será:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{5}{4} \times \frac{20-4x}{5x} = \frac{4x-20}{4x} = -8'40 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica. Del mismo modo:

O ⇒ $y = -\frac{5}{3} + 3e^x + \frac{2}{3}e^{-3x}$; dy/dx = $3e^x - 2e^{-3x}$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3e^x - 2e^{-3x}}$. Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será la siguiente:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{3e^x - 2e^{-3x}} \times \frac{y}{x} = \frac{9e^x + 2e^{-3x} - 5}{9xe^x - 6xe^{-3x}} = 1'43 > 1.$$

En este caso, la función en estudio resulta relativamente elástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada del bien en cuestión disminuye en una proporción mayor.

c) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del producto en cuestión vendrán dados por:

$$I = p \times q = 3'57 \text{ €/ud.} \times 532 \text{ ud./día} \times 240 \text{ días/año} = 455.817'60 \text{ €/año.}$$

Ejemplo 4

Después de efectuarse el correspondiente estudio, se concluye que las funciones de oferta y demanda de libros infantiles, en un país determinado, son las que se exponen a continuación. Con ello, se pide: a) Resolver la ecuación integro-diferencial de oferta de libro infantil siguiente: $y''(x) + y(x) + \int_0^x e^{2(x-t)} y'(t) \cdot dt - \int_0^x (x-t) \cdot y(t) \cdot dt = e^{2x}$, con las condiciones iniciales: y(0) = y'(0) = 0. b) Hallar su elasticidad para una cantidad de 2.000 ud./día del producto (*x* se expresa en miles de ud./día e *y* en €/ud.). c) Hallar el equilibrio del mercado para la siguiente función de demanda de dicho género: 4y = 60 – 15x, con la correspondiente representación gráfica. d) Estimar los ingresos brutos anuales de un editor-librero especializado en literatura infantil, considerando un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

a) Se trata de una ecuación integro-diferencial de Volterra. Sea: $y(x) = L^{-1}[\phi(p)]$. En virtud de los datos del problema planteado, se tiene que:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{d}{dx}(L^{-1}[\phi(p)]) \\ y''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}(L^{-1}[\phi(p)]) \end{cases}$$

Por esto, luego de aplicar la transformación de Laplace, la ecuación integro-diferencial propuesta adopta la forma siguiente:

$$p^2\phi(p) + \frac{p}{p-2}\phi(p) = \frac{1}{p-2} \text{ , o bien: } \phi(p)\frac{p(p-1)^2}{p-2} = \frac{1}{p-2} \text{ .}$$

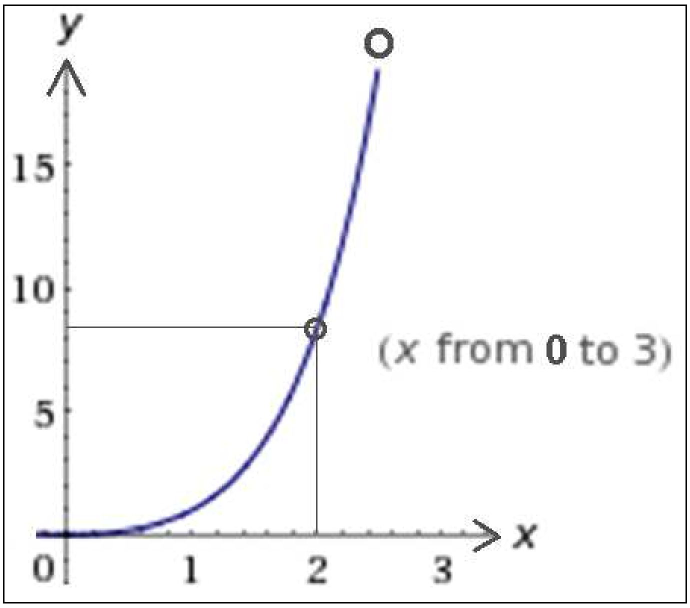
De aquí se halla que la función generatriz Laplace buscada es la siguiente:

$$y(x) = L^{-1}[\phi(p)] = L^{-1}[\frac{1}{p(p-1)^2}] = x{\cdot}e^x - e^x + 1.$$

Por consecuencia, la solución y(x) de la ecuación integro-diferencial propuesta, que satisface a las condiciones iniciales dadas, se determina por la igualdad:

$$y(x) = x\cdot e^x – e^x + 1 = e^x(x\text{-}1) + 1,$$

cuya representación gráfica viene dada por:



Por otra parte, se presume también en el caso de esta función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(x-1)+1}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) Cuando x = 2.000 ud./día, se tendrá un precio medio de: $y = e^2(2\text{-}1) + 1 = 8'39$ €/ud., o sea, se trata del punto de coordenadas (2'00, 8'39). La elasticidad pedida será, pues:

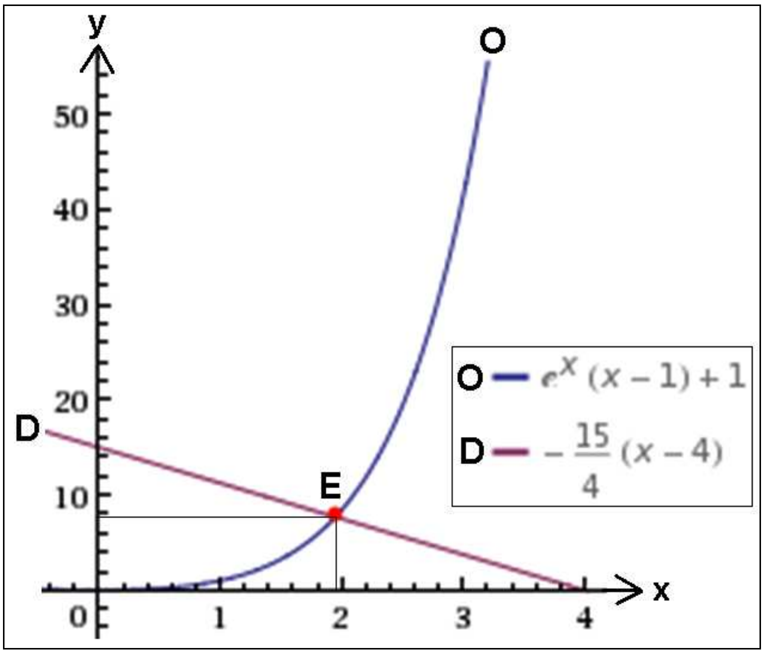
$dy/dx = e^x(x\text{-}1) + e^x = x\cdot e^x$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x{\cdot}e^x}$; y la elasticidad buscada de esta función será: $e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{x{\cdot}e^x} \times \frac{y}{x} = \frac{y}{x^2{\cdot}e^x} = \frac{8'39}{4{\cdot}e^2} = 0'28 < 1$, por lo que la oferta en este punto resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada disminuye en una proporción menor.

c) El equilibrio del mercado tendrá lugar cuando O = D, o sea:

$$e^x(x-1) + 1 = \frac{60-15x}{4}$$, lo que sucede para los valores:

x = 1'95059 ≈ 1'95 (1.951 ud./día) e y (precio medio) ≈ 7'69 €/ud.,

con la siguiente representación gráfica:



d) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del editor-librero vendrán dados por:

$$I = p \times q = 7'69\ €/ud. \times 1.951\ ud./día \times 240\ días/año =$$
$$= 3.600.765'60\ €/año.$$

Ejemplo 5

En un mercado en régimen supuesto de competencia perfecta para un bien normal, se tienen, una vez realizado el pertinente análisis econométrico, las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$\begin{cases} D \rightarrow y(x) = e^{-x} + \int_x^{\infty} y(t)\cdot dt \\ O \rightarrow y''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\cdot y'(t)\cdot dt = e^{2x},\ \forall\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

, siendo *y* el precio (p) expresado en euros/ud. y *x* la cantidad (q) del bien en miles de unidades diarias. Se trata: a) de estudiar el equilibrio del mercado, b) de calcular la elasticidad de ambas funciones económicas en el punto de equilibrio, y c) de estimar los ingresos brutos anuales del productor (considerando un calendario laboral de 240 días/año).

Solución:

a) La función dada de demanda es, evidentemente, una ecuación integral inhomogénea de Volterra de 2ª especie, con $\lambda = 1$, cuya resolución ofrece la función: $y(x) = e^{-x}(1-x)$, mientras que la función de oferta constituye una ecuación integro-diferencial de Volterra resoluble por aplicación del método de las transformadas de Laplace, que ofrece, al cabo, como solución definitiva, la siguiente función generatriz: $y(x) = e^x - 1$, como puede comprobarse, en ambos casos, seguidamente.

En efecto, por lo que se refiere a la función de demanda, veamos que:

$$e^{-x}(1-x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x} + \int_x^{\infty} e^{-t}(1-t)\cdot dt \text{, o sea:}$$

$$-x\cdot e^{-x} = \int_x^{\infty} e^{-t}(1-t)\cdot dt = \left[t\cdot e^{-t}\right]_x^{\infty} = -x\cdot e^{-x} \text{, c.s.q.d.}$$

Por lo que se refiere a la función de oferta, sucede que:

$y(x) = e^x - 1$; $y'(x) = e^x$; $y''(x) = e^x$. Con ello, substituyendo en la ecuación dada, se tendrá que:

$e^x + \int_0^x e^{2(x-t)}\cdot e^t\cdot dt = e^{2x}$, por lo que debe demostrarse la siguiente igualdad:

$\int_0^x e^{2x-2t}\cdot e^t\cdot dt = e^{2x} - e^x$, o lo que es lo mismo, que se cumpla que:

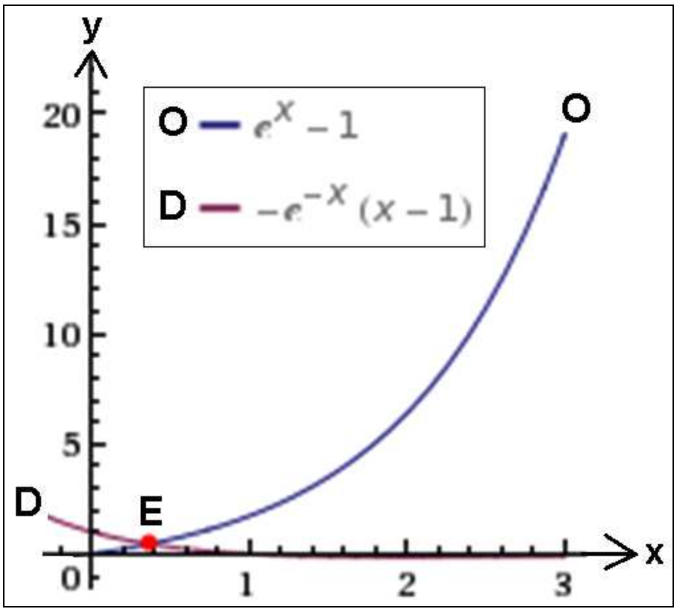
$\int_0^x e^{2x-t}\cdot dt = e^x(e^x - 1)$. Veámoslo, puesto que, efectivamente:

$$\int_0^x e^{2x-t}\cdot dt = \left[-e^{2x-t}\right]_0^x = e^x(e^x - 1)\text{, c.s.q.d.}$$

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O): $e^{-x}(1-x) = e^x - 1$, de donde se deduce que la raíz es: x = 0'365117 (365 ud.). En este caso, $y = e^{0'365117} - 1 = 0'44$ € , o sea, el equilibrio tiene lugar para un precio de 0'44 €/ud. y una cantidad aproximada de 365 ud./día de producto.

Por otra parte, se presume también en el caso de esta función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica de esta solución se expone a continuación:



, y aún con mayor detalle en las proximidades del origen de coordenadas se tendrá que:

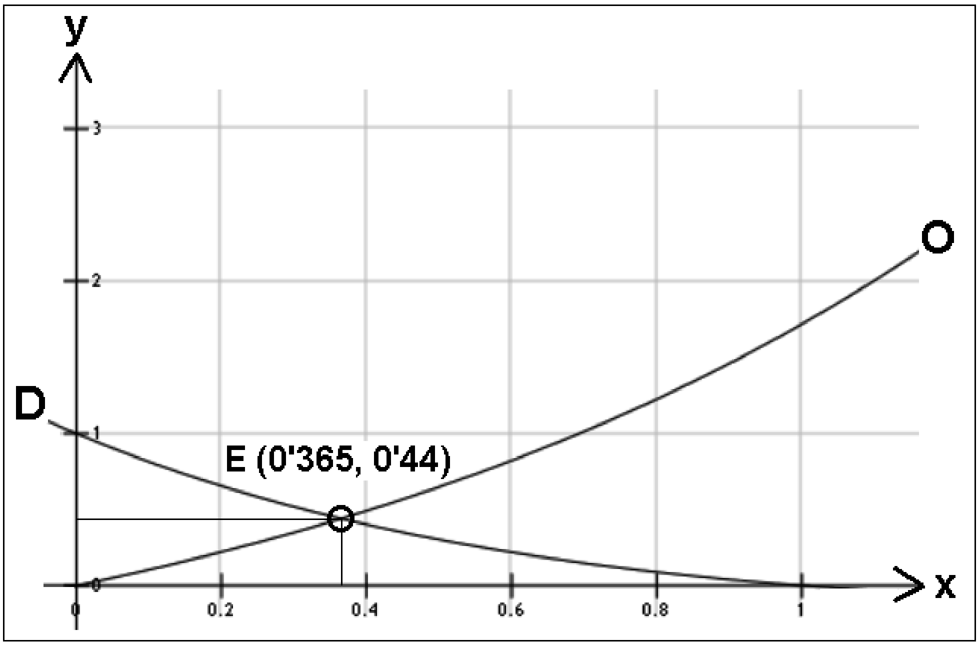


FIG. 8.8. Oferta, demanda y punto de equilibrio (VI).

b) Así pues, en el punto de equilibrio del mercado hallado anteriormente E(0'365, 0'44), se tendrán las siguientes elasticidades puntuales de ambas funciones económicas:

D $\Rightarrow$ y = $e^{-x}(1-x)$; dy/dx = $e^{-x}(x-2)$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^{-x}(x-2)}$. Y la elasticidad de la función de demanda será:

$$e_d = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{1-0'365}{0'365^2 - 2 \cdot 0'365} = -1'06 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica. Del mismo modo, por lo que se refiere a la oferta, se tendrá que:

O $\Rightarrow$ $y = e^x - 1$; $dy/dx = e^x$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x}$. Y entonces, la elasticidad buscada de la oferta será la siguiente:

$$e_o = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{1}{e^x} \times \frac{y}{x} = \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x} = \frac{e^{0'365} - 1}{0'365 \cdot e^{0'365}} = 0'84 < 1.$$

En este caso, la función de oferta en estudio resulta relativamente inelástica, y ante una variación del precio la cantidad ofertada del bien en cuestión disminuye en una proporción menor.

c) Así mismo, los ingresos brutos anuales estimados del vendedor del producto en cuestión vendrán dados por:

I = p $\times$ q = 0’44 €/ud. $\times$ 365 ud./día $\times$ 240 días/año = 38.544’00 €/año.

Ejemplo 6

Los resultados contables de una empresa, expresados en millones de euros, vienen dados en relación al tiempo (años) por la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} + x(t) - \int_0^t x(r)\sin(t-r)dr = -\sin t,\ \forall x(0) = 1.$$

Se pide: a) Analizar la trayectoria temporal de dichos resultados en el primer quinquenio de su actividad económica, con la correspondiente representación gráfica. b) Si en el primer ejercicio económico se vendieron 357.000 ud. de producto a una media de 2’10 €/ud., averiguar los gastos del ejercicio y el beneficio neto, considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

a) La anterior ecuación integro-diferencial de Volterra también se puede resolver utilizando las propiedades de la transformada de Laplace. Como sucede en algún ejemplo anterior, reconocemos que la integral de nuestra ecuación representa una convolución, esta vez $(x*\text{sen})(t)$. Por tanto, si tomamos la transformada de Laplace de cada lado de la ecuación, obtenemos que:

$$L[dx/dt] + L[x(t)] - L[(x*\sin)(t)] = L[-\sin t],$$

o bien utilizando la fórmula correspondiente de la tabla del capítulo anterior y el teorema de convolución, se tendrá que:

$$[s\cdot L[x(t)] - x(0)] + L[x(t)] - L[x(t)] \cdot L[\sin t] = -\frac{1}{s^2+1} \;,$$

que se convierte en: $[s\cdot L[x(t)] - 1] + L[x(t)] - L[x(t)] \cdot \frac{1}{s^2+1} = -\frac{1}{s^2+1}$.

Tras simplificar, se obtiene que:

$$\left(\frac{s^3+s^2+s}{s^2+1}\right)\cdot L[x(t)] = \frac{s^2}{s^2+1} \;,$$

y por tanto, concluimos con: $L[x(t)] = \frac{s^2}{s^3+s^2+s} = \frac{s}{s^2+s+1}$.

El uso ingenioso de algunas operaciones algebraicas nos mostrará, a su vez, que:

$$\frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{s-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(s-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2};$$

y si utilizamos las fórmulas correspondientes para invertir esta transformada, hallamos que la función generatriz Laplace, que representa la trayectoria temporal buscada, es la siguiente:

$$x(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right).$$

La representación gráfica de los resultados contables correspondientes al primer lustro de actividad económica de esta empresa puede verse a continuación:

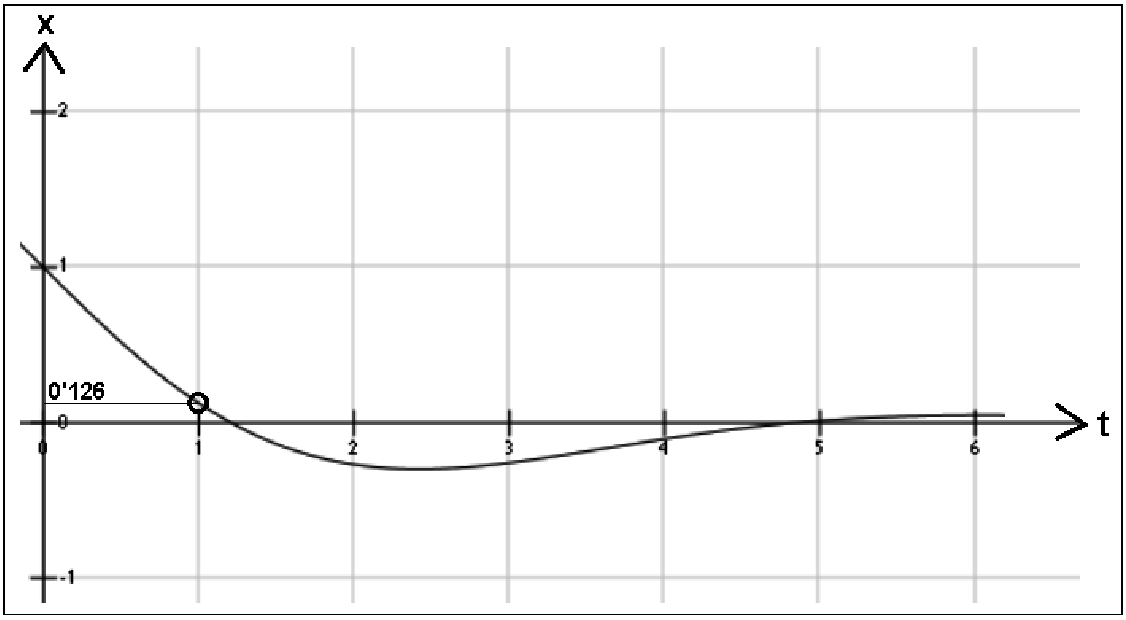


FIG. 8.9. Trayectoria temporal de los resultados contables (II).

La anulación de los resultados contables en el primer lustro o quinquenio tendrá lugar para x(t) = 0, lo que se corresponde con los puntos:

$$t \approx 2.3094\,(3.14159\,n - 1.0472)\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

, o sea, para t_1 = 1'2622 años y t_2 = 4'8368 años, como puede apreciarse en la figura anterior, en cuyo intervalo temporal $[t_1,t_2]$ dichos resultados serán negativos.

Para comprobar el resultado en la propia ecuación integral dada, veamos que la derivada *dx/dt* es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}{e^{t/2}} - \frac{\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}\ e^{t/2}}\right) = -\frac{1}{3}\,e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ t}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ t}{2}\right)\right)$$

, y efectivamente, substituyendo los valores obtenidos para el instante en que t = 0 en dicha expresión del enunciado del problema planteado, se obtiene que:

-1 + 1 – 0 = -sin 0 = 0, c.s.q.d.

b) Los ingresos del ejercicio fueron de:

I = p × q = 2'10 €/ud. × 357.000 ud. = 749.700'00 € , y, consecuentemente, los resultados contables brutos (antes de impuestos) serán de:

$$\pi = x(1) = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{\sqrt{3e}} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}) =$$

$$= 0'6065306 \times 0'6478593 - 0'3501806 \times 0'7617599 = 0'1261929 =$$
$$= 126.192'90 \text{ €} .$$

Con ello, los gastos totales serán:

$$G = I - \pi = 749.700'00 - 126.192'90 = 623.507'10 \text{ €} ,$$

y el beneficio neto obtenido será, al final del primer ejercicio, del orden de:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 126.192'90 = 94.644'68 \text{ €} .$$

Ejemplo 7

Los resultados contables brutos de dos empresas competidoras A y B, expresados en millones de euros, vienen dados en relación al tiempo (décadas) por las ecuaciones respectivas:

$$\begin{cases} A \to f(t) + \int_0^t (t - \nu) \cdot f(\nu) \cdot d\nu = t, \\ B \to y'(t) = 1 - \int_0^t y(t - \nu) \cdot e^{-2\nu} \cdot d\nu \end{cases}$$

Se pide: a) Analizar la trayectoria temporal de dichos resultados en las dos primeras décadas de su actividad económica, con la correspondiente representación gráfica. b) Si en el decimosexto ejercicio económico la primera empresa vendió 3.500.000 ud. de producto a una media de 2'50 €/ud., y la segunda empresa 2.900.000 ud. a una media de 2'60 €/ud., se pide averiguar los gastos totales de aquel ejercicio para cada empresa, así como el beneficio neto considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

a) Evidentemente, se trata de resolver una ecuación integral de Volterra (inhomogénea, de 2ª especie, con λ = -1) en el caso de la primera empresa y otra ecuación integro-diferencial de Volterra en el caso de la segunda. Para ello, emplearemos siempre el método de las transformadas de Laplace. En el primer caso, tomando las transformadas y recordando la definición dada de "convolución de funciones", se obtiene que:

$$L[f(t)]+L[t*f(t)]=L[t]\text{, con lo que: } L[f(t)]+L[t]L[f(t)]=L[t].$$

Entonces, si F(s) = L[f(t)] se tendrá que:

$$F(s)+\frac{1}{s^2}F(s)=\frac{1}{s^2}; \quad F(s)\left(\frac{1+s^2}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2};$$

de donde resultará:

$$F(s)=\frac{1}{1+s^2}; \quad y_1(t)=f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right]=\sin t.$$

En el caso de la segunda empresa, veamos que la expresión integral correspondiente es la convolución de las funciones:

$$y(t)*e^{-2t}=\int_0^t y(t-\nu)\cdot e^{-2\nu}d\nu.$$

Tomando transformadas laplacianas en ambos miembros de la ecuación inicial, resultará que:

$$L[y'(t)]=L[1]-L\left[y(t)*e^{-2t}\right].$$

Aplicando el teorema de convolución, si Y(s) = L[y(t)], se tiene lo siguiente:

$$sL[y(t)] - y(0) = L[1] - L[y(t)] \cdot L[e^{-2t}],$$

o lo que es lo mismo:

$$sY(s)-1=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\cdot Y(s)\text{, de donde:}$$

$$sY(s)+\frac{1}{s+2}y(s)=\frac{1+s}{s}=y(s)\left(s+\frac{1}{s+2}\right)=y(s)\left(\frac{s^2+2s+1}{s+2}\right);$$

$$Y(s)=\frac{1+s}{s}:\frac{s^2+2s+1}{s+2}=\frac{s^2+3s+2}{s(s^2+2s+1)}=\frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+1)}.$$

De lo que se concluye que: $Y(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$.

Descomponiendo el quebrado anterior en fracciones simples se obtiene que:

$$\frac{s+2}{s(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}; \quad A(s+1) + Bs = s + 2.$$

Identificando coeficientes indeterminados, resulta que: A = 2, B = 1, o sea:

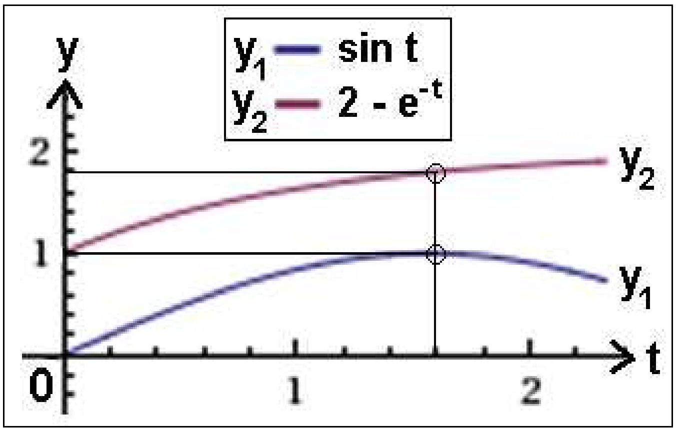
$$\frac{s+2}{s(s+1)}=\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}.$$

Tomando ahora transformadas inversas se tiene la siguiente función generatriz Laplace:

$$y_2(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]=2-e^{-t},$$

que tendrá una asíntota horizontal de ecuación: $y_2 = 2$, con lo que 2.000.000’00 € representará, en cualquier caso, el importe máximo alcanzable de sus resultados contables brutos.

La representación gráfica de las trayectorias temporales de los resultados contables de ambas empresas relacionadas puede verse a continuación:



b) Para cada empresa se tendrá, respectivamente, lo siguiente:

- *Empresa A*:

Los ingresos del ejercicio decimosexto serán:

$$I_A = p_1 \times q_1 = 2'50 \text{ €/ud.} \times 3.500.000 \text{ ud.} = 8.750.000'00 \text{ €},$$

y, consecuentemente, los resultados contables brutos (antes de impuestos) serán de:

$$\pi_{16} = y_1(16) = \sin 1'6 = 0'9995736 \approx 999.573'60 \text{ €}.$$

Con ello, los gastos totales serán:

$$G_A = I_A - \pi_A = 8.750.000'00 - 999.573'60 = 7.750.426'40 \text{ €} ,$$

y el beneficio neto obtenido será, en aquel ejercicio económico, del orden de:

$$B_A = 0'75 \times \pi_A = 0'75 \times 999.573'60 = 749.680'20 \text{ €} .$$

- *Empresa B*:

Los ingresos del ejercicio decimosexto serán:

$$I_B = p_2 \times q_2 = 2'60 \text{ €/ud.} \times 2.900.000 \text{ ud.} = 7.540.000'00 \text{ €} ,$$

y, consecuentemente, los resultados contables brutos (antes de impuestos) serán de:

$$\pi_{16} = y_2(16) = 2 - e^{-1'6} = 1'7981035 \equiv 1.798.103'50 \text{ €} .$$

Con ello, los gastos totales serán:

$$G_B = I_B - \pi_B = 7.540.000'00 - 1.798.103'50 = 5.741.896'50 \text{ €} ,$$

y el beneficio neto obtenido será, en aquel ejercicio económico, del orden de:

$$B_B = 0'75 \times \pi_B = 0'75 \times 1.798.103'50 = 1.348.577'60 \text{ €} .$$

De ello se deduce que el beneficio anual neto, en el ejercicio económico relacionado, resulta notoriamente mayor en la empresa B que el de la empresa A, concretamente 598.897'40 € más.

Ejemplo 8

Los resultados contables brutos *y* de tres empresas competidoras A, B y C, expresados en millones de euros, vienen dados en relación al tiempo (décadas) por las ecuaciones respectivas siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{l}
A \rightarrow f'(t) = 2t - \dfrac{t^5}{4} - t^3 + \displaystyle\int_0^t st \cdot f(s) \cdot ds \\
B \rightarrow f(t) = 1 - t - \dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{t^3}{2} + \displaystyle\int_0^t \dfrac{1+t}{1+s} \cdot f(s) \cdot ds \\
C \rightarrow f(t) = 1 + t^2 - t^3 + \displaystyle\int_0^t \dfrac{2st}{1+s^2} \cdot f(s) \cdot ds
\end{array}}$$

Se pide: a) Analizar la trayectoria temporal de dichos resultados en las dos primeras décadas de su actividad económica, con la correspondiente representación gráfica. b) Si en el decimocuarto ejercicio económico la primera empresa vendió 3.200.000 ud. de producto a una media de 2'50 €/ud., la segunda empresa 2.100.000 ud. a una media de 2'60 €/ud., y la tercera empresa 2.550.000 ud. de producto a una media de 2'40 €/ud., se pide averiguar los gastos totales de aquel ejercicio para cada empresa, así como el beneficio neto considerando una fiscalidad del 25%.

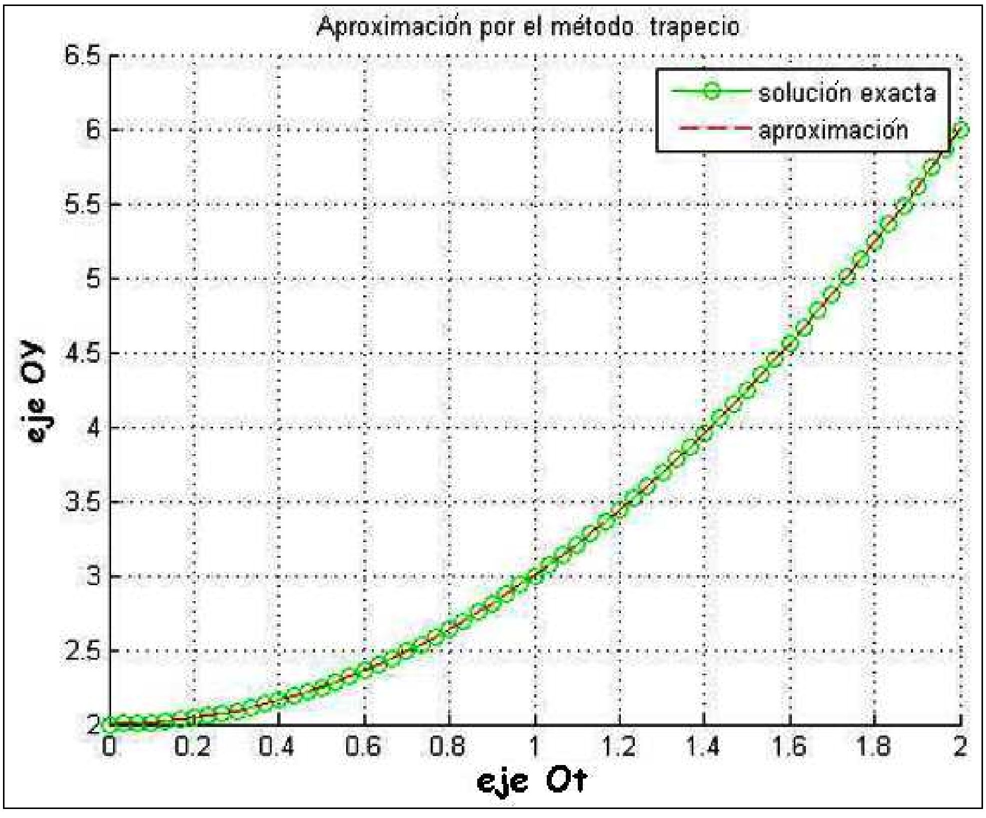
Solución:

a) Evidentemente, se trata de resolver una ecuación integro-diferencial de Volterra en el caso de la primera empresa y sendas ecuaciones integrales inhomogéneas de Volterra de 2ª especie o clase, con $\lambda = 1$, en los otros dos casos.

En el primer caso, se sabe que la solución exacta es: $f(t) = t^2 + 2$. En efecto, substituyendo en la ecuación inicial dada, podemos comprobar que (nótese que: $f'(t) = 2t$):

$$\frac{t^5}{4} + t^3 = \int_0^t s \cdot t \cdot (s^2 + 2) ds = t \int_0^t (s^3 + 2s) \cdot ds = t \cdot \left[\frac{s^4}{4} + s^2 \right]_0^t = \frac{t^5}{4} + t^3 \text{, c.s.q.d.}$$

, a la que corresponde la siguiente representación gráfica:



que corresponde también a la siguiente tabla:

t(i)	h=0.04	h=0.02
0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.16000000	0.01119998	0.00599999
0.32000000	0.02399937	0.01239980
0.48000000	0.03679622	0.01879888
0.64000000	0.04958695	0.02519629
0.80000000	0.06236631	0.03159067
0.96000000	0.07512713	0.03798015
1.12000000	0.08785981	0.04436225
1.28000000	0.10055133	0.05073358
1.44000000	0.11318350	0.05708941
1.60000000	0.12573002	0.06342283
1.76000000	0.13815152	0.06972349
1.92000000	0.15038725	0.07597538
2.00000000	0.15640737	0.07907561

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t $\to \infty$ también sucede que y $\to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2+2}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

En el segundo caso, se sabe que la solución exacta es: f(t) = 1 - t^2. El núcleo de la ecuación es $k(t,s,y) = \frac{1+t}{1+s}$, y es inmediato verificar que este núcleo es Lipschitz en la tercera variable y que k_y(t, s, y) satisface la misma condición en la primera variable desde que: $0 \le s \le t \le T$.

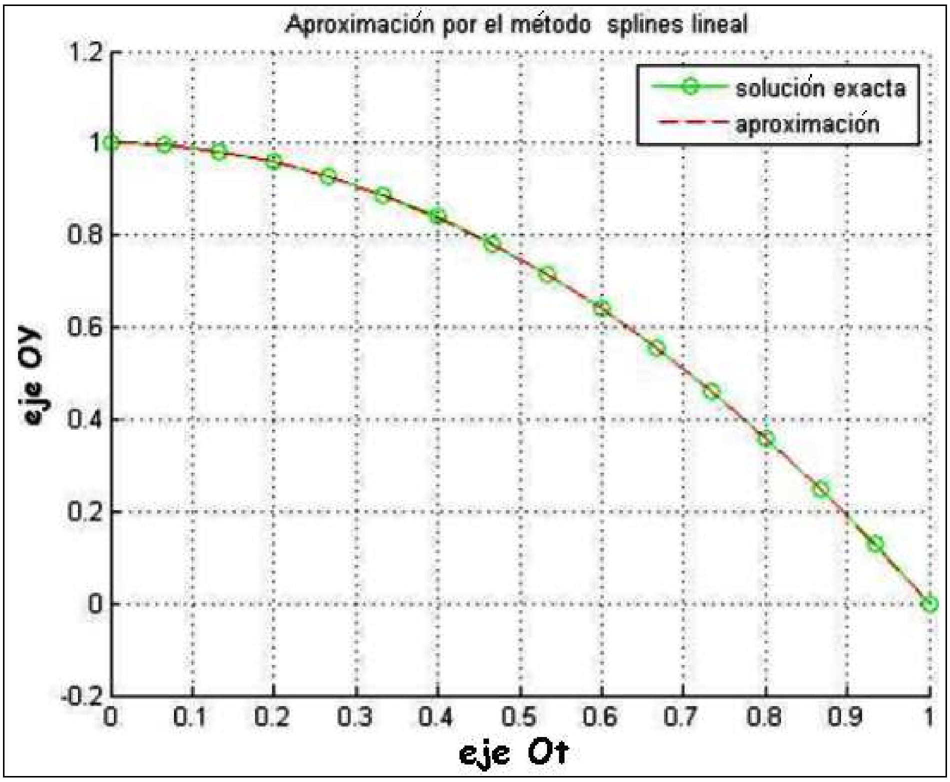
En efecto, substituyendo en la ecuación inicial dada, podemos comprobar que:

$$1-t^2 = 1-t-\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+\int_0^t \frac{1+t}{1+s}\left(1-s^2\right)\cdot ds = 1-t-\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+(1+t)\int_0^t (1-s)\cdot ds =$$

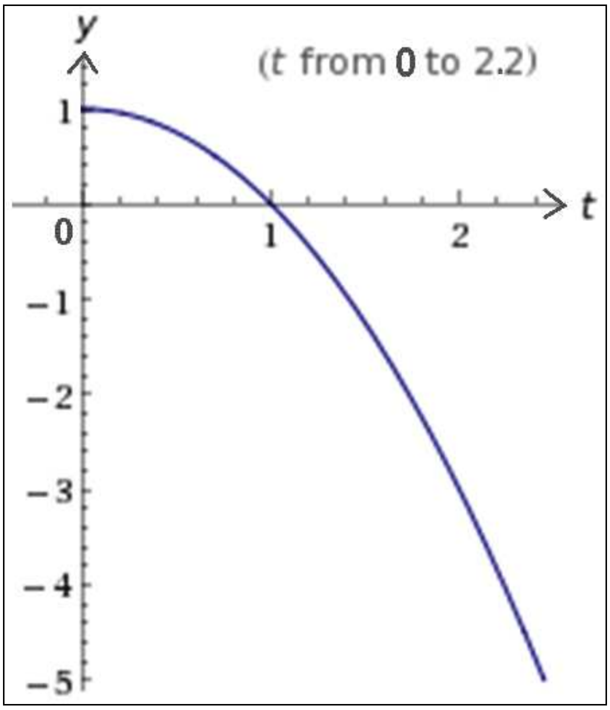
$$1-t-\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+(1+t)\left(t-\frac{t^2}{2}\right) = 1-t-\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+t-\frac{t^2}{2}+t^2-\frac{t^3}{2} = 1-t^2 \text{, c. s. q. d.}$$

, a la que corresponde la siguiente representación gráfica realizada por el método de splines[2] lineal:

[2] El término "spline" hace referencia a una amplia clase de funciones que son utilizadas en aplicaciones que requieren la interpolación de datos, o un suavizado de curvas. Los splines son utilizados para trabajar



, o bien con mayor amplitud puesto que se trata de analizar las dos primeras décadas:



a la que corresponden las siguientes tablas que muestran el error que tiene lugar en algunos nodos para diferentes tamaños de paso *h*:

tanto en una como en varias dimensiones. Las funciones para la interpolación por splines normalmente se determinan como minimizadores de la aspereza sometidas a una serie de restricciones.

Aproximación para $h = 0.01$

t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.20	0.95959447	0.96000000	0.00040553
0.40	0.83902209	0.84000000	0.00097791
0.60	0.63823878	0.64000000	0.00176122
0.80	0.35718658	0.36000000	0.00281342
0.90	0.18653700	0.19000000	0.00346300
1.00	-0.00420944	0.00000000	0.00420944

Aproximación para $h = 0.05$

t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.20	0.95989874	0.96000000	0.00010126
0.40	0.83975585	0.84000000	0.00024415
0.60	0.63956036	0.64000000	0.00043964
0.80	0.35929783	0.36000000	0.00070217
0.90	0.18913578	0.19000000	0.00086422
1.00	-0.00105041	0.00000000	0.00105041

Aproximación para $h = 0.025$

t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.10	0.98998850	0.99000000	0.00001150
0.20	0.95997469	0.96000000	0.00002531
0.40	0.83993898	0.84000000	0.00006102
0.60	0.63989013	0.64000000	0.00010987
0.80	0.35982453	0.36000000	0.00017547
0.90	0.18978404	0.19000000	0.00021596
1.00	-0.00026248	0.00000000	0.00026248

En este caso, la función se anula en el décimo ejercicio económico, a partir del cual aparecerán ya pérdidas, puesto que: $1 - t^2 = 0 \Rightarrow t = 1$, alcanzando el máximo de resultados contables brutos justamente para el valor: $t = 0$ (inicio de la actividad económica).

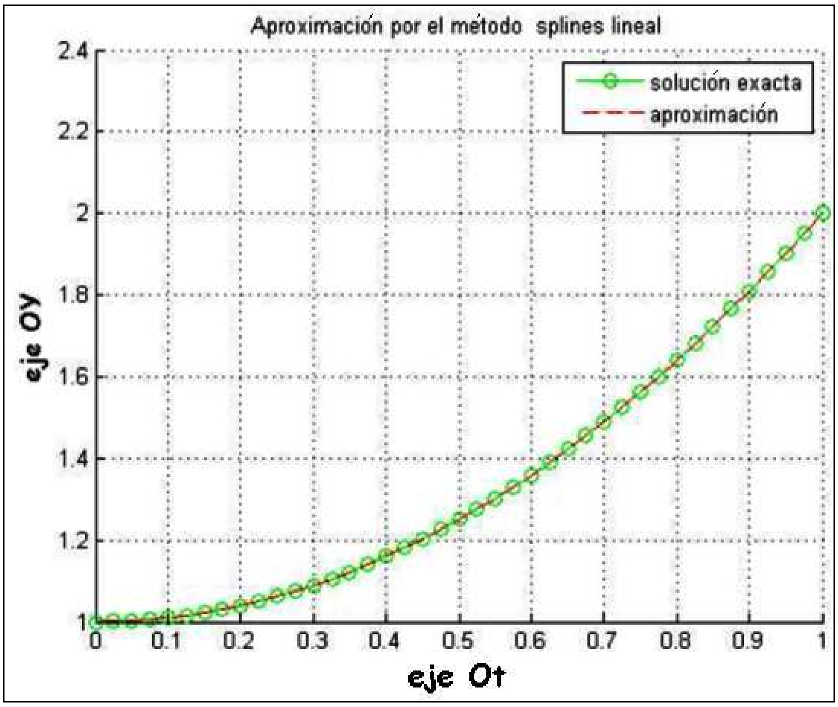
En el tercer caso, se sabe que la solución exacta es: $f(t) = 1 + t^2$. El núcleo de la ecuación es $k(t,s,y) = \frac{2st}{1+s^2}y$ y es inmediato verificar que este núcleo es Lipschitz en la tercera variable y que $k_y(t, s, y)$ satisface la misma condición en la primera variable desde que: $0 \leq s \leq t \leq T$.

En efecto, substituyendo en la ecuación inicial dada, podemos comprobar que:

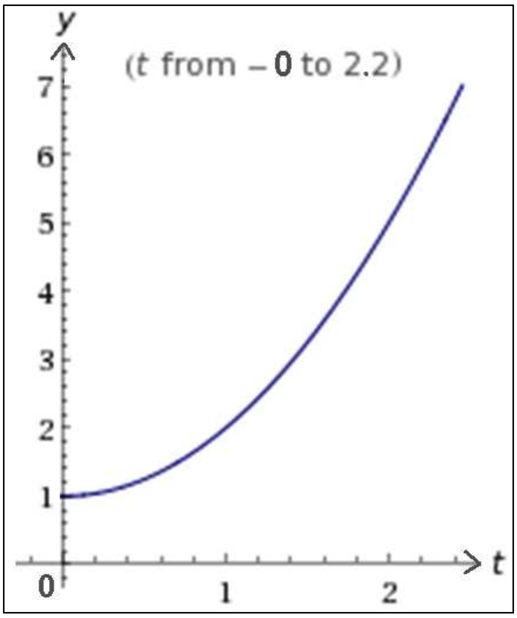
$$1+t^2=1+t^2-t^3+\int_0^t \frac{2st}{1+s^2}\left(1+s^2\right)\cdot ds=1+t^2-t^3+2t\int_0^t s\cdot ds=$$

$$=1+t^2-t^3+2t\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t=1+t^2-t^3+t^3=1+t^2\text{, c. s. q. d.}$$

, a la que corresponde la siguiente representación gráfica:



, o bien con mayor amplitud puesto que se trata de analizar las dos primeras décadas:



a la que corresponden las siguientes tablas que muestran el error en algunos nodos para diferentes tamaños de paso *h*:

Aproximación para $h = 0.1$

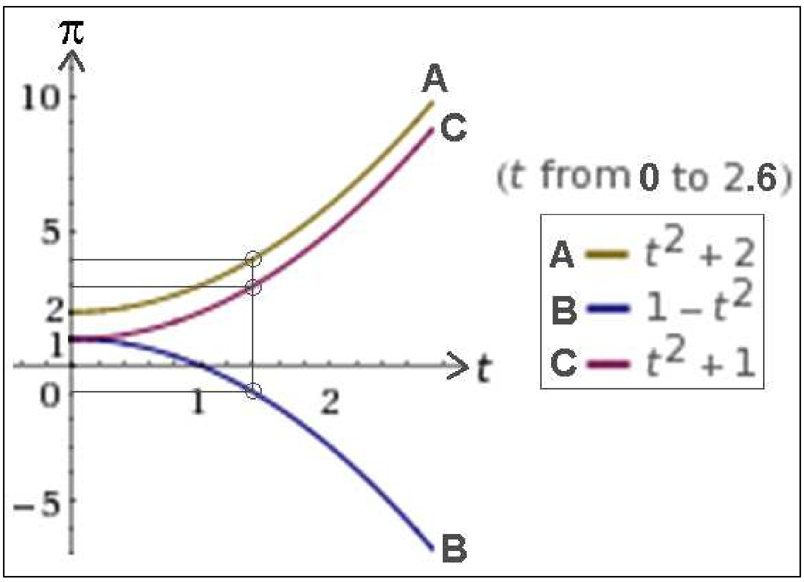
t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.10	1.01000166	1.01000000	-0.00000166
0.30	1.09004361	1.09000000	-0.00004361
0.50	1.25019478	1.25000000	-0.00019478
0.70	1.49052058	1.49000000	-0.00052058
0.90	1.81110028	1.81000000	-0.00110028
1.00	2.00151972	2.00000000	-0.00151972

Aproximación para $h = 0.05$

t(i)	f_i	f(t(i))	error
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000
0.10	1.01000010	1.01000000	-0.00000010
0.30	1.09000272	1.09000000	-0.00000272
0.50	1.25001215	1.25000000	-0.00001215
0.70	1.49003246	1.49000000	-0.00003246
0.90	1.81006857	1.81000000	-0.00006857
1.00	2.00009469	2.00000000	-0.00009469

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2+1}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

La trayectoria temporal de los resultados contables brutos de las tres empresas en estudio puede verse en el gráfico siguiente:



b) Para cada empresa se tendrá, respectivamente, lo siguiente:

- *Empresa A*:

Los ingresos del ejercicio decimocuarto serán:

$$I_A = p_1 \times q_1 = 2'50 \text{ €/ud.} \times 3.200.000 \text{ ud.} = 8.000.000'00 \text{ €} ,$$

y, consecuentemente, los resultados contables brutos (antes de impuestos) serán de:

$$\pi_{14} = y_1(14) = t^2 + 2 = 1'4^2 + 2 = 3'96 \equiv 3.960.000'00 \text{ €} .$$

Con ello, los gastos totales serán:

$$G_A = I_A - \pi_A = 8.000.000'00 - 3.960.000'00 = 4.040.000'00 \text{ €} ,$$

y el beneficio neto obtenido será, en aquel ejercicio económico, del orden de:

$$B_A = 0'75 \times \pi_A = 0'75 \times 3.960.000'00 = 2.970.000'00 \text{ €} .$$

- *Empresa B*:

Los ingresos del ejercicio decimocuarto serán:

$$I_B = p_2 \times q_2 = 2'60 \text{ €/ud.} \times 2.100.000 \text{ ud.} = 5.460.000'00 \text{ €} ,$$

y, consecuentemente, los resultados contables brutos (antes de impuestos) serán de:

$$\pi_{14} = y_2(14) = 1 - t^2 = 1 - 1'4^2 = -0'96 \equiv -960.000'00 \text{ €} .$$

Con ello, los gastos totales serán:

$$G_B = I_B - \pi_B = 5.460.000'00 + 960.000'00 = 6.420.000'00 \text{ €} ,$$

y el beneficio neto obtenido será negativo (pérdidas) en aquel ejercicio económico, por lo que no procede aplicarle la fiscalidad.

- *Empresa C*:

Los ingresos del ejercicio decimocuarto serán, en este caso, de:

$$I_C = p_3 \times q_3 = 2'40 \text{ €/ud.} \times 2.550.000 \text{ ud.} = 6.120.000'00 \text{ €} ,$$

y, consecuentemente, los resultados contables brutos (antes de impuestos) serán de:

$\pi_{14} = y_3(14) = t^2 + 1 = 1'4^2 + 1 = 2'96 \equiv 2.960.000'00$ € .

Con ello, los gastos totales serán:

$G_C = I_C - \pi_C = 6.120.000'00 - 2.960.000'00 = 3.160.000'00$ € ,

y el beneficio neto obtenido será, en aquel ejercicio económico, del orden de:

$B_C = 0'75 \times \pi_C = 0'75 \times 2.960.000'00 = 2.220.000'00$ € .

De ello se deduce que el beneficio anual neto, en el ejercicio económico relacionado, resulta mayor en la empresa A (+2.970.000'00 €) que en la empresa C (+2.220.000'00 €), concretamente en una cuantía de 750.000'00 € más, mientras que la empresa B registra pérdidas por importe de 960.000'00 € .

Ejemplo 9

Los resultados contables brutos (antes de impuestos) de una pequeña empresa familiar, expresados en miles de euros, vienen dados en relación al tiempo (años) por la ecuación:

$$f'(t) + 4\int_0^t f(x)\cdot dx = t - \sin t, \text{ con } f(0) = 2.$$

Se pide: a) Analizar la trayectoria temporal de dichos resultados en los dos primeros decenios de su actividad económica, con la correspondiente representación gráfica. b) Averiguar el beneficio neto o las pérdidas acaecidas en los ejercicios económicos octavo y decimosexto, considerando una fiscalidad media aplicable del 25%.

Solución:

a) Los resolveremos, en primer lugar, tomando transformadas a toda la ecuación: para ello necesitamos, además de la propiedad de linealidad, aplicar las propiedades de la transformada de la derivada y de la transformada de la integral. Para transformar el segundo término de la EID propuesta, del tipo Volterra, basta con recurrir a la tabla básica de transformadas del Cap. 7.

Puesto que: $L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$ y $L\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(s)}{s}$,

resultará que: $F(s)\frac{s^2+4}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + 2$, de donde se deduce, despejando F(s), que:

$$F(s) = \frac{2s^4 + 2s^2 + 1}{(s^2 + 4)s(s^2 + 1)}.$$

Se trata ahora de hallar la transformada inversa de F(s). Para ello podemos recurrir a su descomposición en fracciones simples, así:

$$F(s) = \frac{2s^4 + 2s^2 + 1}{(s^2 + 4)s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} + \frac{Ds + E}{s^2 + 4}.$$

Los coeficientes son, una vez realizadas las operaciones oportunas, los siguientes:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{-1}{3}, \quad C = 0, \quad D = \frac{25}{12}, \quad E = 0,$$

es decir, $F(s) = \frac{1}{4s} - \frac{1}{3}\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{25}{12}\frac{s}{s^2 + 4}$.

Utilizando ahora las transformadas de la tabla básica, tendremos que la I. G. o función generatriz Laplace buscada es:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cos t + \frac{25}{12}\cos 2t}$$

Como comprobación del procedimiento hasta aquí utilizado, trataremos ahora de reducir esta EID a una EDO de segundo orden del siguiente modo:

Derivando una vez todos los miembros de la ecuación integro-diferencial anterior, con lo que:

$\frac{d}{dt}[f'(t) + 4\int_0^t f(x)dx = t - \sin t]$, lo que la convertirá en una ecuación diferencial lineal de segundo orden, de coeficientes constantes, no homogénea.

La ecuación resultante es, pues: f”(t) + 4f(t) = 1 – cos t.

La solución que buscamos de esa ecuación es aquella que cumple que f(0) = 2 y que $f'(t) + 4\int_0^t f(x)dx = t - \sin t$.

Para encontrar la solución, hemos de resolver primero la ecuación homogénea asociada, esto es:

$$f_h'' + 4f_h = 0.$$

La ecuación característica es: $\lambda^2 + 4 = 0$, luego la solución o integral general de la homogénea es: $\lambda = \pm 2$ i ($\alpha = 0$, $\beta = 2$), de donde:

$$y^* = f^*(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t.$$

El siguiente paso consiste en encontrar una solución particular de la completa, f''(t) + 4f(t) = 1 – cos t. Para ello, podemos utilizar el método de los coeficientes indeterminados (dejamos la comprobación en manos del amable lector/a) siguiendo las directrices expuestas en el Cap. 3, y obtendremos la integral general siguiente:

$$f(t) = C_1 \cdot \sin 2t + C_2 \cdot \cos 2t + \frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\cos t}{3}$$, cuya derivada es:

$$f'(t) = 2C_1 \cdot \cos 2t - 2C_2 \cdot \sin 2t - \sin t \cdot \cos t + \frac{\sin t}{3}.$$

Pero sabemos que: $f(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{25}{12} = \frac{24}{12} = 2$, y también: f'(0) = 0 – sin 0 = 0, y así sucesivamente, alcanzaremos la misma solución obtenida anteriormente por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

La obtención de los extremos de esta función exigirá la aplicación de la condición necesaria o de primer grado:

$$f'(t) = \frac{\sin t}{3} - \frac{25}{6}\sin 2t = 0; \frac{\sin t}{3} - \frac{25}{3} \cdot \sin t \cdot \cos t = 0 \Rightarrow \frac{1 - 25 \cdot \cos t}{3} = 0,$$

de donde: cos t = 1/25 = 0'04, y entonces:

t = arc cos 0'04 = 1'5307857. Con ello:

$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{0'04}{3} + \frac{25}{12}\cos 3'0615713 = 0'25 - 0'0133 - 2'0767 = -1'84,$$

que resulta equivalente a unas pérdidas de 1.840'00 €.

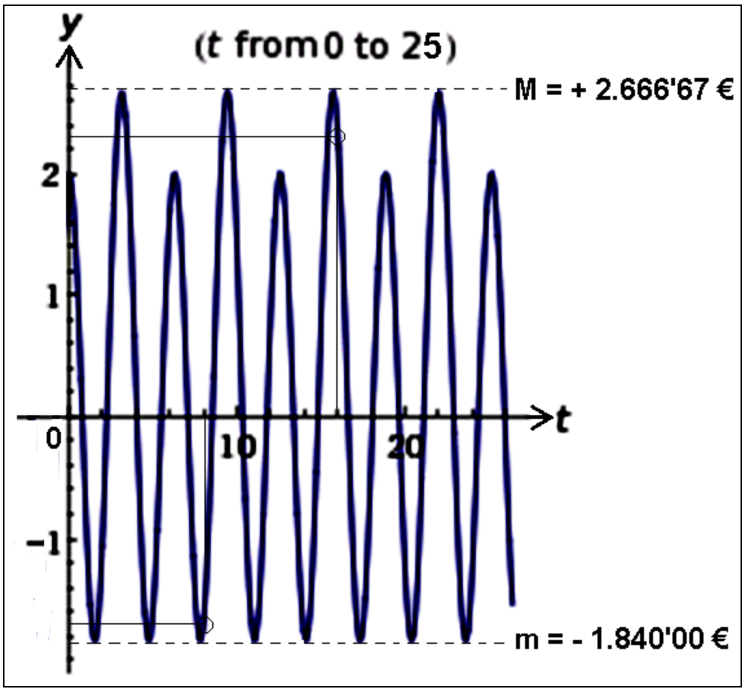
Del mismo modo, la condición suficiente o de segundo grado exige que:

$$f''(t) = \frac{\cos t}{3} - \frac{25}{3}\cos 2t$$, que haciendo t = 1'5307857, ofrece:

f''(t) = 0'0133 + 8'3167 = 8'33 > 0, luego se trata de un mínimo (m).

Del mismo modo operaríamos para la obtención del máximo (M) de esta función.

La representación gráfica correspondiente será la siguiente, con el detalle expreso de los extremos relacionados:



b) Se tendrá lo siguiente:

- Octavo ejercicio: t = 8 $\rightarrow \pi = \frac{1}{4} - \frac{\cos 8}{3} + \frac{25}{12} \times \cos 16 =$

= 0’25 + 0’0485 – 1’9951 = -1’6966 $\cong$ -1.696’60 € (pérdidas).

- Decimosexto ejercicio: t = 16 $\rightarrow \pi = \frac{1}{4} - \frac{\cos 16}{3} + \frac{25}{12} \times \cos 32 =$

= 0’25 + 0’3192 + 1’7380 = 2’3072 $\cong$ 2.307’20 € .

Entonces, el beneficio después de impuestos será el siguiente (beneficio neto):

B = $\pi \times$ 0’75 = 2.307’20 $\times$ 0’75 = 1.730’40 € (ganancias).

Como puede comprobarse, los beneficios brutos máximos de esta función periódica (máximo global) son de M = + 2.666’67 € , que corresponden a 2.000’00 € de beneficios netos, mientras que las pérdidas máximas (mínimo global) son de m = - 1.840’00 € , ya halladas con anterioridad.

Ejemplo 10

Los resultados contables brutos (antes de impuestos) de una pequeña empresa familiar, expresados en miles de euros, vienen dados en relación al tiempo (años) por la ecuación:

$$4\int_0^t y(\tau)\cdot d\tau + y'(t) = \int_0^t y(\tau)\cdot\cos(t-\tau)\cdot d\tau \text{, con } y(0) = 1.$$

Se pide: a) Analizar la trayectoria temporal de dichos resultados en los cuatro primeros años de su actividad económica, con la correspondiente representación gráfica. b) Averiguar el beneficio neto o las pérdidas acaecidas en los ejercicios económicos segundo y cuarto, considerando una fiscalidad media aplicable del 25%. c) Determinar cuándo tiene lugar la coincidencia de los resultados contables de esta empresa con la del ejercicio anterior.

Solución:

a) Se trata, en este caso, de resolver la EID de Volterra:

$$4\int_0^t y(\tau)\,d\tau + y'(t) = \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau \text{, con: } y(0) = 1$$

Aplicando la transformada de Laplace, se tiene que:

$$4\frac{Y(s)}{s} + sY(s) - 1 = Y(s)\frac{s}{s^2+1}. \text{ Esto es: } Y(s)\left[\frac{4}{s} + s - \frac{s}{s^2+1}\right] = 1,$$

$Y(s)\left[\dfrac{4s^2+4+s^4+s^2-s^2}{s(s^2+1)}\right] = 1$, o lo que es lo mismo, despejando Y(s):

$Y(s) = \dfrac{s(s^2+1)}{(s^2+2)^2}$. Resultará, entonces: $y(t) = R(\sqrt{2}i) + R(-\sqrt{2}i)$. Veámoslo separadamente antitransformando, esto es:

$$R(\sqrt{2}i) = D\left[\frac{s^3+s}{(s+\sqrt{2}i)^2}e^{st}\right]_{s=\sqrt{2}i} =$$

$$= \left[\frac{(3s^2+1)(s+\sqrt{2}i)^2 - 2(s+\sqrt{2}i)(s^3+s)}{(s+\sqrt{2}i)^4}e^{st} + \frac{s^3+s}{(s+\sqrt{2}i)^2}t\cdot e^{st}\right]_{s=\sqrt{2}i} =$$

$$= [(-6+1)(-8) - 2(2\sqrt{2}i)(\sqrt{2}i)(-1)]\frac{e^{i\sqrt{2}t}}{64} + \frac{(\sqrt{2}i)(-1)}{-8}t\cdot e^{i\sqrt{2}t}.$$

También:

$$R\left(-\sqrt{2}i\right)=D\left[\frac{s^3+s}{\left(s-\sqrt{2}i\right)^2}e^{st}\right]_{s=-\sqrt{2}i}=$$

$$=\left[\frac{\left(3s^2+1\right)\left(s-\sqrt{2}i\right)^2-2\left(s-\sqrt{2}i\right)\left(s^3+s\right)}{\left(s-\sqrt{2}i\right)^4}e^{st}+\frac{s^3+s}{\left(s-\sqrt{2}i\right)^2}t\cdot e^{st}\right]_{s=-\sqrt{2}i}=$$

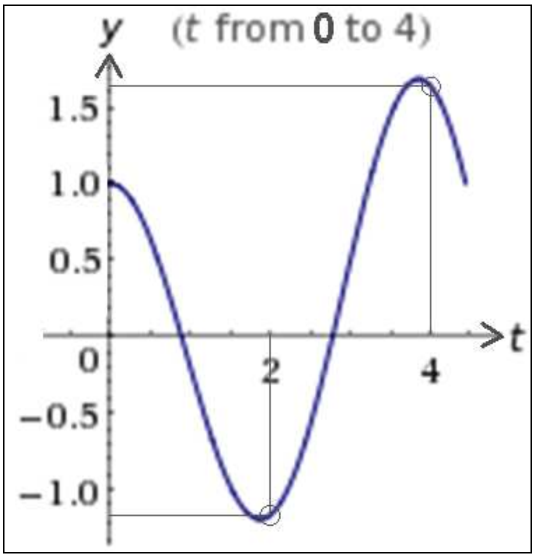
$$=\left[(-6+1)(-8)-2\left(2-\sqrt{2}i\right)\left(-\sqrt{2}i\right)(-1)\right]\frac{e^{-i\sqrt{2}t}}{64}+\frac{\left(-\sqrt{2}i\right)(-1)}{-8}t\cdot e^{-i\sqrt{2}t},$$

resultando, en definitiva, la integral particular siguiente:

$$\boxed{y(t)=\cos t\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}t\cdot\sin t\sqrt{2}},$$

de donde se deduce que los resultados contables se anularán en los instantes temporales: t = 0’89 años, t = 2’78 años, t = 4’82 años y t = 6’94 años, y así sucesivamente.

La representación gráfica correspondiente será la siguiente:



b) Se tendrá lo siguiente:

- Segundo ejercicio: t = 2 $\rightarrow \pi = y(2) = \cos 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\sqrt{2} =$

= -0’9514 - 0’7071 $\times$ 0’3081 = -1’1692 $\cong$ -1.169’20 € (pérdidas).

- Cuarto ejercicio: t = 4 $\rightarrow \pi = y(4) = \cos 4\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 4\sqrt{2} =$

= 0’8102 + 1’4142 $\times$ 0’5862 = 1’6392 $\cong$ 1.639’20 € .

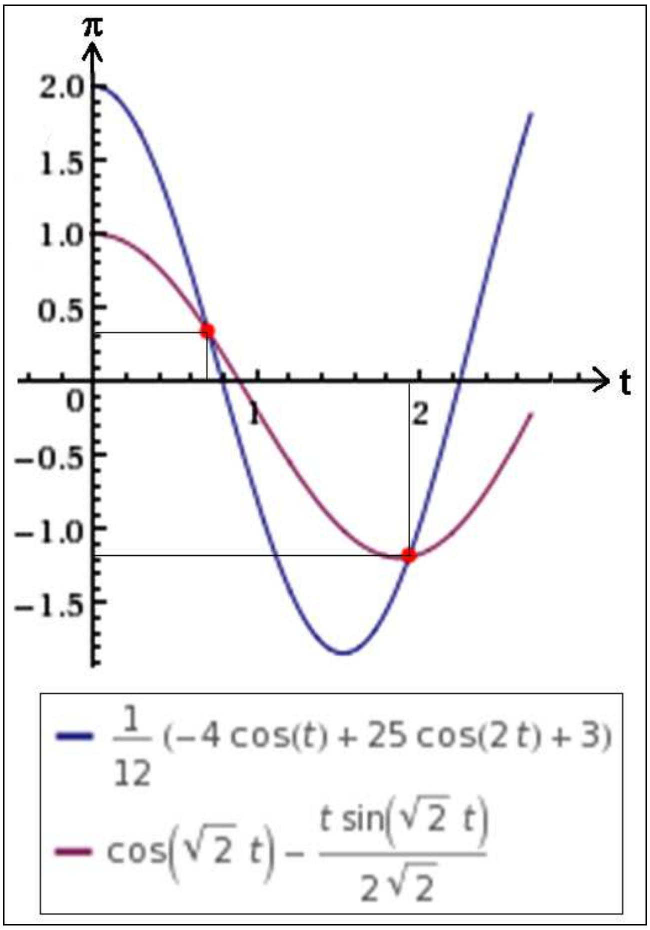
Entonces, el beneficio después de impuestos será el siguiente:

B = $\pi \times$ 0’75 = 1.639’20 $\times$ 0’75 = 1.229’40 € (ganancias).

c) La coincidencia de los resultados contables buscada tendrá lugar, a la vista de los cálculos realizados, cuando se cumpla que:

$$\cos(t\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} t \cdot \sin(t\sqrt{2}) = \frac{1}{4} - \frac{\cos t}{3} + \frac{25}{12}\cos 2t ,$$

lo que queda definido en el siguiente gráfico:



En su consecuencia, los resultados contables de ambas empresas familiares coincidirán en los siguientes instantes temporales:

$t \approx \pm 5.19006691565558\ldots \Rightarrow t \approx$ 5’19 años (6º ejercicio económico)
$t \approx \pm 3.65895374780715\ldots \Rightarrow t \approx$ 3’66 años (4º ejercicio económico)
$t \approx \pm 1.93404558132326\ldots \Rightarrow t \approx$ 1’93 años (2º ejercicio económico)
$t \approx \pm 0.703294418022369\ldots \Rightarrow t \approx$ 0’70 años (1r ejercicio económico)

7. RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS DE CÁLCULO VARIACIONAL

A continuación se exponen diferentes ejemplos de las aplicaciones económicas del Cálculo de Variaciones (que constituye la base de la optimización dinámica), que pueden resultar de singular utilidad en algunos casos. A saber:

Ejemplo 1

Se trata de optimizar la función económica dada por la expresión: $E = 3 + 2A^2$, siendo A el funcional dado por: $A(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} \cdot dx$.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi = \sqrt{1+y'^2}$, por lo que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = K_1,$$

puesto que la función φ no contiene explícitamente a la *y* , pero además sólo depende de y', por lo que todos los extremales serán rectas. En efecto, de la expresión anterior dedúcese que:

$y' = K_1\sqrt{1+y'^2}$, o sea: $y'^2 = K_1(1+y'^2) = K_1 + K_1 \cdot y'^2$, con lo que:

$y'^2 - K_1 \cdot y'^2 = K_1 = y'^2(1 - K_1)$, de donde: $y'^2 = \frac{K_1}{1-K_1} = c_1$; $y' = \pm\sqrt{c_1} = c_2$,

y mediante una cuadratura se obtiene que: $y = c_2x + c_3$, que resulta ser, efectivamente, una familia o haz de rectas cuyos valores de las constantes c_2 y c_3 vendrán, en su caso, determinados por las condiciones de contorno dadas.

Como $y' = c_2$, se tendrá un valor del funcional:

$A(y) = \int_a^b \sqrt{1+c_2^2} \cdot dx = K_2[x]_a^b = K_2(b - a)$, habiendo hecho: $K_2 = \sqrt{1+c_2^2}$.

Entonces, la función económica planteada valdrá:

$$[OPT]\ E = 3 + 2A^2 = 3 + 2K_2^2 (b - a)^2 = 3 + 2K_3b^2 + 2K_3a^2 - 4K_3ba,$$

habiendo hecho $K_3 = K_2^2$.

Ejemplo 2

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa: E = 3 + 4A, siendo A el funcional, expresado en millones de euros, dado por:

$$A(y,z) = \int_0^1 \sqrt{y^2 + z^2} \cdot dx \text{ , si } y + z = 1.$$

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi = y^2 + z^2$, por lo que formando el funcional:

$$A^*(y,z) = \int_0^1 \left[y^2 + z^2 + \lambda(y + z - 1) \right] \cdot dx \text{ ,}$$

se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2y + \lambda = 0 \\ 2z + \lambda = 0 \quad \Rightarrow y = z \end{cases}$$

, que con la condición y + z = 1, proporcionan los valores:

z = ½ ;   y = ½ , con lo que la funcional A será:

$A(y,z) = \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} [x]_0^1 = \frac{1}{2}$, y la función económica resultante será la siguiente:

[OPT] E = 3 + 4A = 5 (π = 5.000.000’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0’75 $\times$ π = 0’75 $\times$ 5.000.000’00 = 3.750.000’00 € .

Ejemplo 3

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio contable bruto de sendas empresas: E = 4 + 5A, siendo A el funcional, expresado en miles de euros, dado respectivamente por:

a) $A(y) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)\cdot dx$, con las condiciones: y(0) = 0 ; y(1) = 2.

b) $A(y) = \int_1^3 (y'^2 + 12xy)\cdot dx$, con las condiciones: y(1) = 0 ; y(3) = 26.

Determinar el beneficio neto resultante en ambas empresas, teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

a) El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Veamos que, en el caso de la primera empresa, la función:

$\varphi = y'^2 + 12xy$, admite las derivadas:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 12x\,;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y'\,;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} = 0\;;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'} = 0\,;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} = 2\,.$$

Luego la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson será:

$2y'' - 12x = 0$, de donde:

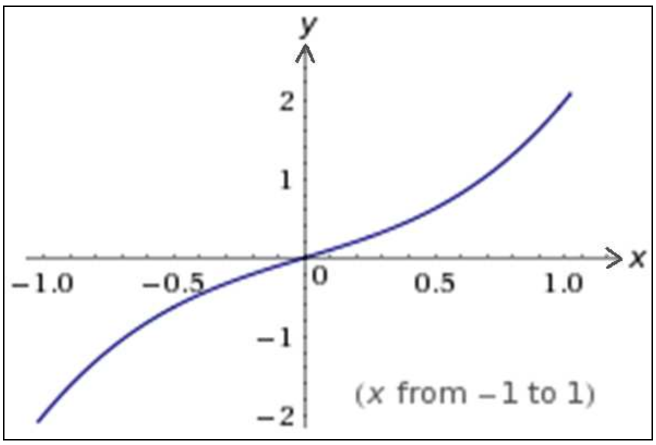
$$y'' = 6x\;;\quad y' = 3x^2 + k_1\;;\quad y = x^3 + k_1x + k_2.$$

Por las condiciones dadas se tendrá que:

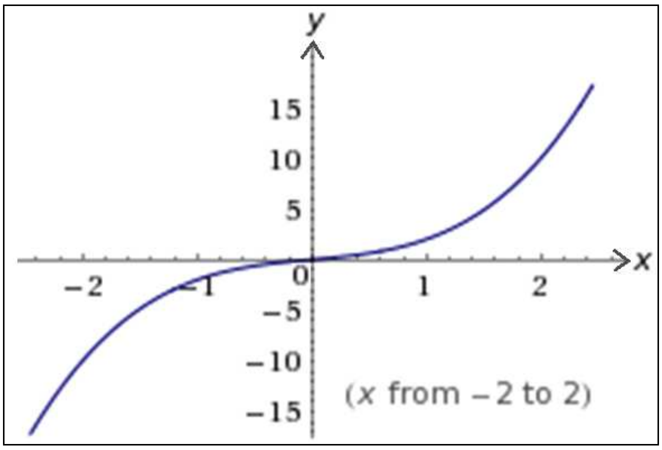
$$\begin{cases} y(0) = 0 = k_2 \\ y(1) = 2 = 1 + k_1 + k_2 \end{cases}$$

, de donde se deduce que: $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, y la curva pedida será:

$y = x^3 + x$, con la siguiente representación gráfica:



O bien con una mayor perspectiva:



Por otra parte se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 + x \\ y' = 3x^2 + 1 \end{array}\right\}$$, con lo que el funcional A(y) será:

$$A(y) = \int_0^1 \left[(3x^2+1)^2 + 12(x^4+x^2)\right]dx = \int_0^1 (21x^4 + 18x^2 + 1)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{21}{5}x^5 + 6x^3 + x\right]_0^1 = \frac{56}{5}.$$

Y la función económica será, en definitiva:

[OPT] E = 4 + 5A = 60 (π = 60.000’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

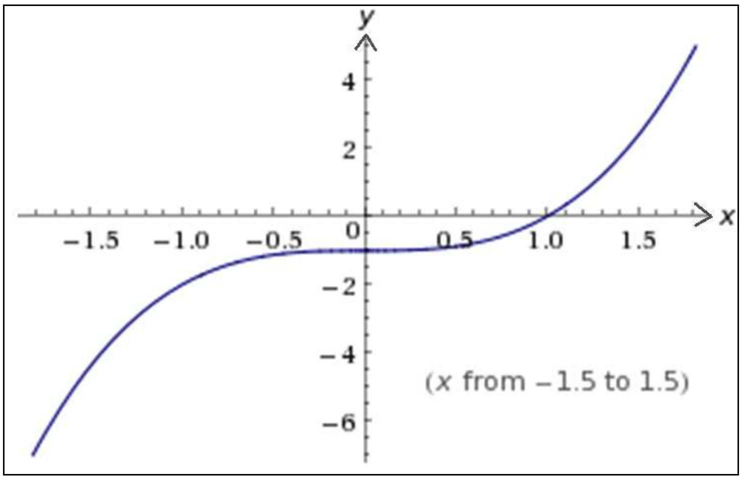
B = 0’75 $\times$ π = 0’75 $\times$ 60.000’00 = 45.000’00 € .

b) En este segundo caso, se tendrán unas nuevas condiciones de frontera, así como unos nuevos límites de integración en la integral definida del funcional en cuestión. Precisamente, como consecuencia de la aplicación de las nuevas condiciones de frontera o de contorno antedichas, resultará que:

$$\begin{cases} y(1) = 0 = 1 + k_1 + k_2 \\ y(3) = 26 = 27 + 3k_1 + k_2 \end{cases}$$

de donde se deduce que: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, y la curva pedida será:

$y = x^3 - 1$, con la siguiente representación gráfica:



La extremal hallada constituye un máximo fuerte[3]. Por otra parte, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 1 \\ y' = 3x^2 \end{array}\right\}$$, con lo que el funcional quedará establecido así:

$$A(y) = \int_1^3 \left[9x^4 + 12x(x^3 - 1)\right] dx = \int_1^3 (21x^4 - 12x) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{21}{5}x^5 - 6x^2\right]_1^3 = \frac{4.842}{5}.$$

Y la función económica será, en definitiva:

[OPT] E = 4 + 5A = 4.846 (π = 4.846.000'00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0'75 $\times$ π = 0'75 $\times$ 4.846.000'00 = 3.634.500'00 € .

Ejemplo 4

Se trata de optimizar la función económica de producción neta de una fábrica de electrodomésticos dada por: E = 2 + 5A^2, siendo A el funcional dado, en miles de unidades anuales de producto, por:

---

3 Por lo que se refiere a la conceptualización de los extremos relativos como débiles y fuertes, veamos que un problema variacional requiere que el funcional A esté definido sobre un espacio de Banach adecuado. La norma vectorial de dicho espacio es lo que permite definir rigurosamente si una solución es un mínimo o bien un máximo relativo. No hemos entrado en el presente texto en la correspondiente exposición teórica por obvias razones de espacio y oportunidad, aunque sí hemos creído oportuno dar cuenta del resultado obtenido en algunos de los ejercicios aquí resueltos.

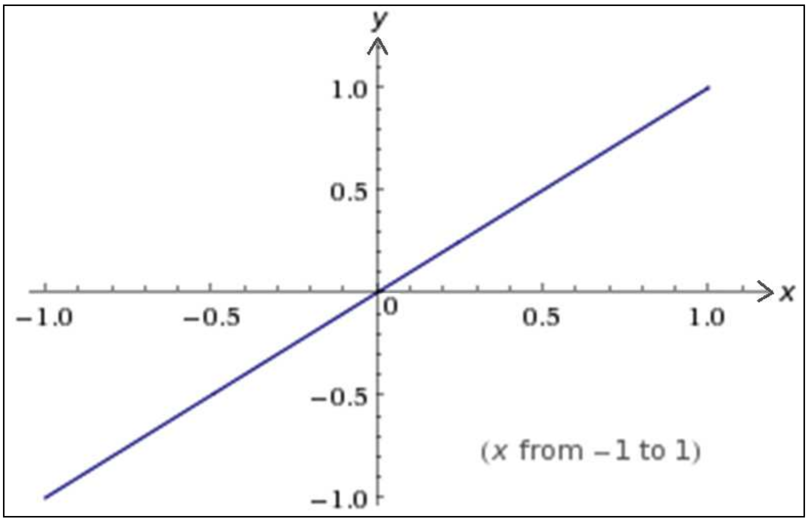
$A(y) = \int_0^1 (y^2 + x^2 y')\cdot dx$, con las condiciones: y(0) = 0 ; y(1) = 2, considerando un 5% de mermas en el proceso productivo. Estimar la cifra de negocios para un precio de salida de fábrica de 1.850’00 €/ud.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y^2 + x^2y'$, se obtiene:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y\,;\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = x^2\,;\ \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y'} = 2x\ \ ;\ \ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} = 0\,.$$

Luego la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson se reduce a la expresión: 2x – 2y = 0, sin ninguna constante, esto es: y = x, con la siguiente representación gráfica:



pero como no verifica las condiciones de contorno, puesto que:

$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \neq 2 \end{cases}$, no existe tampoco ninguna extremal que satisfaga el problema planteado.

Caso distinto sería si nos hubieran dado la condición y(1) = 1, que es la única satisfactoria. Entonces se tendría que: y = x ; y’ = 1, con lo que:

$A(y) = \int_0^1 (x^2 + x^2)\cdot dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, y la función económica valdría:

[OPT] $E = 2 + 5 \cdot A^2 = 2 + \frac{20}{9} = \frac{38}{9}$, que representa la producción bruta.

La producción neta de la factoría será, pues, de:

P_n = (38/9) × 1.000 × 0'95 = 4.011 ud./año, y una cifra de negocios de:

4.011 ud./año × 1.850'00 €/ud. = 7.420.350'00 €/año.

Ejemplo 5

Se trata de optimizar la función económica dada por: E = 4 + ln A, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi = y\sqrt{1+y'^2}$, por lo que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2}\;;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}\;;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\;;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} = \frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}}\;;$$

y la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson resultará, entonces:

$$\frac{yy''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2} = 0\,,$$

o bien: $\frac{yy''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$; $yy'' = 1+y'^2$; que es una ecuación diferencial que se resuelve haciendo el cambio: $\frac{dy}{dx} = p$, con lo que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p\,,$$

luego: $py\frac{dp}{dy} = 1+p^2$, de donde, separando variables: $\frac{p\cdot dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}$, que integraremos mediante una cuadratura, así:

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{p}{1+p^2}dp$; ln y + ln k = (1/2)·ln (1 + p^2) ⇒ ln ky = ln $\sqrt{1+p^2}$, o sea: $\sqrt{1+p^2} = ky$, donde k es una constante arbitraria de integración.

La expresión anterior, se escribe así: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{k^2y^2 - 1}$, o bien: $dx = \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}$; $x = \int \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2-1}}$; cuya integración es inmediata al tratarse de una EDO no lineal de variables separadas, que se resuelve mediante una cuadratura. El resultado es el extremal:

$$y(x) = \frac{e^{-k(c+x)}(e^{2k(c+x)} + k^2)}{2k^2} .$$

Una vez obtenido este resultado se podría hallar el valor del funcional A y, a partir de ahí, el correspondiente de la función económica E, cuestión ésta de gran laboriosidad, por lo que obviaremos dicho cálculo por razones de espacio y oportunidad.

Ejemplo 6

Se trata de optimizar la función económica dada por: E = 6 + 3·e^A, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_a^b \sqrt{y^2 + y'^2}dx .$$

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta que: $\varphi = \sqrt{y^2 + y'^2}$, donde la función φ no contiene la variable *x*, con lo que:

$$\varphi = \sqrt{y^2 + y'^2} = y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + k = y'\frac{y'}{\sqrt{y^2+y'^2}} + k, \text{ de donde:}$$

$$y^2 + y'^2 = y'^2 + k\sqrt{y^2 + y'^2}, \text{ o sea: } y^2 = k\sqrt{y^2+y'^2}, \ k^2(y^2 + y'^2) = y^4 ;$$

$$k^2y^2 + k^2y'^2 = y^4, \text{ y entonces: } k^2y'^2 = y^4 - k^2y^2 = y^2(y^2 - k^2) ;$$

$$ky' = y\sqrt{y^2-k^2}, \text{ o bien: } \frac{kdy}{y\sqrt{y^2-k^2}} = dx; \quad x = k\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2-k^2}};$$

ecuación de integración inmediata al tratarse de una EDO no lineal de variables separadas, que se resuelve mediante una cuadratura. El resultado es:

$$y(x) = -\frac{4 \cdot i \cdot k \cdot e^{i(ck+x)}}{-4 + e^{2i(ck+x)}} \ .$$

Al igual que en el ejercicio anterior, una vez obtenido este resultado se podría hallar el valor del funcional A y, a partir de ahí, el correspondiente de la función económica E, cuestión ésta de gran laboriosidad, por lo que obviaremos dicho cálculo por razones de espacio y oportunidad.

Ejemplo 7

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio contable bruto de sendas empresas expresado en miles de euros, a saber: $E = 2 + A^2 + \ln A$, siendo A el funcional dado por: $A(y) = \int_0^1 (1 + y''^2) \cdot dx$, con las siguientes condiciones de frontera respectivas: a) y(0) = 0 ; y(1) = 3 ; y'(0) = 2 ; y'(1) = 5, y para la otra empresa, b) y(0) = 0 ; y(1) = 1 ; y'(0) = 1 ; y'(1) = 1. Determinar el beneficio neto resultante en ambas empresas, teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

a) El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = 1 + y''^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y''} = 2y''; \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y''}\right) = 2y^{IV},$$

y la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson ofrece: $y^{IV} = 0$, que es una EDO de cuarto orden cuya ecuación característica es: $\lambda^4 = 0$, que posee raíces reales múltiples, a saber: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, y su integral general vendrá dada por:

$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \ .$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las condiciones dadas, se tendrá que, siendo $y'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$:

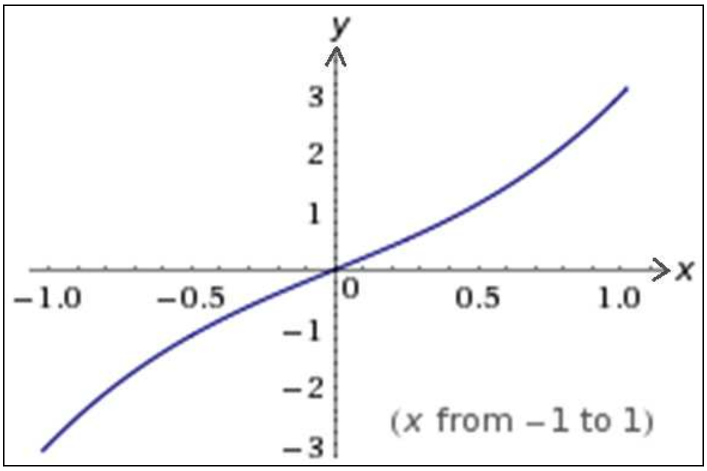
$$\begin{cases} y(0) = C_4 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 3 \\ y'(0) = C_3 = 2 \\ y'(1) = 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 5 \end{cases}$$

con lo que: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases}$, de donde también: $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$,

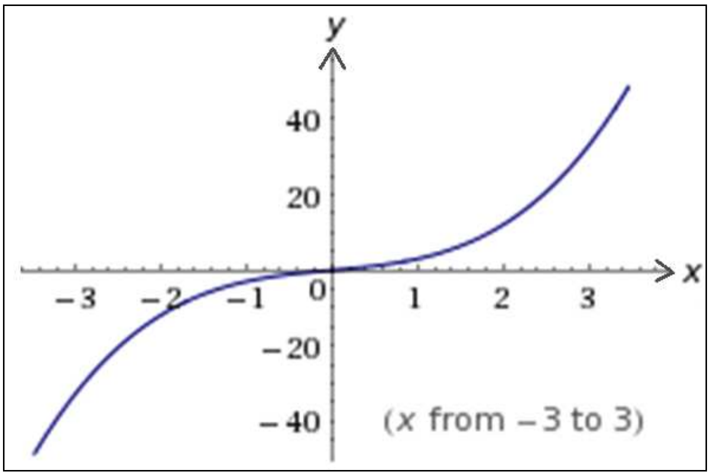
y la integral particular resultante constituye la extremal buscada, esto es:

$$y(x) = x^3 + 2x,$$

que resulta ser una parábola cúbica cuya representación gráfica es:



O bien con mayor perspectiva:



Debe tenerse en cuenta, además, que:

$$\begin{cases} y = x^3 + 2x \\ y' = 3x^2 + 2 \\ y'' = 6x \end{cases}$$, con lo que: $A(y) = \int_0^1 (1 + 36x^2) \cdot dx = \left[x + 12x^3\right]_0^1 = 13$,

y resultará, en definitiva, el siguiente valor de la función económica:

[OPT] $E = 2 + A^2 + \ln A = 2 + 169 + 2'565 = 173'565$ (π = 173.565'00 €).

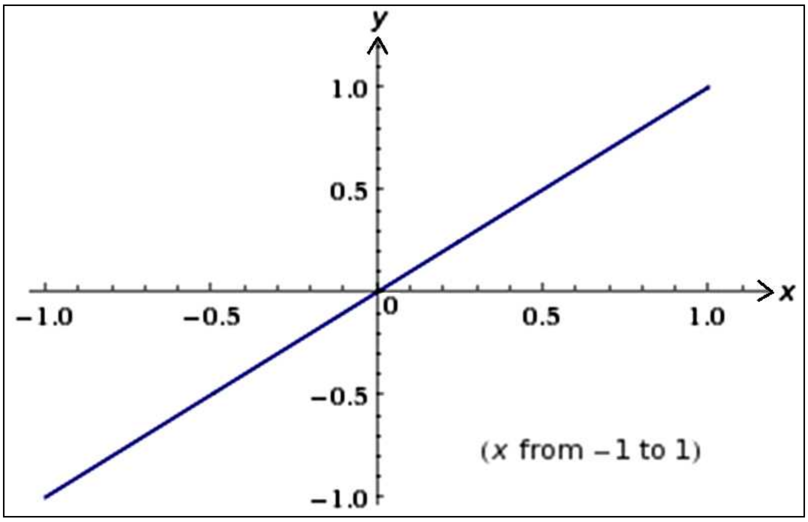
De este modo, el beneficio después de impuestos será:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 173.565'00 = 130.173'75 \text{ €} .$$

b) Con estas nuevas condiciones de frontera para la segunda empresa, resulta que siendo $y'(x) = 3C_1x^2 + 2C_2x + C_3$:

$$\begin{cases} y(0) = C_4 = 0 \\ y(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \\ y'(0) = C_3 = 1 \\ y'(1) = 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 1 \end{cases}$$

con lo que: $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 1$, y la integral particular resultante constituye la extremal buscada, esto es: $y(x) = x$, que resulta ser la recta bisectriz del primer cuadrante del círculo, cuya representación gráfica es:



Debe tenerse en cuenta, además, en este caso, que:

$$\begin{cases} y = x \\ y' = 1 \quad \text{, con lo que: } A(y) = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1, \\ y'' = 0 \end{cases}$$

y resultará, en definitiva, el siguiente valor de la función económica en cuestión:

$$[OPT]\ E = 2 + A^2 + \ln A = 2 + 1 + 0 = 3\ (\pi = 3.000'00 \text{ €}).$$

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 3.000'00 = 2.250'00 \text{ €} .$$

Ejemplo 8

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa en miles de euros y dada por la expresión: $E = 2 + 3A^2 + 7\cdot e^{(13-A)}$, siendo, a su vez, A el funcional dado por la integral definida: $A(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + 2z'^2 + y'z')\cdot dx$, con las siguientes condiciones de contorno: y(0) = 0 ; y(1) = 1 ; z(0) = 0 ; z(1) = 2. Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'^2 + 2z'^2 + y'z'$, por lo que en este caso en el integrando figuran varias funciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y' + z' \;\; ; \;\; \frac{\partial\varphi}{\partial z'} = 4z' + y' \,.$$

En su consecuencia, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange-Poisson siguiente:

$$\begin{cases} 2y'' + z'' = 0 \\ 4z'' + y'' = 0 \end{cases}$$

, del que se deduce que: y'' = z'' = 0 y, por tanto, las integraciones son inmediatas, con lo que:

$$\begin{cases} y = c_1x + c_2 \\ z = c_3x + c_4 \end{cases}$$

, y teniendo ahora en cuenta las condiciones dadas, resultará que:

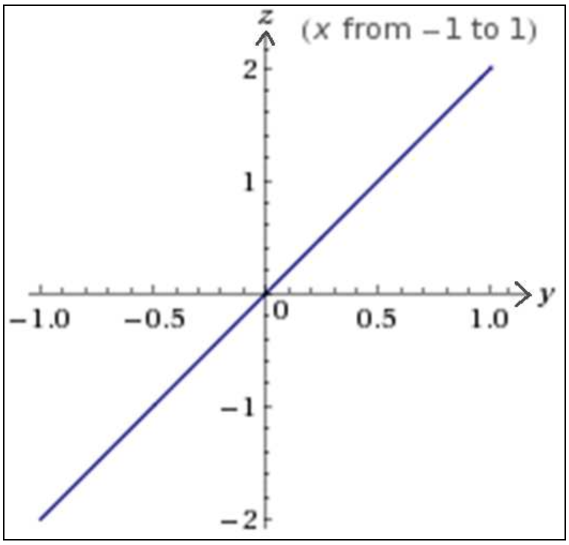
$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = c_1 + c_2 = 1 \\ z(0) = c_4 = 0 \\ z(1) = c_3 + c_4 = 2 \end{cases}$$

, por lo que: $c_2 = c_4 = 0$; $c_3 = 2$; $c_1 = 1$.

Y entonces se tienen las extremales:

$$\boxed{\begin{array}{c} y = x \\ z = 2x = 2y \end{array}}$$

, con la siguiente representación paramétrica gráfica:



Consecuentemente se tendría: $y' = 1$; $z' = 2$, con lo que el funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$A(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + 2z'^2 + y'\,z')\cdot dx = [11x]_0^1$ = 11, y la función económica valdrá:

[OPT] $E = 2 + 363 + 7\cdot e^2 = 416'72$ (π = 416.720'00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 416.720'00 = 312.540'00$ € .

Ejemplo 9

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa en miles de euros y dada por la expresión: $E = A + \ln A^2$, siendo A el funcional dado por:

$A(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')\cdot dx$, entre los puntos de coordenadas (1,3) y (2,5).

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'(1 + x^2 y')$ no contiene explícitamente a la *y*, se obtiene:

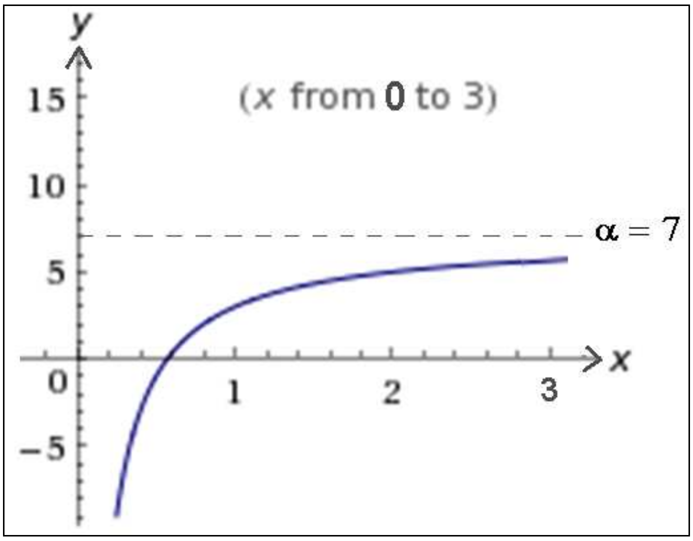
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\,;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = c = (1 + x^2 y') + y'\,x^2 = 1 + 2x^2 y'\,;\ y' = \frac{c-1}{2x^2}\,;$$

y entonces: y = $\int \frac{c-1}{2x^2}dx = \frac{c-1}{2}\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1-c}{2x} + c_2 = \frac{c_1}{x} + c_2$ (con: $c_1 = \frac{1-c}{2}$).

Las extremales buscadas constituirán, por lo tanto, una familia o haz de hipérbolas. Si tenemos en cuenta las condiciones de frontera dadas, tendremos que:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 = 3 \\ y(2) = c_1/2 + c_2 = 5 \end{cases}$$

de lo que se deducen los valores de las constantes: c_1 = - 4 y c_2 = 7, con lo que nos queda la expresión: y(x) = $-\frac{4}{x} + 7$, que es una transformada inversa del tipo: y(x) = α - β/x , con α = 7 y β = 4, con la siguiente representación gráfica:



Se trata de un mínimo fuerte. Como sea que: y'(x) = $4/x^2$, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

A(y) = $\int_1^2 \frac{4}{x^2}(1+4)\cdot dx = 20\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -20\left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = 10$, y la función económica será:

[OPT] E = A + ln A^2 = 10 + ln 100 = 14'605 (π = 14.605'00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0'75 $\times$ π = 0'75 $\times$ 14.605'00 = 10.953'75 € .

Ejemplo 10

Se trata de maximizar la función económica que representa los ingresos por ventas (en miles de euros) obtenidos en un establecimiento comercial dada por la expresión: E = 9 – 5A, siendo A el funcional dado por: $A(y) = \int_0^2 (-12xy - y'^2)\cdot dx$, con las siguientes condiciones de frontera: $y(0) = 2$; $y(2) = 12$.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = -12xy - y'^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -12x\,;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -2y'\,;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = -2y''\,.$$

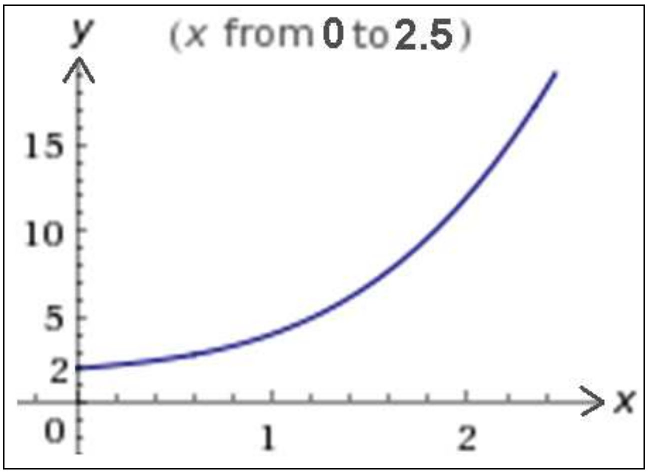
Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $-12x + 2y'' = 0$, lo que implica que: $y'' = 6x$, e integrando sucesivamente se tendrá que:

$$y' = 3x^2 + c_1 \Rightarrow y = \int (3x^2 + c_1)\cdot dx = x^3 + c_1 x + c_2\,.$$

Aplicando ahora las condiciones de frontera dadas, se tiene que:

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 2 \\ y(2) = 8 + 2c_1 + c_2 = 12 \end{cases}$$

, de lo que resulta que: $c_1 = 1$ y $c_2 = 2$, por lo que la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de máximo local, sólo puede alcanzarse en la función cúbica: $y(x) = x^3 + x + 2$, con la siguiente representación gráfica:



Como sea que: $y'(x) = 3x^2 + 1$, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^2 [-12(x^4 + x^2 + 2x) - (3x^2 + 1)^2] \cdot dx = \int_0^2 (-21x^4 - 18x^2 - 24x - 1) \cdot dx =$$

$$= -\left[\frac{21x^5}{5} + 6x^3 + 12x^2 + x\right]_0^2 = -(134'4 + 48 + 48 + 2) = -232'4.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[MAX] E = 9 – 5A = 9 + 1.162 = 1.171, lo que supone unos ingresos de:

I = 1.171.000’00 € .

Ejemplo 11

Se trata de minimizar la función económica que representa los costes totales anuales de una empresa (expresados en millones de euros) dada por: E = 9 + 5A, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_0^2 (xy' + y'^2) \cdot dx \text{, con las condiciones: } y(0) = 1 \text{ ; } y(2) = 0.$$

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = xy' + y'^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = x + 2y' \ ; \ \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = 1 + 2y'' \ .$$

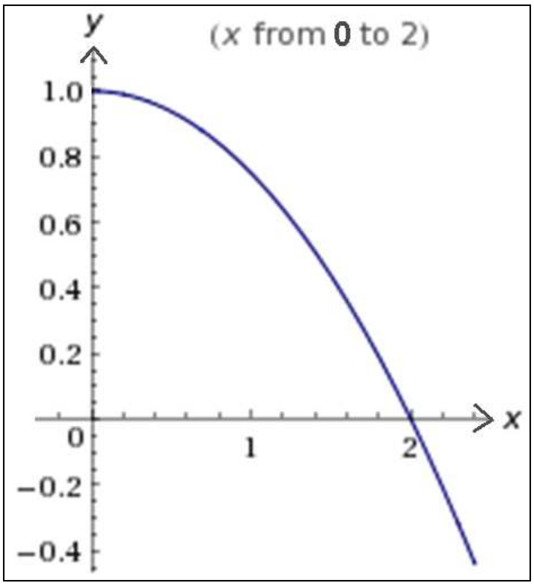
Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: 1 + 2y’’ = 0, lo que implica que: y’’ = -1/2, e integrando sucesivamente se tiene que:

$$y' = -x/2 + c_1 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4} + c_1 x + c_2 \ .$$

Aplicando ahora las condiciones de frontera o de contorno dadas, se tiene que:

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 1 \\ y(2) = -1 + 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

de lo que resulta que: $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$, por lo que la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de mínimo local fuerte, sólo puede alcanzarse en la función cuadrática: $y(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$, con la siguiente representación gráfica:



Como sea que: y'(x) = -x/2, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^2 (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}) \cdot dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[MIN] E = 9 + 5A = 9 – 10/3 = 17/3, y los costes totales anuales serán:

CT = 5.666.666'67 €/año.

Ejemplo 12

Se trata de optimizar la función económica dada por: E = 19 – 5A, siendo A el funcional dado por:

$A(y) = \int_0^1 (12xy + y'^2) \cdot dx$, con las condiciones: y(0) = 0 ; y(1) = 1.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = 12xy + y'^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 12x \, ; \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 2y' \, ; \frac{d}{dx}(\frac{d\varphi}{\partial y'}) = 2y''.$$

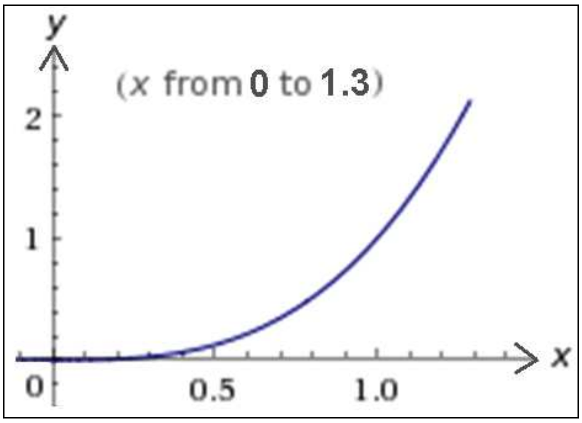
Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: 12x - 2y'' = 0, lo que implica que: y'' = 6x, e integrando:

$$y' = 3x^2 + c_1 \Rightarrow y = \int (3x^2 + c_1)\cdot dx = x^3 + c_1 x + c_2 \ .$$

Aplicando ahora las condiciones de contorno dadas, se tiene que:

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0 \\ y(1) = 1 + c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

de lo que resulta que: $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, por lo que la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de extremo, sólo puede alcanzarse en la función cúbica: $y(x) = x^3$, con la siguiente representación gráfica:



Como sea que: $y'(x) = 3x^2$, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^1 (12x^4 + 9x^4)\cdot dx = \left[\frac{21x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{21}{5} .$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[OPT] E = 19 – 5A = 19 - 21 = -2.

Ejemplo 13

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa en miles de euros y dada por la expresión: E = 19 – 5A, siendo ahora A el funcional dado por:

$A(y) = \int_0^2 (y^2 + y'^2 - 2xy)\cdot dx$, con las condiciones: y(0) = 0 ; y(2) = 3.

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y^2 + y'^2 - 2xy$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y - 2x\,;\; \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y'\,;\; \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = 2y''\,.$$

Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $2y - 2x - 2y'' = 0$, lo que implica que: $y'' - y = -x$, y la ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, con lo que la solución será: $y^* = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$.

Al objeto de investigar una solución particular de la ecuación completa o no homogénea, al faltarle el término en y' aumentaremos en un grado el polinomio del 2º miembro, esto es:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

, y substituyendo estos valores en la ecuación inicialmente dada, se obtiene que:

$$2a - ax^2 - bx - c = -x \Rightarrow a = c = 0,\ b = 1, \text{ con lo que:}$$

$$y_p = x, \text{ y entonces: } y(x) = y^* + y_p = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + x.$$

Aplicando ahora las condiciones de frontera o de contorno dadas, se tiene que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(2) = C_1 \cdot e^2 + C_2 \cdot e^{-2} + 2 = 3 \end{cases}$$

de lo que resulta que: $C_1(e^2 - e^{-2}) = 1$, y consecuentemente:

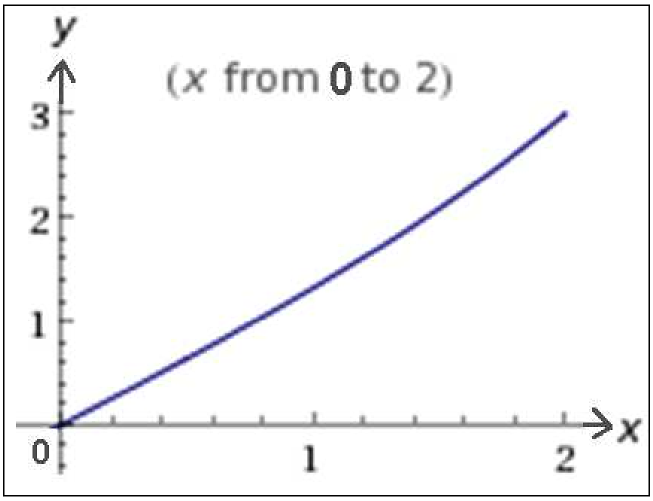
$$C_1 = \frac{1}{e^2 - e^{-2}}\,;\; C_2 = -\frac{1}{e^2 - e^{-2}}, \text{ y entonces:}$$

$$y(x) = \frac{e^x}{e^2 - e^{-2}} - \frac{e^{-x}}{e^2 - e^{-2}} + x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^2 - e^{-2}} + x,$$

que, a su vez, teniendo en cuenta que:

$$\left\{\begin{array}{l} \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \sinh 2 = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} \end{array}\right. \rightarrow \frac{\sinh x}{\sinh 2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^2 - e^{-2}},$$

por lo que la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de extremo, sólo puede alcanzarse en la función siguiente, que constituye un mínimo fuerte: y(x) = $\frac{\sinh x}{\sinh 2} + x$, con la siguiente representación gráfica:



Como sea que: y'(x) = $\operatorname{csc h} 2 \cdot \cosh x + 1$, tendremos que la funcional que nos ocupa, de resolución algo prolija, alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^2 (y^2 + y'^2 - 2xy) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 [\frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 2} + x^2 + \frac{2x \cdot \sinh x}{\sinh 2} + (\operatorname{csc h} 2 \cdot \cosh x + 1)^2 - \frac{2x \cdot \sinh x}{\sinh 2} - 2x^2)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (\frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 2} - x^2 + \operatorname{csc h}^2 2 \cdot \cosh^2 x + 1 + 2 \cdot \operatorname{csch} 2 \cdot \cosh x) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \operatorname{csc h}^2 2 \cdot \sinh 2x + 2 \operatorname{csc h} 2 \cdot \sinh x \right]_0^2 = \frac{1}{6}(8 + 3 \cdot \sinh 4 \cdot \operatorname{csch}^2 2) \approx 2'371.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[OPT] E = 19 – 5A = 19 – 11’855 = 7’145 (π = 7.145’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0’75 $\times$ π = 0’75 $\times$ 7.145’00 = 5.358’75 € .

Ejemplo 14

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa en miles de euros: E = 19 – 5A, siendo ahora A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_0^2 (y^2 + y'^2 + 2xy)\cdot dx \text{, con las condiciones: } y(0) = 0 \text{ ; } y(2) = 0.$$

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y^2 + y'^2 + 2xy$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y + 2x \text{ ; } \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y' \text{ ; } \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = 2y''.$$

Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $2y + 2x - 2y'' = 0$, lo que implica que: $y'' - y = x$, y la ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, con lo que la solución será: $y^* = C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{-x}$. Al objeto de investigar una solución particular de la ecuación completa o no homogénea, al faltarle el término en y' aumentaremos en un grado el polinomio del 2º miembro, esto es:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

, y substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$2a - ax^2 - bx - c = x \Rightarrow a = c = 0,\ b = -1, \text{ con lo que:}$$

$$y_p = -x, \text{ y entonces: } y(x) = y^* + y_p = C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{-x} - x.$$

Aplicando ahora las condiciones de contorno dadas, se tiene que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(2) = C_1\cdot e^2 + C_2\cdot e^{-2} - 2 = 0 \end{cases}$$

, de lo que resulta que: $C_1(e^2 - e^{-2}) = 2$, y consecuentemente:

$$C_1 = \frac{2}{e^2 - e^{-2}} \text{ ; } C_2 = -\frac{2}{e^2 - e^{-2}} \text{, y entonces:}$$

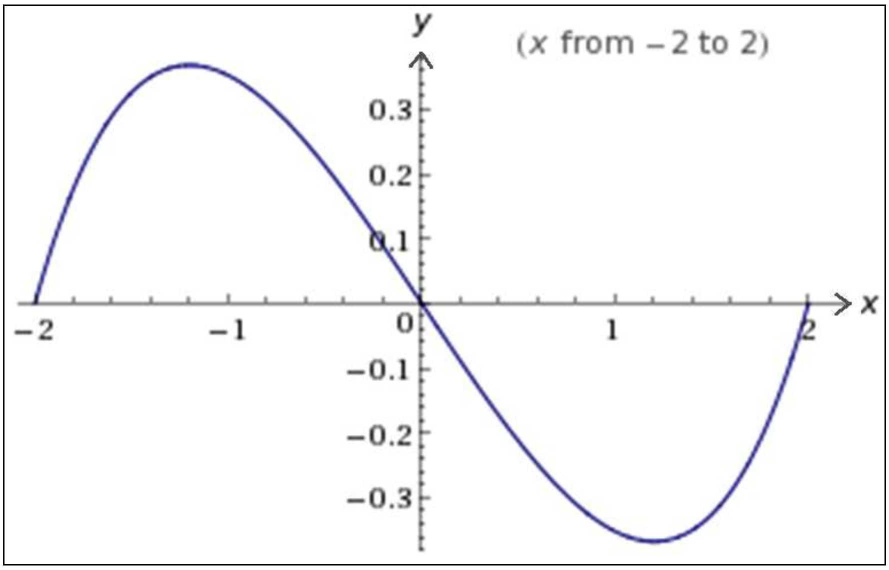
$$y(x) = \frac{2 \cdot e^{x}}{e^{2}-e^{-2}} - \frac{2 \cdot e^{-x}}{e^{2}-e^{-2}} - x = \frac{2(e^{x}-e^{-x})}{e^{2}-e^{-2}} - x,$$

que, a su vez, teniendo en cuenta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \\ \sinh 2 = \dfrac{e^{2}-e^{-2}}{2} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\sinh x}{\sinh 2} = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{2}-e^{-2}}, \end{array} \right.$$

por lo que la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de extremo, sólo puede alcanzarse en la función siguiente:

$y(x) = \dfrac{2 \cdot \sinh x}{\sinh 2} - x$, con la siguiente representación gráfica:



Como sea que: y'(x) = $2 \cdot \operatorname{csc} h\, 2 \cdot \cosh x - 1$, tendremos que la funcional que nos ocupa, de resolución algo prolija, alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_{0}^{2} (y^{2} + y'^{2} + 2xy) \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{2} \left[\frac{4 \cdot \sinh^{2} x}{\sinh^{2} 2} + x^{2} - \frac{4x \cdot \sinh x}{\sinh 2} + (2 \cdot \operatorname{csch} 2 \cdot \cosh x - 1)^{2} + \frac{4x \cdot \sinh x}{\sinh 2} - 2x^{2})\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{2} \left(\frac{4 \cdot \sinh^{2} x}{\sinh^{2} 2} - x^{2} + 4 \cdot \operatorname{csch}^{2} 2 \cdot \cosh^{2} x + 1 - 4 \cdot \operatorname{csch} 2 \cdot \cosh x\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^{3}}{3} + x + 2 \cdot \operatorname{csch}^{2} 2 \cdot \sinh 2x - 4 \operatorname{csc} h\, 2 \cdot \sinh x\right]_{0}^{2} = -\frac{14}{3} + 2 \cdot \sinh 4 \cdot \operatorname{csch}^{2} 2) \approx -0'517.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[OPT] E = 19 – 5A = 19 + 2'585 = 21'585 (π = 21.585'00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0'75 $\times$ π = 0'75 $\times$ 21.585'00 = 16.188'75 € .

Ejemplo 15

Se trata de optimizar la función económica del ejercicio anterior dada por: E = 19 – 5A, siendo ahora A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\cdot dx \text{ , con las condiciones: } y(0) = 0 \text{ ; } y(1) = 0.$$

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'^2 - y^2 - 2xy$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y - 2x \text{ ; } \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y' \text{ ; } \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = 2y''.$$

Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: - 2y - 2x - 2y'' = 0, lo que implica que: y''+ y = - x, y la ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, con lo que la solución será: $y^* = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x$. Al objeto de investigar una solución particular de la ecuación completa o no homogénea, al faltarle el término en y' aumentaremos en un grado el polinomio del 2º miembro, esto es:

$$\begin{cases} y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{cases}$$

, y substituyendo estos valores en la ecuación inicial, se obtiene que:

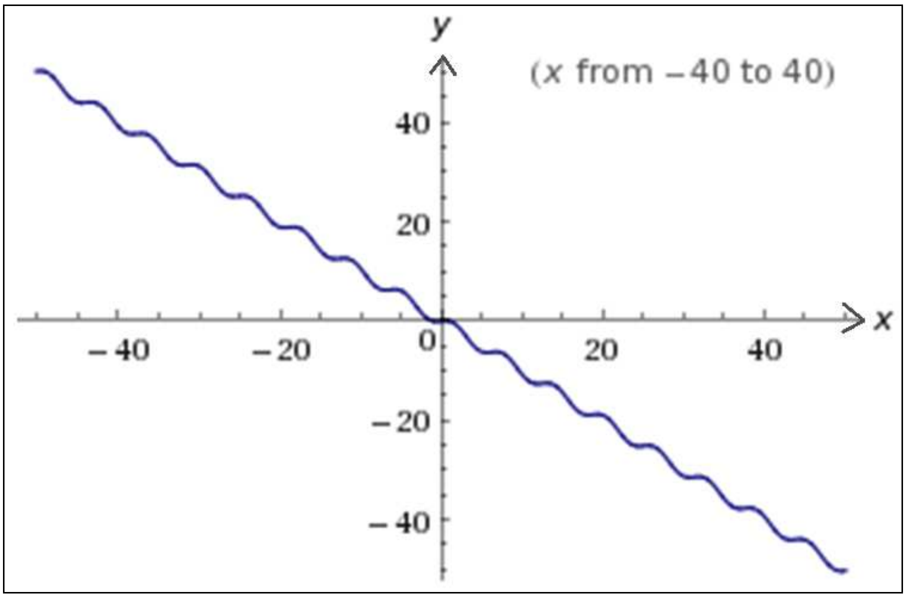
$2a + ax^2 + bx + c = - x \Rightarrow a = c = 0, b = - 1$, con lo que:

$y_p = - x$, y entonces: $y(x) = y^* + y_p = C_1\cdot\cos x + C_2\cdot\sin x - x$;
Aplicando ahora las condiciones de contorno dadas, se tiene que:

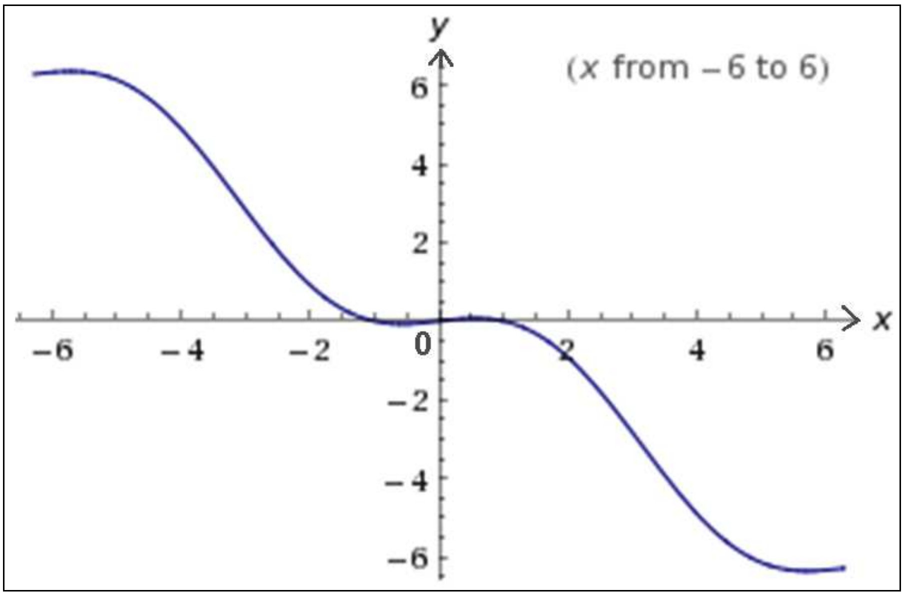
$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y(1) = C_1\cdot\cos 1 + C_2\cdot\sin 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

, de lo que resulta que: $C_1 = 0 ; C_2 = \frac{1}{\sin 1}$, por lo que la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de extremo, sólo puede alcanzarse en la función siguiente: y(x) = $\frac{\sin x}{\sin 1} - x;\ y'(x) = \frac{\cos x}{\sin 1} - 1.$

La representación gráfica de esta extremal es la siguiente:



, y con mayor detalle en un entorno del centro de las coordenadas cartesianas rectangulares:



y tendremos, en definitiva, que la funcional que nos ocupa, de resolución algo prolija, alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^1 (y^2 - y'^2 - 2xy)\cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 1} + x^2 - \frac{2x\cdot\sin x}{\sinh 1} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 1} - 1 + \frac{2\cdot\cos x}{\sin 1} - \frac{2x\cdot\sin x}{\sin 1} + 2x^2\right)\cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^2 - \frac{\cos 2x}{\sin^2 1} - \frac{4x\cdot\sin x}{\sin 1} + \frac{2\cdot\cos x}{\sin 1} - 1\right)\cdot dx =$$

$$= \left[x^3 - x + 4x\cdot\csc 1\cdot\cos x - \frac{1}{2}\csc^2 1\cdot\sin 2x - 2\cdot\csc 1\cdot\sin x\right]_0^1 =$$

$$= 3\cdot\cot 1 - 2 \approx -0'074.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[OPT] E = 19 – 5A = 19 + 0’37 = 19’37 (π = 19.370’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0’75 $\times$ π = 0’75 $\times$ 19.370’00 = 14.527’50 € .

Ejemplo 16

Se trata de optimizar la función económica del ejercicio anterior dada por: E = 19 – 5A, siendo ahora A el funcional dado por:

$A(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2)\cdot dx$, con las condiciones: y(1) = 1 ; y(2) = 8.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = x^2y'^2 + 12y^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 24y\,;\; \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2x^2y'\,;\; \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = 4xy' + 2x^2y''\,.$$

Substituyendo ahora en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $24y - 4xy' - 2x^2y'' = 0$, lo que resulta ser una ecuación diferencial homogénea del tipo de Euler-Cauchy (de 2º orden y coeficientes variables), esto es: $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$, por lo que efectuaremos el cambio de variable habitual en estos casos:

$$x = e^t\,;\quad dx = e^t\cdot dt\,;\quad t = \ln x\,;\quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t};\quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

con lo que substituyendo estas expresiones en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 2\frac{dy}{dt} - 12y = 0 \text{; con lo que resulta: } \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 12y = 0\text{;}$$

que ya es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, con la siguiente ecuación característica de la homogénea:

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \;; \quad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

, y la integral general vendrá dada por la expresión:

$$y = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-4t} = c_1 \cdot x^3 + c_2 \cdot \frac{1}{x^4}\,.$$

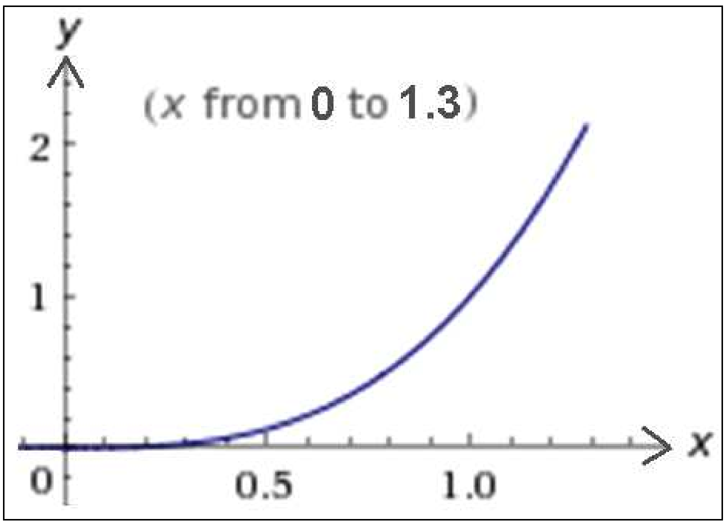
Por otra parte, las condiciones de frontera dadas del problema exigen que:

$$\begin{cases} y(1) = c_1 + c_2 = 1; \\ y(2) = 8c_1 + c_2/16 = 8; \end{cases}$$

de lo que se deduce que: $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, por lo que, con las condiciones iniciales prefijadas, la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de extremo, sólo puede alcanzarse en la función parabólica cúbica que es la solución particular buscada siguiente:

$$y(x) = x^3,$$

que constituye un mínimo fuerte y cuya representación gráfica puede verse a continuación:



Como sea que: $y'(x) = 3x^2$, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_1^2 (x^2y'^2 + 12y^2)\cdot dx = \int_1^2 (x^2 \cdot 9x^4 + 12x^6)\cdot dx = \left[\frac{21x^7}{7}\right]_1^2 = 381.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

$$[OPT]\ E = 19 – 5A = 19 – 1.905 = -1.886.$$

En este caso se producen una pérdidas en el ejercicio económico analizado de 1.886.000’00 € .

Ejemplo 17

Se trata de optimizar la función económica que representa los ingresos por ventas, expresados en millones de euros, obtenidos en un centro comercial dada por: $E = 9 – 8A$, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2}\cdot dx, \text{ con las condiciones: } y(1) = 1 \text{ ; } y(2) = 4.$$

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = x^3/y'^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \,;\, \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -\frac{2x^3}{y'^3} \,;\, \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = \frac{2x^3\cdot 3y'^2\cdot y'' - 6x^2\cdot y'^3}{y'^6} = \frac{6x^3\cdot y'' - 6x^2\cdot y'}{y'^4}.$$

Substituyendo ahora en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $x\cdot y'' – y' = 0$, lo que resulta ser una EDO cuya integral general es: $y(x) = C_1x^2 + C_2$.

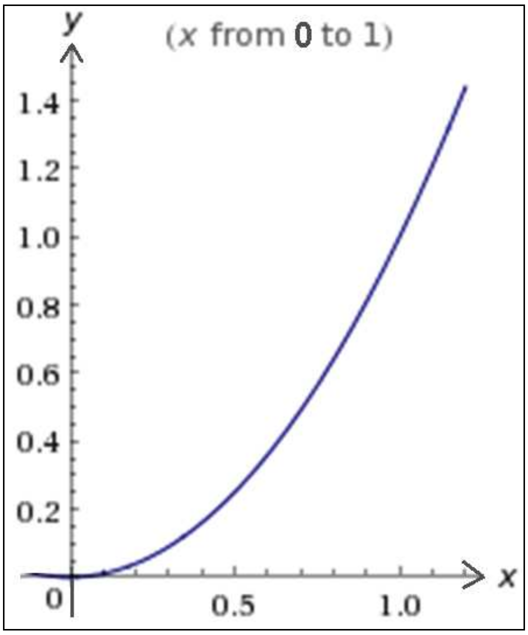
Las condiciones de frontera o de contorno dadas exigen que:

$$\begin{cases} y(1) = C_1 + C_2 = 1 \\ y(2) = 4C_1 + C_2 = 4 \end{cases}$$

lo que supone que: $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, con lo que resulta la integral particular que es el extremal buscado siguiente:

$$y(x) = x^2,$$

que constituye un mínimo débil, con la siguiente representación gráfica:



Como sea que: y'(x) = 2x, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} \cdot dx = \frac{1}{4}\int_1^2 x \cdot dx = \frac{1}{8}\left[x^2\right]_1^2 = \frac{1}{8}(4-1) = \frac{3}{8}.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[OPT] E = 9 – 8A = 9 – 3 = 6, lo que supone unos ingresos de:

I = 6.000.000'00 € .

Ejemplo 18

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa, expresado en miles de euros, dada por: E = 90 – 5A, siendo A el funcional dado por:

$A(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) \cdot dx$, con las condiciones: y(0) = 1/3 ; y(1) = e^2/3.

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y + 2e^{2x} \; ; \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y' \; ; \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = 2y''\,.$$

Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $2y + 2e^{2x} - 2y'' = 0$, lo que resulta ser una ecuación diferencial no homogénea de 2º orden: $y'' - y = e^{2x}$. La ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 - 1 = 0$, de donde: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$, y se tendrá la solución: $y^* = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$.

Como 2 no es raíz de dicha ecuación, se ensaya ahora una solución particular de la completa del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h \cdot e^{2x} \\ y'_p = 2h \cdot e^{2x} \\ y''_p = 4h \cdot e^{2x} \end{cases}$$

y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$4h \cdot e^{2x} - h \cdot e^{2x} = 3h \cdot e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow h = 1/3 \Rightarrow y_p = e^{2x}/3$, y entonces:

$y(x) = y^* + y_p = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + e^{2x}/3$. Del mismo modo, se tiene:

$y'(x) = C_1 \cdot e^x - C_2 \cdot e^{-x} + (2e^{2x})/3$; $y''(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + (4e^{2x})/3$.

Por otra parte, las condiciones de frontera dadas del problema exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + 1/3 = 1/3 \\ y(1) = C_1 \cdot e + C_2 \cdot e^{-1} + e^2/3 = e^2/3 \end{cases}$$

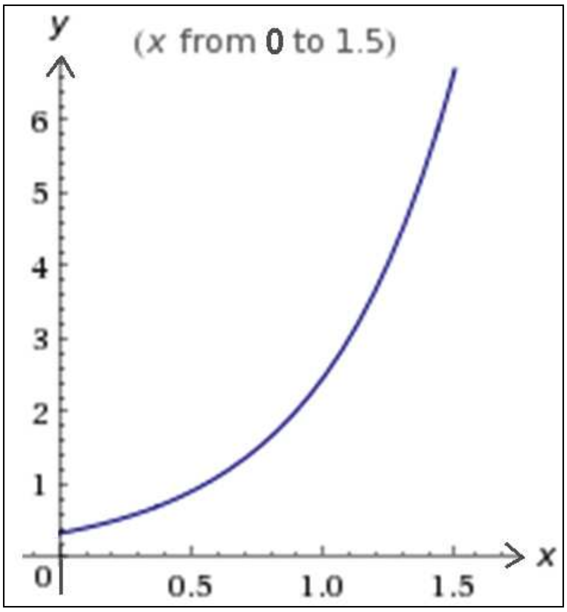
o lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e + C_2/e = 0 \end{cases}$$

, de lo que se deduce que: $C_1 = C_2 = 0$, por lo que, con las condiciones iniciales prefijadas, la curva extremal solicitada, que verifica las condiciones necesarias de extremo, sólo puede alcanzarse en la función exponencial que es la solución particular buscada siguiente:

$$y(x) = e^{2x}/3,$$

que constituye un mínimo fuerte y cuya representación gráfica puede verse a continuación:



Tendremos, en fin, que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x})\cdot dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{4e^{4x}}{9} + \frac{e^{4x}}{9} + \frac{2e^{4x}}{3}\right)\cdot dx = \left[\frac{11e^{4x}}{36}\right]_0^1 = \frac{11(e^4 - 1)}{36} \approx 16'3772.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[OPT] E = 90 – 5A = 90 – 81’886 = 8’114 (π = 8.114’00 €).

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

B = 0’75 $\times$ π = 0’75 $\times$ 8.114’00 = 6.085’50 € .

Ejemplo 19

Se trata de optimizar la función económica que representa los ingresos por ventas, expresados en millones de euros, obtenidos en un establecimiento comercial dada por la expresión: E = 4 – $3A^2$ – e^{2A}, siendo A el funcional dado por:

$A(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\cdot dx$, con las condiciones: y(0) = 0 ; y(π/2) = 1.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'^2 - y^2$, se obtiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y\,;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 2y'\,;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = 2y''\,.$$

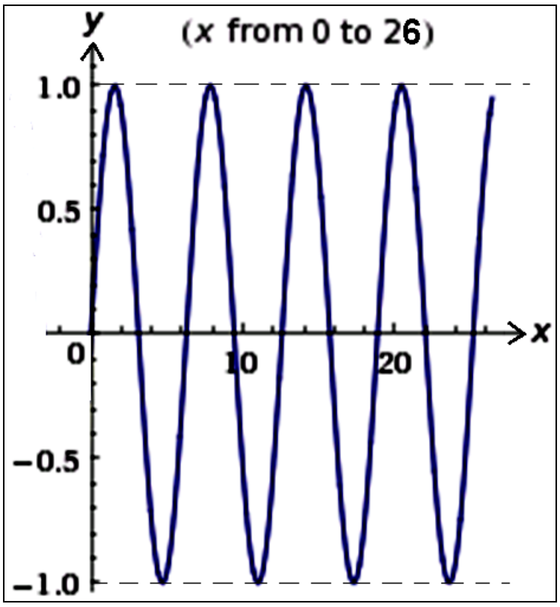
Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: -2y – 2y’’ = 0, esto es: y’’ + y = 0, que es una EDO homogénea de segundo orden cuya ecuación característica es:

$\lambda^2 + 1 = 0$; con sus raíces: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, o sea: $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, por lo que la solución general vendrá dada por la expresión:

$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, y utilizando las condiciones de frontera dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y(\pi/2) = C_2 = 1 \end{cases}$$

por consiguiente el extremo únicamente puede alcanzarse en la curva o función trigonométrica directa: y(x) = sin x, con la siguiente representación gráfica:



Como sea que: y’(x) = cos x, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\cdot dx = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot dx = \int_0^{\pi/2} \cos 2x\cdot dx = \frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = 0\,.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

[OPT] $E = 4 - 3A^2 - e^{2A} = 4 - 1 = 3$, lo que supone unos ingresos de:

I = 3.000.000’00 €.

Ejemplo 20

Se trata de optimizar la función económica dada por la expresión: $E = 4 – 3A^2$, siendo A el funcional dado por:

$A(y) = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y)\cdot dx$, con las condiciones: $y(0) = -1$; $y(\pi/4) = 0$.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas en el enunciado.

Como resulta que la función: $\varphi = 4y^2 - y'^2 + 8y$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 8y + 8\,;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -2y'\,;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = -2y''\,.$$

Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $8y + 8 + 2y'' = 0$, esto es: $y'' + 4y + 4 = 0$, que es una EDO no homogénea de segundo orden, cuya ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 + 4 = 0$, de donde: $\lambda = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ (con $\alpha = 0$ y $\beta = 2$), por lo que la solución de la homogénea será:

$$y^* = C_1\cdot\cos 2x + C_2\cdot\sin 2x.$$

Ensayando ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo: $y_p = k$; $y'_p = 0$; $y''_p = 0$, resultará que substituyendo en la ecuación: $4k = - 4 \Rightarrow k = -1$, y entonces:

$$y(x) = y^* + y_p = C_1\cdot\cos 2x + C_2\cdot\sin 2x – 1,$$

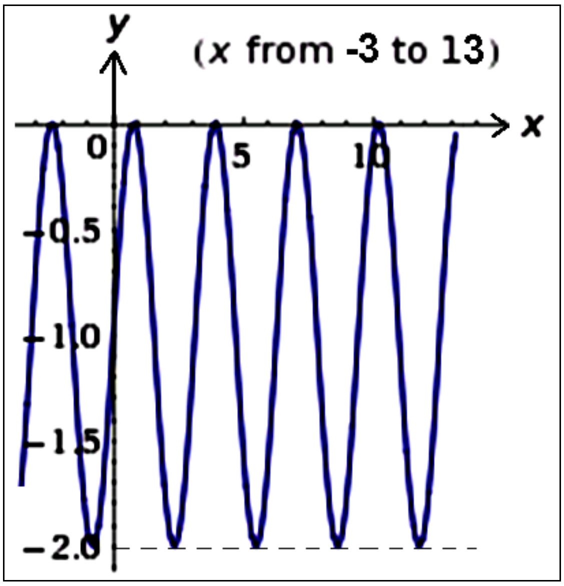
y utilizando las condiciones de contorno o de frontera dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 - 1 = -1 \\ y(\pi/4) = C_2 – 1 = 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que: $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, por consiguiente el extremo únicamente puede alcanzarse en la curva o función trigonométrica directa:

$$y(x) = \sin 2x - 1,$$

y constituye un máximo fuerte, una vez efectuadas las determinaciones pertinentes, con la siguiente representación gráfica:



, puesto que los extremos relativos serán, por la condición necesaria o de primer grado: $y'(x) = 2\cos 2x = 0$, de donde:

$x_1 = \pi/4$ y $x_2 = 3\pi/4$, y entonces:

$$\begin{cases} y(x) = \sin 2x_1 - 1 = \sin(\pi/2) - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ (máximo)} \\ y(x) = \sin 2x_2 - 1 = \sin(3\pi/2) - 1 = -1 - 1 = -2 \text{ (mínimo)} \end{cases}$$

, o bien aplicando la condición suficiente o de 2º grado resultará que:

$$\begin{cases} y''(x) = -4\sin 2x_1 = -4\sin(\pi/2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{MÁX.} \\ y''(x) = -4\sin 2x_2 = -4\sin(3\pi/2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{MíN.} \end{cases}$$

Como sea que: $y'(x) = 2\cos 2x$, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$$A(y) = \int_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y)\cdot dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} 4(\sin^2 2x + 1 - 2\sin 2x) - 4\cdot\cos^2 2x + 8\sin 2x - 8)dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} (4\sin^2 2x + 4 - 8\sin 2x - 4\cdot\cos^2 2x + 8\sin 2x - 8)dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[4(\sin^2 2x - \cos^2 2x) - 4\right]dx = -4\int_0^{\pi/4} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx - 4\int_0^{\pi/4} dx =$$

$$= -4\int_0^{\pi/4} (\cos 4x + 1)dx = -4\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/4} = -4 \times \frac{\pi}{4} = -\pi.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

$$[\text{OPT}]\ E = 4 - 3A^2 = 4 - 3\pi^2.$$

Ejemplo 21

Se trata de optimizar la función económica que representa los costes totales anuales de una empresa (expresados en millones de euros) dada por la expresión: E = 17 – 8A, siendo A el funcional dado por:

$A(y) = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2 + 6y\cdot \sin 2x)\cdot dx$, con las condiciones: $y(0) = 0$; $y(\pi/4) = 1$.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y^2 - y'^2 + 6y\cdot \sin 2x$, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y + 6\cdot \sin 2x\,;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = -2y'\,;\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{\partial y'}\right) = -2y''\,.$$

Substituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson, se tendrá que: $2y + 6\cdot \sin 2x + 2y'' = 0$, esto es: $y'' + y = -3\cdot \sin 2x$, que es una EDO no homogénea de segundo orden, cuya ecuación característica de la homogénea es: $\lambda^2 + 1 = 0$, de donde sus raíces imaginarias son las siguientes: $\lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ (con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$), por lo que la solución de la homogénea será: $y^* = C_1\cdot \cos x + C_2\cdot \sin x$.

Ensayando ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo:

$$\begin{cases} y_p = h\cdot \cos 2x + k\cdot \sin 2x \\ y'_p = -2h\cdot \sin 2x + 2k\cdot \cos 2x \\ y''_p = -4h\cdot \cos 2x - 4k\cdot \sin 2x \end{cases}$$

, y substituyendo en la ecuación inicial, resultará que:

$$-4h\cdot \cos 2x - 4k\cdot \sin 2x + h\cdot \cos 2x + k\cdot \sin 2x = -3\cdot \sin 2x, \text{ esto es:}$$

$$-3h\cdot \cos 2x - 3k\cdot \sin 2x = -3\cdot \sin 2x \Rightarrow h = 0 \text{ y } k = 1 \Rightarrow y_p = \sin 2x,$$

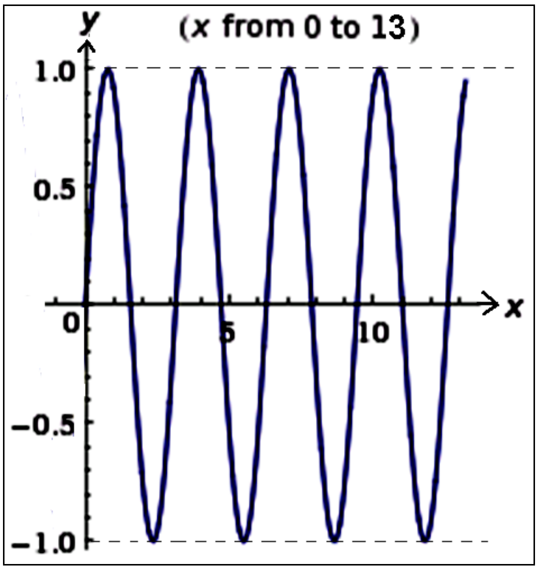
y la integral general de la EDO en cuestión vendrá dada por:

$$y = y^* + y_p = C_1\cdot \cos x + C_2\cdot \sin x + \sin 2x.$$

Pero las condiciones de frontera dadas exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y(\pi/4) = C_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + C_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1 \end{cases}$$

, de lo que se deduce que: $C_1 = C_2 = 0$, y la integral particular resultante será: $y = \sin 2x$, que constituye un máximo fuerte, y cuya representación gráfica es la siguiente:



, puesto que los extremos relativos serán, por la condición necesaria o de primer grado: $y'(x) = 2\cos 2x = 0$, de donde:

$$x_1 = \pi/4 \text{ y } x_2 = 3\pi/4, \text{ y entonces:}$$

$$\begin{cases} y(x) = \sin 2x_1 = \sin(\pi/2) = 1 \text{ (máximo)} \\ y(x) = \sin 2x_2 = \sin(3\pi/2) = -1 \text{ (mínimo)} \end{cases}$$

, o bien aplicando la condición suficiente o de 2º grado resultará que:

$$\begin{cases} y''(x) = -4\sin 2x_1 = -4\sin(\pi/2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{MÁX.} \\ y''(x) = -4\sin 2x_2 = -4\sin(3\pi/2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{MíN.} \end{cases}$$

Como sea que: $y'(x) = 2\cos 2x$, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$$A(y) = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2 + 6y \cdot \sin 2x) \cdot dx = \int_0^{\pi/4} (\sin^2 2x - 4\cos^2 2x + 6\sin^2 2x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} (7 \cdot \sin^2 2x - 4 \cdot \cos^2 2x) \cdot dx = \left[\frac{3x}{2} - \frac{11 \cdot \sin 4x}{8}\right]_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{8}.$$

La función económica en cuestión valdrá:

[OPT] E = 17 – 8A = 17 - 3π = 7’575, y los costes totales anuales serán:

CT = 7.575.000’00 €/año.

Ejemplo 22

Se trata de optimizar la función económica dada por: $E = 5A - 3A^3$, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')\cdot dx$$, con las condiciones: y(0) = 2 ; y(1) = 5.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = xy + y^2 - 2y^2y'$, se obtiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + 2y - 4yy' \; ; \; \frac{\partial \varphi}{\partial y'} = -2y^2 \; ; \; \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right) = -4yy' \; .$$

Consecuentemente, la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson es la ecuación diferencial: $x + 2y - 4yy' + 4yy' = 0$, lo que implica que: $y(x) = -x/2$, con una representación gráfica que, generalmente, no tendrá significado económico.

Teniendo en cuenta ahora las condiciones de contorno, obtendremos que:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \neq 2 \text{ (lo cual es imposible)} \\ y(1) = -1/2 \neq 5 \text{ (lo cual también es imposible)} \end{cases}$$

Así pues, el problema dado carece de solución (no tiene máximo ni mínimo) y no hay ningún extremal que verifique las condiciones inicial y final.

Ejemplo 23

Se trata de optimizar la función económica dada por: $E = 6A - 3A^2$, siendo A el funcional dado por:

$$A(y) = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x^2)\cdot dx$$, con las siguientes condiciones de frontera:

$y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; $y(\pi/2) = 0$; $y'(\pi/2) = -1$.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y''^2 - y^2 + x^2$, se obtiene:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y\,;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0\,;\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) = 0;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y''} = 2y''\,;\quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y''}\right) = 2y^{IV}\,.$$

Consecuentemente, la ecuación de Euler-Lagrange-Poisson es la ecuación diferencial: $y^{IV} - y = 0$, que es una EDO homogénea de cuarto orden cuya ecuación característica es: $\lambda^4 - 1 = 0$, con las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$; de la que se deduce la integral general:

$$\begin{cases} y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x; \\ y'(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} - C_3\sin x + C_4\cos x; \\ y''(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x; \end{cases}$$

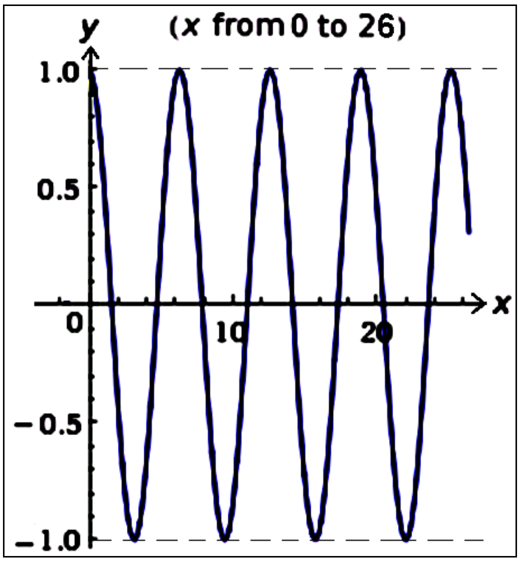
, y teniendo ahora en cuenta las condiciones de contorno dadas, resultará que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y(\pi/2) = C_1\cdot e^{\pi/2} + C_2\cdot e^{-\pi/2} + C_4 = 0 \\ y'(0) = C_1 - C_2 + C_4 = 0 \\ y'(\pi/2) = C_1\cdot e^{\pi/2} - C_2\cdot e^{-\pi/2} - C_3 = -1 \end{cases}$$

Así pues, el sistema anterior heterogéneo, compatible y determinado, tiene una solución única, que se puede obtener por aplicación de la regla de Cramer, inversión de la matriz o bien por el método de triangularización de Gauss-Jordan, de lo que se concluye que:

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0,\ y\ C_3 = 1.$$

De este modo, el extremo buscado solamente puede alcanzarse en la curva de ecuación: $y(x) = \cos x$, cuya representación gráfica es la siguiente:



Como sea que: y'(x) = - sin x, e y''(x) = - cos x, tendremos que la funcional que nos ocupa alcanzará el valor:

$$A(y) = \int_0^{\pi/2}(y''^2 - y^2 + x^2)\cdot dx = \int_0^{\pi/2}(\cos^2 x - \cos^2 x + x^2)\cdot dx = \int_0^{\pi/2} x^2\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

$$[OPT]\ E = 6A - 3A^2 = \frac{\pi^3}{4} - \frac{3\pi^6}{576} = \frac{\pi^3(48-\pi^3)}{192}.$$

Ejemplo 24

Se trata de optimizar la función económica siguiente que representa el beneficio bruto contable de una empresa, expresado en millones de euros, dada por la expresión: $E = 2 + 3A^2 + 2e^A$, siendo, a su vez, A el funcional dado por la integral definida:
$A(y,z) = \int_0^{\pi/2}(y'^2 + z'^2 + 2yz)\cdot dx$, con las siguientes condiciones de contorno:
y(0) = 0 ; y(π/2) = 1 ; z(0) = 0 ; z(π/2) = -1.

Determinar el beneficio neto resultante teniendo en cuenta una fiscalidad del 25% en el impuesto de sociedades.

Solución:

El problema planteado consiste en determinar los extremales de A, teniendo en cuenta las condiciones dadas. Como resulta que la función: $\varphi = y'^2 + z'^2 + 2yz$, por lo que en este caso en el integrando figuran varias funciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2y' \ ; \ \frac{\partial\varphi}{\partial z'} = 2z'.$$

En su consecuencia, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange-Poisson siguiente:

$$\begin{cases} y'' - z = 0 \\ z'' - y = 0 \end{cases}$$

, eliminando ahora una de las dos funciones desconocidas, por ejemplo la *z*, y teniendo en cuenta que: z = y'' ; z' = y''' ; $z'' = y^{IV}$, resultará la ecuación:

$y^{IV} - y = 0$, que es una EDO homogénea de cuarto orden cuya ecuación característica es: $\lambda^4 - 1 = 0$, con las raíces: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$; de la que se deduce la integral general:

$$\begin{cases} y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x; \\ y'(x) = C_1e^x - C_2e^{-x} - C_3\sin x + C_4\cos x; \text{ y también:} \\ z(x) = y''(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x; \end{cases}$$

, y teniendo ahora en cuenta las condiciones de contorno dadas, resultará que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ y(\pi/2) = C_1\cdot e^{\pi/2} + C_2\cdot e^{-\pi/2} + C_4 = 1 \\ z(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ z(\pi/2) = C_1\cdot e^{\pi/2} + C_2\cdot e^{-\pi/2} - C_4 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1\cdot e^{\pi/2} + C_2\cdot e^{-\pi/2} = 0 \end{cases}$$, y resultará que:

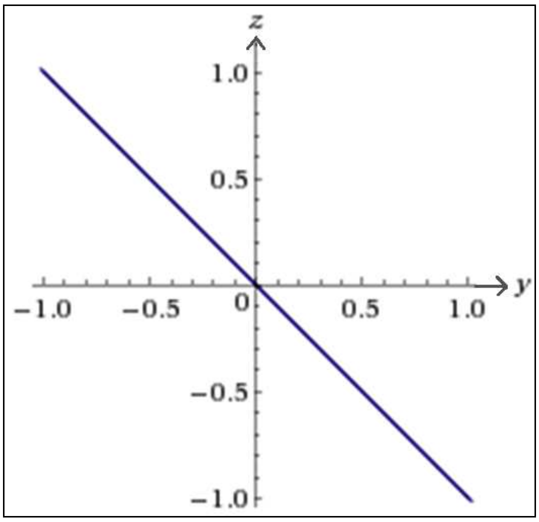
$C_1\cdot e^{\pi/2} - C_1\cdot e^{-\pi/2} = 0 = C_1(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})$, de lo que se concluye que:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \text{ y } C_4 = 1.$$

Y entonces se tienen las extremales:

$$\boxed{\begin{array}{c} y = \sin x \\ z = -\sin x \\ y = -z \end{array}}$$

con la siguiente representación paramétrica gráfica:



Consecuentemente se tendría: y' = cos x ; z' = -cos x, con lo que el funcional que nos ocupa alcanzará el valor siguiente:

$$A(y,z) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\cdot dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2(\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2x\cdot dx = [\sin 2x]_0^{\pi/2} = 0.$$

Y la función económica en cuestión valdrá:

$$[OPT]\ E = 2 + 3A^2 + 2e^A = 4\ (\pi = 4.000.000'00\ €).$$

De este modo, el beneficio después de impuestos será:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 4.000.000'00 = 3.000.000'00\ €\ .$$

Ejemplo 25

Hallar el mínimo del funcional: $A(y) = \int_0^{\pi} y'(x)^2\cdot dx$, afecto a la función económica: $E = 2 - 3A^2$, con las condiciones: $y(0) = y(\pi) = 0$, y sujeto a la restricción: $\int_0^{\pi} y(x)^2\cdot dx = 1$.

Solución:

En los ejercicios anteriores hemos visto las condiciones necesarias para la existencia de un extremo de funcionales definidos en clases de funciones que toman valores constantes en la frontera. Ahora bien, pueden existir ciertas aplicaciones económicas en las que proceda considerar restricciones adicionales sobre el conjunto de las funciones admisibles; entre las más importantes se hallan las restricciones de tipo isoperimétrico (como es el caso de la que aquí nos ocupa) y las de igualdad.

En este caso, el funcional asociado es: $A^*(y) = \int_0^{\pi} [y'(x)^2 + \lambda y(x)^2]\cdot dx$, con: $\varphi = (y'^2 + \lambda y^2)$, y la ecuación de Euler-Legendre viene dada por la EDO: $y'' = \lambda\cdot y$, es decir, se trata de un problema de autovalores. La ecuación característica de esta EDO es: $r^2 - \lambda = 0$, con lo que sus raíces serán: $r = \pm\sqrt{\lambda}$. Si $\lambda \geq 0$, entonces la integral general viene dada por:

$y(x) = C_1e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2e^{-x\sqrt{\lambda}}$, y las condiciones de frontera exigirían que:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y(\pi) = C_1e^{\pi\sqrt{\lambda}} + C_2e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = 0, \end{cases}$$

lo que implicaría el absurdo de que $\pi = -\pi$, por lo que no se cumplen las condiciones de frontera, de tal suerte que no hay solución para el caso en que $\lambda \geq 0$. En el caso contrario, o sea, para $\lambda < 0$, se tiene que la integral general es:

$$y(x) = C_1 \sin(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \cos(x\sqrt{-\lambda}).$$

Aquí, las condiciones de frontera exigen que:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0 \\ y(\pi) = C_1 \sin(\pi\sqrt{-\lambda}) + C_2 \cos(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases}$$

Con ello, resultará que: $C_1 \sin(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0$, o bien: $y(x) = C_1\sin kx$, habiendo hecho: $k = \sqrt{-\lambda}$. Por otra parte, la condición isoperimétrica dada implica que:

$$1 = \int_0^{\pi} y(x)^2 \cdot dx = C_1^2 \int_0^{\pi} \sin^2 kx \cdot dx = C_1^2 \int_0^{k\pi} \sin^2 s \frac{ds}{k} = \frac{C_1^2}{k}\left[\frac{s}{2} - \frac{\sin 2s}{4}\right]_0^{k\pi} = \frac{C_1^2 \cdot \pi}{2},$$

habiendo hecho el cambio de variable: $x = s/k$, o bien directamente:

$$\int_0^{\pi} y(x)^2 \cdot dx = C_1^2 \int_0^{\pi} \sin^2 kx \cdot dx = C_1^2\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^{\pi} = C_1^2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi k}{4k}\right] = \frac{C_1^2 \cdot \pi}{2}, \text{ c.s.q.d.,}$$

de donde puede deducirse que: $C_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, y la solución buscada quedará del siguiente modo: $y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$, es decir, hay una familia uniparamétrica de extremales que, de hecho, también satisfacen la condición de Legendre. En su consecuencia, $y'(x) = \pm k \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx$, y la extremal dada será:

$$A(y) = \int_0^{\pi} y'(x)^2 \cdot dx = \frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 kx \cdot dx = \frac{2k^2}{\pi}\left[\frac{\sin 2xk}{4k} + \frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2k^2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = k^2 = -\lambda,$$

por lo que la función económica que nos ocupa valdrá:

$$[\text{OPT}]\ E = 2 - 3 \cdot A^2 = 2 - 3\lambda^2.$$

Ejemplo 26

Hallar los extremales del funcional: A(y) = $\int_0^1 [y'(x)^2 + x^2]\cdot dx$, afecto a la función económica: E = 2 – 3A, con las condiciones: y(0) = y(1) = 0, y sujeto a la restricción: $\int_0^1 y(x)^2 \cdot dx = 2$.

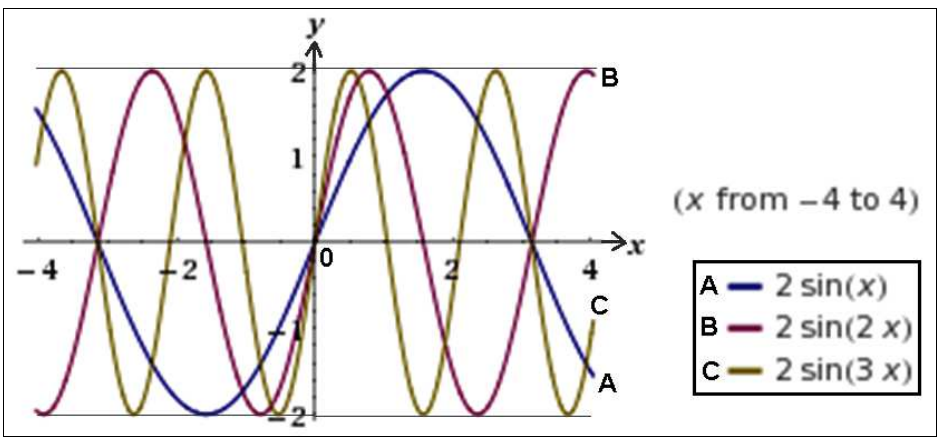
Solución:

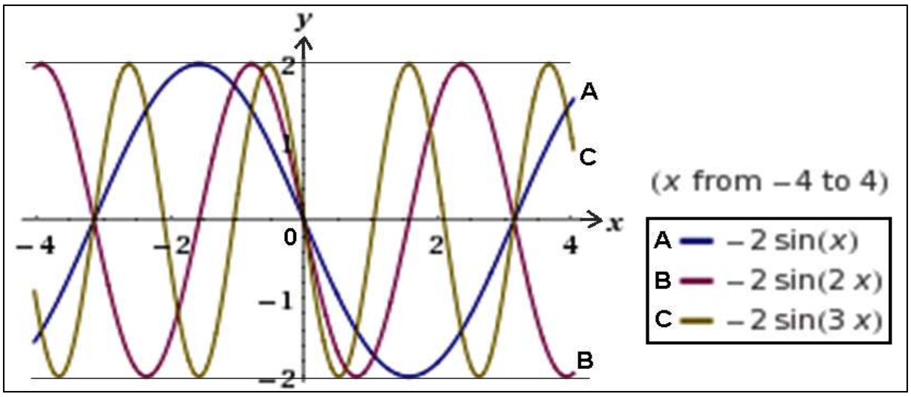
Siguiendo aquí los mismos pasos que en el ejercicio anterior veamos que, en este caso, el funcional asociado o auxiliar es el siguiente: A*(y) = $\int_0^1 [y'(x)^2 + x^2 + \lambda y(x)^2]\cdot dx$, con: $\varphi = (y'^2 + x^2 + \lambda \cdot y^2)$, y después de aplicar la ecuación de Euler-Legendre y las condiciones de frontera, como puede comprobar el amable lector/a, exigirían que la integral general sea: $y(x) = C_1 \sin kx$, habiendo hecho: $k = n\cdot\pi$, $\forall\ n \in \{\mathbb{Z}\}$. Por otra parte, la condición isoperimétrica dada implica que:

$$2 = \int_0^1 y(x)^2 \cdot dx = C_1^2 \int_0^1 \sin^2 kx \cdot dx = C_1^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^1 = C_1^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin 2k}{4k}\right],$$

de donde puede deducirse que: $C_1 = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 2k}{4k}}}$, y la solución buscada quedará establecida del siguiente modo:

$y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 2k}{4k}}} \sin kx = (k = n\cdot\pi) = \pm\sqrt{4}\cdot \sin(kx) = \pm 2\cdot \sin(kx)$, es decir, hay una familia uniparamétrica de extremales que, de hecho, también satisfacen la condición de Legendre. Se tendrán, por ejemplo, las siguientes representaciones gráficas para k ∈ (1,2,3), respectivamente de: y(x) = 2·sin(kx); y(x) = - 2·sin(kx). A saber:





En su consecuencia, y'(x) = $\pm 2k\cdot \cos kx$, y la extremal dada será:

$$A(y) = \int_0^1 [y'(x)^2 + x^2]\cdot dx =$$

$$\int_0^1 (4k^2\cdot \cos^2 kx + x^2)\cdot dx = 4k^2\int_0^1 \cos^2 kx\cdot dx + \int_0^1 x^2\cdot dx = 4k^2\left[\frac{\sin 2xk}{4k} + \frac{x}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 2k^2 + \frac{1}{3} = \frac{6n^2\cdot\pi^2 + 1}{3}, \text{por lo que la función económica que nos ocupa valdrá:}$$

$$[OPT]\ E = 2 – 3\cdot A = 1 - 6\cdot n^2\cdot\pi^2.$$

Ejemplo 27

Hallar los extremales del funcional: A(y,z) = $\int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\cdot dx$, viniendo expresado en millones de unidades anuales de producto, tratando de optimizar la función económica de producción neta de una fábrica de conservas vegetales dada por: E = 2 – 3A, con las condiciones de frontera: y(0) = 0; z(0) = 0; y(1) = 1; z(1) = 1, y sujeto a la restricción: $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\cdot dx = 2$, considerando un 3% de mermas en el proceso productivo. Estimar la cifra de negocios para un precio de salida de fábrica de 4'50 €/ud.

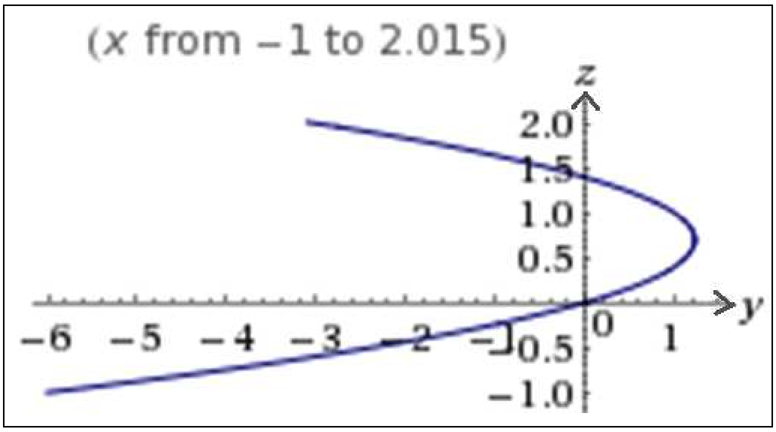
Solución:

Siguiendo aquí los mismos pasos que en el ejercicio anterior veamos que, en este caso, el funcional asociado o auxiliar es el siguiente: A*(y) = $\int_0^1 [y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)]\cdot dx$, con:

$\varphi = (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda\cdot y'^2 - \lambda xy' - \lambda z'^2)$, y después de aplicar la ecuación de Euler-Legendre, la restricción isoperimétrica y las condiciones de frontera, como puede comprobar el amable lector/a, exigirían que la integral particular buscada sea:

$y = -\frac{5x^2}{2} + \frac{7x}{2} = \frac{x(7-5x)}{2}$, y también: z = x, por lo que: $y = \frac{z(7-5z)}{2}$,

con la siguiente representación paramétrica gráfica:



En su consecuencia, se tendrá que:

y' = - 5x + 7/2 ; z' = 1 ; y la extremal dada será la siguiente:

$$A(y,z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\cdot dx =$$

$$\int_0^1 (25x^2 + \frac{49}{4} - 35x + 1 - 4x - 4x)\cdot dx = \int_0^1 (25x^2 - 43x + \frac{53}{4})\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{25x^3}{3} - \frac{43x^2}{2} + \frac{53x}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

por lo que la función económica que nos ocupa valdrá:

[OPT] E = 2 – 3·A = 2 – ¼ = 7/4, que representa la producción bruta.

La producción neta de la factoría será, pues, teniendo en cuenta las mermas del proceso productivo (3%), de:

P_n = (7/4) × 1.000.000 × 0'97 = 1.697.500 ud./año, y una cifra de negocios correspondiente de:

1.697.500 ud./año × 4'50 €/ud. = 7.638.750'00 €/año.

Parte IV:

Sistemas de ecuaciones infinitesimales.

- Sistemas de ecuaciones diferenciales.
- Sistemas de ecuaciones integrales.

* * * * * * *

CAPÍTULO 9a

SISTEMAS DE ECUACIONES INFINITESIMALES I

1. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1.1. INTRODUCCIÓN

Para la determinación de varias funciones: $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, son necesarias entre ellas, sus derivadas y la variable independiente o explicativa *x*, por lo menos tantas ecuaciones diferenciales como indica el número *n* de funciones incógnita. Si estas ecuaciones diferenciales no son todas de primer orden, por la introducción de funciones de nuevas incógnitas se podrá conseguir siempre la obtención de un denominado *sistema de primer orden*.

En el presente capítulo estudiaremos básicamente los sistemas de EDO de primer orden (en concreto los lineales) y alguno de segundo orden. Al respecto, es importante hacer notar que un sistema de ecuaciones diferenciales de cualquier orden puede transformarse también en uno de primer orden, lo que simplifica notablemente su resolución.

En efecto, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, se puede escribir así en la denominada "forma normal" cuando viene expresado del siguiente modo:

$$\begin{cases} y'_1 = \dfrac{dy_1}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}y_i + b_1(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y'_2 = \dfrac{dy_2}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i}y_i + b_2(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = \dfrac{dy_n}{dx} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ni}y_i + b_n(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases}$$

donde, en general, las a_{ij} son funciones de la variable independiente x, aunque nosotros estudiaremos únicamente el caso de que dichos coeficientes sean constantes. En el caso en que todas las $b_i(x)$ sean idénticamente nulas, el sistema se llama *homogéneo* o *incompleto*; en caso contrario, se trataría de un sistema *no homogéneo*, *inhomogéneo*, *heterogéneo* o *completo*.

El método general para resolver el sistema anterior consiste, mediante las derivaciones convenientes, en eliminar (n-1) funciones y_i, quedando reducido el sistema a una ecuación diferencial lineal de orden *n*; si el sistema es de coeficientes constantes, la ecuación resultante también lo será. Dicha eliminación puede lograrse bien directamente o bien utilizando el operador D, como también hemos hecho en algún capítulo anterior, lo que se verá posteriormente en la resolución de algunos ejemplos representativos.

1.2. INTEGRAL GENERAL DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO CON COEFICIENTES CONSTANTES

1.2.1. Raíces simples de la ecuación característica

Nos plantearemos, en este epígrafe, obtener la solución general de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} y_i = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} y_i = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

en la que $a_{ij} \in R$, $\forall$ i,j = 1, …, n. De los resultados anteriores sabemos que, conociendo n soluciones linealmente independientes del sistema, estaremos en condiciones de dar una expresión de su solución general. Con este fin, sea (siendo I_n la matriz identidad o unidad de orden *n*, que es diagonal y escalar):

$$|A - \lambda \cdot I_n| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

la que denominaremos “ecuación característica o secular del sistema”. Sabemos que sus raíces son los autovalores, raíces características o valores propios de la matriz siguiente de los coeficientes del sistema:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Son precisamente dichas raíces, en este caso reales, las que nos van a proporcionar las soluciones buscadas. En efecto, las *n* soluciones del sistema:

$$y_1 = \begin{bmatrix} x_{11}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ x_{n1}e^{\lambda_1 x} \end{bmatrix}, \ldots, y_n = \begin{bmatrix} x_{1n}e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ x_{nn}e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}, \text{ son linealmente independientes.}$$

Demostración. Su determinante funcional wronskiano será:

$$W = \begin{vmatrix} x_{11}e^{\lambda_1 x} & \cdots & x_{1n}e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}e^{\lambda_1 x} & \cdots & x_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

que es distinto de cero, ya que: $\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, por ser sus columnas una base de autovectores, vectores característicos o vectores propios.

Podemos afirmar, en definitiva, que matricialmente:

$$\boxed{y = c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} e^{\lambda_n x}}$$

. O lo que es lo mismo, que:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \cdot x_{11} \cdot e^{\lambda 1 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot x_{1n} \cdot e^{\lambda n \cdot x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_{1i} \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \\ y_2 = c_1 \cdot x_{21} \cdot e^{\lambda 1 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot x_{2n} \cdot e^{\lambda n \cdot x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_{2i} \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c_1 \cdot x_{n1} \cdot e^{\lambda 1 \cdot x} + \ldots + c_n \cdot x_{nn} \cdot e^{\lambda n \cdot x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_{ni} \cdot e^{\lambda_i \cdot x} \end{cases}$$

, que constituye la solución o integral general del sistema de EDO planteado.

Veamos, a continuación, los siguientes ejemplos que juzgamos suficientemente representativos de lo expuesto:

Ejemplo 1

En dos mercados diferentes pero interrelacionados, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 4y_1 + 3y_2 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = 0 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio en el mercado 1 en €/ud., y_2 = precio en el mercado 2 en €/ud., con x = cantidad demandada diaria expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de demanda de ambos mercados para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 2'00 €/ud. e $y_2(0)$ = 3'00 €/ud., empleando el método matricial, b) igualmente empleando el método de los operadores, c) ¿a qué precio corresponderá una demanda global nula? y ¿cuál será la cantidad demandada para un precio nulo?, y d) estudiar el equilibrio del mercado para una oferta global dada por la ecuación integral siguiente: $y = x + \int_0^x y(t)\cdot \sin(x-t)\cdot dt$, averiguando los ingresos de los oferentes.

Solución:

a) Este sistema de EDO se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = -4y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = -2y_1 - 5y_2 \end{cases} ; \quad A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$; la ecuación característica o secular del sistema será: $[\lambda\cdot I_2 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & 3 \\ 2 & \lambda+5 \end{bmatrix}$;

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$$(\lambda + 4)\cdot(\lambda + 5) - 6 = 0 \ ; \quad \lambda^2 + 5\lambda + 4\lambda + 20 - 6 = 0 \ ; \quad \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0.$$

$$\lambda = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} -2 = \lambda_1 \\ -7 = \lambda_2 \end{cases} ; \quad A\cdot x_i = \lambda_i\cdot x_i \ ;$$

$\boxed{\lambda_1 = -2}$ $\quad \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$;

$$\left.\begin{aligned}-4x_1-3x_2&=-2x_1\\-2x_1-5x_2&=-2x_2\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}4x_1+3x_2&=2x_1\\2x_1+5x_2&=2x_2\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}2x_1&=-3x_2\\3x_2&=-2x_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ k\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}.$$

$\boxed{\lambda_2 = -7}$

$$\begin{bmatrix}-4 & -3\\-2 & -5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7x_1\\-7x_2\end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned}-4x_1-3x_2&=-7x_1\\-2x_1-5x_2&=-7x_2\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}4x_1+3x_2&=7x_1\\2x_1+5x_2&=7x_2\end{aligned}\right\}\ 3x_2=3x_1\Rightarrow x_1=x_2\ ;\quad k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

luego la integral general será: $y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\cdot e^{-2x}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot e^{-7x}$; o sea:

$$\begin{cases}y_1 = 3c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot e^{-7x}\\ y_2 = -2c_1\cdot e^{-2x} + c_2\cdot e^{-7x}\end{cases}$$

, que constituye la solución general, en que también se cumple que:

$$y_1 - y_2 = 5c_1\cdot e^{-2x}.$$

Atendiendo ahora a las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, se tendrá que:

$$\begin{cases}3c_1 + c_2 = 2\\ -2c_1 + c_2 = 3\end{cases}$$

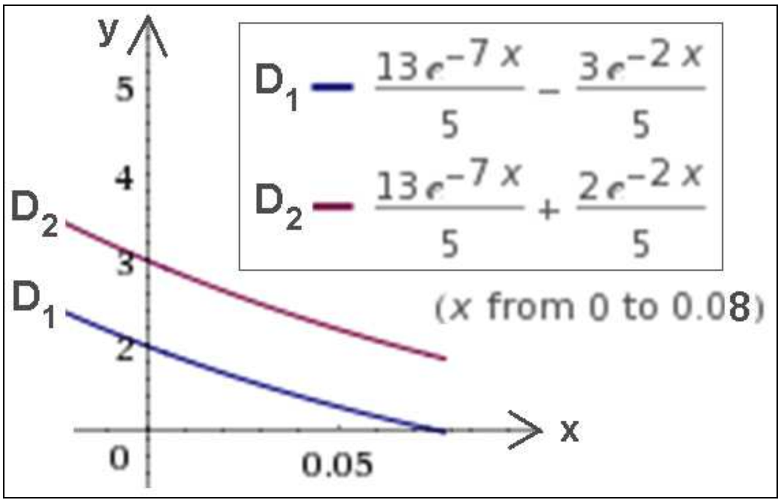
, que es un sencillo sistema de ecuaciones heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), así:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-1}{5};$$ de donde se deduce que:

$c_1 = -1/5$ y $c_2 = 2 + 3/5 = 13/5$, y las funciones de demanda buscadas serán:

$$\boxed{\begin{aligned}D_1 &\Rightarrow y_1 = (-3/5)\cdot e^{-2x} + (13/5)\cdot e^{-7x}\\ D_2 &\Rightarrow y_2 = (2/5)\cdot e^{-2x} + (13/5)\cdot e^{-7x}\end{aligned}}$$

, con las siguientes representaciones gráficas:



y atribuyendo la misma representatividad o ponderación a ambos mercados, resultaría una función de demanda global del producto en cuestión de:

$$D \Rightarrow y = \frac{D_1 + D_2}{2} = (-1/10)\cdot e^{-2x} + (13/5)\cdot e^{-7x}.$$

b) Este sistema se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}(D+4)y_1 + 3y_2 = 0\\ 2y_1 + (D+5)y_2 = 0\end{array}\right\}$$

, que resulta equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(D+5)(D+4)y_1 + 3(D+5)y_2 = 0\\ -6y_1 - 3(D+5)y_2 = 0\end{array}\right\}$$

, de donde se deduce que:

$$(D^2 + 4D + 5D + 20)y_1 - 6y_1 = (D^2 + 9D + 14)y_1 = 0;$$

, que resulta ser una ecuación lineal, con lo que:

$$D = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} D_1 = -2 \\ D_2 = -7 \end{cases}$$, a la que corresponde la solución general:

$$\boxed{y_1 = C_1\cdot e^{-7x} + C_2\cdot e^{-2x}}$$

, y substituyendo en la primera ecuación el valor así obtenido, se tendrá que: $-7C_1\cdot e^{-7x} - 2C_2\cdot e^{-2x} + 4C_1\cdot e^{-7x} + 4C_2\cdot e^{-2x} + 3y_2 = 0$, de donde se deduce que:

$$\boxed{y_2 = C_1 \cdot e^{-7x} - (2/3)C_2 \cdot e^{-2x}}$$

, valores estos plenamente coincidentes con los obtenidos anteriormente dejando a salvo de la arbitrariedad de las constantes. Se cumple, además, que:

$$y_1 - y_2 = (5/3)C_2 \cdot e^{-2x} = C_3 \cdot e^{-2x}, \text{ con } C_3 = 5c_1,\ C_1 = c_2 \text{ y } C_2 = 3c_1,$$

arrojando, obviamente, los mismos resultados que por el procedimiento anterior señalado en a).

c) Si x = 0, se tendrá un precio global de:

$y = -\frac{1}{10} + \frac{13}{5} = \frac{25}{10} = 2'50$ €/ud., como también puede deducirse de la contemplación del gráfico adjunto.

Por otra parte, para un precio nulo (y = 0 €/ud.), se tendrá una cantidad demandada de:

$(-1/10) \cdot e^{-2x} + (13/5) \cdot e^{-7x} = 0$; $26e^{-7x} = e^{-2x}$; $26e^{-5x} = 1$; de aquí se deduce:

$$\ln 26 - 5x = 0;\ x = \frac{\ln 26}{5} = 0'6516193 \approx 0'652 \text{ (652 ud.)}.$$

d) La función de oferta global del producto en cuestión viene expresada como una ecuación integral inhomogénea de Volterra de 2ª especie, con $\lambda = 1$, del tipo de convolución, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

Veamos que esta ecuación integral se puede escribir, teniendo en cuenta la definición de la convolución de las dos funciones *y(x)* y *sin x*, como: $y(x) = x + y(x) * \sin x$. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de esta ecuación y aplicando el teorema de convolución (véase el epígrafe 3 del capítulo anterior 7), se tendrá que:

$$L(y) = L(x) + L(y) \cdot L(\sin x) =$$

$$= \frac{1}{S^2} + \frac{L(y)}{S^2+1} = \frac{S^2+1}{S^2(S^2+1)} + \frac{S^2 \cdot L(y)}{S^2(S^2+1)} = \frac{S^2+1+S^2 \cdot L(y)}{S^4+S^2}, \text{ de donde:}$$

$$L(y) \cdot (S^4 + S^2) = S^2 + 1 + S^2 \cdot L(y) = S^4 \cdot L(y) + S^2 \cdot L(y), \text{ y entonces:}$$

$$L(y) = \frac{S^2+1}{S^4} = \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^4}, \text{ de donde se deduce que:}$$

$$\boxed{y(x) = x + \frac{x^3}{3!} = x + \frac{x^3}{6}},$$

que es, por cierto, la solución buscada, tal como se puede verificar por substitución directa como sigue:

$$y(x) = x + \int_0^x (t + \frac{t^3}{6}) \cdot \sin(x-t) \cdot dt = x + \left[\frac{t^2}{6} [3 \cdot \sin(x-t) + t \cdot \cos(x-t)] \right]_0^x = x + \frac{x^3}{6},$$

que puede comprobarse mediante la resolución de esta integral trigonométrica aplicando las fórmulas de integración por partes y de reducción pertinentes, ejercicio recapitulatorio éste que se propone al amable lector/a.

Por otra parte, se presume también en el caso de esta función de oferta la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también sucede que $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} (\frac{x^2}{6} + 1) = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Así pues, en el equilibrio sucederá que (D = O):

$$\begin{cases} D \to y = (-1/10) \cdot e^{-2x} + (13/5) \cdot e^{-7x} \\ O \to y = x + \frac{x^3}{6} \end{cases}$$

$(-1/10) \cdot e^{-2x} + (13/5) \cdot e^{-7x} = x + \frac{x^3}{6}$; cuya única solución real es:

$$x = 0'28743 \approx 0'287 \text{ (287 ud.)}.$$

En este caso: $y = 0'287 + \frac{0'287^3}{6} = 0'291$, o sea, el equilibrio del mercado tiene lugar para un precio medio de 0’29 €/ud. y una cantidad diaria de 287 ud./día de producto, con unos ingresos brutos diarios de los vendedores de:

$$I = p \times q = 0'29 \times 287 = 83'23 \text{ €}.$$

La representación gráfica de esta solución, que es evidentemente una parábola cúbica por lo que se refiere a la función de oferta global, así como del punto de equilibrio del mercado, se exponen a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas cartesianas rectangulares):

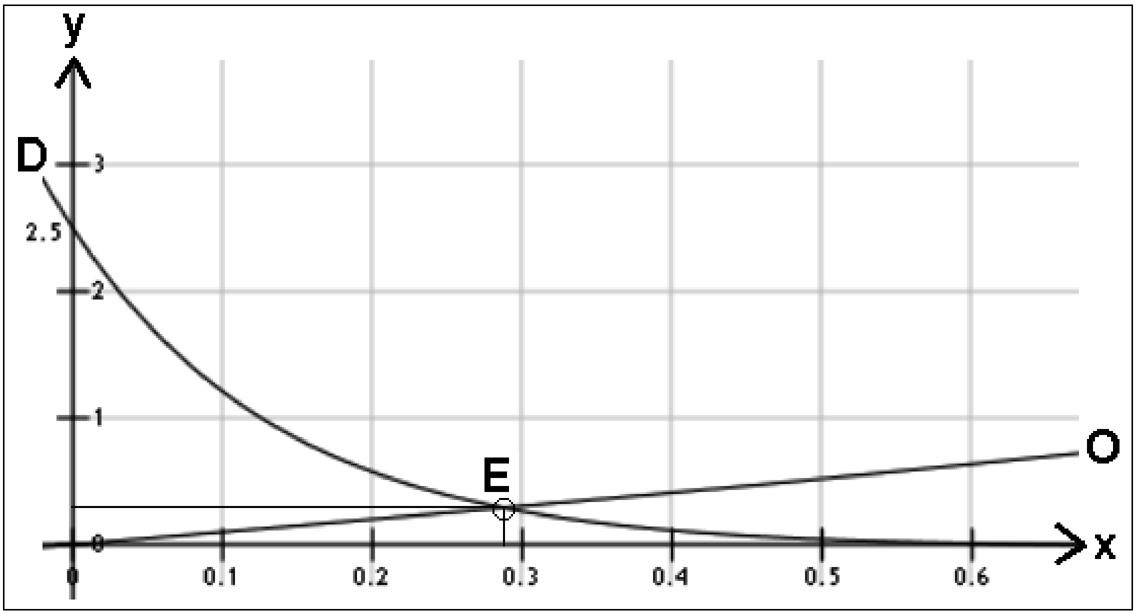


FIG. 9.1. Oferta, demanda y punto de equilibrio (I).

Ejemplo 2

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = -y_1 + y_2 \\ y'_2 = -6y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 2'00 €/ud.; b) ¿a qué precios corresponderá una oferta del producto de 1.200 ud.?, y c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: y = 15 – 5x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) Se tiene la matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$. La ecuación característica o secular vendrá dada por:

$$[\lambda \cdot I_2 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 6 & \lambda-4 \end{bmatrix},$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$$(\lambda + 1)\cdot(\lambda-4) + 6 = 0;\ \ \lambda^2 - 4\lambda + \lambda - 4 + 6 = 0;$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\ \begin{cases}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 2\end{cases};\ \ A\cdot x_i = \lambda_i\cdot x_i\ .$$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\rightarrow$ $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$; del que se deduce el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}-x_1 + x_2 &= x_1\\ -6x_1 + 4x_2 &= x_2\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned}2x_1 &= x_2\\ -6x_1 + 8x_1 &= 2x_1\end{aligned}\right\}\ k\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix};$$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ $\rightarrow$ $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\ 2x_2\end{bmatrix}$; del que se deduce el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}-x_1 + x_2 &= 2x_1\\ -6x_1 + 4x_2 &= 2x_2\end{aligned}\right\}\ x_2 = 3x_1 \Rightarrow\ k\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix},$$

que conforman la integral general:

$$y = \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} = c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\cdot e^x + c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\cdot e^{2x} = \left\{\begin{aligned}c_1\cdot e^x + c_2\cdot e^{2x} &= y_1\\ 2c_1\cdot e^x + 3c_2\cdot e^{2x} &= y_2\end{aligned}\right\}\rightarrow \text{I.G.},$$

y es su solución general, en la que, por cierto, como puede observarse, se cumple que:

$$y_2 - y_1 = c_1\cdot e^x + 2c_2\cdot e^{2x}.$$

Obtengamos, ahora, aquella solución particular de dicho sistema tal que: $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 2$ (lo que constituye un problema de valor inicial).

Substituyendo en la solución las anteriores condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, tenemos el sencillo sistema de ecuaciones dado por:

$$\left.\begin{aligned}1 &= c_1 + c_2\\ 2 &= 2c_1 + 3c_2\end{aligned}\right\}$$

, que es un sistema de ecuaciones heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (o bien por inversión de la matriz o por el método de triangularización de Gauss-Jordan), así:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1;\ c_2 = 1 - 1 = 0,\ \text{ de donde se deduce que:}$$

$c_1 = 1$ y $c_2 = 0$. Luego la solución particular buscada es: $\boxed{y_1 = e^x,\ y_2 = 2\cdot e^x}$ $\Rightarrow$ o sea: $y_2 = 2\cdot y_1$, esto es, que en todo momento se tiene que la oferta O_2 es el doble de la oferta O_1.

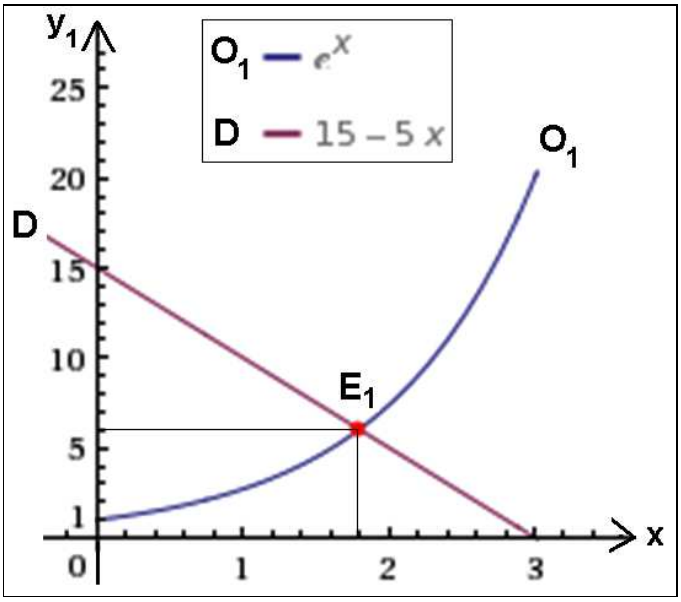
b) Para x = 1.200 ud. de producto, veamos que:

$$\left.\begin{array}{c} O_1 \Rightarrow y_1 = e^{1'2} = 3'32 \text{ €/ud.} \\ O_2 \Rightarrow y_2 = 2\cdot e^{1'2} = 6'64 \text{ €/ud.} \end{array}\right\}$$

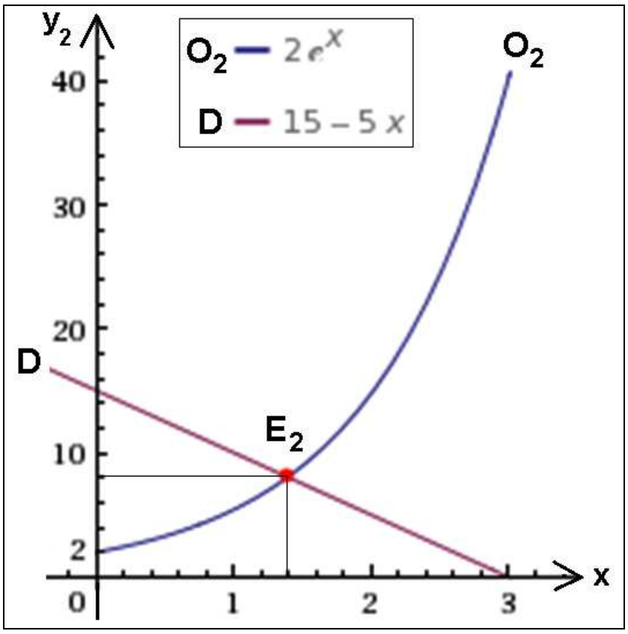
c) Para ambas ofertas, en definitiva, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio y los correspondientes ingresos brutos de los ofertantes:

$$\left\{\begin{array}{c} O_1 = D \Rightarrow e^x = 15 - 5x;\ x_{1e} = 1'790 \approx 1.790 \text{ ud.} \\ y_{1e} = 15 - 5\cdot 1'79 = 6'05 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 6'05 \times 1.790 = 10.829'50 \text{ € .} \\ \\ O_2 = D \Rightarrow 2e^x = 15 - 5x;\ x_{2e} = 1'39 \approx 1.390 \text{ ud.} \\ y_{2e} = 15 - 5\cdot 1'39 = 8'05 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 8'05 \times 1.390 = 11.189'50 \text{ € .} \end{array}\right.$$

, con la siguiente representación gráfica para $O_1 = D$:



, y la siguiente representación gráfica para $O_2 = D$ es:



Por otra parte, se presume también en ambos casos de las funciones de oferta anteriormente obtenidas O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$, y además $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existen sendas ramas parabólicas según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 3

En un mercado con tres oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ \frac{dy_3}{dx} = -2y_1 - y_2 + 5y_3 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., y_3 = precio oferente 3 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. anuales. Se pide, respectivamente: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 2'00 €/ud. e $y_3(0)$ = 3'00 €/ud.; b) ¿a qué precios corresponderá una oferta del producto de 1.000 ud.? y c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: y = 210 – 70x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) Este sistema, que resolveremos empleando el método matricial, se puede expresar también de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ y'_2 = 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ y'_3 = -2y_1 - y_2 + 5y_3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

con la siguiente ecuación característica o secular del sistema:

$$[\lambda \cdot I_3 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+6 & 3 & -14 \\ -4 & \lambda-3 & 8 \\ 2 & 1 & \lambda-5 \end{bmatrix},$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece:

$$(\lambda+6)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-5) + 48 + 56 + 28\cdot(\lambda-3) + 12\cdot(\lambda-5) - 8\cdot(\lambda+6) = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \cancel{33\lambda} + \cancel{90} + \cancel{104} + \cancel{28\lambda} - \cancel{84} + \cancel{12\lambda} - \cancel{60} - \cancel{8\lambda} - \cancel{48} = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \; ;$$

una primera raíz de esta ecuación de tercer grado, que es inmediata, es $\lambda_1 = 1$.

Ahora, por aplicación de la conocida regla de Ruffini, se obtiene que:

$$1) \quad \begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -1 & 2 \\ & 1 & -1 & -2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \; ;$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 = \lambda_2 \\ -1 = \lambda_3 \end{cases} ; \quad A \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_i \; ;$$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ Este autovalor ofrece el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = x_3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 6x_3 = x_1 + x_2 \\ -3x_1 + 6x_3 = x_2 \\ -2x_1 + 4x_3 = x_2 \end{array}\right\}$$

Y a partir de aquí obtendremos el autovector:

$$-3x_1 + 6x_3 = -2x_1 + 4x_3\,;\; 2x_3 = x_1 \Rightarrow k\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Del mismo modo operaremos con las otras 2 raíces características, obteniendo que:

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ Este autovalor ofrece el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}-6x_1-3x_2+14x_3&=2x_1\\4x_1+3x_2-8x_3&=2x_2\\-2x_1-x_2+5x_3&=2x_3\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}-2x_1+6x_3&=2x_1+2x_2\\-x_1+3x_3&=x_1+x_2\\-2x_1+3x_3&=x_2\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow k\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}$; o también: $k\begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}$ (sería, por ejemplo, otra posible solución).

$\boxed{\lambda_3 = -1}$ Este autovalor ofrece el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}-6x_1-3x_2+14x_3&=-x_1\\4x_1+3x_2-8x_3&=-x_2\\-2x_1-x_2+5x_3&=-x_3\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}-2x_1+6x_3&=-x_1-x_2\\-x_1+6x_3&=-x_2\\x_1-6x_3&=x_2\end{aligned}\right\}$$

$$-2x_1 - x_1 + 6x_3 + 5x_3 = -x_3\,;\; -3x_1 + 12x_3 = 0 \Rightarrow 4x_3 - x_1 = 0\,;$$

$\Rightarrow k\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}$; luego la integral general será:

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}e^{x}+c_2\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}e^{2x}+c_3\begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}e^{-x}$$; o sea, se deducen las

siguientes funciones de oferta:

$$\boxed{\begin{aligned}&y_1 = 2c_1\cdot e^{x} + 3c_2\cdot e^{2x} + 4c_3\cdot e^{-x}\\&y_2 = -2c_3\cdot e^{-x}\\&y_3 = c_1\cdot e^{x} + 2c_2\cdot e^{2x} + c_3\cdot e^{-x}\end{aligned}}$$

De haber considerado, para el valor propio $\lambda_2 = 2$, el autovector alternativo $\Rightarrow k\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, se obtendría el resultado siguiente:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 5c_1 \cdot e^{2x} + 2c_2 \cdot e^{x} + 4c_3 \cdot e^{-x} \\ y_2 &= -4c_1 \cdot e^{2x} - 2c_3 \cdot e^{-x} \\ y_3 &= 2c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{x} + c_3 \cdot e^{-x} \end{aligned}}$$

Atendiendo ahora a las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$y_1(0) = 1$; $y_2(0) = 2$; $y_3(0) = 3$; esto es, resulta el sistema heterogéneo, compatible y determinado siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 1 \\ -2c_3 = 2 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 = 3 \end{array}\right\}$$

cuya resolución conduce a los valores: $c_1 = -2$; $c_2 = 3$; $c_3 = -1$. Entonces, la integral particular resultante, con las tres funciones de oferta, será:

$$\left.\begin{array}{c} O_1 \Rightarrow y_1 = -4e^{x} + 9e^{2x} - 4e^{-x} \\ O_2 \Rightarrow y_2 = 2e^{-x} \\ O_3 \Rightarrow y_3 = -2e^{x} + 6e^{2x} - e^{-x} \end{array}\right\}$$

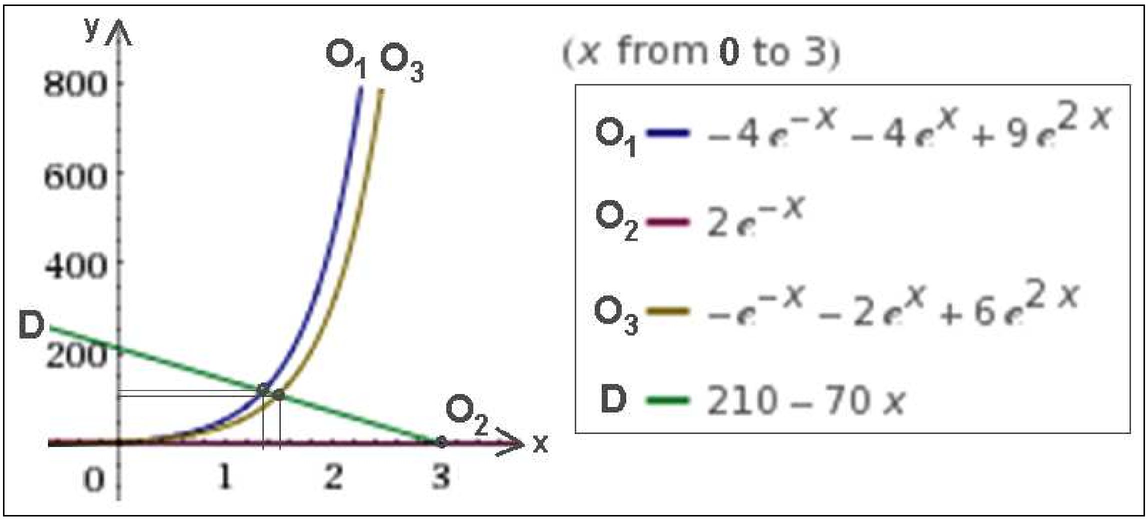
b) Es evidente que la oferta O_2 se halla fuera de mercado con $y_2 = 2/e = 0'72$ €/ud. Por lo que se refiere a las otras dos, para x = 1.000 ud. de producto, veamos que se tendrán unos precios de:

$$\left.\begin{array}{l} O_1 \Rightarrow y_1 = -4e + 9e^2 - 4/e = 54'16 \text{ €/ud.} \\ O_3 \Rightarrow y_3 = -2e + 6e^2 - 1/e = 38'52 \text{ €/ud.} \end{array}\right\}$$

c) Para las dos ofertas válidas restantes, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio y los correspondientes ingresos brutos anuales de los ofertantes:

$$\left\{\begin{array}{l} O_1 = D \Rightarrow -4e^{x} + 9e^{2x} - 4e^{-x} = 210 - 70x;\ x_{1e} = 1'344 \approx 1.344 \text{ ud.} \\ y_{1e} = 210 - 70 \cdot 1'344 = 115'92 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 115'92 \times 1.344 = 155.796'48 \text{ € .} \\ \\ O_3 = D \Rightarrow -2e^{x} + 6e^{2x} - e^{-x} = 210 - 70x;\ x_{3e} = 1'479 \approx 1.479 \text{ ud.} \\ y_{3e} = 210 - 70 \cdot 1'479 = 106'49 \text{ €/ud.} \\ I_3 = p_3 \times q_3 = 106'49 \times 1.479 = 157.498'71 \text{ € .} \end{array}\right.$$

, con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume también en ambos casos de las funciones de oferta O_1 y O_3 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en cada caso.

Ejemplo 4

En un mercado con tres oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 + 3y_2 - y_3 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., y_3 = precio oferente 3 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada diariamente expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 2'00 €/ud. e $y_3(0)$ = 3'00 €/ud.; b) ¿a qué precios corresponderá una oferta del producto de 400 ud.? y c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: $f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 8$, calculando la elasticidad arco de la demanda entre los puntos de equilibrio extremos y la elasticidad en el punto de equilibrio intermedio, así como también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) Este sistema de ecuaciones diferenciales lineales, que resolveremos empleando el método matricial, se puede expresar también de la forma siguiente:

Se tiene la siguiente matriz del sistema: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

La ecuación característica o secular vendrá dada por:

$$[\lambda \cdot I_3 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix},$$

que pasando de matrices a determinantes, esto es, haciendo:

$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$, lo que ofrece las soluciones o valores propios:

$$\lambda_1 = 1 \;;\quad \lambda_2 = -2 \;;\quad \lambda_3 = 3.$$

Luego los autovectores o vectores propios serán, respectivamente:

Para $\boxed{\lambda_1 = 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= x_2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

su determinante $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ = -2 + 9 – 4 – 3 = 0, luego es un sistema compatible indeterminado (con ∞ soluciones), y una solución cualquiera es: $\Rightarrow k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Para $\boxed{\lambda_2 = -2} \Rightarrow k\begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}$ y para $\boxed{\lambda_3 = 3} \Rightarrow k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Con ello, la integral general será: $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^x + c_2\begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}e^{-2x} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3x} \rightarrow$ I.G.

con lo que se tendrán las integrales generales:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1 = -c_1 \cdot e^x - 11c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{3x} \\ y_2 = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{3x} \\ y_3 = c_1 \cdot e^x + 14c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{3x} \end{array}}$$

Atendiendo ahora a las condiciones iniciales dadas, se tendrá que: $y_1(0) = 1$; $y_2(0) = 2$; $y_3(0) = 3$; esto es, resulta el sistema heterogéneo, compatible y determinado siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} -c_1 - 11c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 2 \\ c_1 + 14c_2 + c_3 = 3 \end{array}\right\}$$

cuya resolución conduce a los valores: $c_1 = 2/15$; $c_2 = 1/15$; $c_3 = 29/15$.

Entonces, la integral particular resultante, con las tres funciones de oferta, será:

$$\left.\begin{array}{c} O_1 \Rightarrow y_1 = (-2/15)e^x - (11/15)e^{-2x} + (29/15)e^{3x} \\ O_2 \Rightarrow y_2 = (2/15)e^x - (1/15)e^{-2x} + (29/15)e^{3x} \\ O_3 \Rightarrow y_3 = (2/15)e^x + (14/15)e^{-2x} + (29/15)e^{3x} \end{array}\right\}$$

b) Para x = 400 ud. de producto, veamos que:

$$\left.\begin{array}{c} O_1 \Rightarrow y_1 = 5'89 \text{ €/ud.} \\ O_2 \Rightarrow y_2 = 6'59 \text{ €/ud.} \\ O_3 \Rightarrow y_3 = 7'04 \text{ €/ud.} \end{array}\right\}$$

c) La función de demanda dada viene expresada como una ecuación integral de Volterra, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que resultará:

$$L\left\{f(x)+\int_0^x f(u)\cdot du\right\}=L\{8\}\Rightarrow L\{f(x)\}+L\left\{\int_0^x f(u)\cdot du\right\}=L\{8\}$$
$$\Rightarrow F(S)+\frac{F(S)}{S}=\frac{8}{S},$$

donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 8 \Rightarrow F(S)(S+1) = 8 \Rightarrow F(S)=\frac{8}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda, a saber:

$$D \rightarrow f(x)=L^{-1}\left\{\frac{8}{S+1}\right\}=8\cdot e^{-x} \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad: $8\cdot e^{-x}+\int_0^x 8\cdot e^{-u}\cdot du=8$, o lo que es lo mismo: $e^{-x}+\int_0^x e^{-u}\cdot du=1$. En efecto:

$$e^{-x}-\left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x}-e^{-x}+e^0=1, \text{ c.s.q.d.}$$

Para las tres ofertas en cuestión, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio y los correspondientes ingresos brutos de los ofertantes:

$O_1 = D \Rightarrow (-2/15)e^x - (11/15)e^{-2x} + (29/15)e^{3x} = 8\cdot e^{-x}$;
$x_{1e} = 0'378 \approx 378$ ud., $y_{1e} = 5'48$ €/ud.
$I_1 = p_1 \times q_1 = 5'48 \times 378 = 2.071'44$ € .

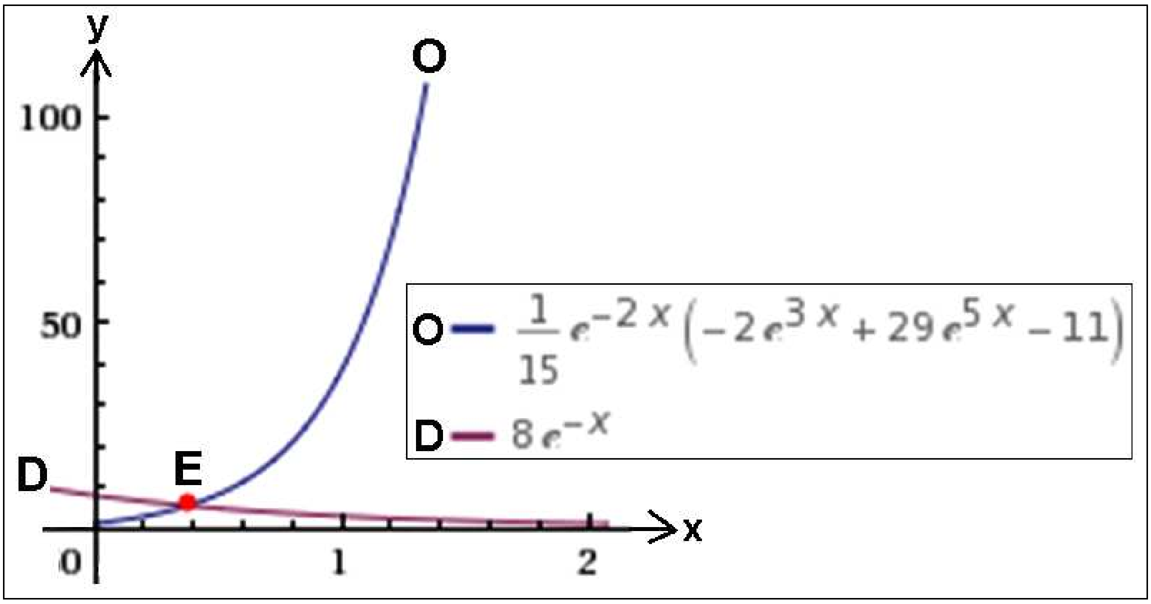
$O_2 = D \Rightarrow (2/15)e^x - (1/15)e^{-2x} + (29/15)e^{3x} = 8\cdot e^{-x}$;
$x_{2e} = 0'348 \approx 348$ ud., $y_{2e} = 5'65$ €/ud.
$I_2 = p_2 \times q_2 = 5'65 \times 348 = 1.966'20$ € .

$O_3 = D \Rightarrow (2/15)e^x + (14/15)e^{-2x} + (29/15)e^{3x} = 8\cdot e^{-x}$;
$x_{3e} = 0'324 \approx 324$ ud., $y_{3e} = 5'79$ €/ud.
$I_3 = p_3 \times q_3 = 5'79 \times 324 = 1.875'96$ € .

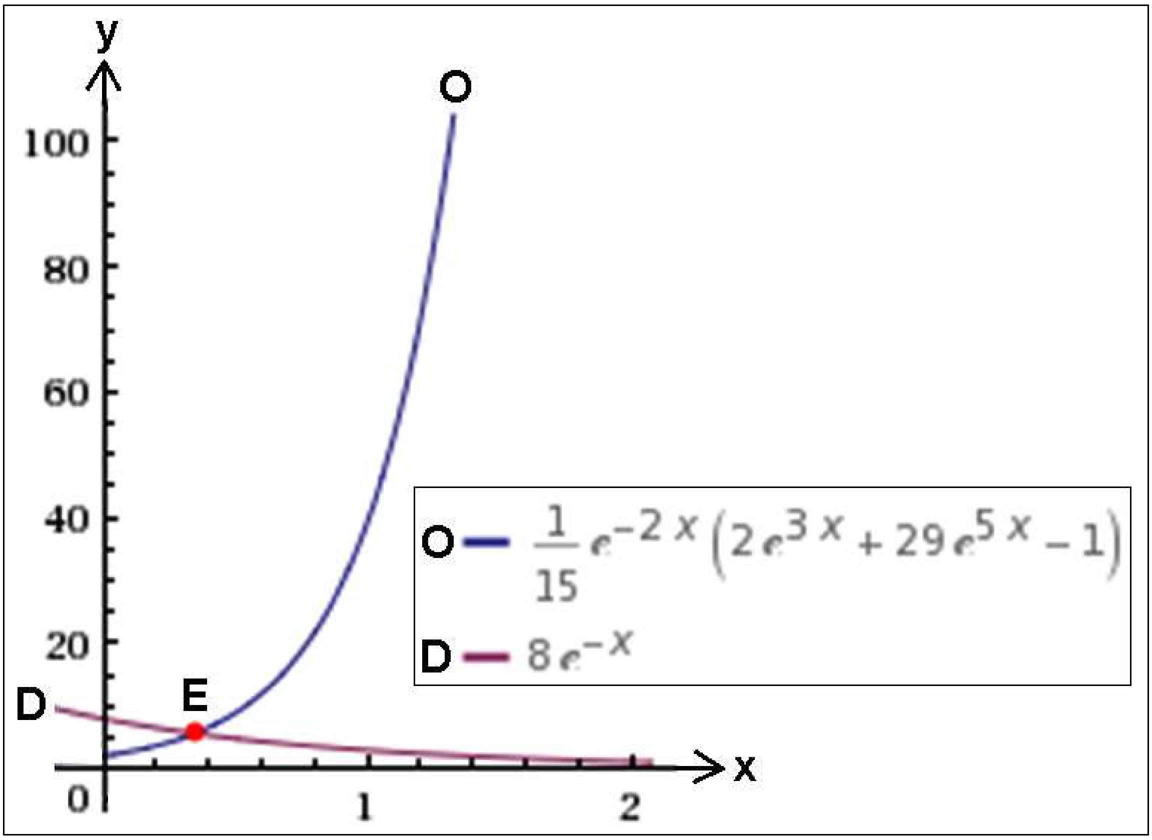
Además, se presume también en los tres casos de las funciones de oferta O_1, O_2 y O_3 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=+\infty$, luego existe en todas ellas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba). Además, la función de demanda posee una asíntota horizontal en el eje OX.

Se tienen, en definitiva, las siguientes representaciones gráficas para cada caso:

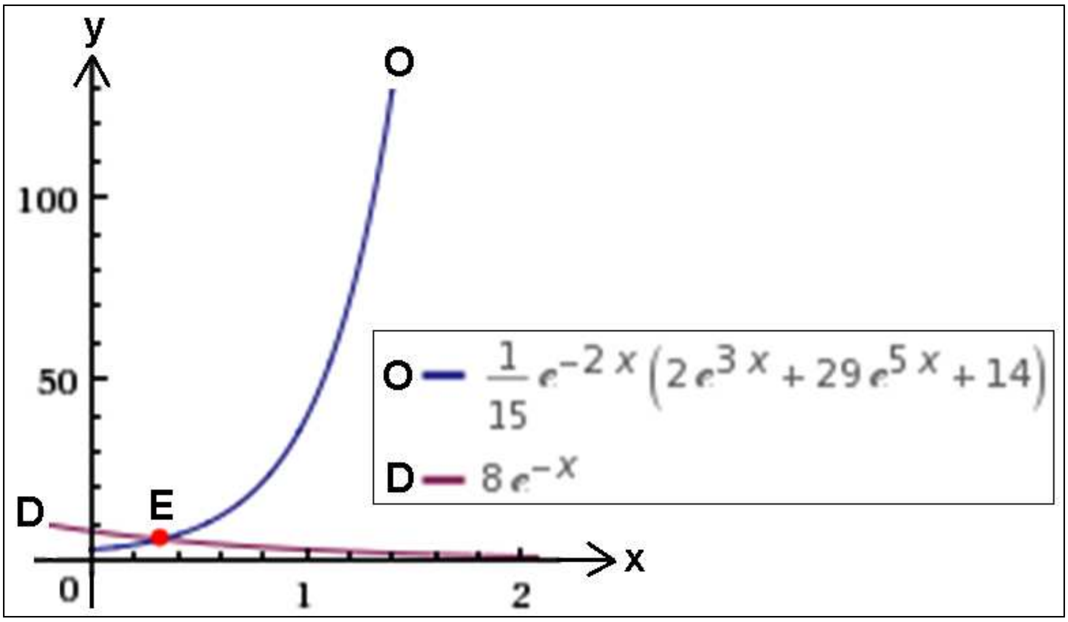
- En el caso de la O_1:



- En el caso de la O_2:



- En el caso de la O_3:



y la representación gráfica conjunta de todas ellas que viene expresada a continuación con mayor detalle:

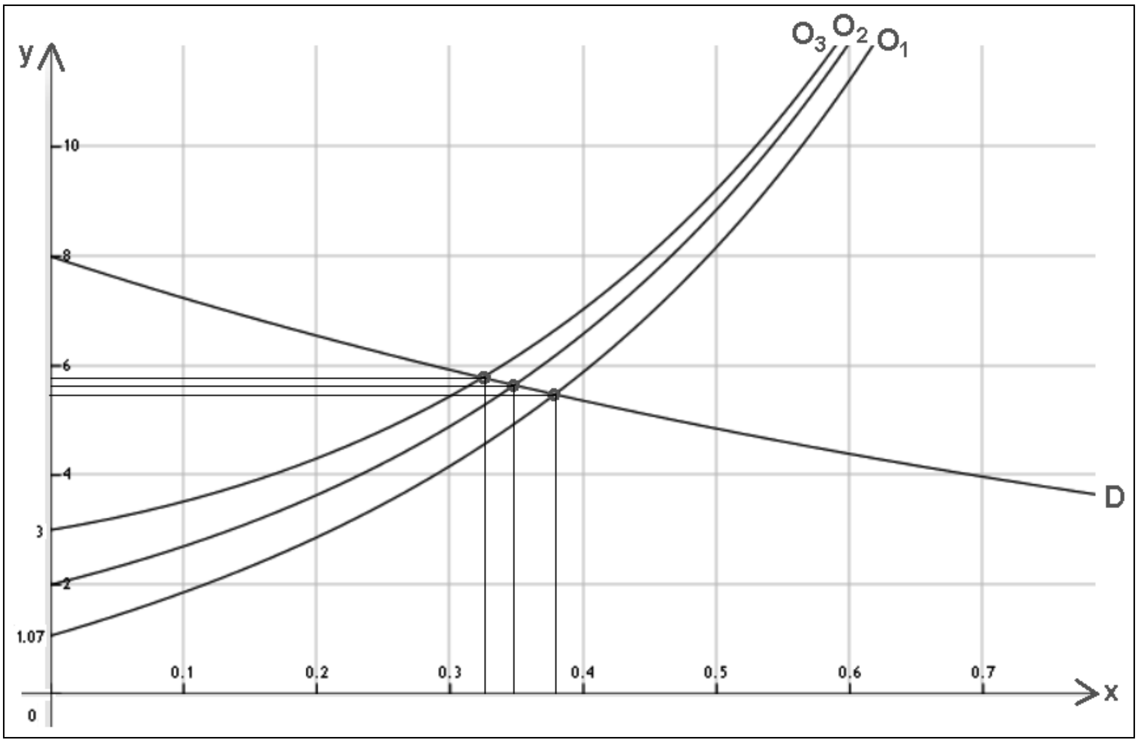


FIG. 9.2. Representación gráfica conjunta del equilibrio (I).

Por otra parte, la elasticidad arco de la demanda entre los puntos E_3(0'324,5'79) y E_1(0'378,5'48) vendrá dada por:

$e_a = \frac{0'378 - 0'324}{0'378 + 0'324} \times \frac{5'48 + 5'79}{5'48 - 5'79} = \frac{0'054}{0'702} \times \frac{11'27}{-0'31} = -\frac{0'60858}{0'21762} = -2'80 < -1$, luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Así mismo, la elasticidad en el punto E_2(0'348,5'65) deberá considerar que: $\frac{dy}{dx} = -8 \cdot e^{-x}; \frac{dx}{dy} = -\frac{e^x}{8}$; y la elasticidad puntual buscada será: $e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{e^x}{8} \times \frac{8}{x \cdot e^x} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{0'348} = -2'87 < -1$, luego, al igual que sucedía en el caso anterior, se trata de una demanda relativamente elástica.

Ejemplo 5

En una lonja agrícola de contratación, supuesto en régimen de competencia perfecta, los precios de dos productos interrelacionados[1], con respecto al tiempo *t* expresado en años, experimentan la siguiente relación:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = 2P_1 + 3P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} = 2P_1 + P_2 \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de los precios de ambos bienes sabiendo que inicialmente: P_1 = 2'00 €/kg. y P_2 = 3'00 €/kg., desde el punto de vista analítico y gráfico.

Solución:

La matriz del sistema diferencial planteado es la siguiente: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Procederemos como siempre, con lo que:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \quad \begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

[1] Es interesante, por ejemplo, poder saber cómo afecta la subida o caída de los precios sobre ciertas materias primas a las empresas que tanto consumen estas materias primas para transformarlas en productos acabados como los que las producen para estos clientes transformadores. Por lo general, llegaremos a la conclusión de que el productor siempre se verá favorecido por una subida de precios; aunque en ocasiones sea difícil de ver esto en el corto plazo, en el medio y largo plazo siempre le beneficiará. Mientras que un consumidor y transformador de esa materia prima se verá seriamente perjudicado. Café, cacao, arroz, trigo, soja, algodón y maíz constituyen materias primas agrícolas representativas al efecto.

$$[\lambda_1 = 4] \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} -2k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 - 3k_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Si } \begin{array}{l} k_1 = 1 \Rightarrow -2 + 3k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{2}{3}(3) = 2 \\ k_1 = 1(3) = 3 \end{array}$$

Entonces: $K_1 = C_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$, $[\lambda_2 = -1] \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 2 & 1-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 3k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Si } k_2 = 1 \Rightarrow 2k_1 + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1$$

También se cumple que: $K_2 = C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Así pues: $K = K_1 + K_2 = C_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, con lo que la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1(t) = 3C_1 \cdot e^{4t} - C_2 \cdot e^{-t} \\ P_2(t) = 2C_1 \cdot e^{4t} + C_2 \cdot e^{-t} \end{array}}$$

, y también se cumple que: $P_1(t) + P_2(t) = 5C_1 \cdot e^{4t}$.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, se tendrá que:

$P_1(0) = 3C_1 - C_2 = 2$, y también: $P_2(0) = 2C_1 + C_2 = 3$, de donde:

$C_1 = C_2 = 1$, y resultarán las siguientes trayectorias temporales:

$$P_1(t) = 3 \cdot e^{4t} - e^{-t}, \quad P_2(t) = 2 \cdot e^{4t} + e^{-t}.$$

Por otra parte, se presume también en ambos casos de las funciones de precio P_1 y P_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $P \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{P}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OP (vertical, hacia arriba) en ambas situaciones.

La correspondiente representación gráfica puede verse a continuación:

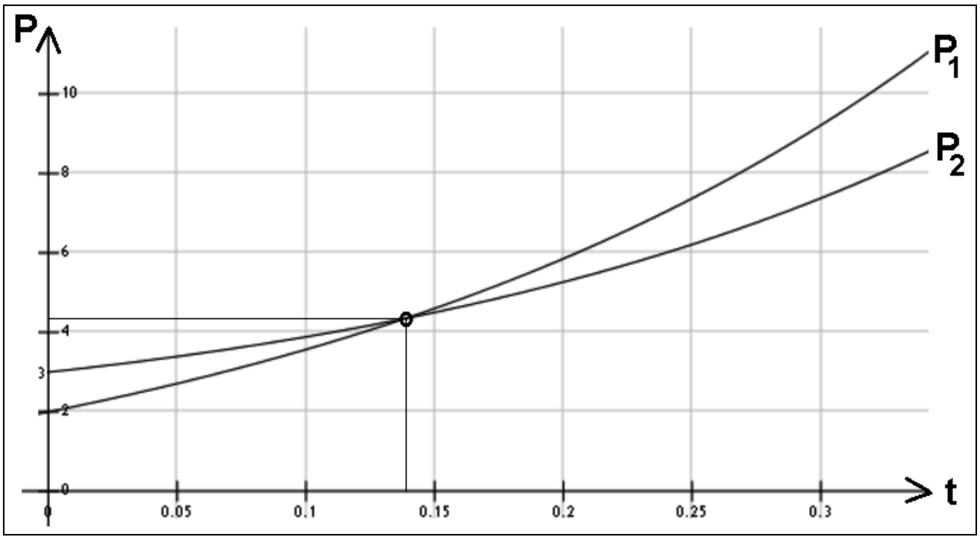


FIG. 9.3. Trayectorias temporales de los precios (I).

Como puede observarse en la figura precedente, ambas trayectorias de precios coincidirán cuando: $P_1(t) = P_2(t)$; o sea, cuando: $3\cdot e^{4t} - e^{-t} = 2\cdot e^{4t} + e^{-t}$. Y así:

$3e^{4t} - 2e^{4t} - e^{-t} - e^{-t} = 0$; $e^{4t} = 2e^{-t}$; $4t = \ln 2 - t$; $t = \frac{\ln 2}{5} = 0'139 \text{ años}$, que resulta aproximadamente igual a 51 días contados desde el instante inicial. A ello le corresponde un precio de: P = 4'36 €/kg.

Ejemplo 6

Dos productos o bienes sustitutivos poseen en un mercado la siguiente relación de precios:

$$\begin{cases} P'_1 = 2P_1 - 3P_2 \\ P'_2 = P_2 - 2P_1 \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de ambos precios sabiendo que inicialmente: P_1 = 8'00 €/litro y P_2 = 7'00 €/litro.

Solución:

La matriz del sistema diferencial planteado es la siguiente:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; con la ecuación característica o secular siguiente:

$$[\lambda \cdot I_2 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}; \text{o sea}: (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 6 = 0;$$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$; $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$; haciendo: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$;

λ_1 = 4

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 4x_1 \\ -2x_1 + x_2 = 4x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

λ_2 = -1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = -x_1 \\ -2x_1 + x_2 = -x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$, luego la integral general será:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} \cdot e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$$; o sea:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1 = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ P_2 = (-2/3)c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t} \end{array}}$$

que constituye la solución buscada, en la que también se cumple que:

$$P_1 - P_2 = \frac{5c_1}{3} \cdot e^{4t}.$$

Con los valores iniciales expresados, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_1(0) = c_1 + c_2 = 8 \\ P_2(0) = -\frac{2}{3}c_1 + c_2 = 7 \end{cases};$$

, que constituye un sistema simple de ecuaciones del que se deduce que: $c_1 = 3/5$; $c_2 = 37/5$, con lo que la solución particular pedida es:

$$\begin{cases} P_1(t) = (3/5) \cdot e^{4t} + (37/5) \cdot e^{-t} \\ P_2(t) = (-2/5) \cdot e^{4t} + (37/5) \cdot e^{-t} \end{cases}$$

Debemos recordar aquí que si existe competencia perfecta entre los consumidores, un consumidor maximizará su satisfacción si su RSB (relación de substitución entre los bienes o relación marginal de sustitución) es igual a la razón de sus precios, o sea:

$$RMS = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{P_2}{P_1} = \frac{-185}{3(3e^{5t} + 37)} + \frac{2}{3} = \frac{2e^{5t} - 37}{3e^{5t} + 37}$$, que inicialmente valdrá:

-7’00/8’00 = -0’875.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

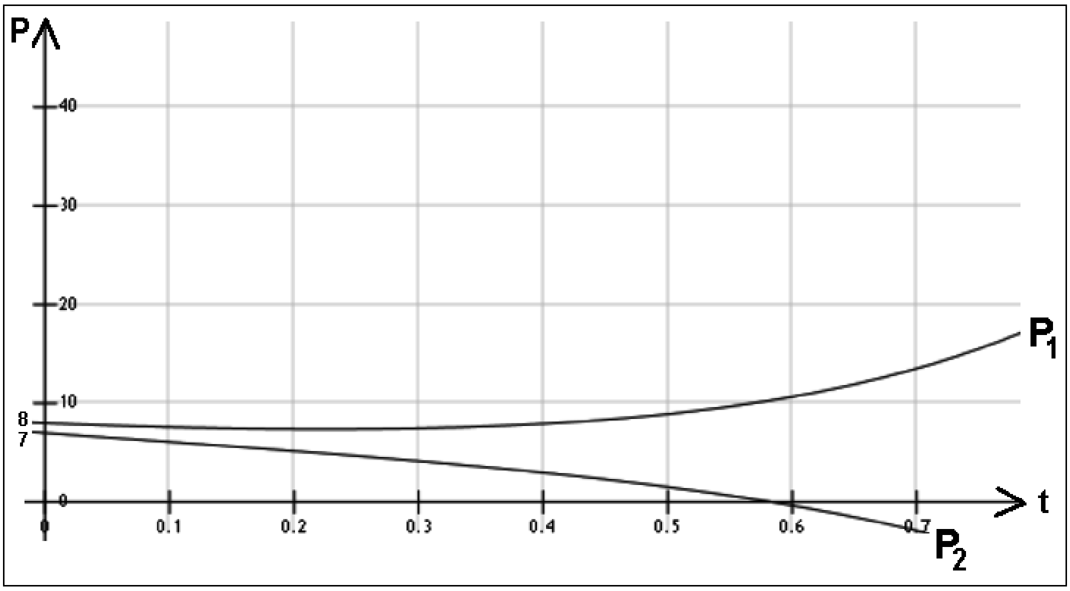


FIG. 9.4. Trayectorias temporales de los precios (II).

Cabe observar que P_2 comenzará a ser negativo, lo que carece de significado económico, a partir del instante: $(-2/5)\cdot e^{4t} + (37/5)\cdot e^{-t} = 0$, lo que tendrá lugar cuando: $2e^{4t} = 37e^{-t}$, o sea: 5t = ln 18’5 = 2’9178, con lo que: t = 0’5836.

Por lo que se refiere a la existencia de ramas parabólicas, habrá que estudiar ambos casos separadamente. En efecto, en P_1 se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $P_1 \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{P_1}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OP (vertical, hacia arriba). Así mismo, también en P_2 se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $P_2 \to -\infty$. Pero entonces: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{P_2}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-2/5)\cdot e^{4t} + (37/5)\cdot e^{-t}}{t} = -\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OP (vertical, hacia abajo).

Ejemplo 7

En un mercado con tres oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -4y_1 + y_2 + y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 5y_2 - y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 - 3y_3 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud, y_2 = precio oferente 2 en €/ud., y_3 = precio oferente 3 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 2'00 €/ud., $y_2(0)$ = 3'00 €/ud. e $y_3(0)$ = 4'00 €/ud.; b) ¿a qué precios corresponderá una oferta del producto de 100 ud.? y c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: $f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 6$, calculando la elasticidad arco de la demanda entre los puntos de equilibrio extremos y la elasticidad en el punto de equilibrio intermedio, así como también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) Este sistema, que resolveremos empleando el método matricial, se puede expresar también de la forma siguiente:

Se tiene la matriz: $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; La ecuación característica o secular, será:

$$[\lambda \cdot I_3 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda+3 \end{bmatrix}; \text{ o sea:}$$

$$(\lambda + 4)(\lambda - 5)(\lambda + 3) - 1 - \lambda - 3 + \lambda + 4 = 0.$$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 23\lambda - 60 = 0$; una raíz es $\lambda_1 = -3$, luego operando por aplicación de la regla de Ruffini, se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -23 & -60 \\ -3) & & -3 & 3 & 60 \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 \end{array} \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 20 = 0\ ;\ \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -4 \end{cases}\ ;$$

Como siempre, hacemos: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$, o sea:

λ_1 = -3

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ -3x_2 \\ -3x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= -3x_1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= -3x_2 \\ x_2 - 3x_3 &= -3x_3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_2 &= 0\ ; \\ x_1 &= x_3\ ; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por último, nos quedará que:

λ_2 = 5

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \\ 5x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= 5x_1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 5x_2 \\ x_2 - 3x_3 &= 5x_3 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_3\ ; \\ x_2 &= 8x_3\ ; \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

λ_3 = -4

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -4x_2 \\ -4x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + x_2 + x_3 &= -4x_1 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= -4x_2 \\ x_2 - 3x_3 &= -4x_3 \end{aligned}\right\} \qquad x_2 = -x_3\ ;$$

y como consecuencia $\Rightarrow K\begin{bmatrix}10\\-1\\1\end{bmatrix}$.

Con ello, la integral general será:

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\cdot e^{-3x}+c_2\begin{bmatrix}1\\8\\1\end{bmatrix}\cdot e^{5x}+c_3\begin{bmatrix}10\\-1\\1\end{bmatrix}\cdot e^{-4x}$$; o sea, se tendrá que:

$$\boxed{\begin{aligned}&y_1=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot e^{5x}+10c_3\cdot e^{-4x}\\&y_2=8c_2\cdot e^{5x}-c_3\cdot e^{-4x}\\&y_3=c_1\cdot e^{-3x}+c_2\cdot e^{5x}+c_3\cdot e^{-4x}\end{aligned}}\ .$$

Atendiendo ahora a las condiciones iniciales dadas, se tendrá que: $y_1(0) = 2$; $y_2(0) = 3$; $y_3(0) = 4$; esto es, resulta el sistema heterogéneo, compatible y determinado siguiente:

$$\left.\begin{array}{c}c_1 + c_2 + 10c_3 = 2\\8c_2 - c_3 = 3\\c_1 + c_2 + c_3 = 4\end{array}\right\}$$

cuya resolución conduce a los valores: $c_1 = 31/8$; $c_2 = 25/72$; $c_3 = -2/9$.

Entonces, la integral particular resultante, con las tres funciones de oferta, será:

$$\left.\begin{array}{c}O_1 \Rightarrow y_1 = (31/8)e^{-3x} + (25/72)e^{5x} - (20/9)e^{-4x}\\O_2 \Rightarrow y_2 = (25/9)e^{5x} + (2/9)e^{-4x}\\O_3 \Rightarrow y_3 = (31/8)e^{-3x} + (25/72)e^{5x} - (2/9)e^{-4x}\end{array}\right\}$$

b) Para x = 100 ud. de producto, veamos que:

$$\left.\begin{array}{c}O_1 \Rightarrow y_1 = 1'95\ €/ud.\\O_2 \Rightarrow y_2 = 4'73\ €/ud.\\O_3 \Rightarrow y_3 = 3'29\ €/ud.\end{array}\right\}$$

c) La función de demanda dada viene expresada como una ecuación integral de Volterra, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace.

En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{6\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{6\}$$

$$\Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{6}{S},$$

, donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 6 \Rightarrow F(S)(S+1) = 6 \Rightarrow F(S) = \frac{6}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda mediante la función generatriz Laplace, a saber:

$$D \rightarrow f(x) = L^{-1}\left\{\frac{6}{S+1}\right\} = 6\cdot e^{-x} \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad: $6\cdot e^{-x} + \int_0^x 6\cdot e^{-u}\cdot du = 6$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u}\cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Para las tres ofertas en cuestión, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio y los correspondientes ingresos brutos de cada uno de los ofertantes:

$$\begin{cases} O_1 = D \Rightarrow (31/8)e^{-3x} + (25/72)e^{5x} - (20/9)e^{-4x} = 6\cdot e^{-x}; \\ x_{1e} = 0\text{'}444287 \approx 444 \text{ ud. };\ y_{1e} = 3\text{'}85 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 3\text{'}85 \times 444 = 1.709\text{'}40 \text{ € .} \\ \\ O_2 = D \Rightarrow (25/9)e^{5x} + (2/9)e^{-4x} = 6\cdot e^{-x}; \\ x_{2e} = 0\text{'}124041 \approx 124 \text{ ud. };\ y_{2e} = 5\text{'}30 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 5\text{'}30 \times 124 = 657\text{'}20 \text{ € .} \\ \\ O_3 = D \Rightarrow (31/8)e^{-3x} + (25/72)e^{5x} - (2/9)e^{-4x} = 6\cdot e^{-x}; \\ x_{3e} = 0\text{'}423247 \approx 423 \text{ ud. };\ y_{3e} = 3\text{'}93 \text{ €/ud.} \\ I_3 = p_3 \times q_3 = 3\text{'}93 \times 423 = 1.662\text{'}39 \text{ € .} \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica conjunta donde se observan los respectivos puntos de equilibrio del mercado que es objeto de nuestro estudio:

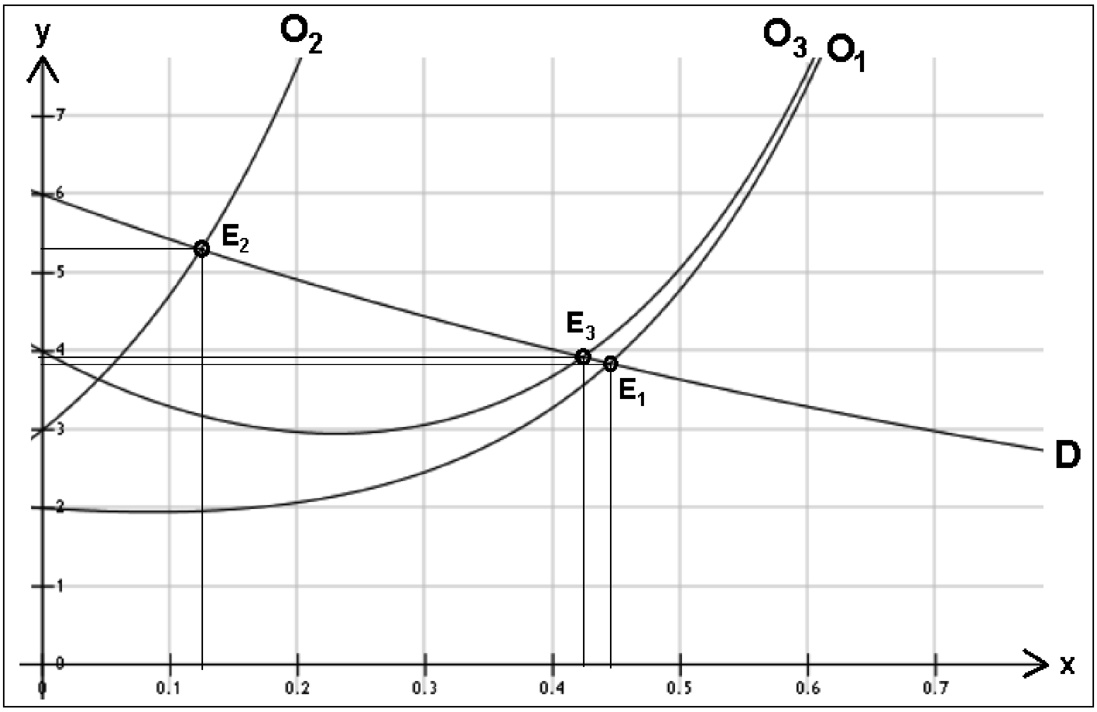


FIG. 9.5. Representación gráfica conjunta del equilibrio (II).

Por otra parte, se presume también en los tres casos de las funciones de oferta obtenidas O_1, O_2 y O_3 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si x $\rightarrow$ ∞ también y $\rightarrow$ ∞. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe en todas ellas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba). Además, la función de demanda posee una asíntota horizontal en el eje OX.

Por otra parte, la elasticidad arco de la demanda entre los puntos E_2(0'124,5'30) y E_1(0'444,3'85) vendrá dada por:

$$e_a = \frac{0'444 - 0'124}{0'444 + 0'124} \times \frac{3'85 + 5'30}{3'85 - 5'30} = \frac{0'32}{0'568} \times \frac{9'15}{-1'45} = -3'56 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Así mismo, la elasticidad en el punto (0'423,3'93) deberá considerar que: $\frac{dy}{dx} = -6 \cdot e^{-x}; \frac{dx}{dy} = -\frac{e^{x}}{6};$ y la elasticidad puntual buscada será: $e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = -\frac{e^{x}}{6} \times \frac{6}{x \cdot e^{x}} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{0'423} = -2'36 < -1$, luego, al igual que sucedía en el caso anterior, se trata, pues, de una demanda relativamente elástica.

Ejemplo 8

En dos mercados diferentes pero interrelacionados, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} - 3y_1 + 8y_2 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} - y_1 + 3y_2 = 0 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio en el mercado 1 en €/ud., y_2 = precio en el mercado 2 en €/ud., con x = cantidad demandada expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de demanda de ambos mercados para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud. e $y_2(0)$ = 1'00 €/ud., b) ¿a qué precio corresponderá una demanda global nula?, y c) hallar el equilibrio del mercado y representarlo gráficamente para la siguiente función de oferta: 5y = 4x + 1, calculando en cada caso los ingresos de los vendedores.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -8 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, es decir, $\lambda^2 - 1 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = -1$, y $\lambda_2 = 1$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \bar{z}_1(x) = (ae^{-x}, be^{-x}) \\ \bar{z}_2(x) = (ce^{x}, de^{x}) \end{cases}$

Substituyendo $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema diferencial nos queda:

$$\begin{cases} -ae^{-x} = 3ae^{-x} - 8be^{-x} \\ -be^{-x} = ae^{-x} - 3be^{-x} \end{cases}, \text{ o sea: } \left.\begin{matrix} 4a - 8b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{matrix}\right\}, \text{ luego también: a = 2b.}$$

Substituyendo ahora en el sistema dado $\bar{z}_2(x)$ resulta que:

$$\begin{cases} ce^x = 3ce^x - 8de^x \\ de^x = ce^x - 3de^x, \end{cases} \quad \text{luego también:}$$

$$\begin{cases} 2c - 8d = 0 \\ c - 4d = 0 \end{cases}$$

y, por lo tanto, c = 4d. La solución general buscada será: $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + z_2(x)$, de aquí que:

$$\boxed{\begin{matrix} y_1(x) = 2be^{-x} + 4de^{x} \\ y_2 x = be^{-x} + de^{x} \end{matrix}}$$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica:

$\left.\begin{matrix} y_1 = 2b + 4d = 1 \\ y_2 = b + d = 1 \end{matrix}\right\}$ que es un sencillo sistema de ecuaciones heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), así:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-2};\text{ de donde se deduce que: } b = \frac{3}{2} \text{ y } d = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado:

$$\left.\begin{matrix} y_1(x) = 3e^{-x} - 2e^{x} \\ y_2(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{e^{x}}{2} \end{matrix}\right\}.$$

b) Atribuyendo la misma representatividad o ponderación a ambos mercados, resultaría una función de demanda global del producto en cuestión de:

$$D \Rightarrow y = \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{9 \cdot e^{-x} - 5 \cdot e^{x}}{4}.$$

Si x = 0 ud., se tendrá un precio global de:

$y = \frac{4}{4}$ = 1'00 €/ud., como también puede deducirse del gráfico adjunto.

c) Para una función de oferta como: $5y = 4x + 1$, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos de:

$$\left\{\begin{array}{l} O = D_1 \Rightarrow \frac{4x+1}{5} = 3 \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{x}; \\ x_{1e} = 0'139216 \approx 139 \text{ ud.};\ y_{1e} = 0'31 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 0'31 \times 139 = 43'09 \text{ €}. \\ \\ O = D_2 \Rightarrow \frac{4x+1}{5} = (3/2) \cdot e^{-x} - (1/2)e^{x}; \\ x_{2e} = 0'298569 \approx 299 \text{ ud.};\ y_{2e} = 0'44 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 0'44 \times 299 = 131'56 \text{ €}. \end{array}\right.$$

, con la siguiente representación gráfica:

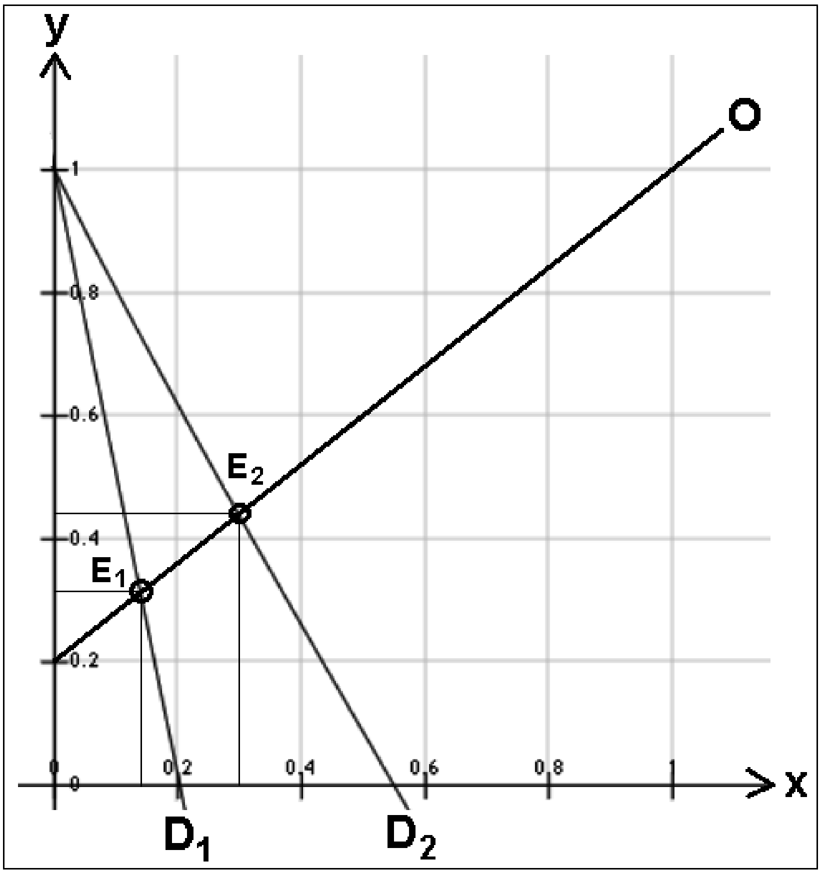


FIG. 9.6. Oferta, demanda y punto de equilibrio (II).

Ejemplo 9

En dos mercados diferentes pero interrelacionados, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} - 5y_1 + 6y_2 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} - 2y_1 + 2y_2 = 0 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio en el mercado 1 en €/ud., y_2 = precio en el mercado 2 en €/ud., con x = cantidad demandada diariamente expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de demanda de ambos mercados para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud. e $y_2(0)$ = 1'00 €/ud., b) ¿a qué precio corresponderá una demanda global nula?, y c) hallar el equilibrio del mercado y representarlo gráficamente para la siguiente función de oferta: 5y = 3x + 2, calculando en cada caso los ingresos de los vendedores.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $\left|A-\lambda\cdot I_2\right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, es decir, $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 2$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \bar{z}_1(x) = \left(ae^x, be^x\right) \\ \bar{z}_2(x) = \left(ce^{2x}, de^{2x}\right) \end{cases}$

Substituyendo ahora $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema nos queda:

$\begin{cases} ae^x = 5ae^x - 6be^{-x} \\ be^x = 2ae^x - 2be^x \end{cases}$, es decir $\begin{cases} 4a - 6b = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$, de aquí que $a = \frac{3}{2}b$, y $\bar{z}_1(x) = \left(\frac{3}{2}be^x, be^x\right)$. Procediendo de la misma forma para $\bar{z}_2(x)$ resultará que:

$$\begin{cases} 2ce^{2x} = 5ce^{2x} - 6de^{2x} \\ 2de^{2x} = 2ce^{2x} - 2de^{2x} \end{cases} \text{, luego: } \begin{cases} 3c - 6d = 0 \\ 2c - 4d = 0 \end{cases},$$

de aquí que c = 2d y $\bar{z}_2(x) = \left(2de^{2x}, de^{2x}\right)$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = \left(y_1(x), y_2(x)\right) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

y, por lo tanto, $\begin{cases} y_1(x) = \frac{3}{2}be^x + 2de^{2x} \\ y_2(x) = be^x + de^{2x} \end{cases}$, que con: $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica lo siguiente:

$\left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{3b}{2} + 2d = 1 \\ y_2 = b + d = 1 \end{array}\right\}$ que es un sencillo sistema de ecuaciones heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), así:

b = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3/2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-1}{-1/2} = 2;$ de donde se deduce que: d = 1 – 2 = -1; b = 2; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = 3e^x - 2e^{2x} \\ y_2(x) = 2e^x - e^{2x} \end{array}\right\}.$$

b) Atribuyendo la misma representatividad o ponderación a ambos mercados, resultaría una función de demanda global del producto en cuestión de:

$$D \Rightarrow y = \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{5 \cdot e^x - 3 \cdot e^{2x}}{2}.$$

Si x = 0 ud., se tendrá un precio global de:

$y = \frac{2}{2}$ = 1'00 €/ud., como también puede deducirse del gráfico adjunto.

c) Para una función de oferta de: 5y = 3x + 2, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos diarios de:

$$\begin{cases} O = D_1 \Rightarrow \frac{3x+2}{5} = 3 \cdot e^x - 2 \cdot e^{2x}\,; \\ x_{1e} = 0'251383 \approx 251 \text{ ud.}\,;\ y_{1e} = 0'55 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 0'55 \times 251 = 138'05 \text{ €}\,. \\ O = D_2 \Rightarrow \frac{3x+2}{5} = 2 \cdot e^x - e^{2x}; \\ x_{2e} = 0'452935 \approx 453 \text{ ud.}\,;\ y_{2e} = 0'67 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 0'67 \times 453 = 303'51 \text{ €}\,. \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:

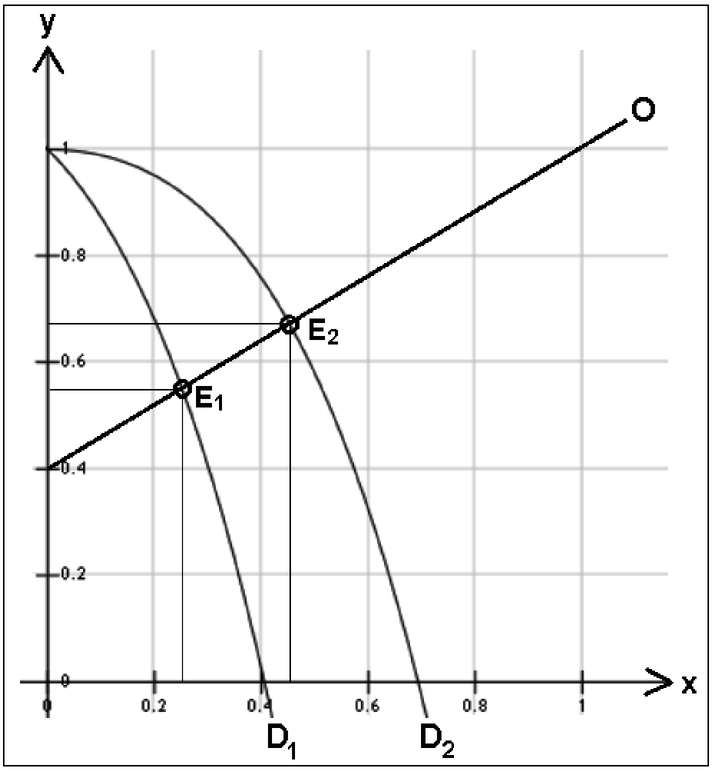


FIG. 9.7. Oferta, demanda y punto de equilibrio (III).

Ejemplo 10

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = 6y_1 - 3y_2 \\ y'_2 = 4y_1 - y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 expresado en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud./día. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; b) ¿a qué cantidad ofertada corresponderá un precio del producto de 2'75 €/ud.?, y c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: 4y = 12 – 15x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A-\lambda\cdot I_2| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, es decir, $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \bar{z}_1(x) = (ae^{2x}, be^{2x}) \\ \bar{z}_2(x) = (ce^{3x}, de^{3x}) \end{cases}$.

Substituyendo $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema nos quedará:

$\begin{cases} 2ae^{2x} = 6ae^{2x} - 3be^{2}x \\ 2be^{2x} = 4ae^{2x} - be^{2x} \end{cases}$, o sea: $\begin{cases} 4a - 3b = 0 \\ 4a - 3b = 0 \end{cases}$, luego $a = \frac{3}{4}b$ y $\bar{z}_1(x) = \left(\frac{3}{4}be^{2x}, be^{2x}\right)$. Procediendo de la misma forma para $\bar{z}_2(x)$ nos quedará la expresión:

$\begin{cases} 3ce^{3x} = 6ce^{3x} - 3de^{3x} \\ 3de^{3x} = 4ce^{3x} - de^{3x} \end{cases}$, o sea: $\begin{cases} 3c - 3d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ d = c \end{cases}$, y $\bar{z}_2(x) = (ce^{3x}, ce^{3x})$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

luego: $\begin{cases} y_1(x) = \frac{3}{4}be^{2x} + ce^{3x} \\ y_2(x) = be^{2x} + ce^{3x} \end{cases}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica que:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{3b}{4} + c = 1 \\ y_2 = b + c = 1 \end{array}\right\}$$ que es un sencillo sistema de ecuaciones heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), así:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3/4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-1/4} = 0;$$ de donde se deduce que b = 0; c =1; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado: $y_1(x) = y_2(x) = e^{3x}$.

b) Para y = 2'75 €/ud. corresponderá: $2'75 = e^{3x}$; de donde:
$x = \dfrac{\ln 2'75}{3}$ = 0'3372 ≡ 337 ud., lo que supone unos ingresos diarios para ambos ofertantes de: I = p × q = 2'75 €/ud. × 337 ud. = 926'75 € .

Ello puede verse en el gráfico siguiente:

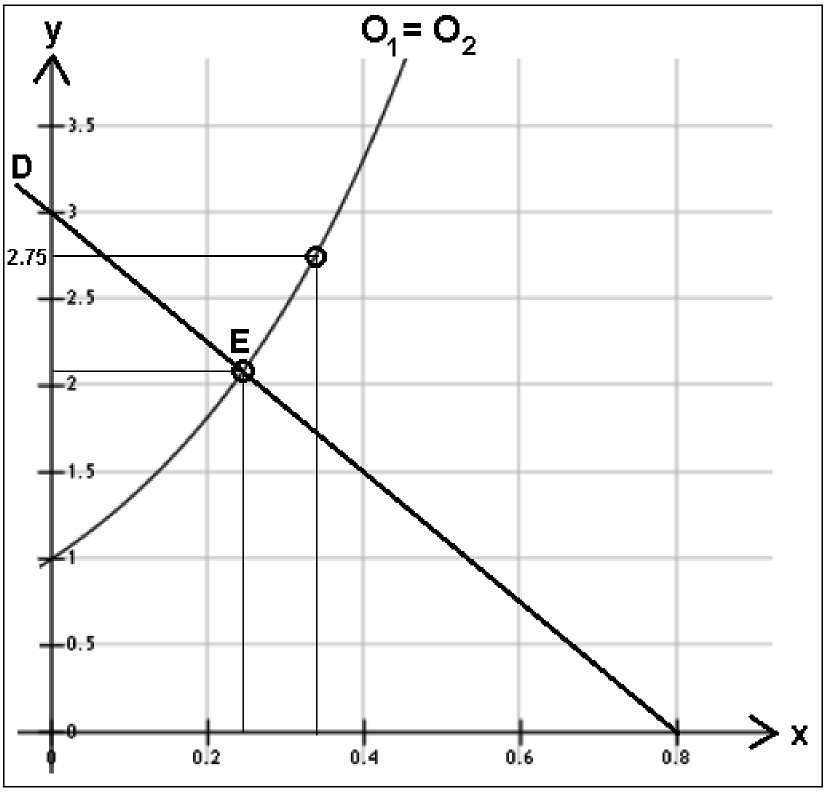


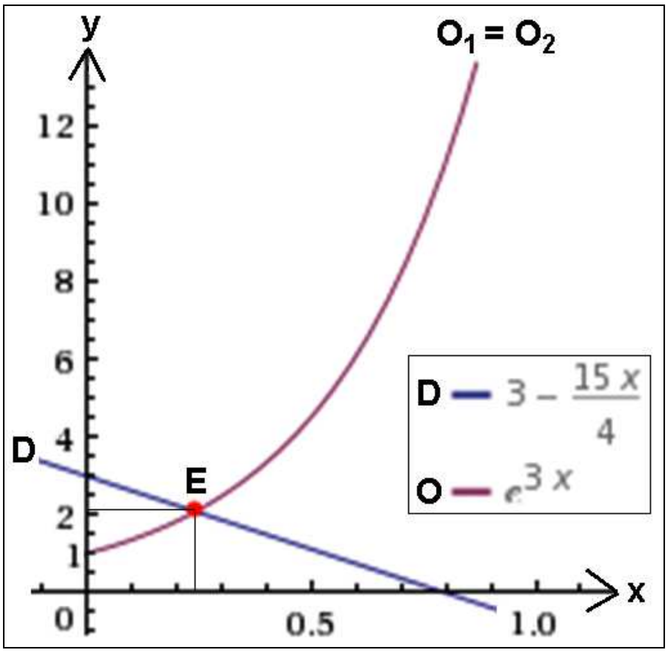
FIG. 9.8. Oferta, demanda y punto de equilibrio (IV).

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones de oferta O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

c) Para una función de demanda de: $4y = 12 - 15x$, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos diarios de:

$$\begin{cases} O_1 = O_2 = D \Rightarrow \frac{12-15x}{4} = e^{3x} \; ; \\ x_e = 0'245 \approx 245 \text{ ud.} \; ; \; y_e = 2'08 \text{ €/ud.} \\ I = p \times q = 2'08 \times 245 = 509'60 \text{ €} . \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica de mayor amplitud que la anterior:



Ejemplo 11

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 - 2y_2 \\ y'_2 = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 expresado en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud./día. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; y b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: y = 6 – 6x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, es decir, $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = 2$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \bar{z}_1(x) = \left(ae^{-x}, be^{-x}\right) \\ \bar{z}_2(x) = \left(ce^{2x}, de^{2x}\right) \end{cases}$

Substituyendo $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema resultará que:

$\begin{cases} -ae^{-x} = 3ae^{-x} - 2be^{-x} \\ -be^{-x} = 2ae^{-x} - 2be^{-x} \end{cases}$, o sea: $\left.\begin{matrix} 4a - 2b = 0 \\ 2a - b = 0 \end{matrix}\right\}$, luego b = 2a, y entonces: $\bar{z}_1(x) = \left(ae^{-x}, 2ae^{-x}\right)$.

Procediendo análogamente para $\bar{z}_2(x)$ nos queda la expresión:

$$\begin{cases} 2ce^{2x} = 3ce^{2x} - 2de^{2x} \\ 2de^{2x} = 2ce^{2x} - 2de^{2x} \end{cases},\ \text{es decir: } \left.\begin{matrix} c - 2d = 0 \\ 2c - 4d = 0 \end{matrix}\right\},$$

luego: c = 2d y $\bar{z}_2(x) = \left(2de^{2x}, de^{2x}\right)$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = (y_1(x),\ \ y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

y, por lo tanto, $\begin{cases} y_1(x) = ae^{-x} + 2de^{2x} \\ y_2(x) = 2ae^{-x} + de^{2x} \end{cases}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica:

$\left.\begin{matrix} y_1 = a + 2d = 1 \\ y_2 = 2a + d = 1 \end{matrix}\right\}$ de donde: $a = d = \frac{1}{3}$; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado: $\begin{cases} y_1(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{2x} \\ y_2(x) = \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \end{cases}$.

b) Para una función de demanda de: y = 6 – 6x = 6(1 - x), se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos brutos diarios de los ofertantes de:

$$\begin{cases} O_1 = D \Rightarrow (1/3)e^{-x} + (2/3)e^{2x} = 6(1-x); \\ x_{1e} = 0'600356 \approx 600 \text{ ud.}, \; y_{1e} = 2'40 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 2'40 \times 600 = 1.440'00 \text{ €} . \\ \\ O_2 = D \Rightarrow (2/3)e^{-x} + (1/3)e^{2x} = 6(1-x); \\ x_{2e} = 0'713932 \approx 714 \text{ ud.}, \; y_{2e} = 1'72 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 1'72 \times 714 = 1.228'08 \text{ €} . \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:

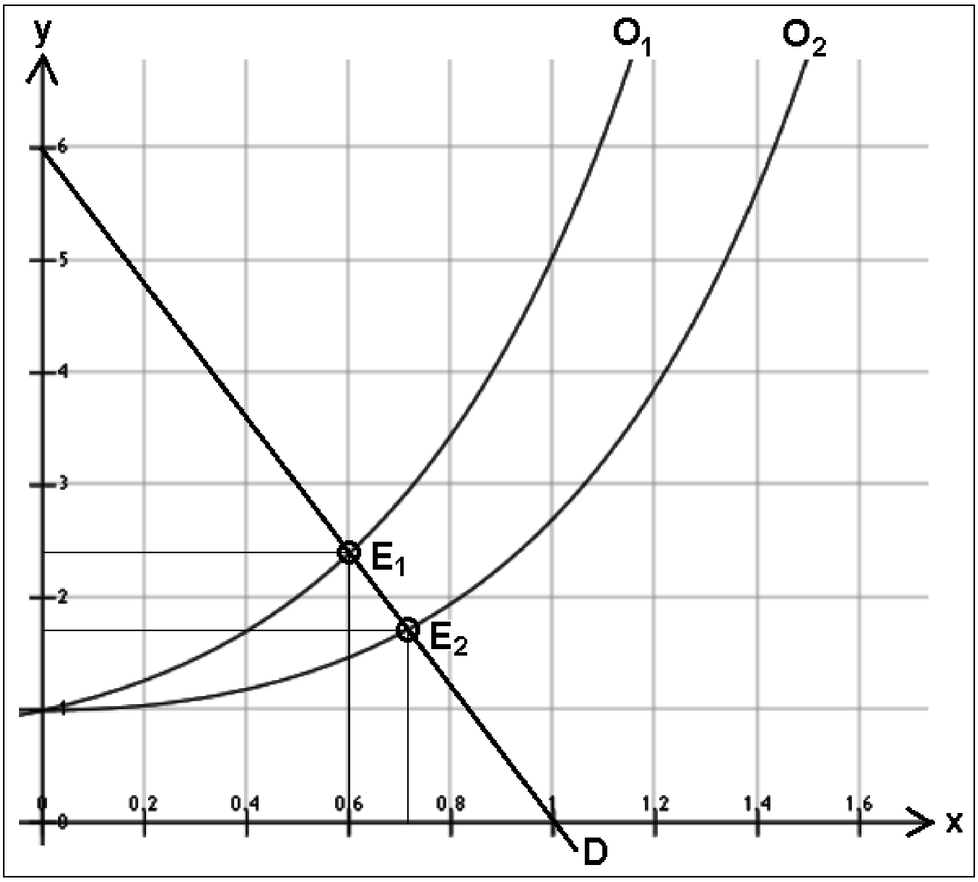


FIG. 9.9. Oferta, demanda y punto de equilibrio (V).

Como puede observarse, en el equilibrio del mercado los ingresos brutos del oferente 1 son mayores que los del oferente 2 en un importe de: 211'92 €/día. Ello viene representado, también, por el área de los rectángulos correspondientes.

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones de oferta estudiadas O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

Ejemplo 12

En dos mercados diferentes pero interrelacionados, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} - 3y_1 + 5y_2 = 0 \\ \dfrac{dy_2}{dx} - 2y_1 + 4y_2 = 0 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio en el mercado 1 en €/ud., y_2 = precio en el mercado 2 en €/ud., con x = cantidad demandada expresada en miles de ud./día. Se pide: a) hallar las funciones de demanda de ambos mercados para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1’00 €/ud. e $y_2(0)$ = 1’00 €/ud., b) ¿a qué precio corresponderá una demanda global nula?, y c) hallar el equilibrio del mercado y representarlo gráficamente para la siguiente función de oferta: y = 8x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \bar{z}_1(x) = \left(ae^{-2x}, be^{-2x}\right) \\ \bar{z}_2(x) = \left(ce^{x}, de^{x}\right) \end{cases}$.

Substituyendo $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema resultará que:

$$\begin{cases} -2ae^{-2x} = 3ae^{-2x} - 5be^{-2}x \\ -2be^{-2x} = 2ae^{-2x} - 4be^{-2x} \end{cases}$$

es decir: $\begin{cases} 5a - 5b = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases}$, luego $a = b$ y $\bar{z}_1(x) = \left(ae^{-2x}, ae^{-2x}\right)$.

Procediendo análogamente con la solución $\bar{z}_2(x)$ nos quedará:

$$\begin{cases} ce^{x} = 3ce^{x} - 5de^{x} \\ de^{x} = 2ce^{x} - 4de^{x} \end{cases}$$

o sea: $\begin{cases} 2c - 5d = 0 \\ 2c - 5d = 0 \end{cases}$, luego $d = \dfrac{2}{5}c$ y $\bar{z}_2(x) = \left(ce^{x}, \dfrac{2}{5}ce^{x}\right)$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

y, por lo tanto, $\left.\begin{array}{l} y_1(x) = ae^{-2x} + ce^{x} \\ y_2(x) = ae^{-2x} + \frac{2}{5}ce^{x} \end{array}\right\}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$, implica:

$\left.\begin{array}{l} y_1 = a + c = 1 \\ y_2 = a + \frac{2c}{5} = 1 \end{array}\right\}$ de donde: a = 1; c = 0; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{-2x} \\ y_2(x) = e^{-2x} \end{array}\right\}.$$

b) Al resultar iguales ambas funciones de demanda, la demanda global nula ($\forall$ x = 0) corresponderá a un precio de 1’00 €/ud., tal como puede comprobarse gráficamente.

c) El equilibrio del mercado exige que: D = O, con lo que:

$e^{-2x} = 8x$; $x = -\frac{2'0794415 + \ln x}{2}$, de donde: x_e = 0’102 (102 ud.), por lo que: $y_e = 8 \times 0'102 = 0'82$ €/ud., con unos ingresos brutos diarios de los oferentes de:

$$I = p \times q = 0'82 \times 102 = 83'64 \text{ €}.$$

La correspondiente representación gráfica será la siguiente:

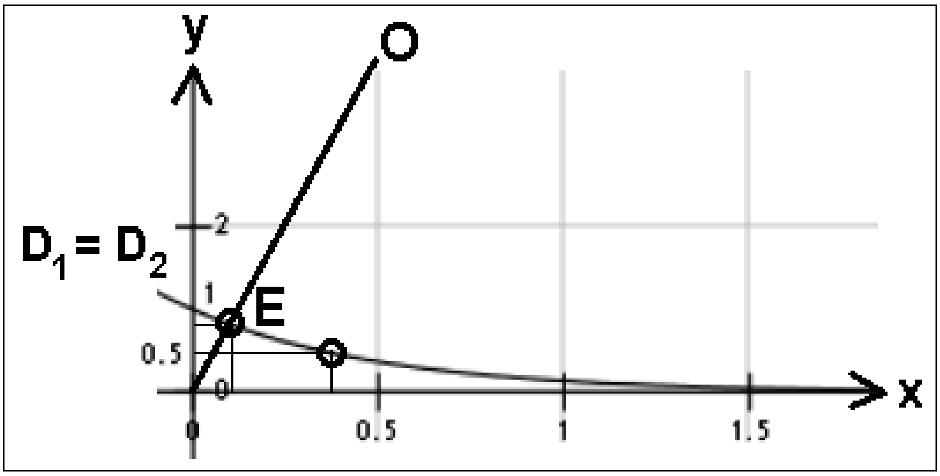
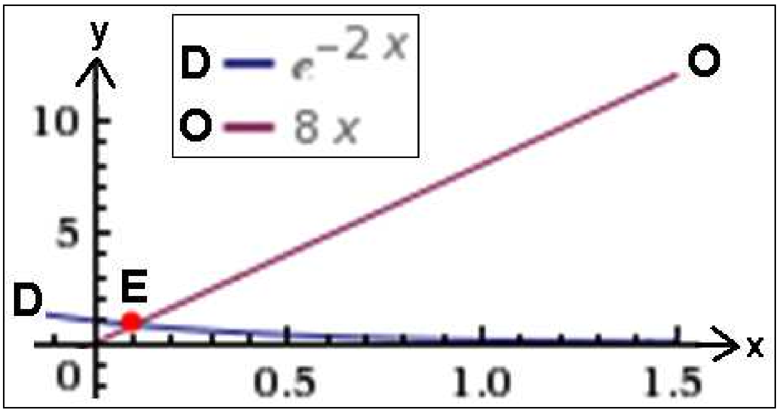


FIG. 9.10. Oferta, demanda y punto de equilibrio (VI).

, o también, con mayor amplitud (cambiando de hecho la escala del eje vertical):



Ejemplo 13

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 expresado en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud./día. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; y b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: 4y = 12 – 15x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, con lo que:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2},$$ que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \overline{z}_1(x) = \left(ae^{-3x}, be^{3x}\right) \\ \overline{z}_2(x) = \left(ce^{2x}, de^{2x}\right) \end{cases}$.

Substituyendo $\overline{z}_1(x)$ en dicho sistema resultará que:

$$\left.\begin{aligned} -3ae^{-3x} &= ae^{-3x} + 2be^{-3x} \\ -3be^{-3x} &= 2ae^{-3x} - 2be^{-3x} \end{aligned}\right\}$$ es decir:

$$\left.\begin{array}{r} 4a+2b=0 \\ 2a+b=0 \end{array}\right\}$$, luego b = -2a y $\bar{z}_1(x) = \left(ae^{-3x},\ -2ae^{-3x}\right)$.

Procediendo de la misma forma para $\bar{z}_2(x)$ nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} 2ce^{2x} = ce^{2x} + 2de^{2x} \\ 2de^{2x} = 2ce^{2x} - 2de^{2x} \end{array}\right\} \text{, es decir: } \left.\begin{array}{l} -c+2d=0 \\ 2c-4d=0 \end{array}\right\}$$

, luego c = 2d y $\bar{z}_2(x) = \left(2de^{2x}, de^{2x}\right)$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

y, por lo tanto, $\left.\begin{array}{l} y_1(x) = ae^{-3x} + 2de^{2x} \\ y_2(x) = -2ae^{-3x} + de^{2x} \end{array}\right\}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$, implica:

$\left.\begin{array}{l} y_1 = a+2d=1 \\ y_2 = -2a+d=1 \end{array}\right\}$ de donde se deduce que: $a = -\frac{1}{5}$; $d = \frac{3}{5}$; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial lineal planteado:

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{6}{5}e^{2x} \\ y_2 = \frac{2}{5}e^{-3x} + \frac{3}{5}e^{2x} \end{cases}.$$

b) Para una función de demanda de: 4y = 12 – 15x, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos brutos diarios de los ofertantes de:

$$\begin{cases} O_1 = D \Rightarrow -(1/5)e^{-3x} + (6/5)e^{2x} = \frac{12-15x}{4}; \\ x_{1e} = 0'27212 \approx 272 \text{ ud., } y_{1e} = 1'98 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 1'98 \times 272 = 538'56 \text{ € .} \\ \\ O_2 = D \Rightarrow (2/5)e^{-3x} + (3/5)e^{2x} = \frac{12-15x}{4}; \\ x_{2e} = 0'407266 \approx 407 \text{ ud., } y_{2e} = 1'47 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 1'47 \times 407 = 598'29 \text{ € .} \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:

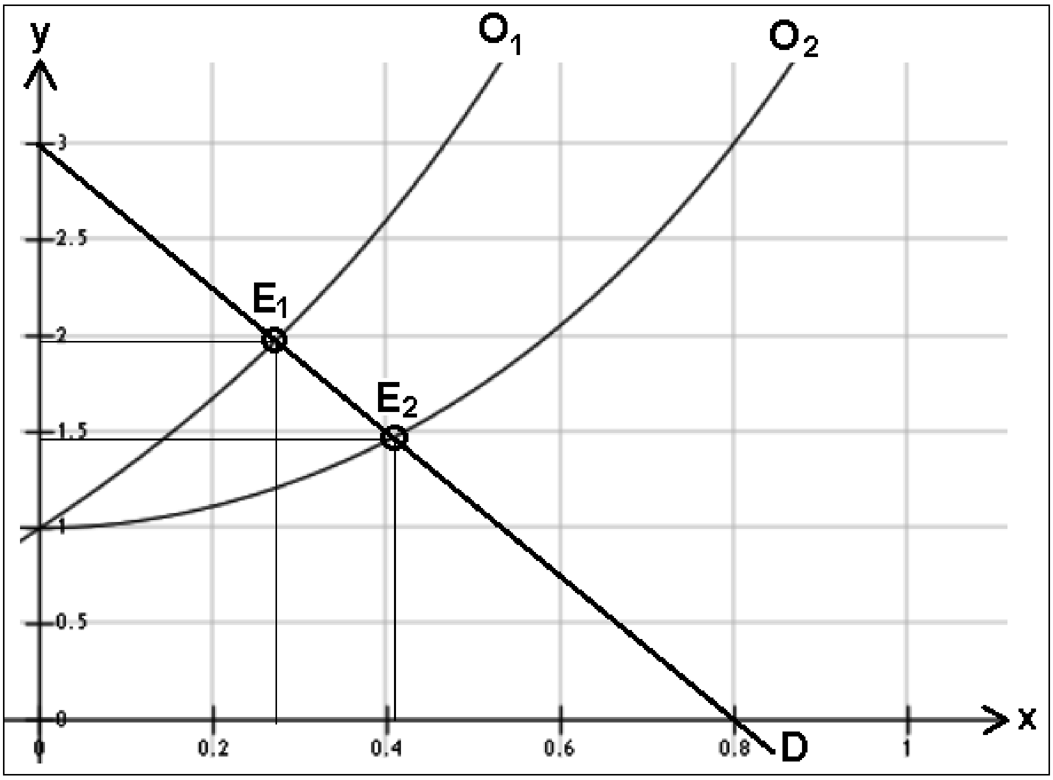


FIG. 9.11. Oferta, demanda y punto de equilibrio (VII).

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones de oferta O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

Ejemplo 14

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada diariamente expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; y b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: 4y = 12 – 15x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A-\lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma:

$$\begin{cases} \bar{z}_1(x) = \left(ae^{-2x}, be^{-2x}\right) \\ \bar{z}_2(x) = \left(ce^{3x}, de^{3x}\right) \end{cases}$$

Substituyendo $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema resultará que:

$$\begin{cases} -2ae^{-2x} = 2ae^{-2x} + 2be^{-2x} \\ -2be^{-2x} = 2ae^{-2x} - 2be^{-2x} \end{cases}$$

es decir: $\left.\begin{matrix} 4a + 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \end{matrix}\right\}$, luego b = -2a y $\bar{z}_1(x) = \left(ae^{-2x}, -2ae^{-2x}\right)$.

Procediendo análogamente para $\bar{z}_2(x)$ nos queda:

$$\left.\begin{matrix} 3ce^{3x} = 2ce^{3x} + 2de^{3x} \\ 3de^{3x} = 2ce^{3x} - de^{3x} \end{matrix}\right\}, \text{ es decir:}$$

$\left.\begin{matrix} -c + 2d = 0 \\ 2c - 4d = 0 \end{matrix}\right\}$, luego c = 2d y $\bar{z}_2(x) = \left(2de^{3x}, de^{3x}\right)$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = (y_1(x), y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

y, por lo tanto, $\left.\begin{matrix} y_1(x) = ae^{-2x} + 2de^{3x} \\ y_2(x) = -2ae^{-2x} + de^{3x} \end{matrix}\right\}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica:

$\left.\begin{matrix} y_1 = a + 2d = 1 \\ y_2 = -2a + d = 1 \end{matrix}\right\}$ de donde se deduce que: $a = -\frac{1}{5}$; $d = \frac{3}{5}$;

y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado:

$$\begin{cases} y_1(x) = -\frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{6}{5}e^{3x} \\ y_2(x) = \frac{2}{5}e^{-2x} + \frac{3}{5}e^{3x} \end{cases}.$$

b) Para una función de demanda dada de: $4y = 12 - 15x$, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos brutos diarios de los ofertantes de:

$$\begin{cases} O_1 = D \Rightarrow -(1/5)e^{-2x} + (6/5)e^{3x} = \dfrac{12-15x}{4}\,; \\ x_{1e} = 0'218362 \approx 218 \text{ ud.},\ y_{1e} = 2'18 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 2'18 \times 218 = 475'24 \text{ €}\,. \\ \\ O_2 = D \Rightarrow (2/5)e^{-2x} + (3/5)e^{3x} = \dfrac{12-15x}{4}\,; \\ x_{2e} = 0'322741 \approx 323 \text{ ud.},\ y_{2e} = 1'79 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 1'79 \times 323 = 578'17 \text{ €}\,. \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica conjunta de ambas funciones de oferta halladas:

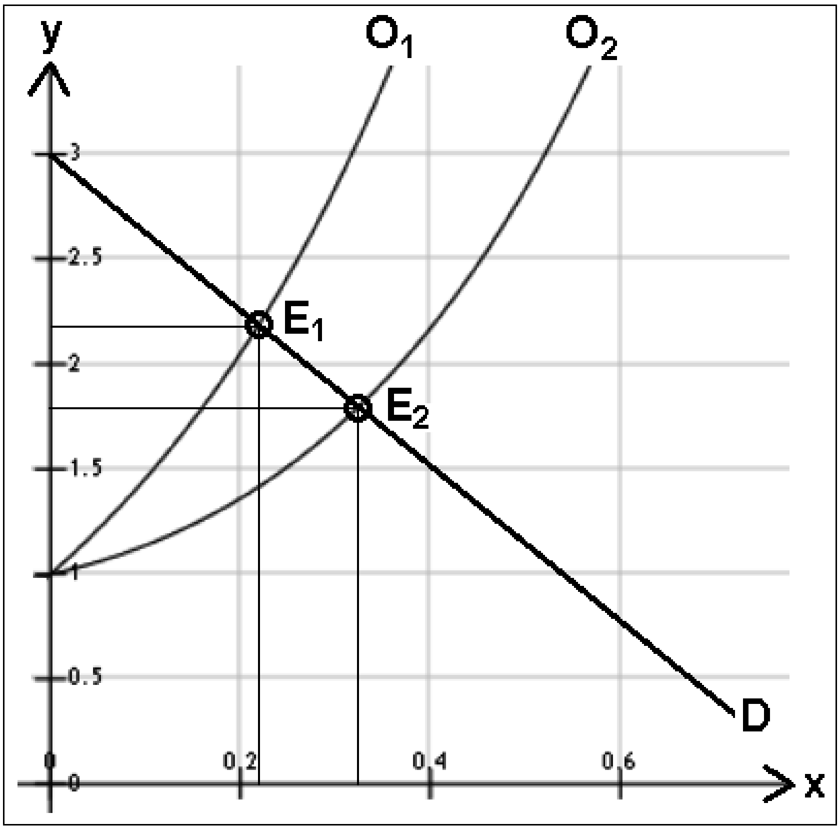


FIG. 9.12. Oferta, demanda y punto de equilibrio (VIII).

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones de oferta halladas O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

Ejemplo 15

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 + 2y_2 \\ y'_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud./día. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; y b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: 4y = 12 – 15x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \bar{z}_1(x) = (ae^x, be^x) \\ \bar{z}_2(x) = (ce^{4x}, de^{4x}) \end{cases}$.

Substituyendo $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema resulta: $\left.\begin{array}{l} ae^x = 3ae^x + 2be^x \\ be^x = ae^x + 2be^x \end{array}\right\}$

es decir: $\left.\begin{array}{r} 2a + 2b = 0 \\ a + b = 0 \end{array}\right\}$, luego b = -a y $\bar{z}_1(x) = (ae^x,\ -ae^x)$.

Procediendo análogamente para $\bar{z}_2(x)$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} 4ce^{4x} = 3ce^{4x} + 2de^{4x} \\ 4de^{4x} = ce^{4x} + 2de^{4x} \end{array}\right\} \text{, es decir: } \left.\begin{array}{r} -c + 2d = 0 \\ c - 2d = 0 \end{array}\right\}$$

, luego c = 2d y $\bar{z}_2(x) = (2de^{4x}, de^{4x})$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

y, por lo tanto, $\left.\begin{array}{l} y_1(x) = ae^x + 2de^{4x} \\ y_2(x) = -ae^x + de^{4x} \end{array}\right\}$,

que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a + 2d = 1 \\ y_2 = -a + d = 1 \end{array}\right\}$$ de donde: $a = -\frac{1}{3}$; $d = \frac{2}{3}$; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado: $\left\{\begin{array}{l} y_1(x) = -\frac{1}{3}e^x + \frac{4}{3}e^{4x} \\ y_2(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{4x} \end{array}\right.$.

b) Para una función de demanda de: 4y = 12 – 15x, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos brutos diarios de los ofertantes (áreas de los rectángulos respectivos) de:

$$\left\{\begin{array}{l} O_1 = D \Rightarrow -(1/3)e^x + (4/3)e^{4x} = \frac{12-15x}{4}; \\ x_{1e} = 0'178938 \approx 179 \text{ ud.},\ y_{1e} = 2'33 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 2'33 \times 179 = 417'07 \text{ €}. \\ \\ O_2 = D \Rightarrow (1/3)e^x + (2/3)e^{4x} = \frac{12-15x}{4}; \\ x_{2e} = 0'234132 \approx 234 \text{ ud.},\ y_{2e} = 2'12 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 2'12 \times 234 = 496'08 \text{ €}. \end{array}\right.$$

, con la siguiente representación gráfica:

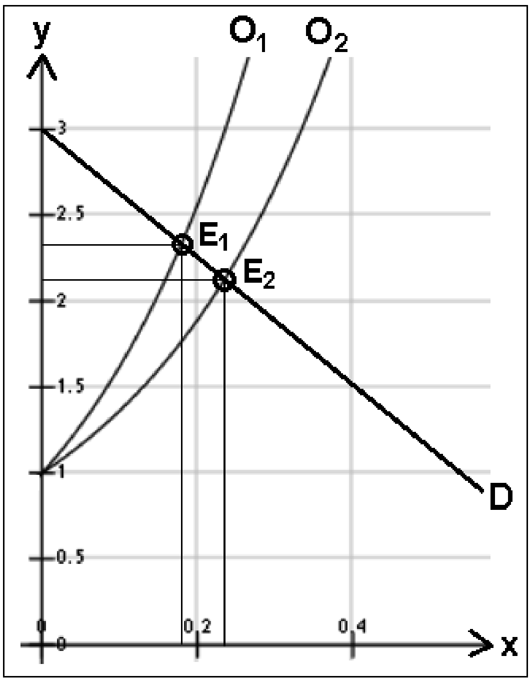


FIG. 9.13. Oferta, demanda y punto de equilibrio (IX).

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones de oferta O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si x $\rightarrow \infty$ también y $\rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

Ejemplo 16

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + 8y_2 \\ y'_2 = y_1 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; y b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: y = 2 – 5x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\begin{cases} \overline{z}_1(x) = \left(ae^{-2x}, be^{-2x}\right) \\ \overline{z}_2(x) = \left(ce^{4x}, de^{4x}\right) \end{cases}$

Substituyendo $\overline{z}_1(x)$ en dicho sistema nos quedará:

$$\begin{cases} -2ae^{-2x} = 2ae^{-2x} + 8be^{-2x} \\ -2be^{-2x} = ae^{-2x} \end{cases} \text{, o sea: } \left.\begin{aligned} 4a + 8b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{aligned}\right\}$$

luego a = -2b y $\overline{z}_1(x) = \left(ae^{-2x},\ -\frac{1}{2}ae^{-2x}\right)$.

Procediendo análogamente para $\overline{z}_2(x)$ resultará que:

$$\begin{cases} 4ce^{4x} = 2ce^{4x} + 8de^{4x} \\ 4de^{4x} = ce^{4x} \end{cases} \text{, es decir: } \left.\begin{aligned} -2c + 8d = 0 \\ c - 4d = 0 \end{aligned}\right\}$$

, luego también: $d = \frac{1}{4}c$ y $\overline{z}_2(x) = \left(ce^{4x}, \frac{1}{4}ce^{4x}\right)$.

La solución general buscada será: $\bar{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x)$,

y, por lo tanto, $\begin{cases} y_1(x) = ae^{-2x} + ce^{4x} \\ y_2(x) = -\frac{1}{2}ae^{-2x} + \frac{1}{4}ce^{4x} \end{cases}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica:

$\left.\begin{array}{l} y_1 = a + c = 1 \\ y_2 = -\frac{a}{2} + \frac{c}{4} = 1 \end{array}\right\}$ de donde: $a = -1;\ c = 2$; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado: $\begin{cases} y_1(x) = -e^{-2x} + 2e^{4x} \\ y_2(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{4x} \end{cases}$.

b) Para una función de demanda de: $y = 2 - 5x$, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos brutos de los ofertantes (áreas de los rectángulos respectivos) de:

$$\begin{cases} O_1 = D \Rightarrow -e^{-2x} + 2e^{4x} = 2 - 5x; \\ x_{1e} = 0'0626142 \approx 63 \text{ ud.},\ y_{1e} = 1'69\ €/\text{ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 1'69 \times 63 = 106'47\ €\ . \\ O_2 = D \Rightarrow (1/2)e^{-2x} + (1/2)e^{4x} = 2 - 5x; \\ x_{2e} = 0'146002 \approx 146 \text{ ud.},\ y_{2e} = 1'27\ €/\text{ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 1'27 \times 146 = 185'42\ €\ . \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:

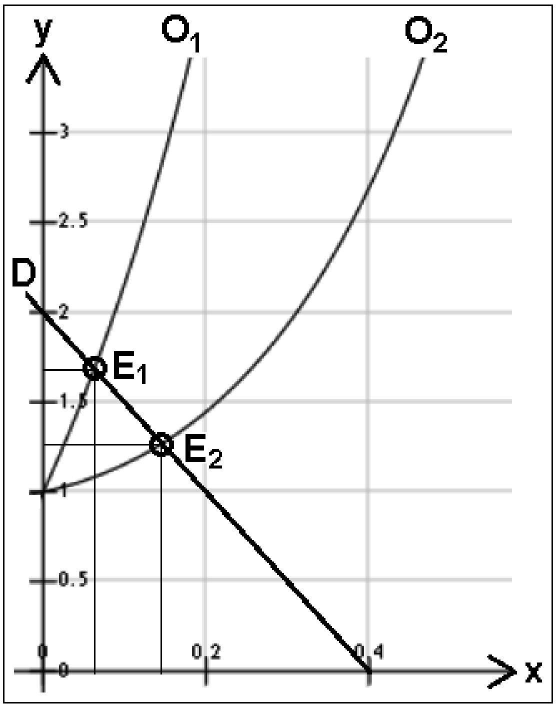


FIG. 9.14. Oferta, demanda y punto de equilibrio (X).

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones de oferta O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

Ejemplo 17

El equilibrio del mercado de un bien viene dado por el sistema diferencial lineal siguiente, viniendo los precios *y* expresados en €/ud. y siendo *x* = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. diarias:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

Se pide: a) hallar las funciones de oferta y demanda correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., e $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; y b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es: $|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, que tiene las raíces reales: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$.

El sistema dado tiene soluciones de la forma: $\left.\begin{matrix} \bar{z}_1(x) = (ae^{3x}, be^{3x}) \\ \bar{z}_2(x) = (ce^{4x}, de^{4x}) \end{matrix}\right\}$

Substituyendo $\bar{z}_1(x)$ en dicho sistema nos quedará que:

$$\left.\begin{matrix} 3ae^{3x} = 2ae^{3x} - 2be^{3x} \\ 3be^{3x} = ae^{3x} + 5be^{3x} \end{matrix}\right\}$$

, es decir: $\left.\begin{matrix} -a - 2b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{matrix}\right\}$ luego a = -2b y $\bar{z}_1(x) = (-2be^{3x}, be^{3x})$.

Procediendo análogamente para $\bar{z}_2(x)$ se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} 4ce^{4x} = 2ce^{4x} - 2de^{4x} \\ 4de^{4x} = ce^{4x} + 5de^{4x} \end{array}\right\}$$

, o sea: $\left.\begin{array}{r} -2c - 2d = 0 \\ c + d = 0 \end{array}\right\}$, luego d = -c y $\bar{z}_2(x) = \left(ce^{4x},\ -ce^{4x}\right)$.

La solución general buscada será:

$$\bar{y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x)) = \bar{z}_1(x) + \bar{z}_2(x),$$

y, por lo tanto, $\left.\begin{array}{l} y_1(x) = -2be^{3x} + ce^{4x} \\ y_2(x) = be^{3x} - ce^{4x} \end{array}\right\}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = -2b + c = 1 \\ y_2 = b - c = 1 \end{array}\right\}$$

, que es un sencillo sistema de ecuaciones heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por la inversión de la matriz o bien por el método de triangularización de Gauss-Jordan), así:

b = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{1}$; de donde se deduce que: b = -2; c = -3; y entonces resultará la siguiente integral particular del sistema de ecuaciones diferenciales planteado:

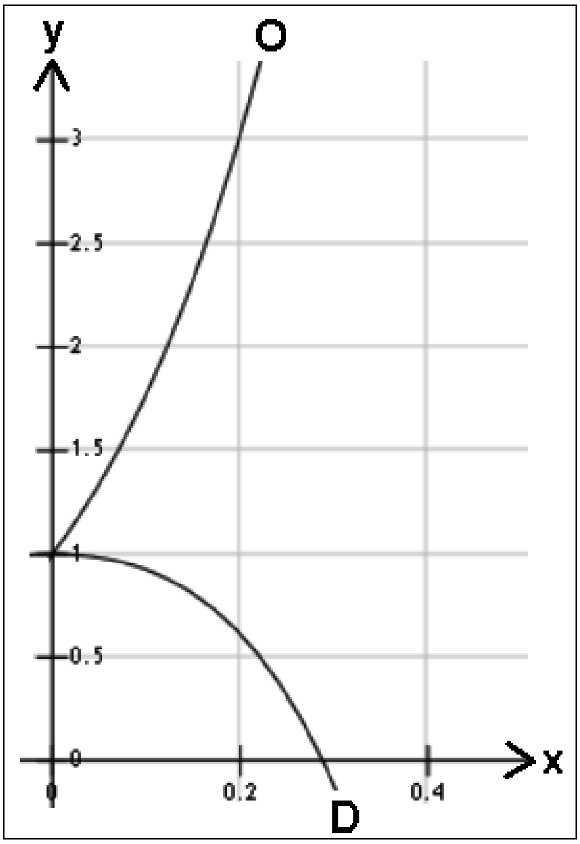
$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = 4e^{3x} - 3e^{4x} \\ y_2(x) = -2e^{3x} + 3e^{4x} \end{array}\right\}.$$

De la contemplación analítica de dichas funciones, se infiere que la primera es de demanda y la segunda de oferta, al tratarse de un bien normal.

b) El equilibrio del mercado vendrá dado por la igualación de las funciones de oferta y demanda, esto es:

$$D = O \Rightarrow 4e^{3x} - 3e^{4x} = -2e^{3x} + 3e^{4x};\ e^{3x} = e^{4x} \Rightarrow x = 0,$$

o sea, que en el punto de equilibrio se tendrán las coordenadas: E(0,1), como puede observarse en la representación gráfica siguiente:



Es evidente que la ecuación y_2 es de oferta y la y_1 es de demanda, habida cuenta del carácter creciente y decreciente, respectivamente, de ambas. El punto teórico de equilibrio del mercado sería el inicial, de coordenadas cartesianas rectangulares (0,1), para el cual no habría cantidad alguna en transacción comercial.

Por otra parte, se presume también, en el caso de la función de oferta $y_2(x)$, la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{4x} - 2e^{3x}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

1.2.2. Raíces múltiples de la ecuación característica

Supuesto que las raíces de la ecuación característica o secular (2) del epígrafe anterior 1.2.1. sean reales y múltiples, pero la matriz (3) no sea diagonalizable[2], no es posible obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales de manera análoga a la seguida en otros casos, ya que sería preciso un conocimiento previo de la "forma de Jordan"[3] que no es objeto de tratamiento en el presente curso práctico.

---

[2] En relación a este concepto, puede consultarse el epígrafe 3. del capítulo 9b de este mismo libro.

[3] Al tratar de diagonalizar una matriz, si ésta posee algunos de sus autovalores que sean iguales, puede ser que no lleguemos a encontrar ninguna transformación lineal que logre diagonalizarla completamente.

El siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en algunas de las obras de referencia bibliográfica, nos proporciona un procedimiento de obtención de la solución general de un sistema lineal homogéneo, válido para todos los casos, que podemos también emplear en éste.

Proposición.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales como el (1), si $\lambda_1,\ldots,\lambda_2$ son las raíces de su ecuación característica (2) con órdenes o grados de multiplicidad $m_1,\ldots,m_s$, respectivamente, entonces, para cada λ_i, i = 1, …, s, existen soluciones del sistema (1) de la forma:

$$z_i = \begin{bmatrix} P_{i1}(x)e^{\lambda_i x} \\ \vdots \\ P_{in}(x)e^{\lambda_i x} \end{bmatrix},$$

donde $P_{i1}, \ldots, P_{in}$ son polinomios de grado inferior a m_i.

Además, si z es una solución cualquiera de dicho sistema, es posible encontrar los polinomios citados, de tal forma que:

$$z = \sum_{i=1}^{s} z_i = z_1 + \ldots + z_s \ .$$

Ejemplo 1

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = -2y_1 + y_2 \\ y'_2 = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 expresado en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada diariamente expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes

---

Esto ocurre cuando, para ese autovalor múltiple, no podamos encontrar suficientes autovectores linealmente independientes (debemos encontrar autovectores –linealmente independientes- en la misma cantidad que la multiplicidad del autovalor para poderlo diagonalizar completamente). En los casos en que no es posible diagonalizar la matriz, se puede llevar la misma –a través de una transformación lineal- a la denominada *forma de Jordan*, que consiste en tener en la diagonal principal los autovalores λ_i de la matriz, y "unos" extra-diagonales en bloques de Jordan en los lugares de los autovalores múltiples. La cantidad de "unos" extra-diagonales dependerá de la cantidad de autovectores linealmente independientes que podamos obtener del autovalor múltiple. Si el grado de multiplicidad del autovalor es *k*, y obtenemos *l* autovectores linealmente independientes para ese autovalor, entonces la cantidad *m* de "unos" extra-diagonales será: $m = k - l$.

para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 2'00 €/ud.; b) ¿a qué precios corresponderá una oferta del producto de 300 ud.?; c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: $y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$, con y(0) = 3'00 €/ud., calculando también los ingresos brutos de los oferentes; d) hallar la elasticidad arco entre ambos puntos de equilibrio.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular del sistema diferencial planteado es:

$$|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) + 1 = 0\,;$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \text{ , que posee una raíz: } \lambda = 3 \text{ (doble).}$$

Notemos que la matriz del sistema: (A) = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ no es diagonalizable. Por la proposición teórica anteriormente enunciada, podemos afirmar que el sistema dado poseerá soluciones de la forma:

$$z = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 x + c_2) \cdot e^{3x} \\ (c_3 x + c_4) \cdot e^{3x} \end{bmatrix},$$

que, substituidas en el sistema, nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 e^{3x} + 3(c_1 x + c_2)e^{3x} = 2(c_1 x + c_2)e^{3x} + (c_3 x + c_4)e^{3x} \\ c_3 e^{3x} + 3(c_3 x + c_4)e^{3x} = -(c_1 x + c_2)e^{3x} + 4(c_3 x + c_4)e^{3x} \end{array}\right\}$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} 3c_1 x + 3c_2 + c_1 = (2c_1 + c_3)x + 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 x + c_3 + 3c_4 = (4c_3 - c_1)x - c_2 + 4c_4 \end{array}\right\}$$

por ello:

$$\left.\begin{array}{l} 3c_1 = 2c_1 + c_3 \\ 3c_2 + c_1 = 2c_2 + c_4 \\ 3c_3 = 4c_3 - c_1 \\ c_3 + 3c_4 = -c_2 + 4c_4 \end{array}\right\}$$

que nos proporciona las relaciones: $c_3 = c_1$ y $c_4 = c_1 + c_2$.

La solución general buscada es, pues:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = (c_1x + c_2)\cdot e^{3x} \\ y_2 = (c_1x + c_1 + c_2)\cdot e^{3x} \end{array}}$$

de donde también se cumple que: $y_2 - y_1 = c_1\cdot e^{3x}$.

Obtengamos ahora aquella solución particular de dicho sistema tal que $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 2$ (lo que constituye un problema de valor inicial). Substituyendo en la solución las anteriores condiciones iniciales, tenemos un sencillo sistema de ecuaciones que resuelto ofrece los valores: $c_1 = c_2 = 1$. Luego la solución particular buscada es:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = (x + 1)\cdot e^{3x} \\ y_2 = (x + 2)\cdot e^{3x} \end{array}\right\}$$

b) Para x = 300 ud. de producto, veamos que:

$$\left.\begin{array}{l} O_1 \Rightarrow y_1 = 1'3\cdot e^{0'9} = 3'20 \text{ €/ud.} \\ O_2 \Rightarrow y_2 = 2'3\cdot e^{0'9} = 5'66 \text{ €/ud.} \end{array}\right\}$$

c) Empezaremos aquí por resolver la función de demanda, que constituye también un problema de valor inicial. En efecto, se trata de resolver la EDO lineal de primer orden, o sea:

$$y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0.$$

La ecuación homogénea correspondiente será: $y' + 2xy = 0$ ($X_1 = 0$), que se puede escribir así: $\frac{dy}{y} = -2x\cdot dx$, e integrando resultará que:

$$\ln y - \ln C = -x^2 \text{ , de donde: } y = C\cdot e^{-x^2} \text{ .}$$

Aplicando el método de variación de constantes o parámetros, y suponiendo ahora que en vez de la constante C se escribe la función C(x), aunque por comodidad de escritura no lo haremos, derivando se obtiene: $y' = C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2}$.

Substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que:

$$C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} - 2xe^{-x^2} = 0 \text{ ,}$$

o sea: $\frac{dC}{dx} = 2x$; $C = K + x^2$, y la solución o integral general buscada será:

$$\boxed{y = (K + x^2)e^{-x^2}} \Rightarrow \text{I.G.}$$

Obviamente, se llega al mismo resultado por aplicación directa de la fórmula explicada en la introducción teórica para la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En efecto:

$$y' + 2xy - 2x\cdot e^{-x^2} = 0, \text{siendo :}$$

$$\left.\begin{array}{l} X = 2x \\ X_1 = -2x\cdot e^{-x^2} \end{array}\right\}$$

$$\int X\cdot dx = 2\int x\cdot dx = x^2; \int X_1\cdot e^{\int x\cdot dx}\cdot dx = -2\int x\cdot e^{-x^2}\cdot e^{x^2}\cdot dx = -2\int x\cdot dx = -x^2.$$

, y se obtiene la solución general:

$$\boxed{y = e^{-x^2}\left[K + x^2\right]}, \text{ c.s.q.d.}$$

Si ahora aplicamos la condición inicial dada en que y(0) = 3, se tendrá que K = 3, y la solución o integral particular será:

$$D \to y = e^{-x^2}(3 + x^2).$$

Para ambas ofertas, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio y los correspondientes ingresos brutos diarios de los ofertantes en este mercado:

$$\left\{\begin{array}{l} O_1 = D \Rightarrow (x+1)\cdot e^{3x} = e^{-x^2}(3+x^2);\ x_{1e} = 0'27017 \approx 270 \text{ ud.} \\ y_{1e} = e^{0'81051}\cdot 1'27017 = 2'86\ €/\text{ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 2'86 \times 270 = 772'20\ € . \\ \\ O_2 = D \Rightarrow (x+2)\cdot e^{3x} = e^{-x^2}(3+x^2);\ x_{2e} = 0'113823 \approx 114 \text{ ud.} \\ y_{2e} = e^{0'341469}\cdot 2'113823 = 2'97\ €/\text{ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 2'97 \times 114 = 338'58\ € . \end{array}\right.$$

Por otra parte, se presume también en los dos casos de las funciones de oferta aquí contempladas O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe en ambas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Se tiene, entonces, la siguiente representación gráfica conjunta del equilibrio del mercado en cuestión:

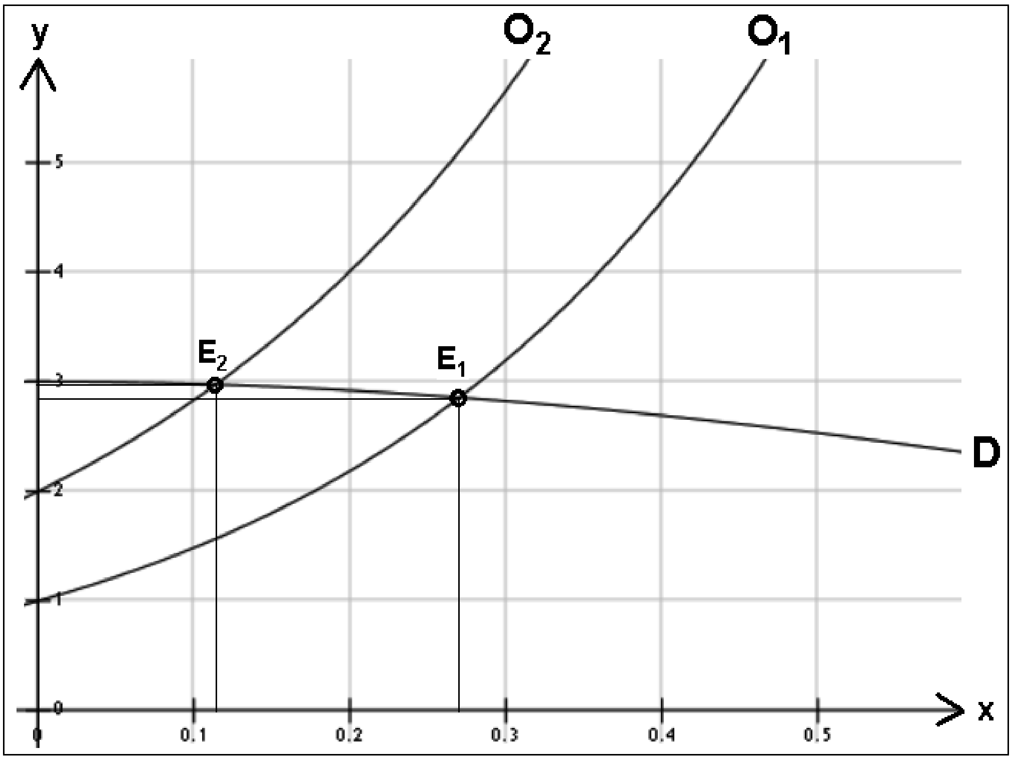


FIG. 9.15. Representación gráfica conjunta del equilibrio (III).

d) Por otra parte, la elasticidad arco de la demanda entre ambos puntos de equilibrio E_2(0'114,2'97) y E_1(0'270,2'86) vendrá dada por:

$$e_a = \frac{0'270 - 0'114}{0'270 + 0'114} \times \frac{2'86 + 2'97}{2'86 - 2'97} = \frac{0'156}{0'384} \times \frac{5'83}{-0'11} = -21'53 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Ejemplo 2

Dos productos o bienes sustitutivos poseen en un mercado agrícola la siguiente relación de precios:

$$\begin{cases} P'_1 = 3P_1 - 18P_2 \\ P'_2 = 2P_1 - 9P_2 \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de ambos precios sabiendo que inicialmente: P_1 = 2'00 €/kg. y P_2 = 1'00 €/kg.

Solución:

La matriz del sistema diferencial planteado es: $A = \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$.

Procederemos como siempre, con lo que:

$$\det(A-\lambda\cdot I_2)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -18\\ 2 & -9-\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow(3-\lambda)(-9-\lambda)+36=0\text{; o sea:}$$

$(\lambda+3)^2=0\Rightarrow\lambda=-3$, que es una raíz de grado de multiplicidad 2, con lo que:

$$[\lambda=-3]\Rightarrow\begin{vmatrix}3-(-3) & -18\\ 2 & -9-(-3)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -18\\ 2 & -6\end{vmatrix}\text{. Entonces:}$$

$$\left.\begin{aligned}6k_1-18k_2&=0\\2k_1-6k_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \text{Si}\quad \begin{aligned}&k_1=1\Rightarrow 6-18k_2=0\Rightarrow k_2=\frac{1}{3}(3)=1\\&k_1=1(3)=3\end{aligned}$$

Entonces: $K_1=C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$

$$\left.\begin{aligned}6k_1-18k_2&=3\\2k_1-6k_2&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \text{Si}\quad \begin{aligned}&k_1=1\Rightarrow 6-18k_2=3\Rightarrow k_2=\frac{1}{6}(6)=1\\&k_1=1(6)=6\end{aligned}$$

Entonces: $K_2=C_2\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}t\cdot e^{-3t}+\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}e^{-3t}\right]$, y definitivamente:

$$K=K_1+K_2=C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{-3t}+C_2\left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}t\cdot e^{-3t}+\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}e^{-3t}\right].$$

Y la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned}P_1(t)&=3C_1\cdot e^{-3t}+3C_2\cdot t\cdot e^{-3t}+6C_2\cdot e^{-3t}=3e^{-3t}(C_1+C_2\cdot t+2C_2)\\P_2(t)&=C_1\cdot e^{-3t}+C_2\cdot t\cdot e^{-3t}+C_2\cdot e^{-3t}=e^{-3t}(C_1+C_2\cdot t+C_2)\end{aligned}}$$

, y también se cumple que: $P_1(t)+P_2(t)=4C_1\cdot e^{-3t}+4C_2\cdot t\cdot e^{-3t}+7C_2\cdot e^{-3t}=$

$$=e^{-3t}(4C_1+4tC_2+7C_2).$$

Con los valores iniciales expresados, se tendrá que:

$$\begin{cases}P_1(0)=3(C_1+2C_2)=2\\P_2(0)=C_1+C_2=1\end{cases};$$

, que constituye un sistema simple de ecuaciones del que se deducen los siguientes valores: $C_1=4/3$; $C_2=-1/3$, con lo que la solución particular pedida es:

$$P_1(t) = 3 \cdot e^{-3t}\left(\frac{4}{3} - \frac{t}{3} - \frac{2}{3}\right) = e^{-3t}(2 - t)$$
$$P_2(t) = e^{-3t}\left(\frac{4}{3} - \frac{t}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{e^{-3t}}{3}(3 - t)$$

Debemos recordar aquí que si existe competencia perfecta entre los consumidores de ambos bienes, un consumidor maximizará su satisfacción si su RSB (relación de substitución[4] entre los bienes o *relación o tasa marginal de substitución*) es igual a la razón de sus precios, o sea:

$$RMS = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{P_2}{P_1} = \frac{t-3}{6-3t}$$, que inicialmente valdrá: -1'00/2'00 = -0'5.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

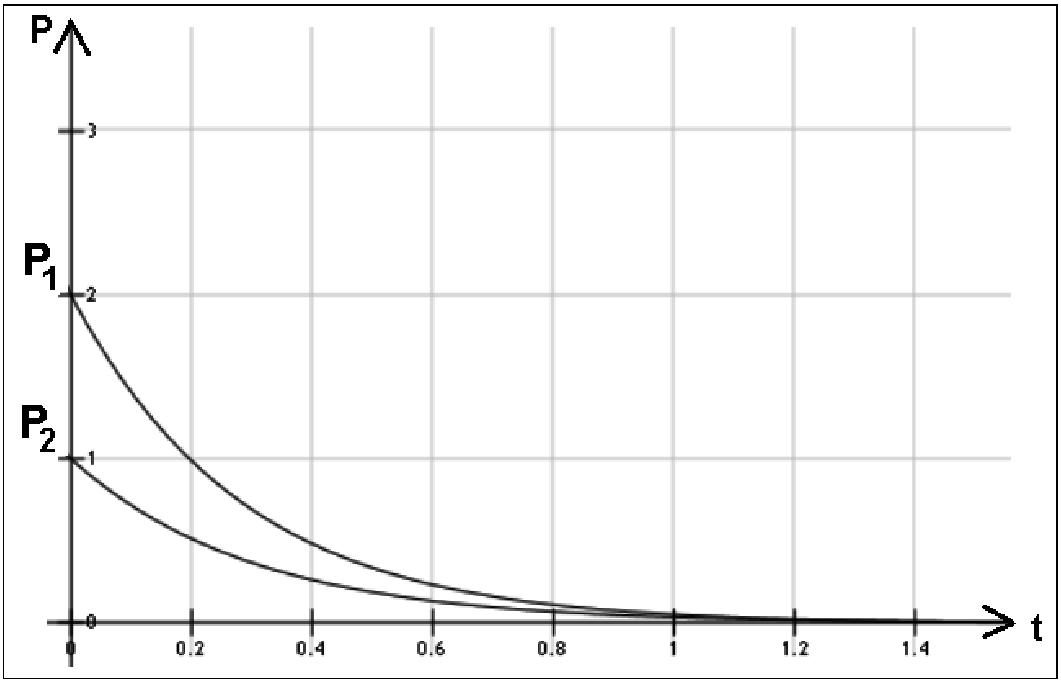


FIG. 9.16. Trayectorias temporales de los precios (III).

En ambos casos estudiados, puede observarse que el límite cuando $t \to +\infty$ es igual a 0, por lo que el eje Ot constituye en ellos una asíntota horizontal.

[4] Dentro del estudio de la teoría del consumidor, la RMS es el número de unidades de un bien a las que está dispuesto a renunciar un consumidor a cambio de una unidad adicional del otro bien, manteniendo constante el nivel de utilidad. La RMS mide la relación de intercambio existente entre dos bienes que mantiene constante la utilidad del consumidor. También se podría decir que es la valoración subjetiva que realiza un consumidor de un bien en términos del otro bien.

Ejemplo 3

En un mercado con dos oferentes ferreteros de un determinado modelo de lámparas-foco, los precios que alcanza el producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 - 2y_2 \\ y'_2 = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 expresado en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud./año. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; b) ¿a qué cantidad ofertada corresponderá un precio del producto de 5'00 €/ud.?, y c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: y = 8 – 4x, calculando también los ingresos brutos de los oferentes por este concepto.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es:

$|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, -(3 - λ)·(1 - λ) + 4 = $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, que tiene la raíz real doble: $\lambda_1 = 1$, puesto que: $\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$.

El sistema dado tiene las soluciones de la forma:

$$\bar{y}(x) = \left((ax+b)e^x, (cx+d)e^x\right).$$

Substituyendo en dicho sistema se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} ae^x + (ax+b)e^x &= 3(ax+b)e^x - 2(cx+d)e^x \\ ce^x + (cx+d)e^x &= 2(ax+b)e^x - (cx+d)e^x \end{aligned}\right\}, \text{ luego:}$$

$$\begin{cases} a = 2b - 2d \\ c = 2b - 2d \\ a = 3a - 2c \\ c = 2a - c \end{cases}$$

de donde se deduce que:

$$\begin{cases} c = a \\ a = 2b - 2d \end{cases}$$

, luego también: $\left.\begin{array}{l} y_1(x) = (ax+b)e^x \\ y_2(x) = \left(ax+b-\dfrac{a}{2}\right)e^x \end{array}\right\}$, que con $y_1(0) = y_2(0) = 1$ implica:

$\left.\begin{array}{l} y_1 = b = 1 \\ y_2 = b - \dfrac{a}{2} = 1 \end{array}\right\}$ que es un sencillo sistema de ecuaciones heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), así:

a = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{1/2} = 0$; de donde se deduce que: a = 0; b = 1; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado: $y_1(x) = y_2(x) = e^x$.

b) Para y = 5'00 €/ud. corresponderá: 5'00 = e^x; de donde:
x = ln 5 = 1'60944 ≡ 1.609 ud., lo que supone unos ingresos anuales para ambos ofertantes de: I = p × q = 5'00 €/ud. × 1.609 ud. = 8.045'00 € .

Ello puede verse en el gráfico siguiente:

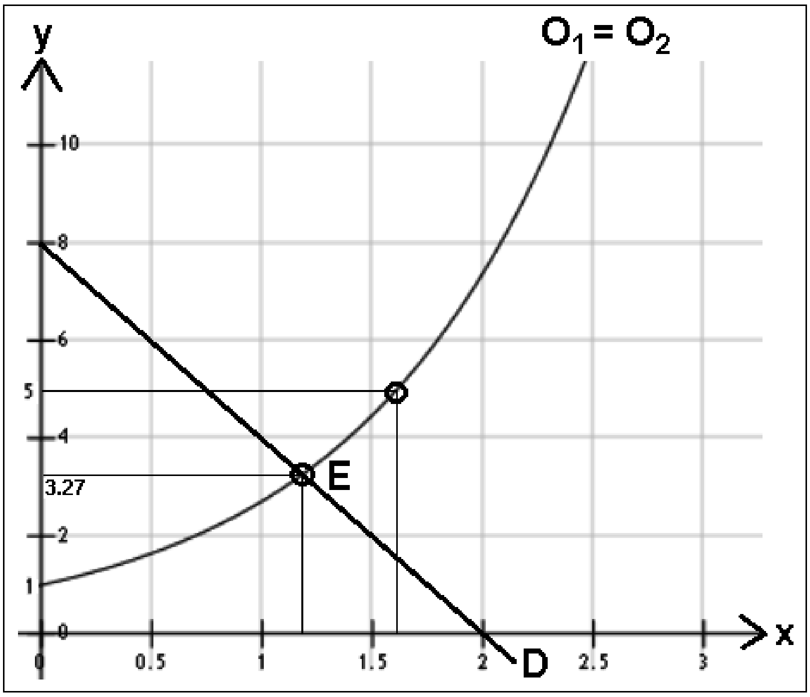
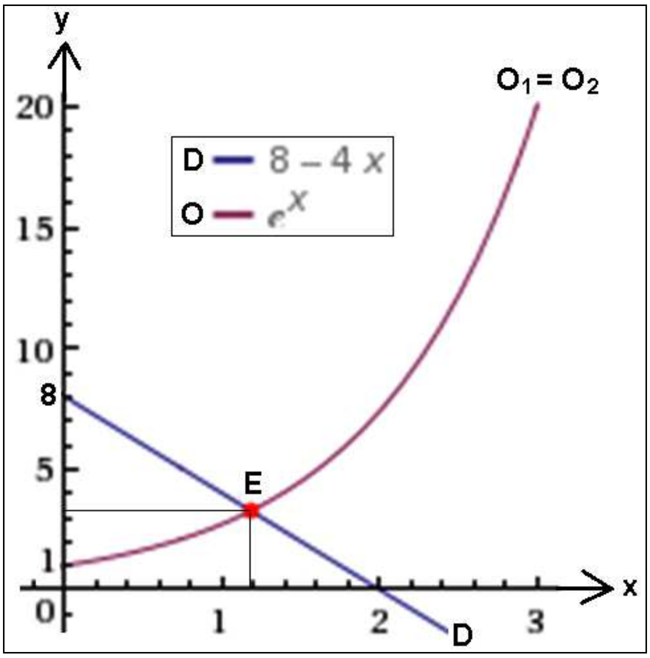


FIG. 9.17. Oferta, demanda y punto de equilibrio (XI).

c) Para una función de demanda de: y = 8 – 4x, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos anuales de:

$$\begin{cases} O_1 = O_2 = D \Rightarrow 8 - 4x = e^x \text{ ;} \\ x_e = 1'184 \approx 1.184 \text{ ud. ; } y_e = 3'27 \text{ €/ud.} \\ I = p \times q = 3'27 \times 1.184 = 3.871'68 \text{ € .} \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica de mayor amplitud vertical que la anterior:



Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones iguales de oferta O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

Ejemplo 4

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 - y_2 \\ y'_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 expresado en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada diariamente expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 1'00 €/ud.; b) ¿a qué cantidad ofertada corresponderá un precio del producto de 2'50 €/ud.?, y c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: $f(x)+\int_0^x f(u)\cdot du=4$, calculando también los ingresos brutos de los oferentes.

Solución:

a) La ecuación característica es: $|A-\lambda\cdot I_2|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$, o sea, $\lambda^2-4\lambda+1=0$, que tiene la raíz real doble: $\lambda_1=2$.

El sistema dado tiene las soluciones de la forma:

$$\overline{y}(x)=\left((ax+b)e^{2x},(cx+d)e^{2x}\right).$$

Substituyendo la anterior expresión $\overline{y}(x)$ en dicho sistema diferencial nos queda:

$$\begin{cases}ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x}=3(ax+b)e^{2x}-(cx+d)e^{2x}\\ ce^{2x}+2(cx+d)e^{2x}=(ax+b)e^{2x}+(cx+d)e^{2x}\end{cases}$$

, de donde se deduce que: $\left.\begin{array}{l}a+2b=3b-d\\ c+2d=b+d\\ 2a=3a-c\\ 2c=a+c\end{array}\right\}$, de aquí que también:

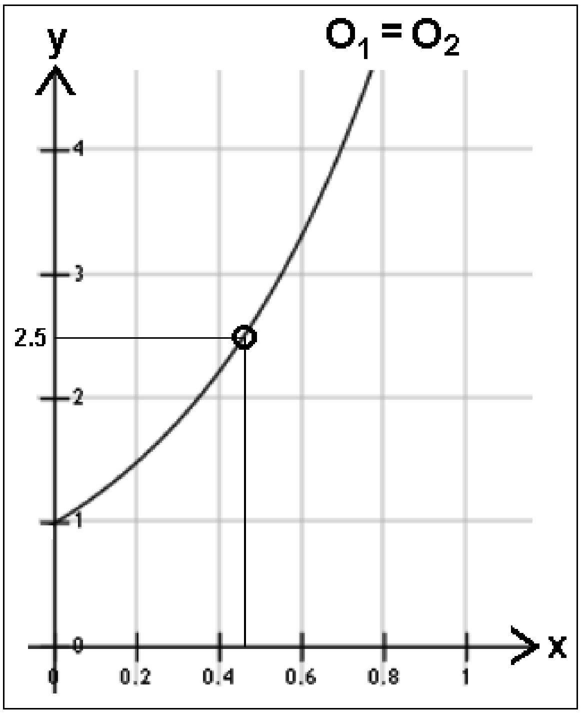
$$\begin{cases}c=a\\ d=b-a\end{cases}$$

y, por lo tanto, $\begin{cases}y_1(x)=(ax+b)e^{2x}\\ y_2(x)=(ax+b-a)e^{2x}\end{cases}$, que, a su vez, con $y_1(0)=y_2(0)=1$, implica:

$\left.\begin{array}{l}y_1=b=1\\ y_2=b-a=1\end{array}\right\}$ de donde: a = 0; b = 1; y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado: $y_1(x)=y_2(x)=e^{2x}$.

b) Para y = 2'50 €/ud. corresponderá: 2'50 = e^{2x}; de donde se deduce que:

x = ln (2'5)/2 = 0'458 ≡ 458 ud., lo que supone unos ingresos para ambos ofertantes de: I = p × q = 2'50 €/ud. × 458 ud. = 1.145'00 € , con la siguiente representación gráfica:



Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones iguales de oferta O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

c) La función de demanda viene expresada como una ecuación integral de Volterra, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{4\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u)\cdot du\right\} = L\{4\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{4}{S},$$

donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 4 \Rightarrow F(S)(S+1) = 4 \Rightarrow F(S) = \frac{4}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{4}{S+1}\right\} = 4\cdot e^{-x}} \to \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

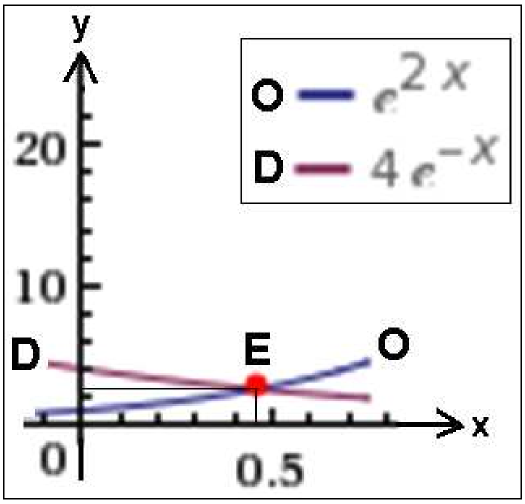
$4 \cdot e^{-x} + \int_0^x 4 \cdot e^{-u} \cdot du = 4$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u} \cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Así pues, para una función de demanda de: $f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 4$, como la calculada, se tendrán unos puntos de equilibrio del mercado y unos ingresos diarios de:

$$\begin{cases} O_1 = O_2 = D \Rightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{-x}; \\ x_e = 0'462 \approx 462 \text{ ud.}; \ y_e = 2'52 \text{ €/ud.} \\ I = p \times q = 2'52 \times 462 = 1.164'24 \text{ €}. \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica:



Ejemplo 5

Los resultados contables de 3 empresas del mismo *holding* vienen dados por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente (con *y* expresada en 10^6 € y el tiempo *t* en decenios):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_1 + y_2 + 3y_3 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2 - 2y_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1 + y_3 \end{aligned}\right\}$$

con los valores iniciales: $y_1(0) = -1$; $y_2(0) = 3$; $y_3(0) = 1$. Representar analítica y gráficamente dichos resultados contables y determinar si alguna de las empresas entrará en pérdidas y cuándo se producirá tal circunstancia.

Solución:

a) La correspondiente ecuación característica o secular es:

$|A - \lambda \cdot I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea $(1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) - 2 = 0$, que tiene las siguientes raíces reales: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ (doble).

El sistema dado tiene, entonces, soluciones de la siguiente configuración:

$$\begin{cases} \overline{z}_1(t) = \left(Ae^{-t},\ Be^{-t} + 3Ce^{-t}\right) \\ \overline{z}_2(t) = \left((Dt+E)e^{2t},\ (Ft+G)e^{2t},\ (Ht+I)e^{2t}\right) \end{cases}$$

Substituyendo $\overline{z}_1(t)$ en dicho sistema resultará que:

$$\begin{cases} -Ae^{-t} = Ae^{-t} + Be^{-t} + 3Ce^{-t} \\ -Be^{-t} = Be^{-t} - 2Ce^{-t} \\ -Ce^{-t} = Ae^{-t} + Ce^{-t} \end{cases}$$

es decir, que se tiene el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2A + B + 3C = 0 \\ 2B - 2C = 0 \\ A + 2C = 0 \end{array}\right\}$,

luego B = C ; A = -2C , y entonces: $\overline{z}_1(t) = \left(-2Ce^{-t},\ Ce^{-t},\ Ce^{-t}\right)$.

Substituimos ahora $\overline{z}_2(t)$ en el sistema dado. Entonces, se tiene que:

$$\begin{cases} De^{2t} + 2(Dt+E)e^{2t} = (Dt+E)e^{2t} + (Ft+G)e^{2t} + 3(Ht+I)e^{2t} \\ Fe^{2t} + 2(Ft+G)e^{2t} = (Ft+G)e^{2t} - 2(Ht+I)e^{2t} \\ He^{2t} + 2(Ht+I)e^{2t} = (Dt+E)e^{2t} + (Ht+I)e^{2t} \end{cases}$$

y de aquí se deduce que:

$$\begin{cases} D+2E = E + G + 3I \\ F + 2G = G - 2I \\ H + 2I = E + I \\ 2D = D + F + 3H \\ 2F = F - 2H \\ 2H = D + H, \end{cases}$$

de donde también se deduce que:

$$\begin{cases} D = H \\ F = -2H \\ D + E - G - 3I = 0 \\ F + G + 2I = 0 \\ H - E + I = 0 \end{cases}$$

y por lo tanto resulta que:

$$\begin{cases} D = H \\ F = -2H \\ G = 2H - 2I \\ E = H + I \end{cases}$$

Queda pues: $\overline{z}_2(t) = \left((Ht + H + I)e^{2t},\ (-2Ht + 2H - 2I)e^{2t},\ (Ht + I)e^{2t}\right)$.

La solución general del sistema dado será:

$$\overline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = \overline{z}_1(t) + \overline{z}_2(t),$$

luego $\begin{cases} y_1(t) = -2Ce^{-t} + (Ht + H + I)e^{2t} \\ y_2(t) = Ce^{-t} + (-2Ht + 2H - 2I)e^{2t} \\ y_3(t) = Ce^{-t} + (Ht + I)e^{2t} \end{cases}$, de aquí que, aplicando las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema planteado, se tendrá que:

$\begin{cases} -1 = -2C + H + I \\ 3 = C + 2H - 2I \\ 1 = C + I \end{cases}$, realizando operaciones se tiene que:

$$\begin{array}{l} 2 = 4C - 2H - 2I \\ \underline{3 = \ \ C + 2H - 2I} \\ 5 = 5C - 4I \\ \underline{4 = 4C + 4I} \\ 9 = 9C \ \Rightarrow\ C = 1, \end{array}$$

y por lo tanto, C = 1, H = 1, I = 0, y entonces resulta la siguiente integral particular del sistema diferencial planteado:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = -2e^{-t} + (t+1)e^{2t} \\ y_2(t) = e^{-t} + (-2t+2)e^{2t} \\ y_3(t) = e^{-t} + t{\cdot}e^{2t} \end{array}}$$

cuya representación gráfica será la siguiente:

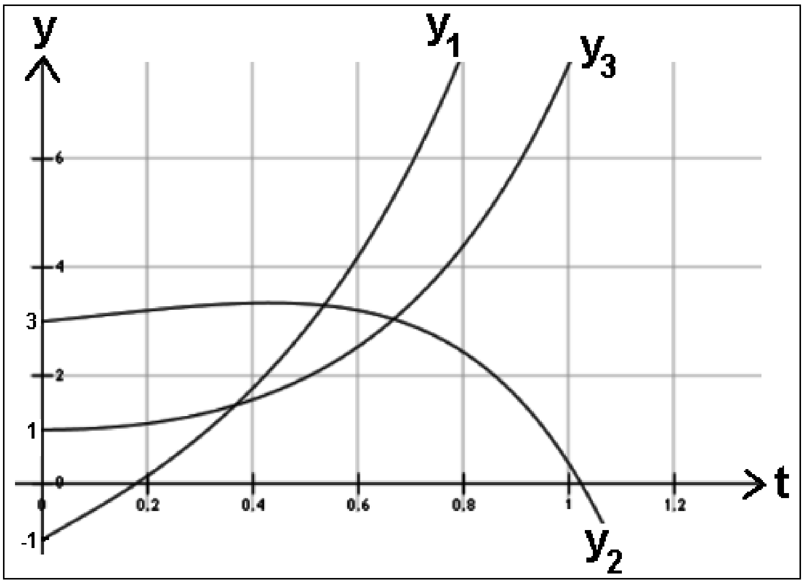


FIG. 9.18. Trayectorias temporales de los resultados contables (I).

De la contemplación del gráfico anterior resulta evidente que la empresa y_2 empezará a obtener pérdidas a partir del décimo año (t ≈ 10’2 años), mientras que las otras dos obtendrán siempre resultados positivos.

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones de resultados y_1 e y_3 la existencia de ramas parabólicas, puesto que sucede que si t → ∞ también y → ∞. Esto es: $m = \lim_{t \to +\infty} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

1.2.3. Raíces complejas de la ecuación característica

Los siguientes ejemplos, resueltos de diferente manera, cuya demostración puede encontrarse en algunas de las obras de referencia bibliográfica, nos proporcionan un procedimiento de obtención de la solución general de un sistema lineal homogéneo con raíces complejas de la ecuación característica, válido para todos los casos, que podemos también emplear en estos.

Ejemplo 1

Mediante la contabilidad analítica y el pertinente análisis econométrico, un centro comercial ha determinado que los saldos de las respectivas cuentas de resultados de la venta de sendos productos, expresados en miles de euros, y_1 e y_2, son cíclicos en ganancias y pérdidas. La relación existente entre dichos saldos viene dada por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - 5y_2 \\ y'_2 = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Se trata de eliminar de la venta el producto más inestable, esto es, el que experimenta mayores oscilaciones a lo largo del tiempo en sus resultados. ¿Cuál será de los dos el eliminado, si en el inicio del estudio existen para ambos productos unos saldos positivos semanales (beneficios) de 1.000 € y 2.000 € , respectivamente?

Solución:

Se tiene la matriz del sistema diferencial dado: $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. La correspondiente ecuación característica o secular vendrá dada por:

$$[\lambda \cdot I_2 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 5 \\ -1 & \lambda + 2 \end{bmatrix},$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece: $(\lambda\text{-}2)\cdot(\lambda+2) + 5 = 0$;

$$\lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1 = 0\ ; \begin{cases} \lambda_1 = +i \\ \lambda_2 = -i \end{cases}, \text{ con } \alpha = 0,\ \beta = 1.$$

$$\boxed{\lambda_1 = i} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 = ix_1 \\ x_1 - 2x_2 = ix_2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} (2-i)x_1 = 5x_2 \\ x_1 = (2+i)x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_2 = -i} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 = -ix_1 \\ x_1 - 2x_2 = ix_2 \end{array}\right\} \; x_1 = (2-i)x_2 \Rightarrow \; k \begin{bmatrix} 2\text{ - }i \\ 1 \end{bmatrix}$$

que conforman la integral general del sistema diferencial planteado:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{it} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-it} \text{ ; o sea:}$$

$$y_1(t) = c_1(2+i)e^{it} + c_2(2-i)e^{-it} =$$
$$= c_1(2+i)(\cos t + i\cdot \sin t) + c_2(2-i)(\cos t - i\cdot \sin t), \text{ y también:}$$
$$y_2(t) = c_1\cdot e^{it} + c_2\cdot e^{-it} = c_1(\cos t + i\cdot \sin t) + c_2(\cos t - i\cdot \sin t),$$

que, a su vez, pueden desarrollarse dando la expresión real de la solución anterior.

Para ello, basta hacer $c_1 = A + Bi$ y $c_2 = A - Bi$, lo que nos permite obtener[5] los valores de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ del siguiente modo:

$$y_1(t) = (A+Bi)(2+i)(\cos t + i\cdot \sin t) + (A-Bi)(2-i)(\cos t - i\cdot \sin t) =$$
$$= 2A \cos t + (A+2B)\, i\cdot \cos t - B\cdot \cos t + 2Ai\cdot \sin t -$$
$$- (A+2B) \sin t - Bi\cdot \sin t + 2A\cdot \cos t - (A+2B)\, i\cdot \cos t -$$
$$- B \cos t - 2Ai\cdot \sin t - (A+2B) \sin t + Bi\cdot \sin t =$$
$$= (4A - 2B) \cos t - (2A + 4B) \sin t.$$

Procediendo de manera similar, se tendrá que:

$$y_2(t) = (A+Bi)(\cos t + i\cdot \sin t) + (A-Bi)(\cos t - i\cdot \sin t) =$$
$$= 2(A\cdot \cos t - B\cdot \sin t)$$

Teniendo ahora en cuenta las condiciones iniciales dadas del problema planteado, se tiene que: $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 2$, con lo que el valor de las constantes A y B es: $A = 1$; $B = 3/2$, y resultan las siguientes trayectorias temporales periódicas de ambos saldos:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1(t) = \cos t - 8\cdot \sin t \\ y_2(t) = 2[\cos t - (3/2)\cdot \sin t] = 2\cdot \cos t - 3\cdot \sin t \end{array}}$$

De la contemplación de la representación gráfica de ambas trayectorias se deduce inmediatamente que el producto cuya comercialización se debe eliminar es el de saldo y_1, que presenta unas oscilaciones temporales bastante más acusadas (mayor inestabilidad).

En efecto, se tiene que:

[5] En el año 1748, L. Euler introdujo las expresiones: $e^{ix} = \cos x + i\cdot \sin x$, así como: $e^{-ix} = \cos x - i\cdot \sin x$, $\forall x \in \{\Re\}$, como definición de la exponencial de ix. De esta definición se deducen diversas propiedades de singular interés y aplicación en diversos campos.

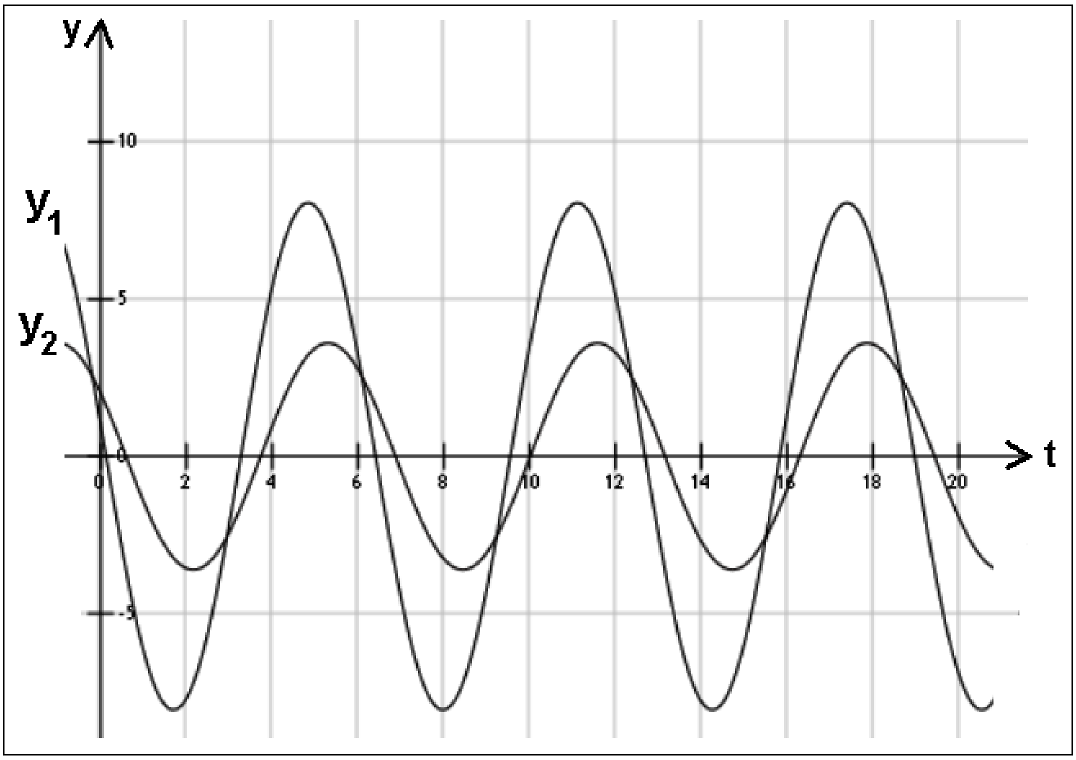


FIG. 9.19. Trayectorias temporales de los saldos.

1.2.4. Método de los operadores diferenciales

Ejemplo 1

Dos productos o bienes sustitutivos poseen en un mercado la siguiente relación de precios:

$$\begin{cases} P'_1 = 2P_1 - P_2 \\ P'_2 = P_1 \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de ambos precios sabiendo que inicialmente: P_1 = 1'00 €/ud. y P_2 = 2'00 €/ud.

Solución:

$$\begin{cases} DP_1 = 2P_1 - P_2 \Rightarrow P_2 = 2P_1 - DP_1 \Rightarrow DP_2 = 2DP_1 - D^2P_1 \\ DP_2 = P_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} DP_2 = DP_2 \\ 2DP_1 - D^2P_1 = P_1 \Rightarrow D^2P_1 - 2DP_1 + P_1 = 0 \Rightarrow P_1\left[D^2 - 2D + 1\right] = 0 \end{cases}$$

$P_1[(D-1)(D-1)] = 0 \Rightarrow D = 1$, que es una raíz de grado de multiplicidad 2, con lo que $\Rightarrow P_1(t) = C_1e^t + C_2te^t$.

Del mismo modo, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_2 = 2P_1 - DP_2 = 2\left(C_1e^t + C_2te^t\right) - D\left(C_1e^t + C_2te^t\right) \\ P_2 = 2C_1e^t + 2C_2te^t - C_1e^t - C_2te^t - C_2e^t \Rightarrow P_2(t) = C_1e^t + C_2te^t - C_2e^t \end{cases}$$

y la solución buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned} P_1(t) &= C_1e^t + C_2te^t \\ P_2(t) &= C_1e^t + C_2te^t - C_2e^t \end{aligned}}$$

y entonces se cumple también que la diferencia entre ambos precios:

$$P_1(t) - P_2(t) = C_2e^t.$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas se tendrá que:

$$\begin{cases} P_1(0) = C_1 = 1 \\ P_2(0) = C_1 - C_2 = 2 \end{cases}$$

, de donde resultan los valores: $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$, con lo que se obtienen las trayectorias temporales buscadas siguientes:

$$\begin{cases} P_1(t) = e^t - t\cdot e^t = e^t(1 - t) \\ P_2(t) = e^t - t\cdot e^t + e^t = e^t(2 - t) \end{cases}$$

Por otra parte, se presume también en los dos casos P_1 y P_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $P \to -\infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{P}{t} = -\infty$, luego existe en ambos una rama parabólica según el eje OP (vertical, hacia abajo).

Debemos recordar aquí que si existe competencia perfecta entre los consumidores de ambos bienes, un consumidor maximizará su satisfacción si su RSB (relación de substitución entre los bienes o relación marginal de sustitución) es igual a la razón de sus precios, o sea, si se cumple que:

$$RMS = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{P_2}{P_1} = \frac{t-2}{1-t}$$, que inicialmente valdrá: -2'00/1'00 = -2.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

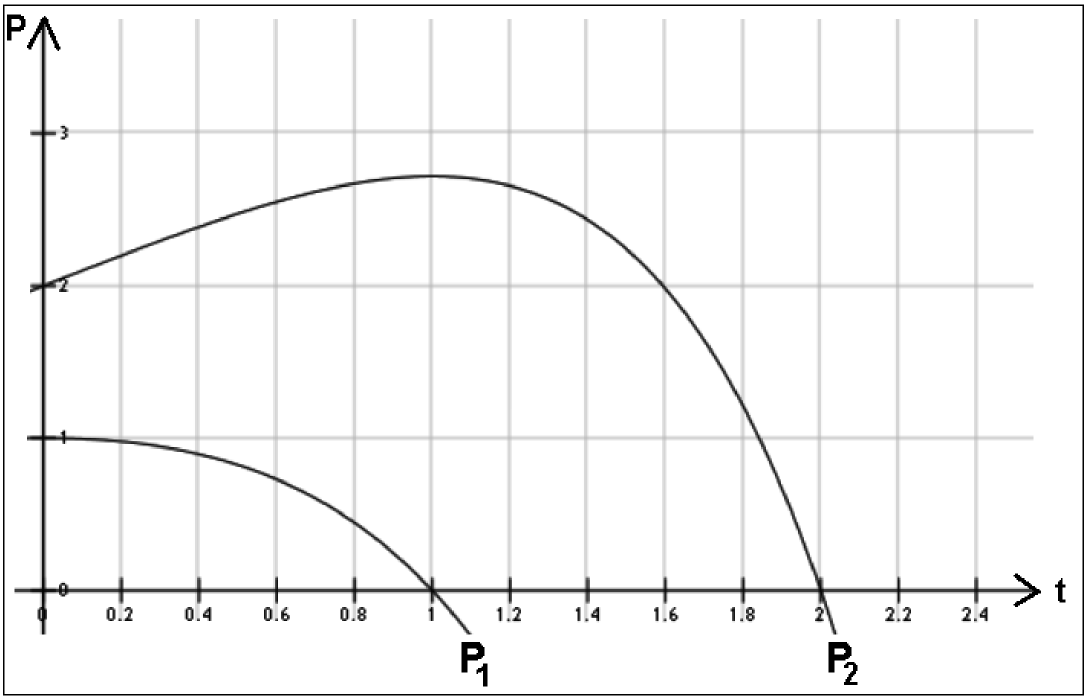


FIG. 9.20. Trayectorias temporales de los precios (IV).

Ejemplo 2

Dos productos o bienes sustitutivos poseen en un mercado la siguiente relación de precios:

$$\begin{cases} P'_1 = 4P_1 + 7P_2 \\ P'_2 = P_1 - 2P_2 \end{cases}$$

Se pide: a) hallar la trayectoria temporal de ambos precios sabiendo que inicialmente: P_1 = 1'00 €/ud. y P_2 = 2'00 €/ud.; b) realizar la representación gráfica correspondiente estimando, si la hubiere, la coincidencia temporal de ambos precios.

Solución:

a)

El sistema diferencial dado puede plantearse del siguiente modo:

$$\begin{cases} DP_1 = 4P_1 + 7P_2 \Rightarrow 7P_2 = DP_1 - 4P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{DP_1}{7} - \frac{4P_1}{7} \Rightarrow DP_2 = \frac{D^2P_1}{7} - \frac{4DP_1}{7} \\ DP_2 = P_1 - 2P_2 \end{cases}$$

De aquí se deduce que:

$$DP_2 = DP_2;$$

$$\frac{D^2P_1}{7} - \frac{4DP_1}{7} = P_1 - 2P_2 = P_1 - 2\left(\frac{DP_1}{7} - \frac{4P_1}{7}\right) = P_1 - \frac{2DP_1}{7} + \frac{8P_1}{7};$$

$$\frac{D^2P_1}{7} - \frac{4DP_1}{7} - P_1 + \frac{2DP_1}{7} - \frac{8P_1}{7} = 0;$$

$$\frac{D^2P_1}{7} - \frac{2DP_1}{7} - \frac{15P_1}{7} = 0;$$

$P_1\left[D^2 - 2D - 15\right] = 0 \Rightarrow P_1[(D-5)(D+3)] = 0 \Rightarrow D = 5$, y $D = -3$, con lo que:

$$P_1(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-3t}.$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$P_2 = \frac{D}{7}\left(C_1e^{5t} + C_2e^{-3t}\right) - \frac{4}{7}\left(C_1e^{5t} + C_2e^{-3t}\right);$$

$$P_2 = \frac{1}{7}\left(5C_1e^{5t} - 3C_2e^{-3t}\right) - \frac{4}{7}C_1e^{5t} - \frac{4}{7}C_2e^{-3t};$$

$$P_2(t) = \frac{1}{7}C_1e^{5t} - C_2e^{-3t};$$

y la solución o integral general buscada será:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-3t} \\ P_2(t) = \frac{1}{7}C_1e^{5t} - C_2e^{-3t} \end{array}}$$

y entonces también se cumple que: $P_1(t) + P_2(t) = \frac{8}{7}C_1e^{5t} = C_3 \cdot e^{5t}$.

Teniendo ahora en cuenta las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1/7 - C_2 = 2 \end{cases}$$

, y se deduce que: C_1 = 21/8 y C_2 = -13/8. De este modo, resulta la integral particular con las trayectorias temporales buscadas:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1(t) = \frac{21}{8}e^{5t} - \frac{13}{8}e^{-3t} \\ P_2(t) = \frac{3}{8}e^{5t} + \frac{13}{8}e^{-3t} \end{array}}$$

b) Debemos recordar aquí que si existe competencia perfecta entre los consumidores, un consumidor maximizará su satisfacción si su RSB (relación de substitución entre los bienes o relación marginal de sustitución) es igual a la razón de sus precios, o sea:

$$RMS = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{P_2}{P_1} = \frac{3e^{5t} + 13e^{-3t}}{13e^{-3t} - 21e^{5t}}$$, que inicialmente valdrá:

-2'00/1'00 = -2.

De hecho, la coincidencia temporal de ambas trayectorias se producirá cuando: $P_1(t) = P_2(t)$, o sea, según la ecuación logarítmica:

$$(9/4)e^{5t} – (13/4)e^{-3t} = 0,\ \ln (9/4) + 5t = \ln (13/4) – 3t;$$

$$8t = \ln (13/9) = 0'3677;\ t = 0'046 \text{ años} \approx 17 \text{ días, y } P = 1'89 \text{ €/ud.}$$

Por otra parte, se presume también en ambos casos de las funciones de precio P_1 y P_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $P \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{P}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OP (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

La representación gráfica de esta solución particular se expone a continuación (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas):

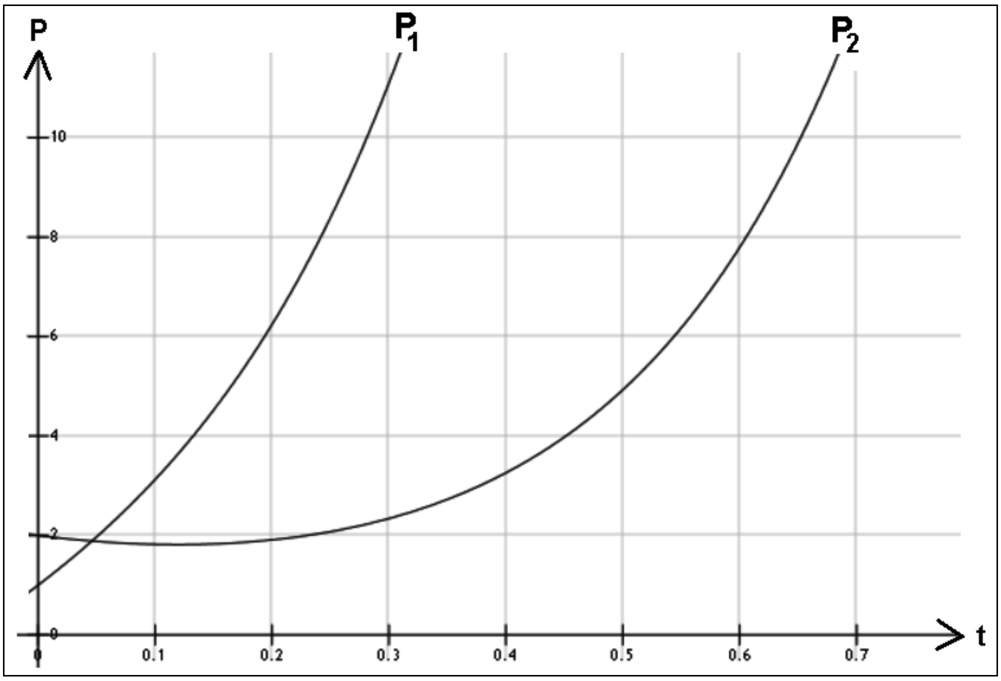


FIG. 9.21. Trayectorias temporales de los precios (V).

1.3. INTEGRAL GENERAL DE UN SISTEMA LINEAL COMPLETO CON COEFICIENTES CONSTANTES

1.3.1. Definición

Trataremos, ahora, el sistema no homogéneo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} y_i + b_1(x) = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} y_i + b_n(x) = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{array}\right\}$$

en el que $a_{ij} \in \{\Re\}$.

Sabemos que su solución general se obtiene sumando una solución particular suya a la solución general del correspondiente sistema homogéneo, tal como sucedía con las EDO completas. Previamente hemos tratado la obtención de la solución general del sistema diferencial homogéneo con coeficientes constantes. Nos ocuparemos ahora de cómo encontrar una solución particular del sistema completo o no homogéneo.

1.3.2. Métodos de variación de constantes y de los operadores diferenciales

Para la obtención de una solución particular del sistema anterior nos referiremos, además del método matricial que venimos empleando. al método de variación de las constantes (también válido para sistemas lineales de coeficientes no constantes o variables).

Supongamos que:

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}, \ldots, y_n = \begin{bmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix},$$

es un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo correspondiente del completo.

Pues bien, se demuestra que la función:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \cdot y_i(x) = \alpha_1(x) \cdot y_1(x) + \ldots + \alpha_n(x) \cdot y_n(x),$$

en la que las funciones: $\alpha_1(x)$, …, $\alpha_i(x)$, …, $\alpha_n(x)$, son soluciones del sistema diferencial siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i(x) \cdot y_{1i}(x) = \alpha'_1(x) \cdot y_{11}(x) + \ldots + \alpha'_n(x) \cdot y_{1n}(x) = b_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i(x) \cdot y_{ni}(x) = \alpha'_1(x) \cdot y_{n1}(x) + \ldots + \alpha'_n(x) \cdot y_{nn}(x) = b_n(x) \end{array}\right\}$$

constituye una solución particular del sistema planteado.

Así mismo, podrán resolverse algunos ejercicios por aplicación del método de los operadores diferenciales. En algunos casos que siguen, la aplicación de este método simplifica de modo notable tanto la operatoria como los resultados obtenidos en comparación con otros métodos de resolución de este tipo de sistemas de EDO, tal como ya se anunció al principio del presente capítulo, y ello tanto para sistemas homogéneos como para los no homogéneos (completos).

Veámoslo ahora mediante la resolución de algunos ejemplos representativos, en que pueden aparecer raíces de la ecuación característica reales (simples o múltiples) o también complejas.

1.3.3. Ejercicios de aplicación

Ejemplo 1

En un mercado con dos oferentes, los precios que alcanza un mismo producto *y* vienen dados por las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y'_1(x) = 2y_1 + 2 \\ y'_2(x) = y_1 + 3y_2 + e^x \end{cases}$$

, siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes para unos precios iniciales de: $y_1(0)$ = 1'00 €/ud., $y_2(0)$ = 0'00 €/ud.; b) ¿a qué precios e ingresos brutos corresponderá una oferta del producto de 600 ud.?; c) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: 3y = 30 – 50x, así como también los ingresos brutos de los oferentes, y d) calcular la elasticidad arco entre ambos puntos de equilibrio resultantes.

Solución:

a) En primer lugar hemos de obtener la solución general del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 \\ y'_2 = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Su ecuación característica o secular es:

$|A - \lambda \cdot I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$, cuyas raíces son las siguientes: $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$.

Encontremos los siguientes autovectores asociados a las mismas:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$, hemos de resolver:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; x_{11} + x_{21} = 0 \;;\; x_{11} = -x_{21} \,.$$

Un autovector es, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$, ofrece: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $-x_{12} = 0$.

Un autovector es, v. gr. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. La solución general del sistema es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{2x} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{3x} \text{, o sea:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = c_1 \cdot e^{2x} \\ y_2 = -c_1 \cdot e^{2x} + c_2 e^{3x} \end{array}}$$

, con lo que también: $y_1 + y_2 = c_2 \cdot e^{3x}$.

Al obtener la solución general del sistema hemos encontrado un sistema fundamental de soluciones del mismo:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Una solución particular del sistema será:

$$\alpha_1(x) \begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix} + \alpha_2(x) \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{bmatrix},$$

donde $\alpha_1(x)$ y $\alpha_2(x)$ son soluciones de:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'_1(x)\cdot e^{2x} + \alpha'_2(x)\cdot 0 = 2 \\ -\alpha'_1(x)\cdot e^{2x} + \alpha'_2(x)\cdot e^{3x} = e^x \end{array}\right\}$$

De la primera de las ecuaciones tenemos que: $\alpha'_1(x) = 2e^{-2x}$, de donde: $\alpha_1(x) = -e^{-2x}$, y de la segunda ecuación se deduce que:

$-2e^{-2x}\cdot e^{2x} + \alpha'_2(x)\cdot e^{3x} = e^x$, y $\alpha'_2(x) = (e^x + 2)\cdot e^{-3x} = e^{-2x} + 2e^{-3x}$,

de donde: $\alpha_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{2}{3}e^{-3x}$. Por lo tanto, una solución particular del sistema será:

$$\begin{bmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{bmatrix} = -e^{-2x}\begin{bmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{2}{3}e^{-3x} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{bmatrix}, \text{ o sea:}$$

$$\begin{cases} y_{1p} = -1 \\ y_{2p} = 1 - \frac{1}{2}e^x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^x \end{cases}$$

La solución general buscada es, pues:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = c_1\cdot e^{2x} - 1 \\ y_2 = -c_1\cdot e^{2x} + c_2\cdot e^{3x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^x \end{array}}$$

Para concluir, obtengamos la solución particular del sistema que verifica las condiciones iniciales dadas (se trataría, pues de un problema de valor inicial o PVI):

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Substituyendo en el sistema anterior dichas condiciones tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = c_1 - 1 \\ 0 = -c_1 + c_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

de donde: $c_1 = 2$ y $c_2 = \frac{13}{6}$. Por lo tanto, la solución particular buscada es la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = 2e^{2x} - 1 \\ y_2 = -2e^{2x} + \frac{13}{6}e^{3x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^x \end{array}}$$

b) Para x = 600 ud. de producto, veamos que:

$$\begin{cases} O_1 \Rightarrow y_1 = 2\cdot e^{1'2} - 1 = 5'64 \text{ €/ud. } (I_1 = 5'64 \times 600 = 3.384'00 \text{ €}). \\ O_2 \Rightarrow y_2 = -2\cdot e^{1'2} + \dfrac{13}{6}e^{1'8} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{0'6}}{2} = 5'89 \text{ €/ud. } (I_2 = 5'89 \times 600 = \\ \quad = 3.534'00 \text{ €}). \end{cases}$$

c) Para ambas ofertas, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio y los correspondientes ingresos brutos de los agentes ofertantes:

$$\begin{cases} O_1 = D \Rightarrow 2\cdot e^{2x} - 1 = \dfrac{30-50x}{3} \text{ ; } x_{1e} = 0'396 \approx 396 \text{ ud.} \\ y_{1e} = \dfrac{30-50\cdot 0'396}{3} = 3'40 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 3'40 \times 396 = 1.346'40 \text{ € .} \\ \\ O_2 = D \Rightarrow -2\cdot e^{2x} + \dfrac{13}{6}e^{3x} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{e^{x}}{2} = \dfrac{30-50x}{3} \text{ ; } x_{2e} = 0'434 \approx 434 \text{ ud.} \\ y_{2e} = \dfrac{30-50\cdot 0'434}{3} = 2'77 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 2'77 \times 434 = 1.202'18 \text{ € .} \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica conjunta:

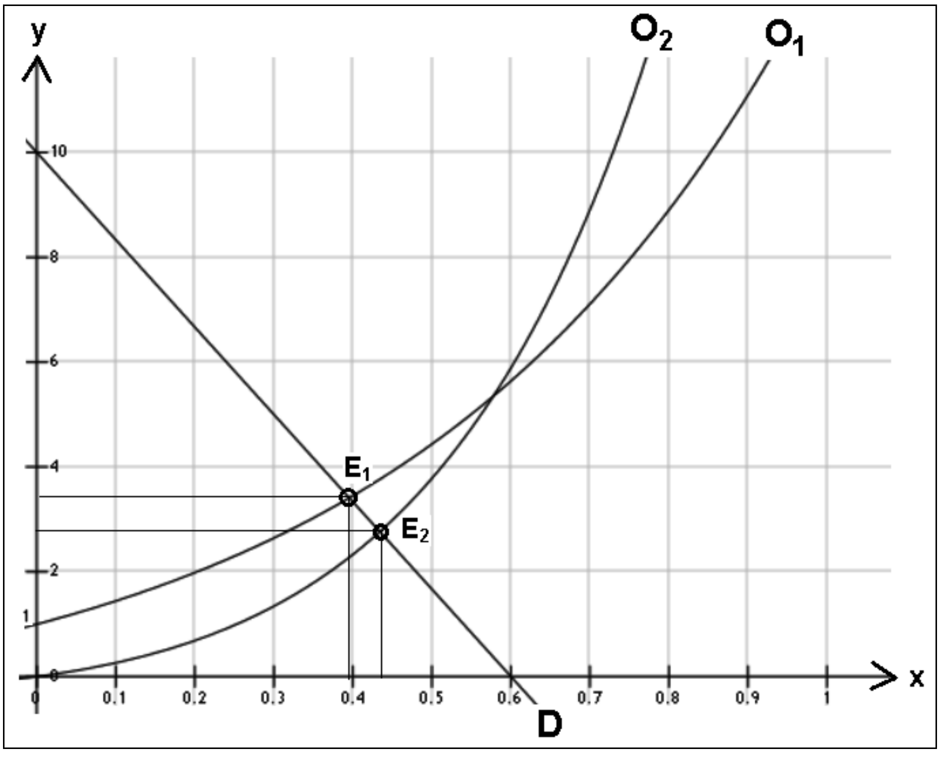


FIG. 9.22. Representación gráfica conjunta del equilibrio (IV).

Por otra parte, se presume también en ambos casos de las funciones de oferta O_1 y O_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

d) Por otra parte, la elasticidad arco de la demanda entre ambos puntos de equilibrio E_1(0'396,3'40) y E_2(0'434,2'77) vendrá dada por:

$$e_a = \frac{0'434 - 0'396}{0'434 + 0'396} \times \frac{2'77 + 3'40}{2'77 - 3'40} = \frac{0'038}{0'83} \times \frac{6'17}{-0'63} = -0'45 \in (-1, 0),$$

luego se trata de de una demanda relativamente inelástica.

Ejemplo 2

Una vez efectuado el estudio correspondiente, se sabe que dos líneas de producción diferentes de una misma planta de embotellado de bebidas gaseosas, que utilizan el mismo *input* variable *x*, tienen las siguientes relaciones entre sus funciones de producción y_1 e y_2:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + 4y_1 + 3y_2 = e^x \\ \dfrac{dy_2}{dx} + 2y_1 + 5y_2 = e^{3x} \end{cases}$$

Averiguar cuál de ellas resulta más eficiente en la utilización del recurso, si la producción es nula en ambas líneas cuando no entra *input* en el proceso fabril. Tanto *x* como *y* se expresan en miles de unidades del *input* o del *output* en cuestión.

Solución:

Como el sistema homogéneo correspondiente, resuelto en un problema anterior a salvo, claro está, de la arbitrariedad de las constantes, ofrece:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 \cdot e^{-7x} + c_2 \cdot e^{-2x} \\ y_2 = c_1 \cdot e^{-7x} - \dfrac{2}{3} c_2 \cdot e^{-2x} \end{cases}$$

A continuación se obtiene, suponiendo que c_1 y c_2 son funciones, el siguiente sistema por derivación:

$$\begin{cases} \dfrac{dc_1}{dx} e^{-7x} + \dfrac{dc_2}{dx} \cdot e^{-2x} = e^x \\ \dfrac{dc_1}{dx} + e^{-7x} - \dfrac{2}{3}\dfrac{dc_2}{dx} e^{-2x} = e^{3x} \end{cases}$$

En efecto:

$$\frac{dc_1}{dx} \cdot e^{-7x} - \cancel{c_1 \cdot 7 \cdot e^{-7x}} + \frac{dc_2}{dx} \cdot e^{-2x} - \cancel{c_2 \cdot 2 \cdot e^{-2x}} +$$

$+ \cancel{4c_1 \cdot e^{-7x}} + \cancel{4c_2 \cdot e^{-2x}} + \cancel{3c_1 \cdot e^{-7x}} - \cancel{2c_2 \cdot e^{-2x}} = e^x$, con lo que:

$$\frac{dc_1}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^{3x} & -\dfrac{2e^{-2x}}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-7x} & e^{-2x} \\ e^{-7x} & -\dfrac{2e^{-2x}}{3} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{-2 \cdot e^{-x}}{3} - e^x}{\dfrac{-2 \cdot e^{-9x}}{3} - e^{-9x}} = \frac{-2 \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^x}{-2 \cdot e^{-9x} - 3 \cdot e^{-9x}} =$$

$$= \frac{-2 \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^x}{-5 \cdot e^{-9x}} = \frac{2 \cdot e^{-x} + 3 \cdot e^x}{-5 \cdot e^{-9x}} = \frac{2}{5} \cdot e^{8x} + \frac{3}{5} \cdot e^{10x}.$$

Del mismo modo, se tiene que:

$$\frac{dc_1}{dx} \cdot e^{-7x} - \cancel{c_1 \cdot 7 \cdot e^{-7x}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{dc_2}{dx} \cdot e^{-2x} + \frac{4}{3} \cancel{c_2 \cdot e^{-2x}} +$$

$+ 2\cancel{c_1 \cdot e^{-7x}} + 2\cancel{c_2 \cdot e^{-2x}} + 5\cancel{c_1 \cdot e^{-7x}} - \dfrac{10}{3} \cancel{c_2 \cdot e^{-2x}} = e^{3x}$, con lo que también podremos escribir:

$$\frac{dc_2}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-7x} & e^x \\ e^{-7x} & e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-7x} & e^{-2x} \\ e^{-7x} & -\dfrac{2e^{-2x}}{3} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-4x} - e^{-6x}}{\dfrac{-2 \cdot e^{-9x}}{3} - e^{-9x}} = \frac{3 \cdot e^{-4x} - 3 \cdot e^{-6x}}{-2 \cdot e^{-9x} - 3 \cdot e^{-9x}} =$$

$$= \frac{3 \cdot e^{-4x} - 3 \cdot e^{-6x}}{-5 \cdot e^{-9x}} = -\frac{3}{5} \cdot e^{5x} + \frac{3}{5} \cdot e^{3x} ;$$

$$c_1 = \int \left(\frac{2}{5} \cdot e^{8x} + \frac{3}{5} \cdot e^{10x} \right) \cdot dx = \frac{2}{5} \int e^{8x} \cdot dx + \frac{3}{5} \int e^{10x} \cdot dx = \frac{e^{8x}}{20} + \frac{3 \cdot e^{10x}}{50} + k_1 .$$

Así mismo, y por lo que se refiere a la otra constante, se cumple que:

$$c_2 = \int\left(-\frac{3}{5}\cdot e^{5x} + \frac{3}{5}\cdot e^{3x}\right)\cdot dx = \frac{3}{5}\int (e^{3x} - e^{5x})\cdot dx =$$
$$= \frac{3}{5}\left(\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{5x}}{5}\right) + k_2 = \frac{e^{3x}}{5} - \frac{3\cdot e^{5x}}{25} + k_2 \ .$$

Substituyendo, ahora, en la solución calculada del sistema homogéneo se obtiene la solución del sistema no homogéneo, con k_1 y k_2 como nuevas constantes arbitrarias del problema.

En efecto, se tiene que:

$$y_1 = \left(\frac{e^{8x}}{20} + \frac{3\cdot e^{10x}}{50} + k_1\right)\cdot e^{-7x} + \left(\frac{e^{3x}}{5} - \frac{3\cdot e^{5x}}{25} + k_2\right)\cdot e^{-2x} =$$
$$= \frac{e^{x}}{20} + \frac{3\cdot e^{3x}}{50} + k_1\cdot e^{-7x} + \frac{e^{x}}{5} - \frac{3\cdot e^{3x}}{25} + k_2\cdot e^{-2x} =$$
$$= \frac{e^{x}}{4} - \frac{3\cdot e^{3x}}{50} + k_1\cdot e^{-7x} + k_2\cdot e^{-2x} \ .$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$y_2 = \left(\frac{e^{8x}}{20} + \frac{3\cdot e^{10x}}{50} + k_1\right)\cdot e^{-7x} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^{3x}}{5} - \frac{3\cdot e^{5x}}{25} + k_2\right)\cdot e^{-2x} =$$
$$= \frac{e^{x}}{20} + \frac{3\cdot e^{3x}}{50} + k_1\cdot e^{-7x} - \frac{2\cdot e^{x}}{15} + \frac{2\cdot e^{3x}}{25} - \frac{2k_2\cdot e^{-2x}}{3} =$$
$$= -\frac{e^{x}}{12} + \frac{7\cdot e^{3x}}{50} + k_1\cdot e^{-7x} - \frac{2k_2\cdot e^{-2x}}{3} \ ,$$

con lo cual, la integral general buscada del sistema diferencial planteado será la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{e^{x}}{4} - \dfrac{3\cdot e^{3x}}{50} + k_1\cdot e^{-7x} + k_2\cdot e^{-2x} \\ y_2 = -\dfrac{e^{x}}{12} + \dfrac{7\cdot e^{3x}}{50} + k_1\cdot e^{-7x} - \dfrac{2k_2\cdot e^{-2x}}{3} \end{array}}$$

Ahora bien, atendiendo a las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} y_1(0) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{50} + k_1 + k_2 = 0 \\ y_2(0) = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{7}{50} + k_1 - \dfrac{2k_2}{3} = 0 \end{cases}$$

, sistema que resuelto proporciona los valores: k_1 = -11/100 y k_2 = -2/25, por lo que resulta la integral particular del sistema:

$$y_1 = \frac{e^x}{4} - \frac{3e^{3x}}{50} - \frac{11e^{-7x}}{100} - \frac{2e^{-2x}}{25}$$

$$y_2 = -\frac{e^x}{12} + \frac{7e^{3x}}{50} - \frac{11e^{-7x}}{100} + \frac{4e^{-2x}}{75}$$

, con la siguiente representación gráfica conjunta:

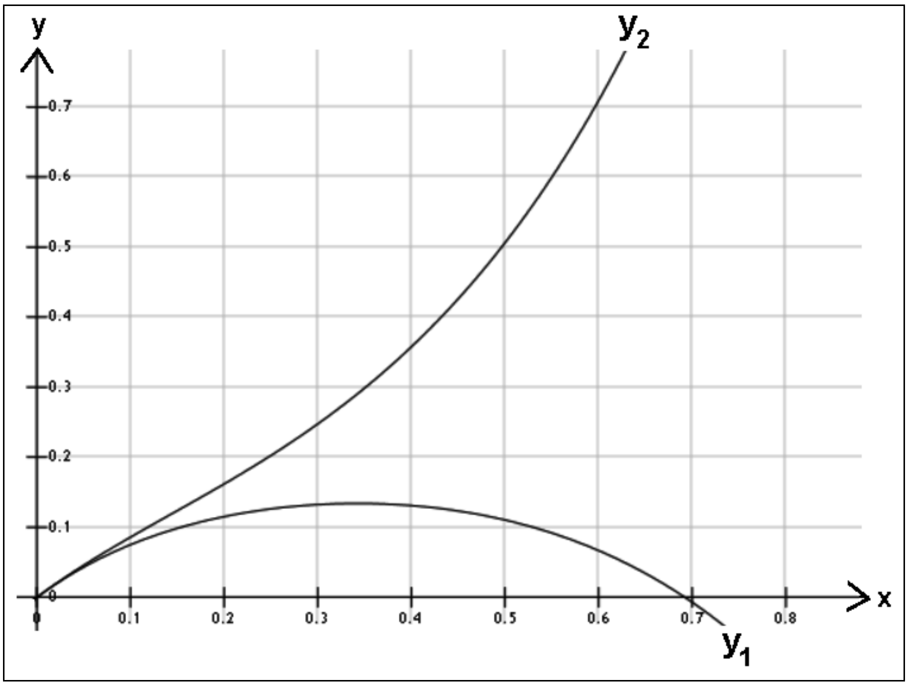


FIG. 9.23. Representación gráfica de ambas funciones de producción.

Por lo que se refiere a la existencia de ramas parabólicas, habrá que estudiar ambos casos separadamente. En efecto, en y_2 se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y_2 \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y_2}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba). Así mismo, también en y_1 se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y_1 \to -\infty$. Pero entonces: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y_1}{x} = -\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia abajo).

De la contemplación de la representación gráfica de ambas funciones de producción se deduce inmediatamente que la línea de embotellado y_2 resulta mucho más eficiente que la línea y_1, que, desde luego, debería ser reparada o bien eliminada del proceso productivo.

Ejemplo 3

Dos productos o bienes sustitutivos poseen en un mercado la siguiente relación de precios:

$$\begin{cases} P'_1 = 3t + P_1 + P_2 \\ P'_2 = t - 2P_1 - P_2 \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de ambos precios sabiendo que inicialmente: $P_1 = 1'00$ €/ud. y $P_2 = 2'00$ €/ud.

Solución:

Este sistema es reducible a una sola ecuación diferencial por eliminación, lo que se consigue sumando miembro a miembro ambas ecuaciones componentes del sistema, así:

$$P'_1 + P'_2 = 4t - P_1 \;; \quad \text{además: } P''_1 = 3 + P'_1 + P'_2 \text{ , con lo que:}$$
$$P''_1 + P'_1 = 3 + P'_1 + P'_2 + 4t - P_1 - P'_2 \text{ ; de donde: } P''_1 + P_1 = 4t + 3.$$

La integral de la ecuación homogénea, como ya se ha visto en ejercicios anteriores, conduce a la solución:

$$P_1^* = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t.$$

Ensayando ahora una solución particular de la no homogénea del tipo (porque carece de término en P'_1):

$$\begin{cases} P_p = at^2 + bt + c \\ P'_p = 2at + b \\ P''_p = 2a \end{cases}$$

y substituyendo ello en la ecuación inicial: $2a + at^2 + bt + c = 4t + 3$;

de donde: $a = 0$; $b = 4$; $c = 3$; con lo que se tendrá una integral general:

$$P_1(t) = P_1^* + P_p = \boxed{c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t + 4t + 3} \;;$$

a su vez, se tiene que: $P'_1 = - c_1 \cdot \sin t + c_2 \cdot \cos t + 4$, con lo que substituyendo en la primera ecuación, se tiene que:

$$P_2(t) = P'_1 - P_1 - 3t =$$
$$= -c_1 \cdot \sin t + c_2 \cdot \cos t + 4 - c_1 \cdot \cos t - c_2 \cdot \sin t - 4t - 3 - 3t =$$
$$= \boxed{(c_2 - c_1) \cdot \cos t - (c_1 + c_2) \cdot \sin t - 7t + 1} \;,$$

que constituyen ambas la solución general del sistema diferencial propuesto.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_1(0) = c_1 + 3 = 1 \\ P_2(0) = c_2 - c_1 + 1 = 2 \end{cases}$$

, cuya resolución conduce a los valores: $c_1 = -2$ y $c_2 = -1$.

De este modo, se obtiene la solución particular del sistema:

$$\begin{cases} P_1(t) = -2\cos t - \sin t + 4t + 3 \\ P_2(t) = \cos t + 3\sin t - 7t + 1 \end{cases}$$

De hecho, la coincidencia temporal de ambas trayectorias se producirá cuando: $P_1(t) = P_2(t)$, o sea, según la ecuación trigonométrica:

$3\cos t + 4\sin t - 11t - 2 = 0$, cuya resolución ofrece los valores:

$t = 0'1385$ años $\approx$ 51 días, y $P = 1'4351 \approx 1'44$ €/ud.

La representación gráfica correspondiente puede verse a continuación:

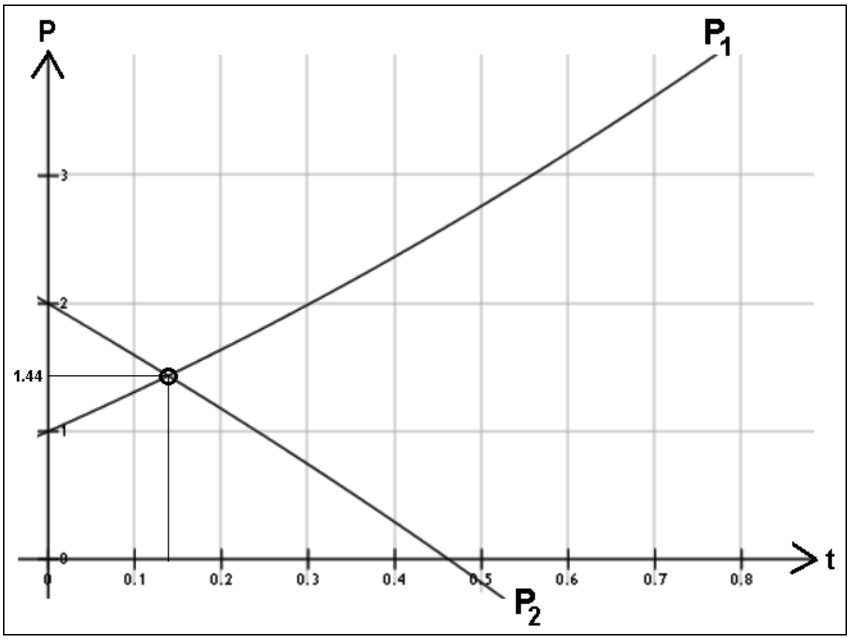


FIG. 9.24. Trayectorias temporales de los precios (VI).

Debemos recordar también que si existe competencia perfecta entre los consumidores, un consumidor maximizará su satisfacción si su RSB (relación de substitución entre los bienes cuya trayectoria temporal se analiza) o RMS (relación marginal de sustitución) es igual a la razón de sus precios; en este caso, maximizamos la utilidad de un individuo condicionado a una restricción presupuestaria, o sea:

$$RSB = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{P_2}{P_1} = \frac{\cos t + 3\sin t - 7t + 1}{2\cos t + \sin t - 4t - 3}$$, que inicialmente valdrá:

-2'00/1'00 = -2. De hecho, esta relación mide la pendiente de la *curva de indiferencia* que, por hallarse en el segundo cuadrante del círculo, resulta negativa, y representa la relación en la que el consumidor está dispuesto a substituir el bien (1) por el bien (2).

Ejemplo 4

Los resultados contables *y*, expresados en miles de euros, de tres sucursales del mismo grupo empresarial bancario, que operan en la misma ciudad, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} y'_1 = -6y_1 - 3y_2 + 14y_3 \\ y'_2 = 4y_1 + 3y_2 - 8y_3 \\ y'_3 = -2y_1 - y_2 + 5y_3 + \sin t \end{cases}$$

, y se sabe que, en el comienzo de la actividad económica, la primera sucursal tenía unos beneficios de 1.000 € , la segunda unas pérdidas de 1.000 € y la tercera no tenía pérdidas ni ganancias. Hallar la trayectoria temporal de dichas sucursales y razonar la posible supresión de alguna o algunas de ellas, resolviendo el problema por tres procedimientos diferentes: a) Método matricial combinado con el de variación de constantes, b) Método de los operadores diferenciales, c) Método de variación de constantes o parámetros.

Solución:

a) Primero solucionaremos el sistema homogéneo de matriz:

$$[A] = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix};$$ La ecuación característica o secular, será:

$$[\lambda \cdot I_3] - [A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+6 & 3 & -14 \\ -4 & \lambda-3 & 8 \\ 2 & 1 & \lambda-5 \end{bmatrix};$$

que pasando de matrices a determinantes ofrece las soluciones:

$$(\lambda + 6)(\lambda - 3)(\lambda - 5) + 48 + 56 + 28(\lambda - 3) + 12(\lambda - 5) - 8(\lambda + 6) = 0$$
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 33\lambda + 194 + 28\lambda - 84 + 12\lambda - 60 - 8\lambda - 48 = 0.$$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 1$; y operando por aplicación de la regla de Ruffini se obtiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1) & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0\,.$$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$; haciendo: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$; se tiene que, para cada uno de los valores obtenidos:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 0 \end{array} \quad ;$$

$$\Rightarrow K\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv K\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = 2x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 5/2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow K\begin{bmatrix} 5/2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv K\begin{bmatrix} 1 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\lambda_3 = -1}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{l} -6x_1 - 3x_2 + 14x_3 = -x_1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = -x_3 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 \\ x_2 = -2x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow K\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv K\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Con ello, la integral general del sistema homogéneo será:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}\cdot e^t + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}\cdot e^{2t} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}\cdot e^{-t}; \text{ o sea:}$$

$$\left.\begin{array}{r} y_1^* = c_1\cdot e^t + c_2\cdot e^{2t} + c_3\cdot e^{-t} \\ y_2^* = -\frac{4}{5}c_2\cdot e^{2t} - \frac{1}{2}c_3\cdot e^{-t} \\ y_3^* = \frac{c_1}{2}\cdot e^t + \frac{2}{5}c_2\cdot e^{2t} + \frac{c_3}{4}\cdot e^{-t} \end{array}\right\}$$

Suponiendo, ahora, que c_1, c_2 y c_3 son funciones, aplicaremos el método de variación de constantes, con lo que:

$$\left.\begin{array}{r} y_1^{*\prime} = c'_1\cdot e^t + c_1\cdot e^t + c'_2\cdot e^{2t} + 2c_2\cdot e^{2t} + c'_3\cdot e^{-t} - c_3\cdot e^{-t} \\ y_2^{*\prime} = -\frac{4}{5}c'_2\cdot e^{2t} - \frac{8}{5}c_2\cdot e^{2t} - \frac{c'_3}{2}\cdot e^{-t} + \frac{c_3}{2}\cdot e^{-t} \\ y_3^{*\prime} = \frac{c'_1}{2}\cdot e^t + \frac{c_1}{2}\cdot e^t + \frac{2c'_2}{5}\cdot e^{2t} + \frac{4}{5}c_2\cdot e^{2t} + \frac{c'_3}{4}\cdot e^{-t} - \frac{c_3}{4}\cdot e^{-t} \end{array}\right\}$$

Substituyendo, ahora, en el sistema original, se tendrá:

$$(y^*_1)' + 6y^*_1 + 3y^*_2 - 14y^*_3 = 0 \text{ (primera ecuación) ; o sea:}$$

$$c'_1\cdot e^t + c_1\cdot e^t + c'_2\cdot e^{2t} + 2c_2\cdot e^{2t} + c'_3\cdot e^{-t} - c_3\cdot e^{-t} + 6c_1\cdot e^t + 6c_2\cdot e^{2t} +$$
$$+ 6c_3\cdot e^{-t} - (12/5)c_2\cdot e^{2t} - (3/2)c_3\cdot e^{-t} - 7c_1\cdot e^t - (28/5)c_2\cdot e^{2t} - (7/2)c_3\cdot e^{-t} = 0.$$

o sea: $c'_1\cdot e^t + c'_2\cdot e^{2t} + c'_3\cdot e^{-t} = 0$;

$(y^*_2)' - 4y^*_1 - 3y^*_2 + 8y^*_3 = 0$ (segunda ecuación); obviamente, resultará:

$$-\frac{4}{5}c'_2 \cdot e^{2t} - \frac{c'_3}{2} \cdot e^{-t} = 0;$$

$(y^*_3)' + 2y^*_1 + y^*_2 - 5y^*_3 = \sin t$ (tercera ecuación); … y así sucesivamente. Al final del proceso se obtendrá la integral general del sistema infinitesimal completo que es objeto de nuestro estudio, así:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= y_1^* + y_{1p} = c_1 \cdot e^{t} + c_2 \cdot e^{2t} + c_3 \cdot e^{-t} + \cos t - 5\sin t \\ y_2 &= y_2^* + y_{2p} = -\frac{4}{5}c_2 \cdot e^{2t} - \frac{c_3}{2} \cdot e^{-t} + \frac{12}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \\ y_3 &= y_3^* + y_{3p} = \frac{c_1}{2} \cdot e^{t} + \frac{2}{5}c_2 \cdot e^{2t} + \frac{c_3}{4} \cdot e^{-t} - \frac{17}{10}\sin t - \frac{\cos t}{10} \end{aligned}}$$

Las soluciones particulares correspondientes a las condiciones iniciales dadas serán:

$$\left.\begin{aligned} y_1(0) &= c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 1 \\ y_2(0) &= -\frac{4c_2}{5} - \frac{c_3}{2} - \frac{4}{5} = -1 \\ y_3(0) &= \frac{c_1}{2} + \frac{2c_2}{5} + \frac{c_3}{4} - \frac{1}{10} = 0 \end{aligned}\right\}$$

del que se deduce que: $\boxed{c_1 = 0}$; $\boxed{c_2 = 2/3}$; $\boxed{c_3 = -2/3}$; y la solución particular (I.P.) del sistema planteado será:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{2e^{2t}}{3} - \frac{2e^{-t}}{3} + \cos t - 5\sin t \\ y_2 &= -\frac{8}{15}e^{2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{12}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \\ y_3 &= \frac{4}{15}e^{2t} - \frac{e^{-t}}{6} - \frac{17}{10}\sin t - \frac{\cos t}{10} \end{aligned}}$$

b) Sea ahora el sistema diferencial siguiente:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 + 6y_1 + 3y_2 - 14y_3 &= 0 \\ y'_2 - 4y_1 - 3y_2 + 8y_3 &= 0 \\ y'_3 + 2y_1 + y_2 - 5y_3 &= \sin t \end{aligned}\right\} \text{ o bien } \left\{\begin{aligned} (D+6)y_1 + 3y_2 - 14y_3 &= 0 \\ -4y_1 + (D-3)y_2 + 8y_3 &= 0 \\ 2y_1 + y_2 + (D-5)y_3 &= \sin t \end{aligned}\right. \text{, en el que:}$$

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D+6 & 3 & -14 \\ -4 & D-3 & 8 \\ 2 & 1 & D-5 \end{vmatrix} = D^3 - 2D^2 - D + 2 = (D-1)(D+1)(D-2);$$

$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} D-3 & 8 \\ 1 & D-5 \end{vmatrix} = D^2 - 8D + 7$; $\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -14 \\ 1 & D-5 \end{vmatrix} = 1-3D$; $\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -14 \\ D-3 & 8 \end{vmatrix} = 14D - 18$. La eliminación de y_2, y_3 conduce a la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden en y_1 siguiente:

$$(D-1)(D+1)(D-2)\, y_1 = (D^3 - 2D^2 - D + 2)\, y_1 = (14D-18) \sin t =$$
$$= 14 \cos t - 18 \sin t,$$ con las raíces de la ecuación homogénea:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$, que implican la solución:

$$y_1^* = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t}.$$

Para resolver la ecuación inhomogénea o completa ensayaremos una solución particular del tipo:

$$\begin{cases} y_p = A\cdot\cos t + B\cdot\sin t \\ y'_p = -A.\sin t + B\cdot\cos t \\ y''_p = -A.\cos t - B\cdot\sin t \\ y'''_p = A\cdot\sin t - B\cdot\cos t \end{cases}$$

Substituyendo en la ecuación anterior, se obtiene que:

$y_1''' - 2y_1'' - y_1' + 2y_1 = 14 \cos t - 18 \sin t$; esto es:
$A\cdot\sin t - B\cdot\cos t + 2A\cdot\cos t + 2B\cdot\sin t + A\cdot\sin t - B\cdot\cos t + 2A\cdot\cos t + 2B\cdot\sin t = (2A + 4b) \sin t + (4A-2B) \cos t = -18 \sin t + 14 \cos t$; de donde se deduce que: $A = 1$ y $B = -5$, por lo que la primera integral general es:

$$y_1 = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + \cos t - 5 \sin t . \qquad [1]$$

Substituyendo en la primera ecuación se obtiene que:

$$3y_2 - 14y_3 = -y_1' - 6y_1 = 31\sin t - \cos t - 7C_1e^t - 5C_2e^{-t} - 8C_3e^{2t} .$$

Por otra parte, derivando la primera ecuación del sistema y substituyendo y_1', y_2', y_3' por sus expresiones reducidas del mismo, queda lo siguiente:

$y_1'' + 4y_1 + 5y_2 - 10y_3 - 14 \sin t = 0$, de donde: $5y_2 - 10y_3 = 14 \sin t - y_1'' - 4y_1$,

y substituyendo y_1 e y_1'' por sus expresiones deducidas de [1] resulta que:

$$5y_2 - 10y_3 = 29 \sin t - 3 \cos t - 5C_1e^t - 5C_2e^{-t} - 8C_3e^{2t}.$$

Resolviendo ahora el sistema obtenido en y_2, y_3 resultan finalmente las otras dos integrales generales:

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{1}{2}C_2e^{-t} - \frac{4}{5}C_3e^{2t} + \frac{12}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \\ y_3 = \frac{1}{2}C_1e^{t} + \frac{1}{4}C_2e^{-t} + \frac{2}{5}C_3e^{2t} - \frac{17}{10}\sin t - \frac{1}{10}\cos t \end{cases}$$

Una vez obtenidas las tres soluciones generales, para hallar las particulares correspondientes a las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, habrá que calcular los valores de las constantes resolviendo el sistema numérico que expresa el cumplimiento de las susodichas condiciones.

Como estas condiciones dadas son: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $y_3(0) = 0$, expresadas en miles de euros, el sistema conformado por C_1, C_2, C_3 será el siguiente:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + C_3 + 1 \\ -1 = -\frac{1}{2}C_2 - \frac{4}{5}C_3 - \frac{4}{5} \\ 0 = \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{4}C_2 + \frac{2}{5}C_3 - \frac{1}{10} \end{cases} \text{, que ofrece los valores: } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2/3 \\ C_3 = 2/3 \end{cases}$$

Aplicando estas constantes a la integral general anteriormente obtenida, resulta la misma integral particular hallada en el expositivo anterior a), como puede comprobar el amable lector/a.

c) Apliquemos ahora el método de variación de las constantes o parámetros al sistema anterior, considerando primero el sistema homogéneo, cuya ecuación característica coincide con $\Delta(r) = 0$, o sea:

$$\begin{vmatrix} -6-r & -3 & 14 \\ 4 & 3-r & -8 \\ -2 & -1 & 5-r \end{vmatrix} = 0 \text{, esto es: } r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0.$$

Substituyendo las raíces de esta ecuación 1, -1, 2, en lugar de r en el sistema correspondiente, se obtienen tres sistemas que dan, respectivamente,

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2, & \mu_1 = 0, & v_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4, & \mu_2 = -2, & v_2 = 1 \\ \lambda_3 = 5, & \mu_3 = -4, & v_3 = 2 \end{matrix}\right\} \text{ de donde } \begin{cases} y_1 = 2C_1e^{t} + 4C_2e^{-t} + 5C_3e^{2t} \\ y_2 = -2C_2e^{-t} - 4C_3e^{2t} \\ y_3 = C_1e^{t} + C_2e^{-t} + 2C_3e^{2t} \end{cases} \quad [2]$$

, que constituye la solución del sistema homogéneo al que podemos aplicar el método de variación de las constantes para obtener la solución del sistema dado. El sistema compatible y determinado resulta aquí:

$$\left.\begin{array}{l} 2C_1'e^t + 4C_2'e^{-t} + 5C_3'e^{2t} = 0 \\ -2C_2'e^{-t} - 4C_3'e^{2t} = 0 \\ C_1'e^t + C_2'e^{-t} + 2C_3'e^{2t} = \sin t \end{array}\right\}$$, de donde por aplicación de la regla de

Cramer (aunque también puede resolverse por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan) llegaremos a:

$$C_1'e^t = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ \sin t & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-6\sin t}{-6} = \sin t \ ,$$

$$C_1 = \int e^{-t} \sin t \cdot dt + K_1 = \frac{e^{-t}}{2}[\sin t + \cos t] + K_1 \ .$$

Procediendo análogamente a como se ha operado hasta ahora, se tendrá también que:

$$C_2'e^{-t} = -\frac{4}{3}\sin t \ ; \quad C_2 = -\frac{4}{3}\int e^t \sin t \cdot dt = -\frac{2}{3}e^t(\sin t - \cos t) + K_2 \ .$$

$$C_3'e^{2t} = \frac{2}{3}\sin t \ ; \quad C_3 = \frac{2}{3}\int e^{-2t} \sin t \cdot dt = -\frac{2e^{-2t}}{15}(2\sin t + \cos t) + K_3 \ .$$

La substitución de estos valores en la expresión [2] dan como resultado la integral general siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1 = 2K_1e^t + 4K_2e^{-t} + 5K_3e^{2t} - 5\sin t + \cos t \\ y_2 = -2K_2e^{-t} - 4K_3e^{2t} + \frac{12}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t \\ y_3 = K_1e^t + K_2e^{-t} + 2K_3e^{2t} - \frac{17}{10}\sin t - \frac{1}{10}\cos t \end{array}}$$

que coincide, como no podría ser de otra manera, con la solución hallada anteriormente a salvo del valor de las constantes arbitrarias:

$$K_1 = \frac{1}{2}C_1, K_2 = \frac{1}{4}C_2, K_3 = \frac{1}{5}C_3 .$$

La representación gráfica correspondiente puede verse a continuación:

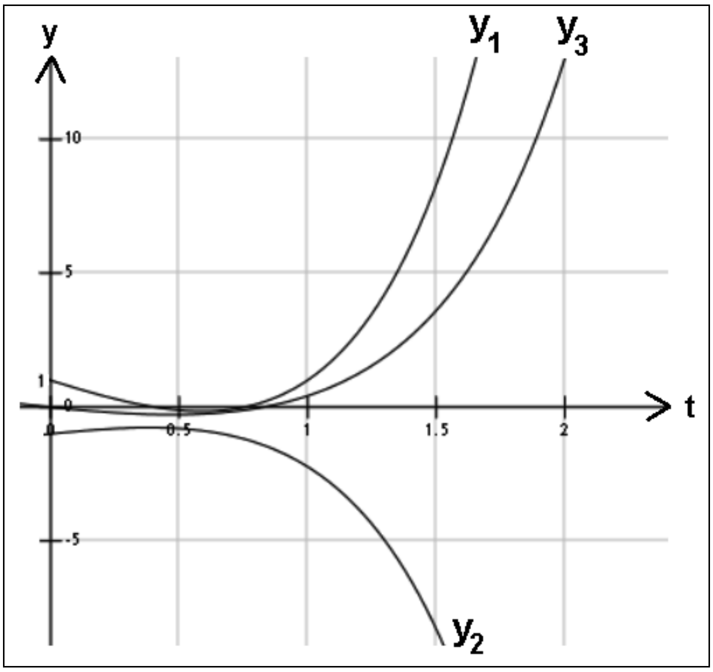


FIG. 9.25. Trayectorias temporales de los resultados contables (II).

Por otra parte, se presume también en el caso de las dos funciones y_1 e y_3 la existencia de ramas parabólicas, puesto que aquí sucede que si $t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba) en ambos casos.

De la contemplación de la representación gráfica de las trayectorias temporales de los resultados contables de las tres sucursales bancarias analizadas se deduce inmediatamente que la segunda debería ser cerrada por sus nulos resultados financieros registrados a lo largo del tiempo.

Ejemplo 5

Los resultados contables *y* de dos sucursales del mismo grupo empresarial bancario, que operan en la misma ciudad, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} y'_1 - 3y_1 + 2y_2 = \sin t \\ -y'_2 + 4y_1 - y_2 = \cos t \end{cases}$$

, y se sabe que, en el comienzo de la actividad económica, no tenían pérdidas ni ganancias. Hallar la trayectoria temporal de dichas sucursales.

Solución:

El sistema homogéneo correspondiente se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 - 2y_2 \\ y'_2 = 4y_1 - y_2 \end{cases}$$

Matriz del sistema diferencial: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. La ecuación característica o secular será: $[\lambda \cdot I_2 - A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$; o sea, pasando de matrices a determinantes: $(\lambda - 3)\cdot(\lambda+1) + 8 = 0$; de lo que resulta la ecuación:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \; ; \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 + 2i \\ \lambda_2 = 1 - 2i \end{cases}.$$

Haciendo ahora: $A \cdot X_i = \lambda_i \cdot X_i$;

$\boxed{\mathbf{\lambda_1 = 1 + 2i}}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2i)x_1 \\ (1+2i)x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= x_1 + 2i \cdot x_1 \\ 4x_1 - x_2 &= x_2 + 2i \cdot x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K \begin{bmatrix} 1+2i \\ 3+i \end{bmatrix} \text{ (vector propio complejo asociado)}$$

$\boxed{\mathbf{\lambda_2 = 1 - 2i}}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2i)x_1 \\ (1-2i)x_2 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= x_1 - 2i \cdot x_1 \\ 4x_1 - x_2 &= x_2 - 2i \cdot x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K \begin{bmatrix} 1-2i \\ 3-i \end{bmatrix} \text{ (vector propio complejo asociado)}$$

luego la integral general del sistema homogéneo será:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1+2i \\ 3+i \end{bmatrix} \cdot e^{(1+2i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1-2i \\ 3-i \end{bmatrix} \cdot e^{(1-2i)t} \text{; o sea:}$$

$$\begin{cases} y_1 = (1+2i)c_1 \cdot e^{(1+2i)t} + (1-2i)c_2 \cdot e^{(1-2i)t} \\ y_2 = (3+i)c_1 \cdot e^{(1+2i)t} + (3-i)c_2 \cdot e^{(1-2i)t} \end{cases}$$

, y así sucesivamente, de donde la solución particular real final de las trayectorias temporales solicitadas, con las condiciones iniciales expresadas, ofrece (compruébelo el amable lector/a) el siguiente resultado:

$$y(t) = \frac{1}{20}\big(8\,e^t \sin(2\,t) + 15 \sin(t) \sin(2\,t) - \sin(2\,t) \sin(3\,t) - 14\,e^t \cos(2\,t) + 15 \cos(t) \cos(2\,t) - \cos(3\,t) \cos(2\,t) + 5 \sin(t) \cos(2\,t) + 3 \sin(3\,t) \cos(2\,t) - 5 \sin(2\,t) \cos(t) - 3 \sin(2\,t) \cos(3\,t)\big)$$

$$z(t) = \frac{1}{10}\big(-3\,e^t \sin(2\,t) + 10 \sin(t) \sin(2\,t) + \sin(2\,t) \sin(3\,t) - 11\,e^t \cos(2\,t) + 10 \cos(t) \cos(2\,t) + \cos(3\,t) \cos(2\,t) - 5 \sin(t) \cos(2\,t) + 2 \sin(3\,t) \cos(2\,t) + 5 \sin(2\,t) \cos(t) - 2 \sin(2\,t) \cos(3\,t)\big)$$

, donde se ha substituido $y = y_1$, $z = y_2$.

Ejemplo 6

Dos productos o bienes sustitutivos poseen en un mercado la siguiente relación de precios:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2P_1}{dt^2} = 4P_2 + e^t \\ \dfrac{d^2P_2}{dt^2} = 4P_1 - e^t \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de ambos precios con independencia de las condiciones iniciales previas.

Solución:

$$\begin{cases} D^2P_1 = 4P_2 + e^t \\ D^2P_2 = 4P_1 - e^t \end{cases}$$

$$D^2P_1 - e^t = 4P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{D^2P_1}{4} - \frac{e^t}{4} \Rightarrow DP_2 = \frac{D^3P_1}{4} - \frac{e^t}{4} \Rightarrow D^2P_2 = \frac{D^4P_1}{4} - \frac{e^t}{4}$$

$$D^2P_2 = D^2P_2$$

Y nos quedará la ecuación:

$$\frac{D^4P_1}{4}-\frac{e^t}{4}=4P_1-e^t \Rightarrow \frac{D^4P_1}{4}-4P_1=-\frac{3e^t}{4}\,;P_1\left[\frac{D^4-16}{4}\right]=-\frac{3e^t}{4}.$$

A continuación, se investigará una solución particular del tipo siguiente:

$$P_1\left[D^4-16\right]=-3e^t \Rightarrow P_{1p}=A\cdot e^t \Rightarrow P'_{1p}=A\cdot e^t \Rightarrow P_{1p}{}^{(4)}=A\cdot e^t;$$

$$A\cdot e^t-16A\cdot e^t=-3e^t \Rightarrow A=\frac{1}{5} \Rightarrow P_{1p}=\frac{1}{5}e^t.$$

Por otra parte, la solución de la ecuación homogénea exige que:

$$P_1^*: D^4-16=0.$$

$$\left(D^2-4\right)\left(D^2+4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} D=2 \\ D=-2 \\ D=\pm 2i \end{cases}$$

$$P_1^*=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t;$$

$$\Rightarrow P_1(t)=P_1^*+P_{1p}=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t+\frac{1}{5}e^t.$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$P_2(t)=\frac{D^2P_1}{4}-\frac{e^t}{4}=\frac{D^2}{4}\left[C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t+\frac{e^t}{5}\right]-\frac{e^t}{4};$$

$$P_2(t)=\frac{D}{4}\left[2C_1e^{2t}-2C_2e^{-2t}-2C_3\sin 2t+2C_4\cos 2t+\frac{e^t}{5}\right]-\frac{e^t}{4};$$

$$P_2(t)=\frac{1}{4}\left[4C_1e^{2t}+4C_2e^{-2t}-4C_3\cos 2t-4C_4\sin 2t+\frac{e^t}{5}\right]-\frac{e^t}{4};$$

$$P_2(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}-C_3\cos 2t-C_4\sin 2t+\frac{e^t}{20}-\frac{e^t}{4};$$

$$P_2(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}-C_3\cos 2t-C_4\sin 2t-\frac{e^t}{5}.$$

y la solución general buscada será:

$$\boxed{\begin{aligned} P_1(t)&=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t+\frac{e^t}{5} \\ P_2(t)&=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}-C_3\cos 2t-C_4\sin 2t-\frac{e^t}{5} \end{aligned}}$$

y entonces se cumple que: $P_1(t) + P_2(t) = 2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t}$.

La resolución de este mismo problema por el sistema tradicional matricial conduciría a una solución mucho más prolija, aunque similar a la obtenida, teniendo en cuenta la arbitrariedad de las 4 constantes que aparecen en la solución.

Ejemplo 7

Sean las tres funciones de oferta de un bien normal y_1, y_2, y_3, que se hallan relacionadas entre sí del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$, con $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 1$ €/ud.,

siendo: y_1 = precio oferente 1 en €/ud., y_2 = precio oferente 2 en €/ud., y_3 = precio oferente 3 en €/ud., x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. Se pide: a) determinar dichas funciones de oferta, b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: $f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du = 15$, así como estimar los ingresos brutos de los ofertantes, y c) calcular la elasticidad arco de la demanda entre los puntos de equilibrio extremos y la elasticidad en el punto de equilibrio intermedio.

Solución:

a) El sistema dado planteado en forma matricial es el siguiente:

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 \\ y'_2 = y_2 \\ y'_3 = y_2 + y_3 \end{cases}$$

que, de hecho, es un sistema homogéneo, pero para cuya resolución haremos servir también, en algún momento, el método de variación de constantes o parámetros.

Véase que las dos primeras ecuaciones pueden resolverse independientemente del siguiente modo:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = k_1e^{2x} \\ y_2' = y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = k_2e^{x} \end{cases}$$

Substituyendo y_2 en la tercera ecuación del sistema propuesto, ésta queda así: $y'_3 = y_2 + y_3 = k_2e^x + y_3$, que es una ecuación lineal de primer orden. La ecuación homogénea $y'_3 = y_3$ tiene por solución general la siguiente: $y_3 = k \cdot e^x$.

Usando el método de variación de constantes, resultará que: $k'(x)e^x + k(x)e^x = k(x)e^x + k_2e^x$, por lo tanto: $k(x) = k_2x + k_3$, y la solución general de la ecuación completa, es: $y_3(x) = k_2xe^x + k_3e^x$. Si utilizamos ahora las condiciones iniciales dadas para determinar los valores de las constantes k_1, k_2 y k_3, se tendrá que:

$$y_1(0) = k_1 = 1 \ , \ y_2(0) = k_2 = 1 \ , \ y_3(0) = k_3 = 1.$$

Finalmente, la solución del problema planteado de valores iniciales, es la siguiente integral particular:

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^x \\ y_3(x) = (x+1)e^x \end{cases}$$

b) La función de demanda viene expresada como una ecuación integral de Volterra, por lo que la resolveremos como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(u) \cdot du\right\} = L\{15\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(u) \cdot du\right\} = L\{15\} \Rightarrow F(S) + \frac{F(S)}{S} = \frac{15}{S}$$

, donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S \cdot F(S) + F(S) = 15 \Rightarrow F(S)(S+1) = 15 \Rightarrow F(S) = \frac{15}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda, a saber:

$$\boxed{f(x) = L^{-1}\left\{\frac{15}{S+1}\right\} = 15 \cdot e^{-x}} \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$15 \cdot e^{-x} + \int_0^x 15 \cdot e^{-u} \cdot du = 15$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-u} \cdot du = 1$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-u}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Así pues, en el equilibrio sucederá, en todos los casos, que ($D = O_i$). Para las tres ofertas en cuestión, se tendrán, en fin, los siguientes puntos de equilibrio y los correspondientes ingresos brutos de los ofertantes:

$O_1 = D \Rightarrow e^{2x} = 15 \cdot e^{-x}$; $e^{3x} = 15$; $x_{1e} = (\ln 15)/3 = 0'903 \approx 903$ ud.
$y_{1e} = e^{1'806} = 6'09$ €/ud.
$I_1 = p_1 \times q_1 = 6'09 \times 903 = 5.499'27$ € .

$O_2 = D \Rightarrow e^{x} = 15 \cdot e^{-x}$; $x_{2e} = (\ln 15)/2 = 1'354 \approx 1.354$ ud.
$y_{2e} = e^{1'354} = 3'87$ €/ud.
$I_2 = p_2 \times q_2 = 3'87 \times 1.354 = 5.239'98$ € .

$O_3 = D \Rightarrow (x + 1)e^{x} = 15 \cdot e^{-x}$; $x_{3e} = 1'005 \approx 1.005$ ud.
$y_{3e} = (1'005 + 1)e^{1'005} = 5'48$ €/ud.
$I_3 = p_3 \times q_3 = 5'48 \times 1.005 = 5.507'40$ € .

Por otra parte, se presume también en los tres casos de las funciones de oferta O_1, O_2 y O_3 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \text{lím.}_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, luego existe en todas ellas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba). Además, la función de demanda posee una asíntota horizontal en el eje OX.

Se tiene la representación gráfica conjunta siguiente:

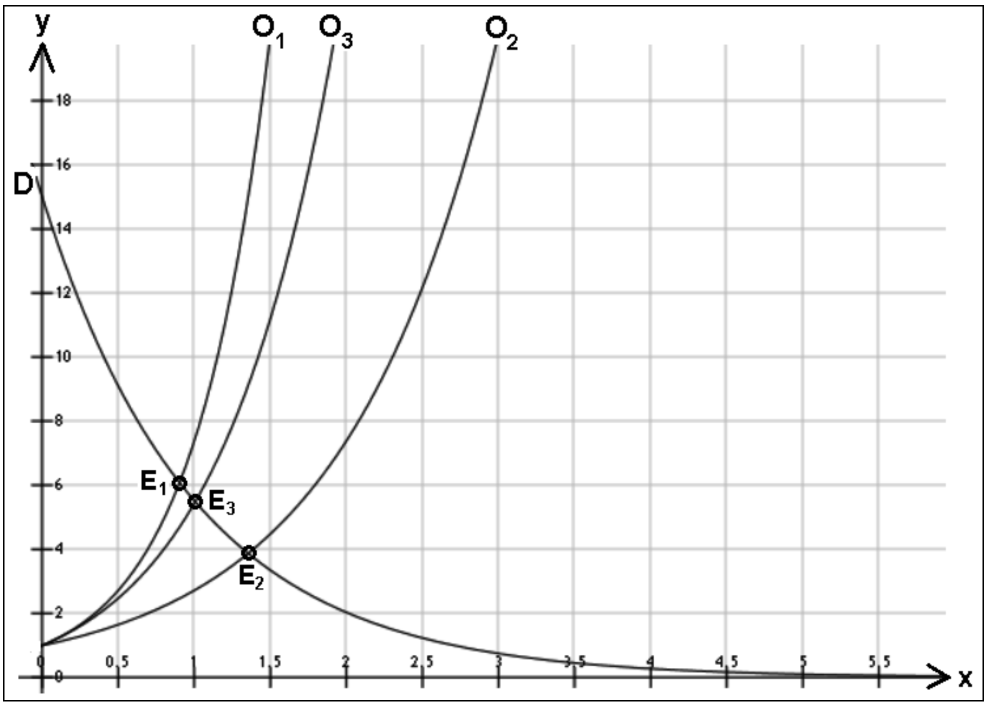


FIG. 9.26. Oferta, demanda y punto de equilibrio (XII).

c) Por otra parte, la elasticidad arco de la demanda entre los puntos E_1(0'903,6'09) y E_2(1'354,3'87) vendrá dada por la siguiente expresión:

$$e_a = \frac{1'354-0'903}{1'354+0'903}\times\frac{3'87+6'09}{3'87-6'09} = \frac{0'451}{2'257}\times\frac{9'96}{-2'22} = -\frac{4'49196}{5'01054} = -0'90 \in (-1, 0)\,,$$

luego se trata de una demanda relativamente inelástica.

Así mismo, la elasticidad en el punto intermedio E_3(1'005,5'48) deberá considerar que: $\frac{dy}{dx} = -15\cdot e^{-x}; \frac{dx}{dy} = -\frac{e^x}{15};$ y la elasticidad puntual buscada será: $e_p = \frac{dx}{dy}\times\frac{y}{x} = -\frac{e^x}{15}\times\frac{15}{x\cdot e^x} = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{1'005} \approx -1$, luego se trata de una elasticidad prácticamente unitaria.

CAPÍTULO 9b

SISTEMAS DE ECUACIONES INFINITESIMALES II

2. APLICACIÓN DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE A LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

2.1. CONCEPTO

También en la resolución de los sistemas de EDO que hemos visto en el anterior capítulo de nuestro libro (es decir, conjuntos de dos o más ecuaciones diferenciales con un número igual de funciones desconocidas), el método de las transformadas de Laplace reviste singular utilidad. Si todos los coeficientes son constantes, entonces el método de solución consiste en la generalización directa.

Las transformadas de Laplace se toman de cada ecuación diferencial en el sistema; las transformadas de las funciones desconocidas se determinan algebraicamente a partir del conjunto resultante de ecuaciones simultáneas; por último, las transformadas inversas para las funciones desconocidas se calculan con la ayuda de la tabla correspondiente que adjuntamos en el capítulo 7 de nuestro libro[1] y que puede hallarse también en diversos manuales *ad hoc*.

Supongamos, en fin, que tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t) \;, \qquad (1)$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de n filas por n columnas con los coeficientes reales, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^t$, donde las f_i son funciones dadas e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ es la función vectorial incógnita. Supongamos además las condiciones iniciales:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \;, \qquad (2)$$

donde: $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^t$ con y_i^0 números reales para $1 \leq i \leq n$.

[1] La tabla antedicha provee la mayoría de las transformaciones de Laplace para funciones de una sola variable. Recordemos que, debido a que la transformada de Laplace es un operador lineal, la transformada de Laplace de una suma es la suma de la transformada de Laplace de cada término. En definitiva, se trata de una lista de las transformadas laplacianas más comunes, que puede resultar de gran utilidad en la resolución de los problemas prácticos como los que se plantean en el presente manual.

Sea: $L[\mathbf{y}](z) = (L[y_1](z), L[y_2](z), \ldots, L[y_n](z))^t$.

Entonces, tomando la Transformada de Laplace en (1) y teniendo en cuenta (2) obtenemos que: $zL[\mathbf{y}](z) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\cdot L[\mathbf{y}](z) + L[\mathbf{f}](z)$, de donde, si $\mathbf{I}_n$, denota la matriz identidad de orden n, se tendrá que:

$$(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\cdot L[\mathbf{y}](z) = \mathbf{y}_0 + L[\mathbf{f}](z),$$

y de aquí se deduce que: $L[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\cdot(\mathbf{y}_0 + L[\mathbf{f}](z))$. (3)

Una vez calculada de este modo $L[\mathbf{y}](z)$ obtendremos **y** tomando la Transformada inversa con la ayuda de la tabla correspondiente. Este método puede aplicarse a los sistemas de ecuaciones diferenciales con la ventaja de proporcionar las soluciones convenientes a las condiciones iniciales prefijadas del problema (PVI).

El método en cuestión no solo ofrece directamente las soluciones particulares que satisfacen a dichas condiciones iniciales sino que, además, estas funciones se pueden calcular independientemente unas de otras, lo que no ocurre precisamente empleando los métodos expuestos hasta ahora. En efecto, para resolver el mismo problema mediante la determinación previa de las soluciones o integrales generales, es preciso, como se recordará, recurrir al hallazgo de las constantes de integración *a posteriori*, resolviendo el sistema de ecuaciones numérico que resulta de expresar el cumplimiento de dichas condiciones, lo que, en definitiva, impide el cálculo por separado de cada una de las funciones incógnita.

2.2. EJEMPLOS

Véanse, a continuación, los siguientes ejemplos que juzgamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Los resultados contables *y* de dos comercios franquiciados de la misma empresa matriz, que operan en la misma ciudad, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, y se sabe que, en el comienzo de su actividad económica, sus resultados diarios se expresaban así (en miles de euros):

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se desea hallar las trayectorias temporales de los resultados de dichas sucursales en el primer decenio de su existencia (con la variable *t* expresada en decenios), representándolas gráficamente y averiguando si se producirá, en alguna ocasión, coincidencia de sus resultados contables.

Solución:

El sistema anterior también se puede escribir así:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = 2y_1 - 3y_2 + 1 \\ y'_2 = 3y_1 + 2y_2 \end{array}\right\}$$

De la expresión anterior (3) explicada en la introducción teórica, se deduce que:

$$\begin{pmatrix} L[y_1](z) \\ L[y_2](z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2 & 3 \\ -3 & z-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 + \dfrac{1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z^2 - 4z + 13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2z+1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2z^2 - 2}{z(z^2 - 4z + 13)} \\ \dfrac{-z^2 + 8z + 3}{z(z^2 - 4z + 13)} \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución del presente problema viene dada por la siguiente expresión matricial de las correspondientes funciones generatrices Laplace:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{-1}\left[\dfrac{2z^2 - 2}{z(z^2 - 4z + 13)}\right](t) \\ L^{-1}\left[\dfrac{-z^2 + 8z + 3}{z(z^2 - 4z + 13)}\right](t) \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28e^{2t}\cos(3t) + 16e^{2t}\sin(3t) - 2 \\ 28e^{2t}\sin(3t) - 16e^{2t}\cos(3t) + 3 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = \dfrac{28}{13} e^{2t} \cos 3t + \dfrac{16}{13} e^{2t} \sin 3t - \dfrac{2}{13} \\ y_2(t) = \dfrac{28}{13} e^{2t} \sin 3t - \dfrac{16}{13} e^{2t} \cos 3t + \dfrac{3}{13} \end{array}}$$

, con la siguiente representación gráfica:

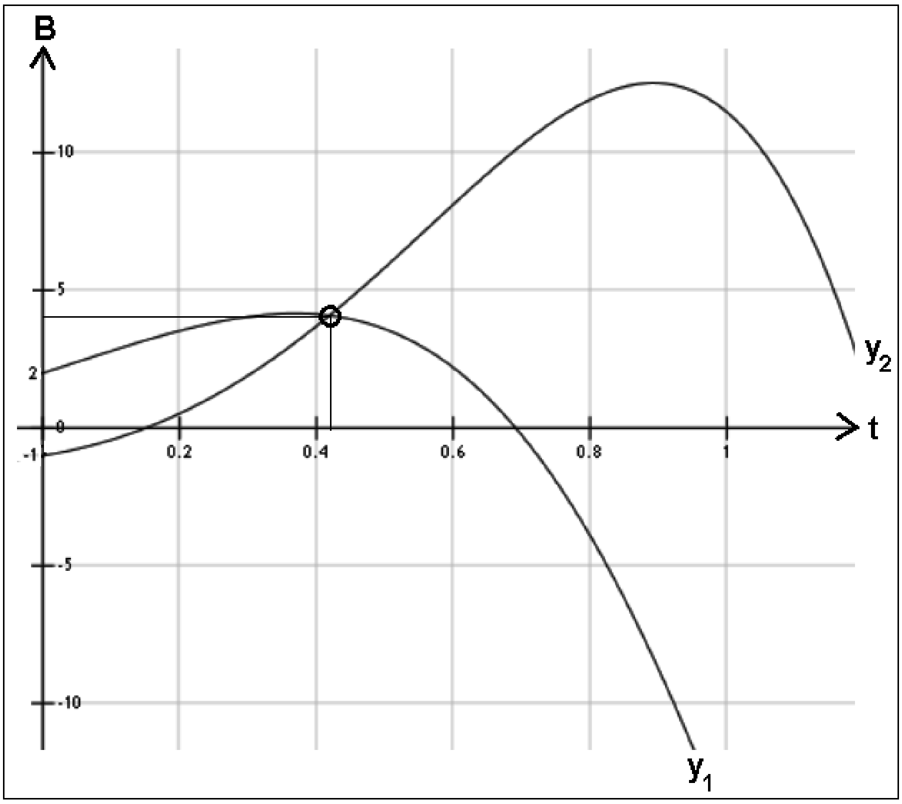


FIG. 9.27. Trayectorias temporales de los resultados contables (III).

La coincidencia de ambos resultados contables se producirá cuando $t \approx 0'419035225745996\ldots$, o sea, aproximadamente a los 4'19 años del inicio de su actividad económica, como puede comprobarse en la figura anterior.

Ejemplo 2

Dos productos o bienes sustitutivos poseen en un mercado la siguiente relación de precios:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = -P_1 + P_2 \\ \dfrac{dP_2}{dt} = 2P_1 \end{cases}$$

Se pide hallar la trayectoria temporal de ambos precios sabiendo que inicialmente: $P_1 = 0'00$ €/ud. y $P_2 = 1'00$ €/ud.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} P'_1 &= -P_1 + P_2 \\ P'_2 &= 2P_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &SP_{1s} - P_1(0) + P_{1s} - P_{2s} = 0 \\ &SP_{2s} - P_2(0) - 2P_{1s} = 0 \end{aligned}$$

$$SP_{1s} + P_{1s} - P_{2s} = 0 \Rightarrow P_{2s} = SP_{1s} + P_{1s}$$
$$SP_{2s} - 1 - 2P_{1s} = 0 \Rightarrow S(SP_{1s} + P_{1s}) - 1 - 2P_{1s} = 0 = S^2P_{1s} + SP_{1s} - 1 - 2P_{1s}$$
$$P_{1s}(S^2 + S - 2) = 1 \Rightarrow P_{1s} = \frac{1}{(S^2 + S - 2)} = \frac{1}{S^2 + S - 2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}} = \frac{1}{(S + 1/2)^2 - 9/4}$$

, con la función generatriz: $P_1(t) = \frac{2}{3}\left\{\frac{3/2}{S^2 - 9/4}\right\}\Bigg|_{S \to S+1/2} = \frac{2}{3}e^{-1/2 t} \cdot \sinh\frac{3}{2}t$.

Del mismo modo, se tendrá que:

$$P_{2s} = SP_{1s} + P_{1s} = S\left(\frac{1}{(S + 1/2)^2 - 9/4}\right) + \frac{1}{(S + 1/2)^2 - 9/4}$$
$$P_{2s} = \frac{S + 1/2 - 1/2}{(S + 1/2)^2 - 9/4} + \frac{1}{(S + 1/2)^2 - 9/4} = \frac{S + 1/2}{(S + 1/2)^2 - 9/4} - \frac{1/2}{(S + 1/2)^2 - 9/4}\frac{1}{(S + 1/2)^2 - 9/4}$$
$$P_2(t) = e^{-1/2 t} \cdot \cosh\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}e^{-1/2 t} \cdot \sinh\frac{3}{2}t + \frac{2}{3}e^{-1/2 t} \cdot \sinh\frac{3}{2}t,$$

y la solución buscada será la siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} P_1(t) = \frac{2}{3}e^{-1/2 t} \cdot \sinh\frac{3}{2}t \\ P_2(t) = e^{-1/2 t} \cdot \cosh\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}e^{-1/2 t} \cdot \sinh\frac{3}{2}t + \frac{2}{3}e^{-1/2 t} \cdot \sinh\frac{3}{2}t \end{array}}$$

, y entonces se cumple que: $P_2(t) - P_1(t) = e^{-1/2 t}(\cosh\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\sinh\frac{3}{2}t)$.

En cualquier caso, la solución general del sistema viene dada por:

$$\begin{cases} P_1(t) = \frac{c_1}{3}e^{-2t}(e^{3t} + 2) + \frac{c_2}{3}e^{-2t}(e^{3t} - 1) \\ P_2(t) = \frac{2c_1}{3}e^{-2t}(e^{3t} - 1) + \frac{c_2}{3}e^{-2t}(2e^{3t} + 1) \end{cases}$$

, que con las condiciones de contorno dadas exige que:

$P_1(0) = c_1 = 0$; $P_2(0) = c_2 = 1$; consecuentemente, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_1(t) = \frac{e^{-2t}}{3}(e^{3t} - 1) = \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t}) \\ P_2(t) = \frac{e^{-2t}}{3}(2e^{3t} + 1) = \frac{1}{3}(2e^{t} + e^{-2t}) \end{cases}$$

, y entonces se cumple también que: $P_1(t) + P_2(t) = e^t$.

Desde luego, puede demostrarse que, habiendo empleado anteriormente funciones hiperbólicas, el resultado es coincidente con el posteriormente obtenido, dado que, por la propia conceptualización de dichas funciones, se tendría que:

$$P_1(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cdot \sinh\frac{3}{2}t = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\frac{e^{\frac{3t}{2}} - e^{\frac{-3t}{2}}}{2} = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) \text{, c.s.q.d.,}$$

y a la misma conclusión llegaríamos a partir del cálculo de la $P_2(t)$, como podrá comprobar el amable lector a título de ejercicio recapitulatorio de los conceptos ya expresados.

Por otra parte se presume, también en ambos casos de las funciones de precio P_1 y P_2, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $P \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{P}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OP (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica correspondiente puede verse a continuación:

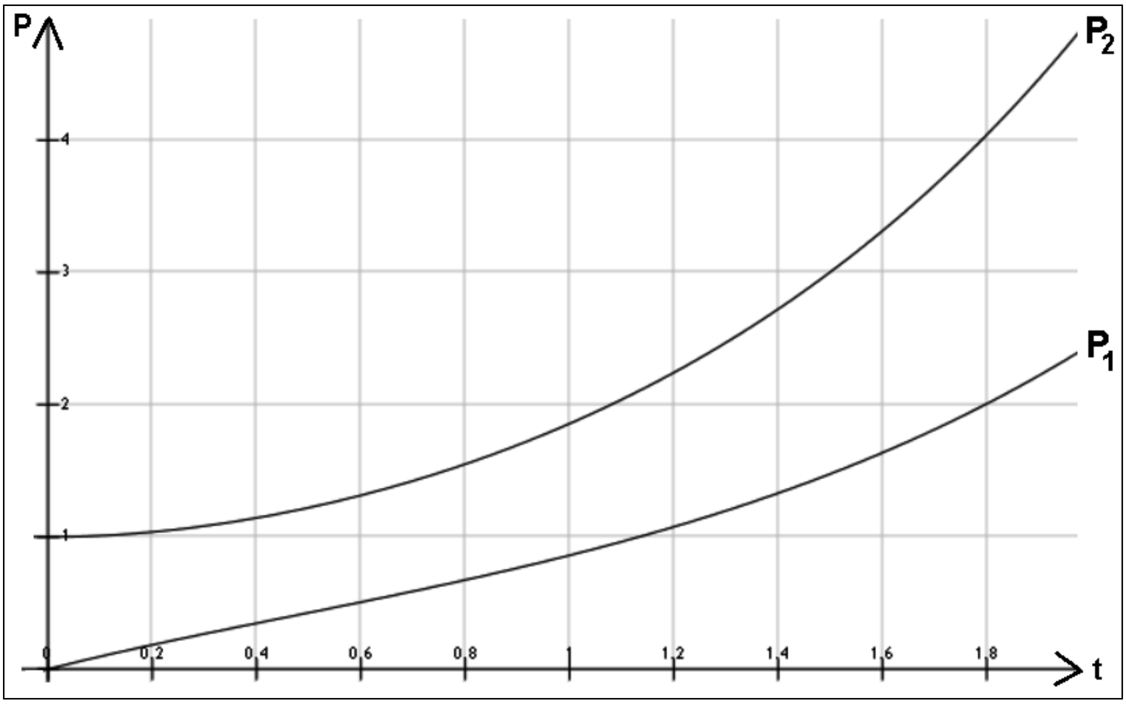


Fig. 9.28. Trayectorias temporales de los precios (VII).

Debemos recordar también que si existe competencia perfecta entre los consumidores, un consumidor maximizará su satisfacción si su RSB (relación de substitución entre los bienes cuya trayectoria temporal se analiza) o RMS (relación marginal de sustitución) es igual a la razón de sus precios; en este caso, maximizamos la utilidad de un individuo condicionado a una restricción presupuestaria, o sea:

$$RMS = \frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{P_2}{P_1} = -\frac{1/3(2e^t + e^{-2t})}{1/3(e^t - e^{-2t})} = -\frac{2e^{3t} + 1}{e^{3t} - 1}$$, que inicialmente valdrá:

-1'00/0'00 = -∞. De hecho, esta relación mide la pendiente de la *curva de indiferencia* que, por hallarse en el segundo cuadrante del círculo, resulta negativa, y representa la relación en la que el consumidor está dispuesto a substituir el bien (1) por el bien (2).

Ejemplo 3

Los resultados contables *x* e *y* de dos comercios franquiciados de la misma matriz, que operan en la misma ciudad, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y \end{cases}$$

, y se sabe que, en el comienzo de su actividad económica, sus resultados diarios se expresaban así (en miles de euros):

$$\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Se desea hallar la trayectoria temporal de los resultados de dichos establecimientos con la correspondiente representación gráfica.

Solución:

Aplicando las transformadas de Laplace a las ecuaciones dadas en el enunciado del problema planteado, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - 2y \\ y' = 5x - y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Sx_s - x(0) = x_s - 2y_s \\ Sy_s - y(0) = 5x_s - y_s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Sx_s + 1 = x_s - 2y_s \\ Sy_s - 2 = 5x_s - y_s \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Sx_s - x_s + 2y_s = -1 \\ Sy_s + y_s - 5x_s = 2 \end{array}$$

Realizando, ahora, las operaciones pertinentes, se obtiene lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}[x_s(S-1)+2y_s=-1](5)\\ [-5x_s+y_s(S+1)=2](S-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\cancel{5x_s}(S-1)+10y_s=-5\\ \underline{\cancel{-5x_s}(S-1)+y_s(S+1)(S-1)=2(S-1)}\\ 10y_s+y_s(S+1)(S-1)=-5+2S-2\\ y_s(10+S^2-1)=2S-7\\ y_s(S^2+9)=2S-7\\ y_s=\frac{2S}{S^2+9}-\frac{7}{S^2+9}\Rightarrow y(t)=2\cos 3t-\frac{7}{3}\sin 3t\end{array}$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l}[x_s(S-1)+2y_s=-1](S+1)\\ [-5x_s+y_s(S+1)=2](-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}10x_s\cancel{-2y_s(S+1)}=-4\\ \underline{x_s(S-1)(S+1)\cancel{+2y_s(S+1)}=-1(S+1)}\\ x_s(S-1)(S+1)+10x_s=-1(S+1)-4\\ x_s(S^2-1+10)=-S-5\\ x_s=\frac{-S}{S^2+9}-\frac{5}{S^2+9}\Rightarrow x(t)=-\cos 3t-\frac{5}{3}\sin 3t\end{array}$$

y la solución buscada será la siguiente, una vez halladas ambas funciones generatrices Laplace:

$$\boxed{\begin{array}{l}y(t)=2\cos 3t-\frac{7}{3}\sin 3t\\ x(t)=-\cos 3t-\frac{5}{3}\sin 3t\end{array}}$$

, y entonces también se cumple que: $x(t) + y(t) = \cos 3t - 4\cdot\sin 3t$.

En cualquier caso, la solución general del sistema planteado viene dada por:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{3}(\sin 3t+3\cos 3t)-\frac{2c_2}{3}\sin 3t\\ y(t) = \frac{5c_1}{3}\sin 3t+\frac{c_2}{3}(3\cos 3t-\sin 3t)\end{cases}$$

que con las condiciones de contorno dadas exige:

$x(0) = c_1 = -1$; $y(0) = c_2 = 2$; consecuentemente, se tendrá que:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\sin 3t}{3}-\cos 3t-\frac{4}{3}\sin 3t=-\cos 3t-\frac{5}{3}\sin 3t\text{ , y también:}\\ y(t) = -\frac{5\sin 3t}{3}+2\cos 3t-\frac{2}{3}\sin 3t=2\cos 3t-\frac{7}{3}\sin 3t\text{ , c.s.q.d.}\end{cases}$$

La representación gráfica correspondiente puede verse a continuación:

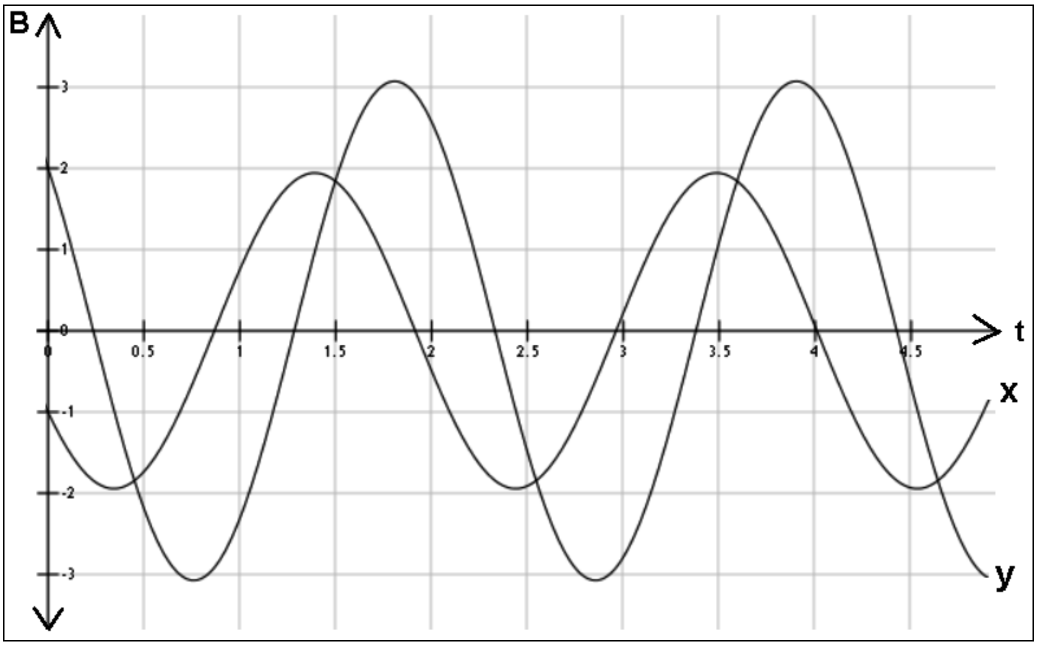


FIG. 9.29. Trayectorias temporales de los resultados contables (IV).

Como puede comprobarse se trata, en ambos casos, de resultados de carácter cíclico.

Ejemplo 4

Sean las dos siguientes funciones de oferta, *u(x)* y *v(x)*, que se hallan relacionadas entre sí por:

$$\begin{cases} u' + u - v = 0 \\ v' - u + v = 2 \end{cases}$$

con las condiciones iniciales: u(0) = 1'00 €/ud., v(0) = 2'00 €/ud. Si x = cantidad ofertada o demandada expresada en miles de ud. Se pide: a) hallar las funciones de oferta correspondientes; b) hallar el equilibrio del mercado, y representarlo gráficamente, para la siguiente función de demanda: $f(x) + \int_0^x f(\mu) \cdot d\mu = 3$, así como los ingresos brutos de los ofertantes, y c) hallar la elasticidad arco resultante entre ambos puntos de equilibrio.

Solución:

a) Indicaremos L{u(x)} y L{v(x)} por U(s) y V(s), respectivamente. Tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos:

$$\begin{cases} [sU(s) - 1] + U(s) - V(s) = 0 \ ; \ \ [sV(s) - 2] - U(s) + V(s) = 2/s \\ (s + 1)U(s) - V(s) = 1, \text{ o bien: } -U(s) + (s + 1)V(s) = \dfrac{2(s+1)}{s} \end{cases}$$

La solución de este último conjunto de ecuaciones lineales simultáneas es el siguiente, como puede comprobar el amable lector/a:

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2} \ , \ y \quad V(s) = \frac{2s+1}{s^2}.$$

Tomando ahora las transformadas inversas, obtenemos las correspondientes funciones generatrices Laplace, que nos ofrecen las dos ecuaciones de oferta buscadas, a saber:

$$\begin{cases} u(x) = L^{-1}\{U(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2}\right\} = 1 + x \Rightarrow \ (O_1) \\ v(x) = L^{-1}\{V(s)\} = L^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{s^2}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{s^2}\right\} = 2 + x \Rightarrow \ (O_2) \end{cases}$$

b) La función de demanda dada viene expresada como una ecuación integral de Volterra, por lo que la resolveremos también como tal por aplicación del método de las transformadas de Laplace. En efecto, aplicamos la Transformada de Laplace (TL) en ambos miembros de esta ecuación, con lo que:

$$L\left\{f(x) + \int_0^x f(\mu)\cdot d\mu\right\} = L\{3\} \Rightarrow L\{f(x)\} + L\left\{\int_0^x f(\mu)\cdot d\mu\right\} = L\{3\} \Rightarrow F(S) \ + \frac{F(S)}{S} = \frac{3}{S}$$

, donde: $f(x) \leftrightarrow F(S)$. De aquí se deduce que:

$$S\cdot F(S) + F(S) = 3 \Rightarrow F(S)(S+1) = 3 \Rightarrow F(S) = \frac{3}{S+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado de la función de demanda mediante la correspondiente función generatriz Laplace, a saber:

$$D \rightarrow f(x) = L^{-1}\left\{\frac{3}{S+1}\right\} = 3\cdot e^{-x} \ \rightarrow \text{I.P.}$$

Veamos ahora, como comprobación de este resultado substituyendo en la ecuación inicial, que se cumple la igualdad:

$3 \cdot e^{-x} + \int_0^x 3 \cdot e^{-\mu} \cdot d\mu = 3$, o lo que es lo mismo: $e^{-x} + \int_0^x e^{-\mu} \cdot d\mu = 3$. En efecto:

$$e^{-x} - \left[e^{-\mu}\right]_0^x = e^{-x} - e^{-x} + e^0 = 1, \text{ c.s.q.d.}$$

Para ambas ofertas relacionadas, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} O_1 = D \Rightarrow 1 + x = 3 \cdot e^{-x} \text{ ; } x_{1e} = 0'619 \approx 619 \text{ ud.} \\ y_{1e} = 1 + 0'619 = 1'62 \text{ €/ud.} \\ I_1 = p_1 \times q_1 = 1'62 \times 619 = 1.002'78 \text{ € .} \\ \\ O_2 = D \Rightarrow 2 + x = 3 \cdot e^{-x} \text{ ; } x_{2e} = 0'276 \approx 276 \text{ ud.} \\ y_{2e} = 2 + 0'276 = 2'28 \text{ €/ud.} \\ I_2 = p_2 \times q_2 = 2'28 \times 276 = 629'28 \text{ € .} \end{cases}$$

, con la siguiente representación gráfica conjunta:

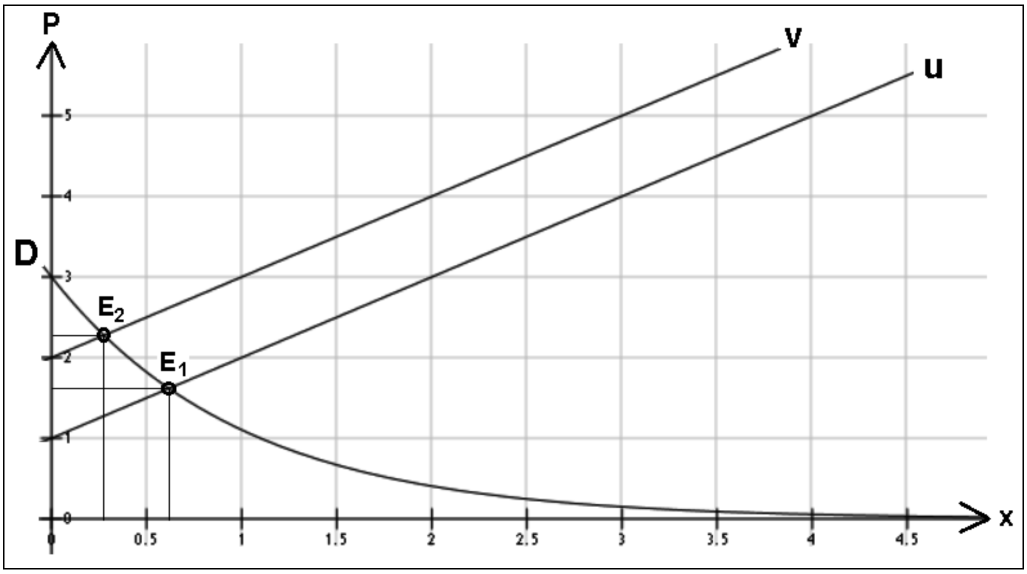


FIG. 9.30. Representación gráfica conjunta del equilibrio (V).

La función de demanda posee una asíntota horizontal en el eje de coordenadas o abscisas OX, como puede observarse.

c) Por otra parte, la elasticidad arco de la demanda entre ambos puntos de equilibrio $E_2(0'276,2'28)$ y $E_1(0'619,1'62)$ vendrá dada por:

$$e_a = \frac{0'619 - 0'276}{0'619 + 0'276} \times \frac{1'62 + 2'28}{1'62 - 2'28} = \frac{0'343}{0'895} \times \frac{3'9}{-0'66} = -2'26 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Ejemplo 5

Tres funciones económicas de un bien normal w, y, z, en un mercado en régimen de competencia perfecta, se hallan relacionadas entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} w'' - y + 2z = 3e^{-x} \\ -2w' + 2y' + z = 0 \\ 2w' - 2y + z' + 2z'' = 0 \end{cases}$$

, con los siguientes valores iniciales: w(0) = 1 €/ud., w'(0) = 1, y(0) = 2 €/ud., z(0) = 2 €/ud., z'(0) = -2. Determinar cuáles son de oferta y/o demanda así como el equilibrio de mercado, los ingresos de los ofertantes y, en su caso, la elasticidad arco entre los puntos de equilibrio resultantes.

Solución:

Tomando las transformadas de Laplace de las tres ecuaciones diferenciales anteriores, obtenemos que:

$$[s^2W(s) - s - 1] - Y(s) + 2Z(s) = \frac{3}{s+1};$$

$$-2[sW(s) - 1] + 2[sY(s) - 2] + Z(s) = 0;$$

$$2[sW(s) - 1] - 2Y(s) + [sZ(s) - 2] + 2[s^2Z(s) - 2s + 2] = 0;$$

$$s^2W(s) - Y(s) + 2Z(s) = \frac{s^2+2s+4}{s+1};$$

$$-2sW(s) + 2sY(s) + Z(s) = 2;\ \ 2sW(s) - 2Y(s) + (2s^2 + s)Z(s) = 4s;$$

La solución para este sistema de EDO es la siguiente:

$$W(s) = \frac{1}{s-1}\ ;\ \ Y(s) = \frac{2s}{(s-1)(s+1)}\ ;\ \ Z(s) = \frac{2}{s+1}.$$

De aquí se deduce, en definitiva, que las correspondientes funciones generatrices Laplace son:

$$\boxed{w(x) = L^{-1}(\frac{1}{s-1}) = e^x\ ; y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right\} = e^x + e^{-x}\ ; z(x) = 2\cdot L^{-1}(\frac{1}{s+1}) = 2 e^{-x}}$$

Tratándose de un bien normal, las dos primeras funciones w(x) e y(x) serán de oferta (crecientes) mientras que la tercera función z(x) lo es de demanda (decreciente), lo que se pone claramente de manifiesto mediante la representación gráfica de las tres funciones anteriores que se verá a continuación. Además, la función de demanda posee una asíntota horizontal en el eje OX.

Por otra parte se presume, también en los dos casos de las funciones de oferta *y* y *w*, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también ambas tienden también a ∞. Esto es: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{P}{x} = +\infty$, luego existe en ambas una rama parabólica según el eje OP (vertical, hacia arriba).

La representación gráfica correspondiente será la que puede verse a continuación:

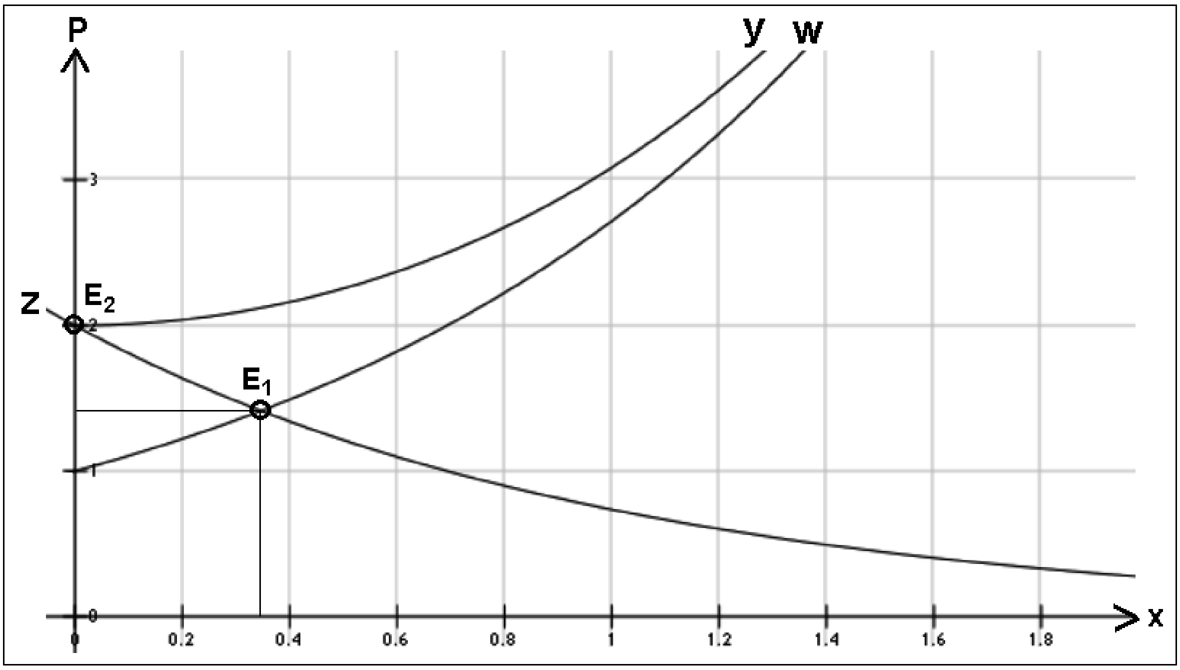


FIG. 9.31. Representación gráfica conjunta del equilibrio (VI).

Para ambas ofertas, se tendrán los siguientes puntos de equilibrio del mercado:

$O_1 = D \Rightarrow w(x) = z(x) \Rightarrow e^x = 2 \cdot e^{-x}$; $e^{2x} = 2$; $2x = \ln 2$;
$x_{1e} = 0'347 \approx 347$ ud.; $y_{1e} = 1'41$ € .
$I_1 = p_1 \times q_1 = 1'41 \times 347 = 489'27$ € .

$O_2 = D \Rightarrow y(x) = z(x) \Rightarrow e^x + e^{-x} = 2 \cdot e^{-x}$; $e^{2x} = 1$; $2x = \ln 1$;
$x_{2e} = 0$ ud.; $y_{2e} = 1 + 1 = 2'00$ € .
$I_2 = p_2 \times q_2 = 2'00 \times 0 = 0$ € .

Por otra parte, la elasticidad arco de la demanda entre ambos puntos de equilibrio $E_2(0,2)$ y $E_1(0'347,1'41)$ vendrá dada por la expresión:

$$e_a = \frac{0'347-0}{0'347+0}\times\frac{1'41+2}{1'41-2} = (1)\times\frac{3'41}{-0'59} = -5'78 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Ejemplo 6

Un agricultor cerealista produce grano y paja. Los resultados económicos por hectárea cultivada en relación al tiempo de ambos productos *z* e *y*, expresados en miles de euros, incluidas las subvenciones oficiales, se relacionan del siguiente modo, con y'(0) = 0:

$$\begin{cases} y'' + z + y = 0 \\ z' + y' = 0 \end{cases}$$

Al principio de cada campaña, vende los stocks de grano de la campaña anterior obteniendo unos resultados netos medios de 1.000 €/Ha., no teniendo stocks de paja. ¿Cuál será el resultado global neto anual de la explotación si posee una superficie total de 60 Ha. mientras que la superficie cultivable (descontando las infraestructuras de riego, comunicación, edificios, yermos, etc.) supone el 80% del total?

Solución:

Tomando las transformadas de Laplace de ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos que:

$$[s^2Y(s) - (0)s - (0)] + Z(s) + Y(s) = 0;\ \ (s^2 + 1)Y(s) + Z(s) = 0;$$
$$[sZ(s) - 1] + [sY(s) - 0]\text{ , o bien: } Y(s) + Z(s) = \frac{1}{s}\ .$$

Resolviendo este último sistema para Y(s) y Z(s), encontramos que:

$$Y(s) = -\frac{1}{s^3};\quad Z(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\,.$$

De este modo, tomando las transformadas inversas, concluimos que:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}t^2\ \ ;\ \ z(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 = \frac{2+t^2}{2}}.$$

El resultado global por unidad superficial será la suma de los resultados de cada *output* (grano y paja), con lo que:

$$\pi = y(t) + z(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 1 + \frac{1}{2}t^2 = 1 \Rightarrow 1.000 \text{ €/Ha.},$$

y el beneficio neto global anual será, teniendo en cuenta que la superficie cultivable es de 0'8 $\times$ 60 Ha. = 48 Ha.:

$$48 \text{ Ha. x } 1.000 \text{ €/Ha.} = 48.000 \text{ € .}$$

La representación gráfica correspondiente será la siguiente:

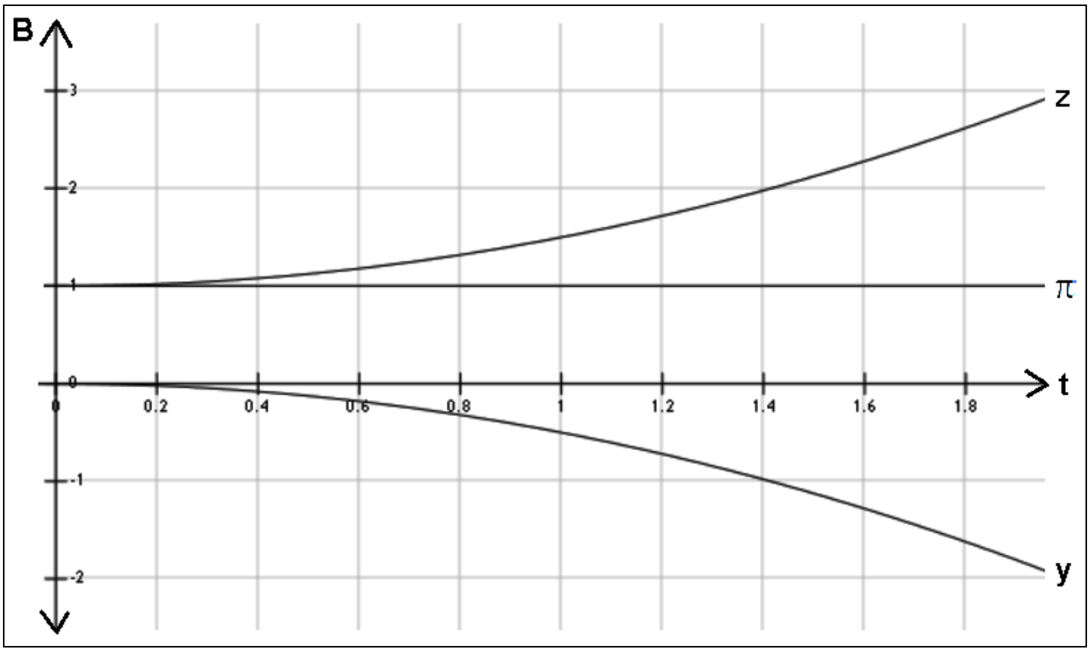


FIG. 9.32. Trayectorias temporales de los resultados contables (V).

Por lo que se refiere a la existencia de ramas parabólicas, habrá que estudiar ambos casos separadamente. En efecto, en la función *z* se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t $\rightarrow \infty$ también z $\rightarrow \infty$. Esto es: $m = \lim_{t \to +\infty} \frac{z}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OB (vertical, hacia arriba). En cambio, también en *y* se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t $\rightarrow \infty$ también y $\rightarrow$ - ∞. Pero entonces: $m = \lim_{t \to +\infty} \frac{y}{t} = -\infty$, luego en este caso existe una rama parabólica según el eje OB (vertical, hacia abajo).

Por otra parte, la trayectoria del sistema planteado también podría representarse simplificadamente (atendiendo solo a los valores naturales o enteros positivos de la variable temporal) del siguiente modo:

t	*y(t)*	*z(t)*
0	0	1
1	-0’5	1’5
2	-2’0	3’0
3	-4’5	5’5
4	-8’0	9’0
5	-12’5	13’5
6	-18’0	19’0
…	…	…
+ ∞	- ∞	+ ∞

, a cuya tabla corresponde la siguiente representación gráfica rectilínea en el segundo cuadrante del círculo:

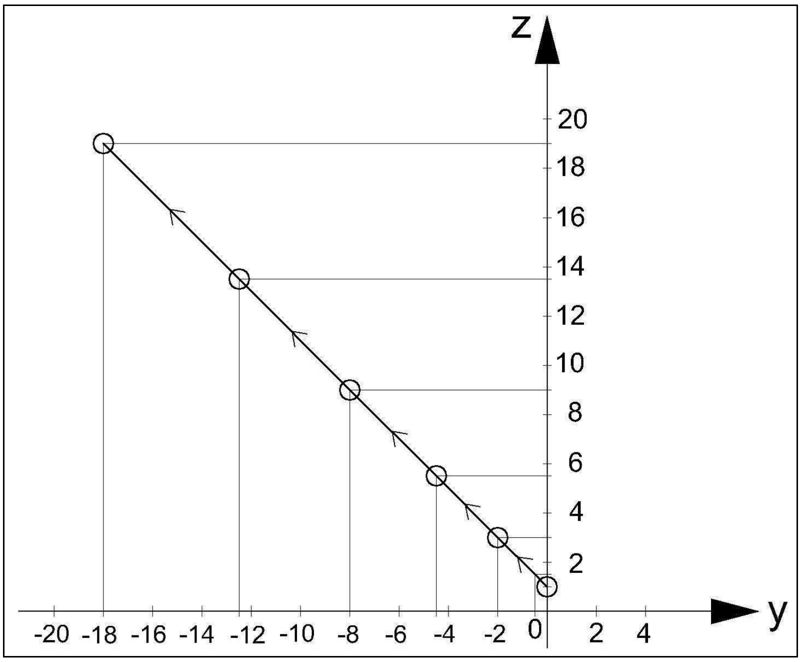


FIG. 9.33. Trayectoria temporal del sistema (I).

Ejemplo 7

Los resultados contables *x* e *y* de dos comercios franquiciados de la misma empresa matriz, que operan en la misma ciudad, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} x' &= -2y + 3 \\ y' &= 2x - 2t \end{aligned} \right|$$

, y se sabe que, en el comienzo de su actividad económica, sus resultados anuales se expresaban así (dados en miles de euros):

$\begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=1 \end{cases}$. Se desea: a) hallar la trayectoria temporal de los resultados de dichos establecimientos con la correspondiente representación gráfica y la trayectoria temporal del sistema planteado, y b) el instante temporal en que coincidan los resultados contables de ambos comercios (amén del inicial) y su cuantía.

Solución:

a) Aplicando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$\begin{cases} sL[x]-1=-2L[y]+\frac{3}{s} \\ sL[y]-1=2L[x]-\frac{2}{s^2} \end{cases}$$

Eliminando L[y] en el anterior sistema de ecuaciones, ofrece:

$L[x]=\frac{1}{s^2}+\frac{s}{s^2+4}$, e invirtiendo, x(t) = t + cos 2t.

Ahora bien, $L[y]=\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2+4}$, e invirtiendo, y(t) = 1 + sin 2t.

La solución del problema de valores iniciales propuesto, es, en definitiva:

$$\begin{cases} x(t) = t+\cos 2t = t+\cos^2 t-\sin^2 t \\ y(t) = 1+\sin 2t = 1+2\cdot\sin t\cdot\cos t \end{cases}$$

, con la correspondiente representación gráfica:

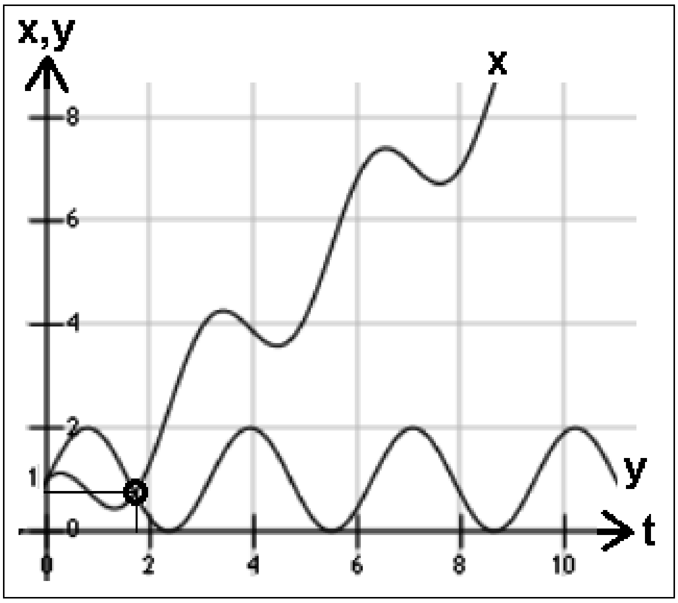


FIG. 9.34. Trayectorias temporales de los resultados contables (VI).

La trayectoria temporal del sistema también podría representarse simplificadamente (atendiendo solo a los valores naturales de la variable temporal) del siguiente modo:

t	*x(t)*	*y(t)*
0	1’00	1’00
1	0’58	1’90
2	1’35	0’24
3	3’96	0’72
4	3’85	1’99
5	4’16	0’46
6	6’84	0’46
…	…	…
+ ∞	+ ∞	--

, a cuya tabla corresponde la siguiente representación gráfica:

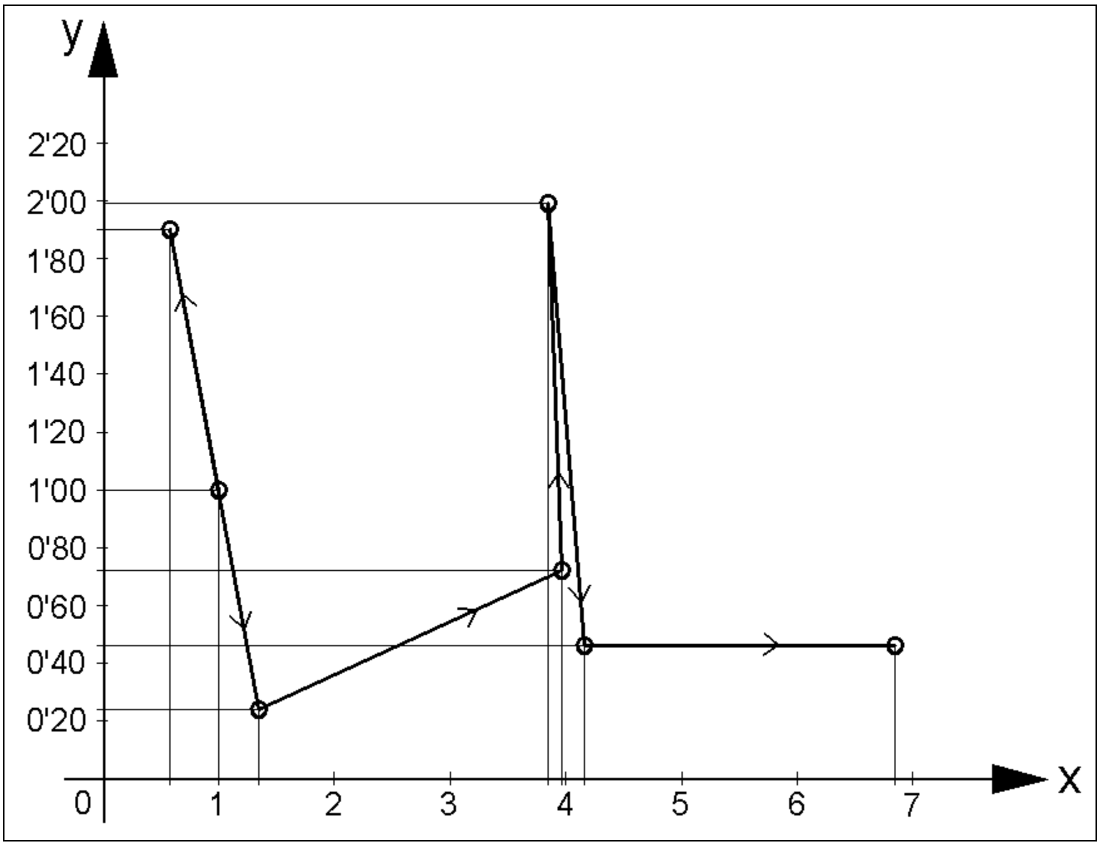
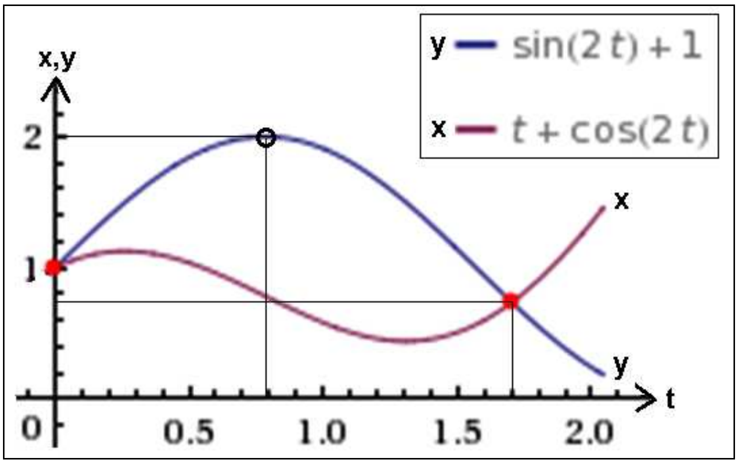


FIG. 9.35. Trayectoria temporal del sistema (II).

b) El detalle de dicha coincidencia se grafía a continuación con detalle suficiente en las proximidades del origen de coordenadas cartesianas rectangulares:



En el instante t = 1’70326 años se produce la coincidencia de los resultados contables de ambos comercios franquiciados, concretamente con: x = y = 0’738161 ≅ 738 € .

Es evidente, por otra parte, que la función y(t) posee un máximo en el punto en que: dy/dt = 2·cos 2t = 0 ⇒ t = π/4 = 0’7854 años, al que corresponde un resultado contable de: y = 1 + sin (π/2) = 2 (2.000 €).

Ejemplo 8

Sean las dos siguientes funciones económicas que representan los resultados contables brutos esperables en el tiempo de sendas empresas del mismo grupo, fruto de un estudio de explotación previsional, que están relacionadas del siguiente modo, viniendo *t* expresada en decenios e *y* en millones de euros, así:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 4y_1 + y_2 \\ y_2'(t) = -2y_1 + y_2 - 2e^x \end{cases} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

Se trata de identificar cuál de ellas obtiene beneficios y cuál pérdidas, con la correspondiente representación gráfica, así como el resultado contable del conjunto empresarial cuya puesta en marcha se pretende. Determinar, por último, si se produce la coincidencia temporal y la cuantía de ambos resultados contables netos, considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

Al aplicar transformadas de Laplace a los dos miembros de las ecuaciones dadas, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{cases} sL[y_1] - 1 = 4L[y_1] + L[y_2] \\ sL[y_2] = -2[y_1] + L[y_2] - \dfrac{2}{s-1} \end{cases}$$

Eliminando ahora $L[y_2]$ entre ambas ecuaciones, tendremos que:

$$L[y_1] = \frac{s^2 - 2s - 1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3},$$

habiendo operado por fracciones parciales y coeficientes indeterminados, puesto que:

$$\frac{s^2 - 2s - 1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}, \text{ y entonces:}$$

$$s^2 - 2s - 1 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2) =$$

$$= As^2 - 5As + 6A + Bs^2 - 4Bs + 3B + Cs^2 - 3Cs + 2C =$$

$$= (A + B + C)s^2 - (5A + 4B + 3C)s + 6A + 3B + 2C .$$

De aquí se deduce el siguiente sistema heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la conocida regla de Cramer, (aunque también podrían aplicarse otros procedimientos como el de la inversión de la matriz o el método de triangularización de Gauss-Jordan), esto es:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 5A + 4B + 3C = 2 \\ 6A + 3B + 2C = -1 \end{cases}$$

De donde: $A = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{-2} = -1$; $B = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{-2} = 1$;

C = 1 – A – B = 1 + 1 – 1 = 1, con lo que se justifica la solución anteriormente dada, y su inversa, que constituye la primera función generatriz Laplace buscada, viene dada por la siguiente expresión:

$$y_1 = -e^t + e^{2t} + e^{3t}.$$

Eliminando ahora L[y_1] entre ambas ecuaciones, se tiene que:

$$L[y_2] = \frac{-4s+10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3},$$

, puesto que, en este caso, A = 3, B = -2 y C = -1, para cuya justificación se procederá operando del mismo modo (mediante fracciones parciales y coeficientes indeterminados), cuestión que dejamos en mano del amable lector/a como ejercicio recapitulatorio.

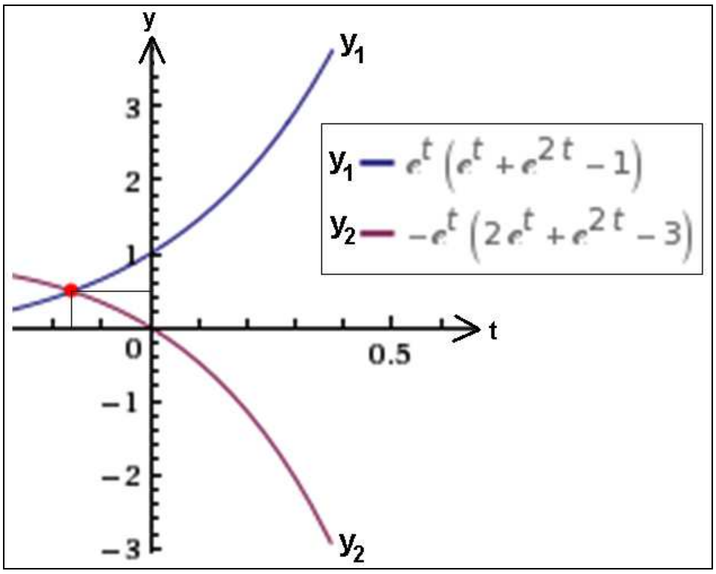
Invirtiendo, en fin, resulta que la función generatriz Laplace buscada es:

$$y_2 = L^{-1}\left(\frac{3}{s-1}\right) - L^{-1}\left(\frac{2}{s-2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) = 3e^t - 2e^{2t} - e^{3t}.$$

Por tanto, la solución pedida del sistema planteado, en forma de integral particular, es la siguiente:

$$\begin{cases} y_1 = -e^t + e^{2t} + e^{3t} \text{(beneficios)} \\ y_2 = 3e^t - 2e^{2t} - e^{3t} \text{(pérdidas)} \end{cases}$$

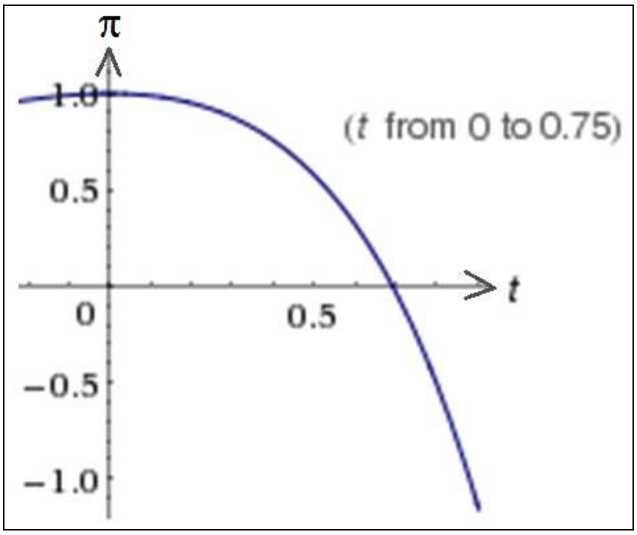
, a las que corresponden las siguientes representaciones gráficas de ambas funciones económicas:



Por lo que se refiere a la existencia de ramas parabólicas, habrá que estudiar ambos casos separadamente. En efecto, en la función y_1 se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $y_1 \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{y_1}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba). En cambio, también en y_2 se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t → ∞ también $y_2 \to -\infty$. Pero entonces: $m = \lim_{t \to +\infty} \frac{y_2}{t} = -\infty$, luego en este caso existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia abajo).

Es evidente que el resultado contable bruto del conjunto empresarial vendrá dado por la suma de ambas funciones, con lo que:

$\pi = y_1 + y_2 = e^{3t} + e^{2t} - e^t + 3e^t - 2e^{2t} - e^{3t} = 2e^t - e^{2t}$, con la siguiente representación gráfica:



Obsérvese, así mismo, que el beneficio se anula (entrándose en pérdidas), a partir del instante en que:

$$\pi = 0 = 2e^t - e^{2t};\ 2e^t = e^{2t};\ t = \ln 2 = 0'693 = 6'93 \text{ años},$$

o sea, que antes del séptimo ejercicio económico resultará negativo, lo que desaconseja claramente la puesta en marcha del programa empresarial en cuestión o, en su caso, se debería intentar la puesta en marcha exclusiva de la empresa y_1.

Para la determinación de la coincidencia de resultados pedida, por último, véase al final del presente capítulo (*).

Ejemplo 9

Los dividendos brutos de dos paquetes accionariales, *x* e *y*, de un inversor en bolsa, una vez analizada una serie cronológica suficientemente larga, hacen que el valor de ambos paquetes estén relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) \end{cases}$$, siendo x(0) = 8 € , y(0) = 3 € ,

, viniendo expresados *x* e *y* en euros y *t* en años. Se trata de estudiar la rentabilidad del conjunto de la inversión y determinar cuál será el dividendo neto transcurridos tres años, considerando un 20% promedio de impuestos sobre las rentas del capital y una inversión inicial de 100.000 €.

Solución:

Al aplicar el método de las transformadas de Laplace, teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas, de incógnitas L[x], L[y]:

$$\begin{cases} (s-2)L[x]+3L[y] = 8 \\ 2L[x]+(s-1)L[y] = 3 \end{cases}$$

Eliminando L[y], resulta que:

$$L[x] = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}.$$

Hallando la transformación inversa, después de haber aplicado el método de las fracciones parciales y los coeficientes indeterminados, resulta que: $x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$.

Si ahora, del mismo modo, eliminamos L[x], se tendrá que:

$L[y] = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$, e invirtiendo se obtiene la función generatriz Laplace buscada: $y(t) = L^{-1}(\frac{5}{s+1}) - L^{-1}(\frac{2}{s-4}) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$.

La solución del problema planteado es, por tanto, la siguiente integral particular:

$$\begin{cases} x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{cases}$$

Por lo que se refiere a la existencia de ramas parabólicas, habrá que estudiar ambos casos separadamente. En efecto, en la función *x* se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $x \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{x}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OB (vertical, hacia arriba). En cambio, también en *y* se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t $\rightarrow \infty$ también y $\rightarrow -\infty$. Pero entonces: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = -\infty$, luego en este caso existe una rama parabólica según el eje OB (vertical, hacia abajo).

La representación gráfica correspondiente será la siguiente:

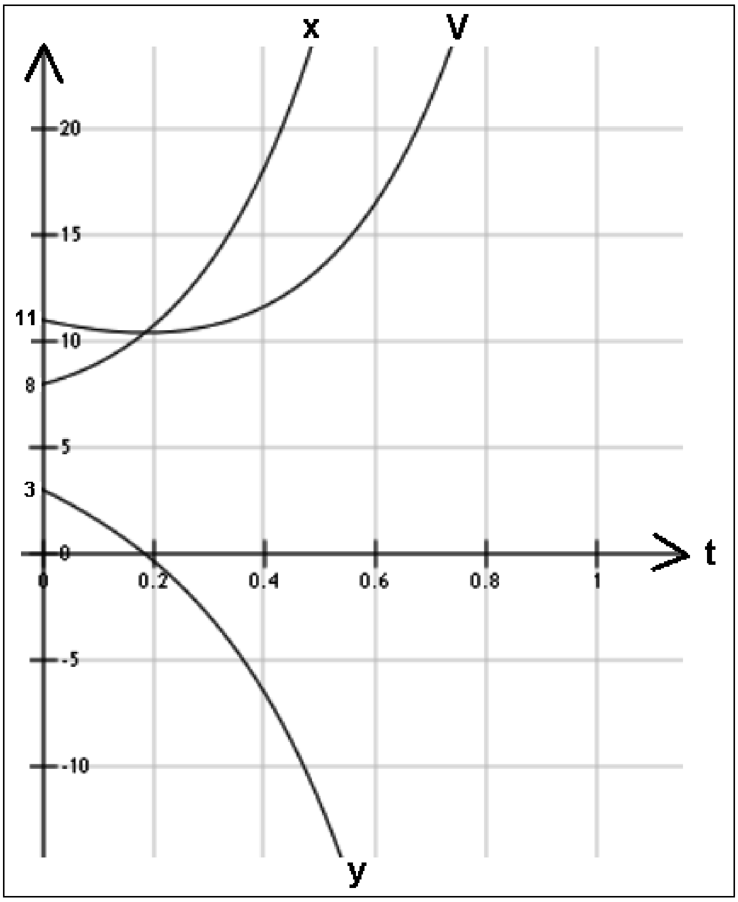


FIG. 9.36. Trayectoria temporal de los dividendos.

Evidentemente, el resultado global vendrá dado por la suma de los de ambos paquetes accionariales, con lo que:

$$V(t) = x(t) + y(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t} + 5e^{-t} – 2e^{4t} = 10e^{-t} + e^{4t},$$

y al cabo de tres ejercicios, en euros corrientes (sin tener en cuenta la inflación) el valor de ambos paquetes accionariales será de:

$V = 10/e^3 + e^{12} = 162.755'29$ € , lo que supone unos dividendos y otras revalorizaciones en el trienio de:

$\pi = V – I = 162.755'29 – 100.000 = 62.755'29$ € , que teniendo en cuenta la fiscalidad quedará reducido a: 0'8 x 62.755'29 = 50.204'23 € .

De este modo, la rentabilidad global neta sobre la inversión inicial efectuada será del orden de:

$$150.204'23 = 100.000(1+r)^3;\ (1+r)^3 = 1'5020423;\ r = 0'1452 \equiv 14'52\%.$$

Si alternativamente efectuamos el cálculo de forma lineal, en tres años se habrá producido un incremento neto patrimonial anual medio de: 50.204'23/3 = 16.734'74 €/año, lo que supone una rentabilidad anual del 16'73% sobre la inversión inicial.

Ejemplo 10

Las cifras anuales de negocio de tres compañías del mismo grupo empresarial, y_1, y_2 e y_3, expresadas en miles de euros, se hallan relacionadas entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_2 + 2y_3 \\ y_3' = -y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1.000\ € \\ y_2(0) = 0\ € \\ y_3(0) = 2.000\ € \end{cases}$$

Se trata de determinar: a) su trayectoria temporal individual y establecer la jerarquía en base a la cuantía de dichas cifras de negocio, y b) la cifra de negocio de cada compañía al cabo de 4 años.

Solución:

a) Aplicaremos transformadas de Laplace a las tres ecuaciones diferenciales dadas, con lo que se tendrá el sistema:

$$\begin{cases} sL[y_1] - 1 & = L[y_1] - L[y_2] + 2L[y_3] \\ sL[y_2] & = -L[y_1] + L[y_2] + 2L[y_3] \\ sL[y_3] - 2 & = -L[y_1] - L[y_2] + 4L[y_3] \end{cases}.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones algebraicas respecto de $L[y_1]$, $L[y_2]$ y $L[y_3]$, e invirtiendo las transformadas obtenidas, se tienen las integrales particulares mediante las funciones generatrices Laplace:

$$\begin{cases} L[y_1] = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{3}{(s-2)^2} & \Rightarrow\ y_1(t) = e^{2t} + 3te^{2t} \\ L[y_2] = \dfrac{3}{(s-2)^2} & \Rightarrow\ y_2(t) = 3te^{2t} \\ L[y_3] = \dfrac{2}{s-2} + \dfrac{3}{(s-2)^2} & \Rightarrow\ y_3(t) = 2e^{2t} + 3te^{2t} \end{cases}$$

Las tres últimas igualdades constituyen la solución particular al problema de valores iniciales planteado, con la siguiente representación gráfica conjunta:

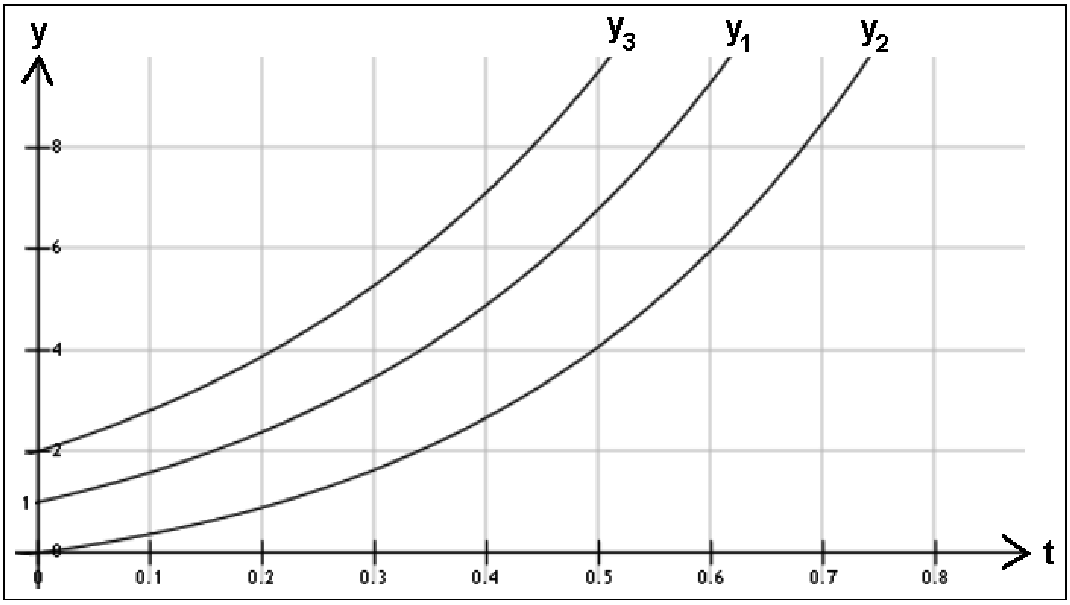


FIG. 9.37. Trayectoria temporal de las cifras de negocio.

Por lo que se refiere a la existencia de ramas parabólicas, veamos que en todos los casos se presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t $\rightarrow$ ∞ también y $\rightarrow$ ∞. Esto es: $m = \underset{t\rightarrow+\infty}{\text{lím.}} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba), en los tres casos analizados.

A la vista de este resultado, la mayor cifra de negocio corresponderá siempre a la compañía y_3, seguida de la compañía y_1 y, por último, la compañía y_2.

a) Al cabo de 4 años, las respectivas cifras de negocio serán las siguientes:

$y_1 \Rightarrow e^8 + 3\cdot 4\cdot e^8 = 2.980'96 + 12 \times 2.980'96 = 38.752'48$, lo que supone 38.752.480 € .

$y_2 \Rightarrow 3\cdot 4\cdot e^8 = 12 \times 2.980'96 = 38.752'48 = 35.771'52$, lo que supone 35.771.520 € .

$y_3 \Rightarrow 2\cdot e^8 + 3\cdot 4\cdot e^8 = 2 \times 2.980'96 + 12 \times 2.980'96 = 41.733'44$, lo que supone 41.733.440 € .

Ejemplo 11

Los resultados contables *x*, *y, z,* de tres sucursales del mismo grupo empresarial bancario, expresados en miles de euros, que operan en la misma ciudad, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} x' = -6x - 3y + 14z \\ y' = 4x + 3y - 8z \\ z' = -2x - y + 5z + \sin t \end{cases}$$

, y se sabe que, en el comienzo de la actividad económica, la primera sucursal tenía unos beneficios de 1.000 € , la segunda unas pérdidas de 1.000 € y la tercera no tenía pérdidas ni ganancias. Hallar la trayectoria temporal de dichas sucursales y razonar la posible supresión de alguna o algunas de ellas.

Solución:

En el capítulo anterior 9a de nuestro libro se ha resuelto este mismo problema empleando diferentes métodos (matricial, operadores diferenciales, variación de constantes o parámetros). Aquí, llamemos $\xi(p)$, $\eta(p)$, $\zeta(p)$ a las respectivas transformadas de Laplace, las cuales habrán de satisfacer al sistema transformado según las reglas conocidas, esto es:

$$\begin{cases} p\xi - 1 + 6\xi + 3\eta - 14\zeta = 0 \\ p\eta + 1 - 4\xi - 3\eta + 8\zeta = 0 \\ p\zeta + 2\xi + \eta - 5\zeta = \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} (p + 6)\xi + 3\eta - 14\zeta = 1 \\ - 4\xi + (p - 3)\eta + 8\zeta = -1 \\ 2\xi + \eta + (p - 5)\zeta = \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

, que constituye un sistema de ecuaciones algebraico heterogéneo, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la regla de Cramer (aunque también podrían aplicarse otros procedimientos como el de la inversión de la matriz o el método de triangularización de Gauss-Jordan), con lo que:

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -14 \\ -1 & p-3 & 8 \\ \frac{1}{p^2+1} & 1 & p-5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+6 & 3 & -14 \\ -4 & p-3 & 8 \\ 2 & 1 & p-5 \end{vmatrix}} = \frac{p^3-4p^2+3p+12}{(p+1)(p-2)(p^2+1)} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{p-5}{p^2+1},$$

y la función generatriz Laplace o solución correspondiente será, por tanto:

$$x(t) = \frac{2e^{2t}}{3} - \frac{2e^{-t}}{3} + \cos\ t - 5\sin\ t\,.$$

Del mismo modo, calcularemos las restantes soluciones, a saber:

$$\eta = \frac{\begin{vmatrix} p+6 & 1 & -14 \\ -4 & -1 & 8 \\ 2 & \frac{1}{p^2+1} & p-5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+6 & 3 & -14 \\ -4 & p-3 & 8 \\ 2 & 1 & p-5 \end{vmatrix}}$$, al que corresponde la función generatriz Laplace:

$y(t) = -\frac{8}{15}e^{2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{12}{5}\sin\ t - \frac{4}{5}\cos\ t$. Por último, se tendrá que:

$$\zeta = \frac{\begin{vmatrix} p+6 & 3 & 1 \\ -4 & p-3 & -1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{p^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+6 & 3 & -14 \\ -4 & p-3 & 8 \\ 2 & 1 & p-5 \end{vmatrix}}$$, al que corresponde la función generatriz Laplace:

$z(t) = \frac{4}{15}e^{2t} - \frac{e^{-t}}{6} - \frac{17}{10}\sin\ t - \frac{\cos\ t}{10}$, cuyos resultados coinciden plenamente con los obtenidos en el anterior ejercicio relacionado siempre considerando: $y_1 = x$, $y_2 = y$ e $y_3 = z$. Así mismo, de la contemplación de la representación gráfica de las trayectorias temporales de los resultados contables de las tres sucursales analizadas, que también se reproduce en el ejercicio correspondiente del capítulo anterior, se deduce inmediatamente que la segunda sucursal y_2 debería ser cerrada por sus nulos resultados financieros registrados a lo largo del tiempo. Esto es:

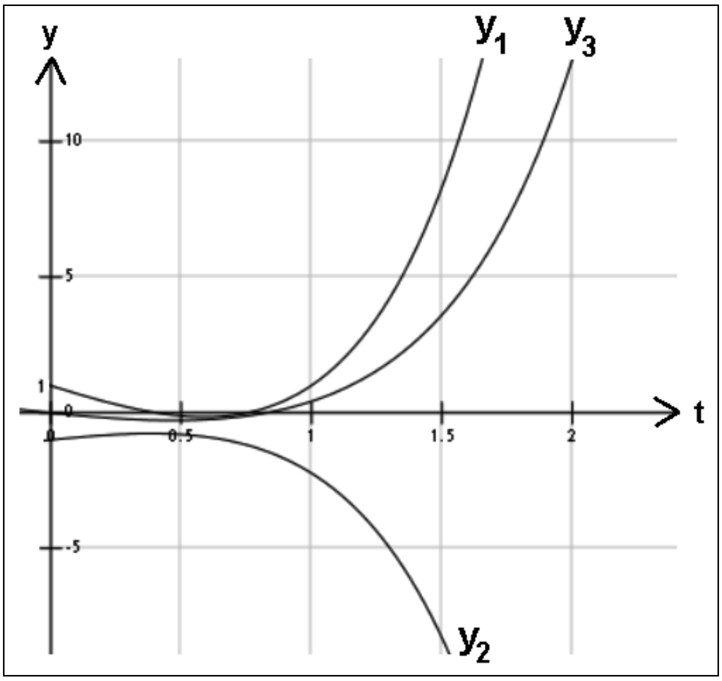


FIG. 9.38. Trayectorias temporales de los resultados contables (VII).

Ejemplo 12

Los resultados contables antes de impuestos *x* e *y* de dos comercios franquiciados de la misma matriz, que operan en la misma ciudad, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x = y + e^t = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + y = x + e^t = 0 \\ x(0^+) = y(0^+) = 1 \end{cases}$$

, y se sabe que, en el comienzo de su actividad económica, sus resultados diarios se expresaban así (en miles de euros):

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Se desea hallar la trayectoria temporal de los resultados de dichos establecimientos en el primer decenio de su actividad económica, con la correspondiente representación gráfica y la de la trayectoria del sistema, así como calculando los resultados contables netos de todo el período analizado, considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

Este sistema infinitesimal también se puede escribir así:

$$\left.\begin{array}{l} x' + x - y = e^t \\ y' + y - x = e^t \end{array}\right\}$$

de donde se deduce que: $x' + y' = 2\cdot e^t$.

Tomando la transformada de Laplace se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} L[x'] + L[x] = L[y] + L[e^t] \\ L[y'] + L[y] = L[x] + L[e^t] \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Obsérvese que *x* e *y* son funciones del tiempo *t*, por lo que no se debe caer en el error de aplicar que $L[x] = \frac{1}{s^2}$. Aquí se cumple que:

$$L[x] = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot x(t)\cdot dt\ .$$

Si denotamos: $L[x] = X(s)$, $L[y] = Y(s)$, tendremos que:

$$\left\{\begin{array}{l} L[x'] = sX(s) - x(0^+) = sX(s) - 1, \\ L[y'] = sY(s) - y(0^+) = sY(s) - 1. \end{array}\right.$$

Substituyendo en (1), tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} (s+1)X(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1 \\ -X(s) + (s+1)Y(s) = \dfrac{1}{s-1} + 1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema heterogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas X(s), Y(s), compatible y determinado, por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), obtendríamos que la solución única es:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s}{s-1} & -1 \\ \frac{s}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s^2+2s}{s-1}}{s^2+2s} = \frac{1}{s-1},\ \text{y: } Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & \frac{s}{s-1} \\ -1 & \frac{s}{s-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s^2+2s}{s-1}}{s^2+2s} = \frac{1}{s-1}.$$

Ello puede comprobarse teniendo en cuenta que también:

$$L[x'] + L[y'] = 2 \times L[e^t] \text{ , o sea: } s\cdot X(s) - 1 + s\cdot Y(s) - 1 = \frac{2}{s-1};$$

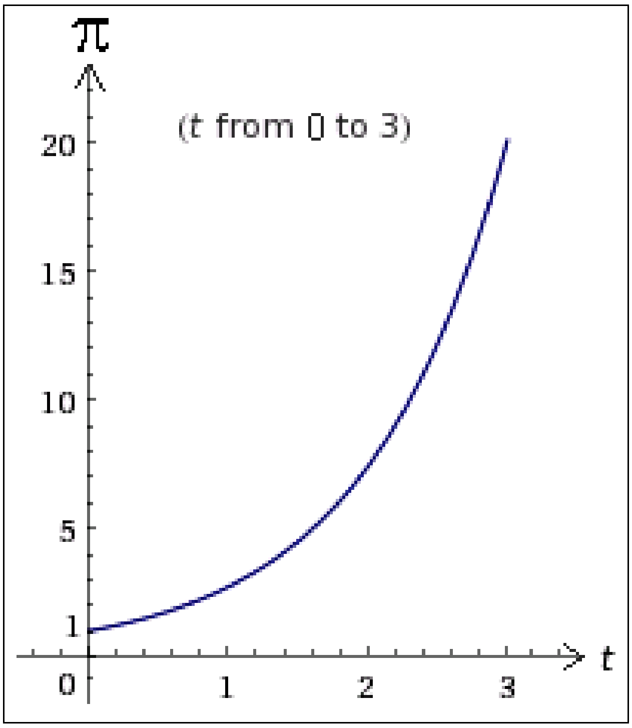
$$s[X(s) + Y(s)] = 2 + \frac{2}{s-1}, \text{ y entonces:}$$

$$X(s) + Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{2}{s(s-1)} = \frac{2}{s-1}, \text{ lo que coincide exactamente con:}$$

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} = \frac{2}{s-1}, \text{ c.s.q.d.}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace o función generatriz correspondiente se halla la solución particular buscada del sistema planteado, esto es: $x(t) = e^t$, $y(t) = e^t$, con lo que las trayectorias temporales de los resultados contables de ambos comercios coinciden en todo momento.

De este modo, se tiene la siguiente representación gráfica de los resultados contables brutos obtenidos sólo en el primer trienio por cada comercio:



Por otra parte se presume, también en los dos casos de las funciones *x* e *y*, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también ambas tienden a $+\infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\pi}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$, luego existe en ambas una rama parabólica según el eje $O\pi$ (vertical, hacia arriba).

Por otra parte, se tiene la siguiente tabla de resultados individuales para el decenio analizado:

t (años)	**x(t) = y(t)**	**B (€)**
0	1’00	750’00
1	2’72	2.038’71
2	7’39	5.541’79
3	20’09	15.064’15
4	54’60	40.948’61
5	148’41	111.309’87
6	403’43	302.572’50
7	1.096’63	822.472’50
8	2.980’96	2.235.720’00
9	8.103’08	6.077.310’00
TOTAL		9.613.728’13

, puesto que: B = $\pi \cdot 0'75$. De este modo, los resultados contables netos acumulados por ambos comercios en el decenio analizado serán:

$$9.613.728'13 \times 2 = 19.227.456'26 \text{ €} .$$

La trayectoria temporal del sistema también podría representarse simplificadamente (atendiendo solo a los valores naturales de la variable temporal) del siguiente modo:

t	***x(t)***	***y(t)***
0	1’00	1’00
1	2’72	2’72
2	7’39	7’39
3	20’09	20’09
4	54’60	54’60
5	148’41	148’41
6	403’43	403’43
7	1.096’63	1.096’63
8	2.980’96	2.980’96
9	8.103’08	8.103’08
10	22.026’47	22.026’47
11	59.874’14	59.874’14
12	162.754’79	162.754’79
…	…	…
+ ∞	+ ∞	+ ∞

, a cuya tabla corresponde la siguiente representación gráfica de dicha trayectoria temporal:

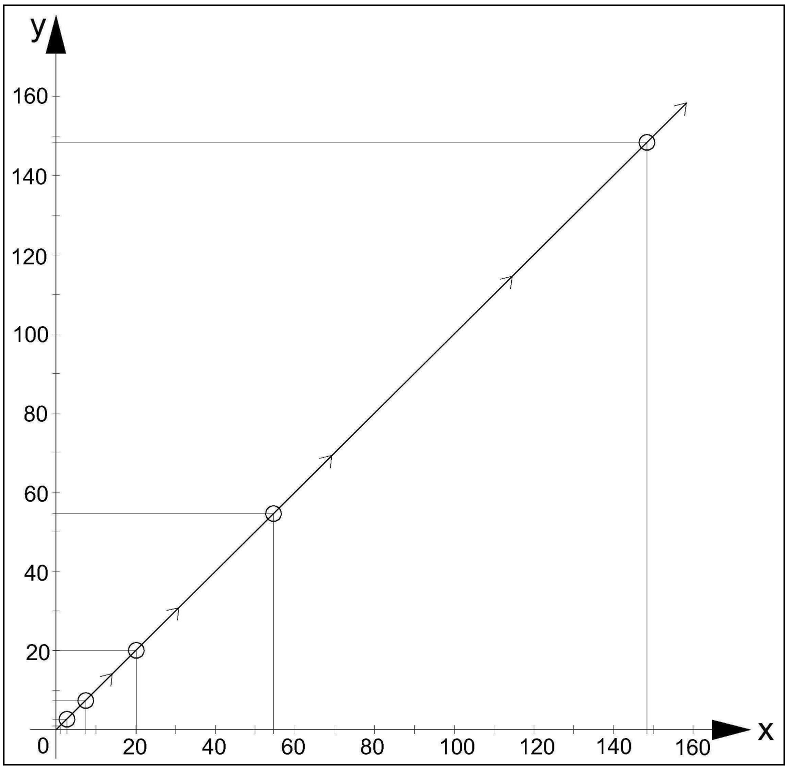


FIG. 9.39. Trayectoria temporal del sistema (III).

3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS FUNCIONES MATRICIALES

3.1. SISTEMAS DE EDO CON COEFICIENTES CONSTANTES

3.1.1. Sistema homogéneo de primer orden

Sea la matriz cuadrada de orden *n* dada siguiente:

$$(A) = \left\| a_{ij} \right\|_1^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12},\ldots,a_{1n} \\ a_{21} & a_{22},\ldots,a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2},\ldots,a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se considera también el sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden con coeficientes constantes, a saber:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 +,\ldots,+ a_{1n} \cdot x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot x_i \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 +,\ldots,+ a_{2n} \cdot x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i} \cdot x_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 +,\ldots,+ a_{nn} \cdot x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni} \cdot x_i \end{array}\right\} \qquad (1)$$

en donde:

-t es la variable independiente o explicativa,
-$x_1, x_2, \ldots, x_n$ son funciones (variables) en t,
-a_{ij} son números fijos.

Se puede simbolizar del siguiente modo:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)', \text{ y entonces: } X' = \frac{dX}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right),$$

con lo que el sistema anterior (1) se le puede presentar en la "forma matricial" por:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

y abreviadamente también por: $X' = \frac{dX}{dt} = A \cdot X$. (3)

Aquí, el vector columna X' es el vector que contiene las derivadas de las *n* funciones $x_i(t)$, $\forall\ i \in (1, 2, \ldots, n)$, A es la matriz de los coeficientes a_{ij} del sistema diferencial en estudio y X es el vector que contiene las *n* funciones $x_i(t)$, o sea, el vector solución del problema planteado.

El objeto que aquí se pretende es el de encontrar la solución (o soluciones) general(es) que satisface(n) el sistema dado. Para ello, es preciso conocer las "condiciones iniciales" del problema, a saber:

$$\left.\begin{array}{l} x_1\rbrack_{t=0} = x_{10} = k_{10} \\ x_2\rbrack_{t=0} = x_{20} = k_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n\rbrack_{t=0} = x_{n0} = k_{n0} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Desarrollando en potencias de t, de serie de McLaurin[2], se tiene que:

[2] Colin McLaurin (1698-1746) hizo uso de las series de Taylor en su trabajo para aproximar funciones. Aunque las series de Taylor eran conocidas antes de Newton y Gregory, y en casos especiales por Madhava de Sangamagrama en el siglo XIV en la India, Maclaurin no era consciente de ello y publicó su

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k_{10} + x_{10}^{'} \cdot t + \dfrac{1}{2!} x_{10}^{''} \cdot t^2 +, ..., \\ x_2 = k_{20} + x_{20}^{'} \cdot t + \dfrac{1}{2!} x_{20}^{''} \cdot t^2 +, ..., \\ \cdot \\ x_n = k_{n0} + x_{n0}^{'} \cdot t + \dfrac{1}{2!} x_{n0}^{''} \cdot t^2 +, ..., \end{array}\right\} \quad (5)$$

, donde: $x_{i0}^{'} = \left[\dfrac{dx_i}{dt}\right]_{t=0}$,... En general se escribe así:

$$X = X_0 + X_0^{'} \cdot t + \frac{1}{2!} X_0^{''} \cdot t^2 +, ..., \quad (6),$$

en donde se tienen los valores siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} X_0^{'} = \left[\dfrac{dX}{dt}\right]_{t=0} \\ X_0^{''} = \left[\dfrac{d^2X}{dt^2}\right]_{t=0} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_0^{(n)} = \left[\dfrac{d^nX}{dt^n}\right]_{t=0} \end{array}\right\}$$

Ahora bien, de (3) hemos visto que: X’ = $\dfrac{dX}{dt} = A \cdot X$, y derivando sucesivamente respecto de *t* (ya que A es constante), se obtiene también que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2X}{dt^2} = A \cdot \dfrac{dX}{dt} = A \cdot A \cdot X = A^2 \cdot X \\ \dfrac{d^3X}{dt^3} = A \cdot \dfrac{d^2X}{dt^2} = A \cdot A^2 \cdot X = A^3 \cdot X \\ \cdot \\ \dfrac{d^nX}{dt^n} = A \cdot \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} = A \cdot A^{n-1} \cdot X = A^n \cdot X \end{array}\right\} \quad (7)$$

trabajo en *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de MacLaurin, que son series de Taylor centradas en el origen de coordenadas, no se le atribuyen a Maclaurin porque las descubriera, sino que se le atribuyen más bien por el uso que hizo de ellas. En particular, utilizó estas series para caracterizar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de funciones infinitamente diferenciables. Maclaurin también hizo importantes contribuciones a la atracción gravitacional de elipsoides, un tema que también atrajo la atención de otros ilustres matemáticos como D'Alembert, Clairaut, Euler, Laplace, Legendre, Poisson y Gauss.

Particularizando ahora para t = 0, se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\dfrac{dX}{dt}\right]_{t=0} = X_0' = A \cdot X_0 \\ \left[\dfrac{d^2X}{dt^2}\right]_{t=0} = X_0'' = A^2 \cdot X_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \ldots\text{y así sucesivamente.} \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Substituyendo en la serie (6), ésta se la puede escribir:

$$X = X_0 + X_0' \cdot t + \frac{1}{2!} X_0'' \cdot t^2 + \ldots = X_0 + A \cdot X_0 \cdot t + \frac{1}{2!} A^2 X_0 t^2 + \ldots;$$

sacando factor común a X_0 se tiene que: $X = X_0 \cdot \left(E + A \cdot t + \frac{1}{2!} A^2 \cdot t^2 +, \ldots,\right)$,

pero como: $E + A \cdot t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 \ldots = e^{A \cdot t}$, se tiene que: $\boxed{X = X_0 \cdot e^{A \cdot t}}$ (9)

Substituyendo en : X’ = $\frac{dX}{dt} = A \cdot X$, como:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{A \cdot t}\right) = \frac{d}{dt}\left(E + A \cdot t + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \ldots\right) = A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \ldots = A \cdot e^{A \cdot t}.$$

X’ = $\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}\left(X_0 \cdot e^{A \cdot t}\right) = X_0 \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{A \cdot t}\right) = X_0 \cdot A \cdot e^{A \cdot t}$, de donde se deduce que:

$A \cdot X = A \cdot X_0 \cdot e^{A \cdot t}$. Con lo anterior se comprueba que: $\boxed{X = X_0 \cdot e^{A \cdot t}}$ (9),

es una solución de la ecuación diferencial anterior (3).

(Particularizando para t = 0 en la (9) se obtiene: $X]_{t=0} = X_0$)

Por consiguiente, la expresión (9): $X = X_0 \cdot e^{A \cdot t}$ es la solución del sistema diferencial lineal homogéneo de primer orden con coeficientes constantes (1) dado.

Poniendo: $f(\lambda) = e^{\lambda \cdot t}$ en la “fórmula fundamental” de la función matricial: $f(A) = \sum_{i=1}^{s} \left[f(\lambda_i) \cdot Z_{i1} + f'(\lambda_i) \cdot Z_{i2} + \ldots + f^{(m_i - 1)}(\lambda_i) \cdot Z_{im_i}\right]$, entonces: $e^{A \cdot t} = \left\| q_{ij}(t) \right\|_1^n = \sum_{i=1}^{n} \left(Z_{i1} + Z_{12} t + \ldots + Z_{im_i} t^{m_i - 1} \right) \cdot e\lambda_t^i$,

donde simbolizamos la matriz:

$$\left\| q_{ij}^{(t)} \right\|_1^n = \begin{pmatrix} q_{11}^{(t)} & q_{12}^{(t)}, \ldots, q_{1n}^{(t)} \\ q_{21}^{(t)} & q_{22}^{(t)}, \ldots, q_{2n}^{(t)} \\ \ldots & \ldots \\ q_{n1}^{(t)} & q_{n2}^{(t)}, \ldots, q_{nn}^{(t)} \end{pmatrix} .$$

Luego, la solución (9) se la puede escribir bajo la forma del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = q_{11}(t) \cdot x_{10} + q_{12}(t) \cdot x_{20} +, \ldots, + q_{1n}(t) \cdot x_{n0} = \sum_{i=1}^{n} q_{1i}(t) \cdot x_{i0} \\ x_2 = q_{21}(t) \cdot x_{10} + q_{22}(t) \cdot x_{20} +, \ldots, + q_{2n}(t) \cdot x_{n0} = \sum_{i=1}^{n} q_{2i}(t) \cdot x_{i0} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_n = q_{n1}(t) \cdot x_{10} + q_{n2}(t) \cdot x_{20} +, \ldots, + q_{nn}(t) \cdot x_{n0} = \sum_{i=1}^{n} q_{ni}(t) \cdot x_{i0} \end{array} \right\}$$

, en donde las x_{10}, x_{20}, …, x_{n0}, son constantes iguales a los valores iniciales de las funciones (variables) desconocidas: x_1, x_2, …, x_n, respectivamente.

Así pues, la integración del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado, se reduce a calcular los elementos de la matriz *e*.

Si $t = t_0$ es el valor inicial, la (9) se la puede poner así:

$$\boxed{X = X_0 \cdot e^{A \cdot (t - t_0)}} .$$

3.1.2. Sistema no homogéneo de primer orden

Conviene comenzar nuestra exposición con el concepto de “integral de una función matricial”.

Si una función matricial, de argumento escalar τ, está dada por:

$$B(\tau) = \| b_{ij}(\tau) \|_{m,n} = \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau), \ldots, b_{1n}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau), \ldots, b_{2n}(\tau) \\ \ldots & \ldots \\ b_{m1}(\tau) & b_{m2}(\tau), \ldots, b_{mn}(\tau) \end{pmatrix} ,$$

pues bien, la integral de la matriz anterior: $\int_{t_1}^{t_2} B(\tau)d\tau$ está definida por:

$$\int_{t_1}^{t_2} B(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} b_{11}(\tau)d\tau \int_{t_1}^{t_2} b_{12}(\tau)d\tau, ..., \int_{t_1}^{t_2} b_{1n}(\tau)d\tau \\ \int_{t_1}^{t_2} b_{21}(\tau)d\tau \int_{t_1}^{t_2} b_{22}(\tau)d\tau, ..., \int_{t_1}^{t_2} b_{2n}(\tau)d\tau \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int_{t_1}^{t_2} b_{m1}(\tau)d\tau \int_{t_1}^{t_2} b_{m2}(\tau)d\tau, ..., \int_{t_1}^{t_2} b_{mn}(\tau)d\tau \end{bmatrix} \quad (1)$$

En definitiva, que para integrar (derivar) una matriz de funciones, tan solo hay que integrar (derivar) cada uno de sus elementos.

NOTA: Puede darse el caso de: $n = m$ (matriz cuadrada).

Sea ahora la matriz cuadrada de orden n dada del siguiente modo:

$$A = \| a_{ij} \|_1^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, ..., a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, ..., a_{2n} \\ . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} & a_{n2}, ..., a_{nn} \end{pmatrix},$$

en donde sus elementos son todos ellos números fijos (conocidos).

Consideremos, ahora, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales *no homogéneo* con coeficientes constantes siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 +, ..., + a_{1n} \cdot x_n + f_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot x_i + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 +, ..., + a_{2n} \cdot x_n + f_2(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \cdot x_i + f_2(t) \\ . \; . \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 +, ..., + a_{nn} \cdot x_n + f_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} \cdot x_i + f_n(t) \end{array}\right\} \quad (2)$$

en donde:

- t es la variable independiente o explicativa,
- x_1, x_2, …, x_n, son las variables dependientes o funcionales,
- a_{ij} son números fijos (elementos de la matriz A),
- $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$, son funciones continuas en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$, de tal modo que: $[t_0, t_1] = \{ t : t_0 \le t \le t_1 \}$.

Si se simboliza así el vector columna: $f(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, el sistema no homogéneo (2) anterior se le puede también expresar en la "forma matricial" siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12},\ldots,a_{1n} \\ a_{21} & a_{22},\ldots,a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2},\ldots,a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

o abreviadamente también por: $\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t)$. (4)

Reemplacemos, ahora, X por una nueva columna Z de funciones "desconocidas" reales, o sea:

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ tal que: } X = e^{A \cdot t} \cdot Z. \qquad (5)$$

Derivándola, término a término, se tiene que:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) \cdot Z + e^{At} \cdot \frac{dZ}{dt} \ . \qquad (6)$$

Ahora bien, como:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = \frac{d}{dt}\left(E + A \cdot t + \frac{1}{2!}A^2t^2 +,\ldots,\right) = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 +,\ldots, =$$
$$= A \cdot \left(E + A \cdot t + \frac{1}{2!}A^2t^2 +,\ldots,\right) = A \cdot e^{At},$$

resulta, substituyendo, que: $\frac{dX}{dt} = A \cdot e^{At} \cdot Z + e^{A \cdot t} \cdot \frac{dZ}{dt}$, (7)

pero, de (3): $\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t)$, que substituyendo la expresión (5) ofrece:

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot e^{A\,t} \cdot Z + f(t). \qquad (8)$$

Igualando ahora (7) y (8) se tiene (en los segundos miembros):

$$A \cdot e^{A\,t} \cdot Z + e^{A\,t} \cdot \frac{dZ}{dt} = A \cdot e^{A\,t} \cdot Z + f(t),$$

de donde: $e^{A\,t} \cdot \frac{dZ}{dt} = f(t)$ (9), luego también: dZ = f(t) $\cdot$ $e^{-A\,\cdot\,t} \cdot$dt,

por consiguiente: $Z(t) = K + \int_{t_0}^{t} e^{-A\,t} \cdot f(\tau) \cdot d\tau$, (10)

y substituyendo en (6): X = $e^{At} \cdot Z$ se tiene: $X = e^{A\cdot t}\left(K + \int_{t_0}^{t} e^{-A\cdot t} \cdot f(\tau) d\tau\right)$;

y entonces: $\boxed{X = K \cdot e^{A\cdot t} + \int_{t_0}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau}$, (11)

que nos proporciona la solución buscada del sistema (4) inicial.

Particularizando para el valor inicial: t = t_0, X = X_0, se tiene que:

$$X_0 = K \cdot e^{A\cdot t_0} + \int_{t_0}^{t_0} e^{A(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau.$$

Pero como: $\int_{t_0}^{t_0} e^{A(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau = 0$, por tener los mismos extremos o límites de integración, resulta que: $X_0 = K \cdot e^{A\cdot t_0}$, de donde, la constante toma el valor: $K = X_0 \cdot e^{-A\cdot t_0}$, lo que substituido en la expresión (10) ofrece: $X = X_0 \cdot e^{-A\cdot t_0} \cdot e^{A\cdot t} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot f(\tau) \cdot d\tau$, es decir, se obtiene, en definitiva, que:

$$\boxed{X = X_0 \cdot e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} \cdot f(\tau) d\tau}, \quad (12)$$

que constituye la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (4) dado. Si ahora se simboliza:

$$e^{A\cdot t} = \left\| q_{ij} \right\|_1^n = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12}, \ldots, q_{1n} \\ q_{21} & q_{22}, \ldots, q_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ q_{n1} & q_{n2}, \ldots, q_{nn} \end{pmatrix},$$

la solución (11) del anterior sistema de ecuaciones diferenciales (1), bajo la forma desarrollada, es la siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = q_{11}(t-t_0)\cdot x_{10}+,\ldots,+q_{1n}(t-t_0)\cdot x_{n0} + \\ \qquad \int_{t_0}^{t}\left[q_{11}(t-\tau)\cdot f_1(\tau)+,\ldots,+q_{1n}(t-\tau)\cdot f_n(\tau)\right]\cdot d\tau \\ x_2 = q_{21}(t-t_0)\cdot x_{10}+,\ldots,+q_{2n}(t-t_0)\cdot x_{n0} + \\ \qquad \int_{t_0}^{t}\left[q_{21}(t-\tau)\cdot f_1(\tau)+,\ldots,+q_{2n}(t-\tau)\cdot f_n(\tau)\right]\cdot d\tau \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = q_{n1}(t-t_0)\cdot x_{10}+,\ldots,+q_{nn}(t-t_0)\cdot x_{n0} + \\ \qquad \int_{t_0}^{t}\left[q_{n1}(t-\tau)\cdot f_1(\tau)+,\ldots,+q_{nn}(t-\tau)\cdot f_n(\tau)\right]\cdot d\tau \end{array}\right. \qquad (13)$$

NOTA: Se observa que la solución de un sistema no homogéneo es la adición de la solución como si el sistema fuera homogéneo, con una integral en la que aparecen las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$, tal como tendremos ocasión de comprobar en el ejemplo que se desarrolla a continuación de la presente exposición teórica.

3.1.3. Ejemplo de aplicación

Veamos, a continuación, el siguiente ejemplo de aplicación al caso:

Ejemplo 1

Los resultados contables de 3 empresas del mismo *holding* vienen dados por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente (con *x* expresada en 10^6 € y *t* en decenios):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{array}\right\}$$

con los valores iniciales: $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$. Se pide: a) Representar analítica y gráficamente dichos resultados contables. b) Realizar una extensión de este mismo problema suponiendo que se trata de un sistema no homogéneo por la adición respectiva de las siguientes funciones temporales en cada ecuación: $f_1(t) = 2t$, $f_2(t) = -3t$, $f_3(t) = t^2$, y que al comienzo de la actividad económica los resultados empresariales son nulos.

Solución:

a) Se trata, en principio, de un sistema homogéneo de coeficientes constantes. Estos sistemas de EDO también pueden resolverse por aplicación de las funciones de matrices que acabamos de explicar. Así, matricialmente se le puede escribir:

$$X' = A \cdot X \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La matriz característica o secular del sistema es:

$$[A - \lambda \cdot I_3] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

cuyo determinante característico es:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\ (-\lambda)(2-\lambda) - 1 - 2 + \lambda + (3-\lambda) + 2\,(2-\lambda),$$

$$\text{con lo que}: \Delta(\lambda) = -(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)^2.$$

El máximo común divisor de los menores de orden 2 es: $D_2(\lambda) = 1$, de donde: $\phi(\lambda) = \Delta(\lambda) = -(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)^2 = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$.

La fórmula fundamental de la función matricial es ahora:

$$f(A) = f(1) \cdot Z_1 + f(2) \cdot Z_2 + f'(2) \cdot Z_3 .$$

En $f(\lambda)$, considerando sucesivamente: $1, (\lambda - 2), (\lambda - 2)^2$, se obtiene que:

$$Z_1 + Z_2 = E = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ -Z_1 + Z_3 = A - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y también: $Z_1 = (A - 2 \cdot E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de donde se tienen las matrices Z_1, Z_2, Z_3 del siguiente modo:

- de $Z_1 + Z_2 = E$, se obtiene que:

$$Z_2 = E - Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

- de $-Z_1 + Z_3 = A - 2 \cdot E$ se obtiene que:

$$Z_3 = (A - 2 \cdot E) + Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Substituyendo ahora en la fórmula fundamental de la función matricial resultará que:

$$f(A) = f(1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + f'(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como ahora: $f(\lambda) = e^{\lambda \cdot t}$, reemplazando en la anterior expresión:

$$\begin{cases} f(1) = e^{1 \cdot t} = e^t \\ f(2) = e^{2 \cdot t} \\ f'(2) = t \cdot e^{2 \cdot t} \end{cases}$$

, resultará que:

$$e^{A \cdot t} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -e^t & e^t & 0 \\ -e^t & e^t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} & -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \cdot e^{2t} & -t \cdot e^{2t} & t \cdot e^{2t} \\ t \cdot e^{2t} & -t \cdot e^{2t} & t \cdot e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$e^{A \cdot t} = \begin{pmatrix} (1+t) \cdot e^{2t} & -t \cdot e^{2t} & t \cdot e^{2t} \\ -e^t + (1+t) \cdot e^{2t} & e^t - t \cdot e^{2t} & t \cdot e^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix},$$

luego, como la solución es: $X = X_0 \cdot e^{A \cdot t}$, por consiguiente se tiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)\cdot e^{2t} & -t\cdot e^{2t} & t\cdot e^{2t} \\ -e^{t}+(1+t)\cdot e^{2t} & e^{t}-t\cdot e^{2t} & t\cdot e^{2t} \\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t}-e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ k_{30} \end{pmatrix},$$

donde: $C_1 = k_{10} = x_{10}$, $C_2 = k_{20} = x_{20}$, $C_3 = k_{30} = x_{30}$, son los valores iniciales (conocidos). En consecuencia, la solución buscada del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k_{10}\cdot(1+t)\cdot e^{2t} - k_{20}\cdot t\cdot e^{2t} + k_{30}\cdot t\cdot e^{2t} \\ x_2 = k_{10}\left[-e^{t}+(1+t)\cdot e^{2t}\right] + k_{20}\cdot\left(e^{t}-t\cdot e^{2t}\right) + k_{30}\cdot t\cdot e^{2t} \\ x_3 = k_{10}\cdot\left(-e^{t}+e^{2t}\right) + k_{20}\cdot\left(e^{t}-e^{2t}\right) + k_{30}\cdot e^{2t} \end{array}\right\}$$

o lo que es lo mismo, se tendrá la integral general del sistema:

$$\left.\begin{array}{c} x_1(t) = C_1\cdot e^{2t}(t+1) - C_2\cdot e^{2t}\cdot t + C_3\cdot e^{2t}\cdot t \\ x_2(t) = C_1\cdot e^{t}[e^{t}(t+1) - 1] - C_2\cdot e^{t}(e^{t}\cdot t - 1) + C_3\cdot e^{2t}\cdot t \\ x_3(t) = C_1\cdot e^{t}(e^{t} - 1) - C_2\cdot e^{t}(e^{t} - 1) + C_3\cdot e^{2t} \end{array}\right\}$$

Aplicando, ahora, las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_1 = 1 \\ x_2(0) = C_2 = 1 \\ x_3(0) = C_3 = 1 \end{cases}$$

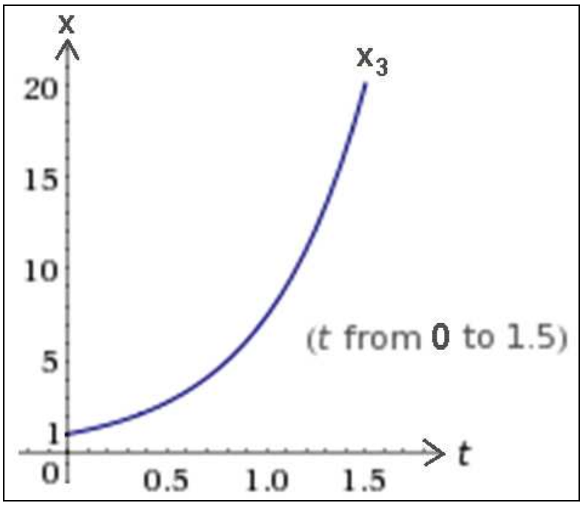
o sea: $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, y entonces, nos queda la solución o integral particular buscada:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t}(t+1) \\ x_2(t) = e^{2t}(t+1) \\ x_3(t) = e^{2t} \end{cases},$$

de lo que se deduce que $x_1 = x_2 = e^{2t}(t+1)$, y $x_3 = e^{2t}$, como también puede comprobarse por substitución en el sistema inicial dado. Del mismo modo, podría deducirse que: $\frac{dx_3}{dt} = 2x_3$, con lo que se obtiene una sencilla EDO homogénea de primer orden: $x_3' - 2x_3 = 0$, cuya ecuación característica ofrece: $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$, y se tendrá la integral general $\rightarrow$ $x_3 = C \cdot e^{2t}$. De hecho se trata de una sencilla EDO de variables separables, puesto que se puede escribir así:

$$\frac{dx_3}{x_3} = 2dt$$, y mediante una sencilla cuadratura, se obtiene que:

$\ln y = 2t + k$; $y = e^{2t+k} = e^k \cdot e^{2t} = C \cdot e^{2t}$, (habiendo hecho la substitución: $e^k = C$), c. s. q. d. Ahora bien, en base a las condiciones iniciales dadas, se exige que: $x_3(0) = C = 1 \Rightarrow x_3(t) = e^{2t}$, c. s. q. d., cuya representación gráfica viene dada por:



En este caso, pues, los resultados contables conjuntos de las tres empresas analizadas se presentan en la correspondiente representación gráfica:

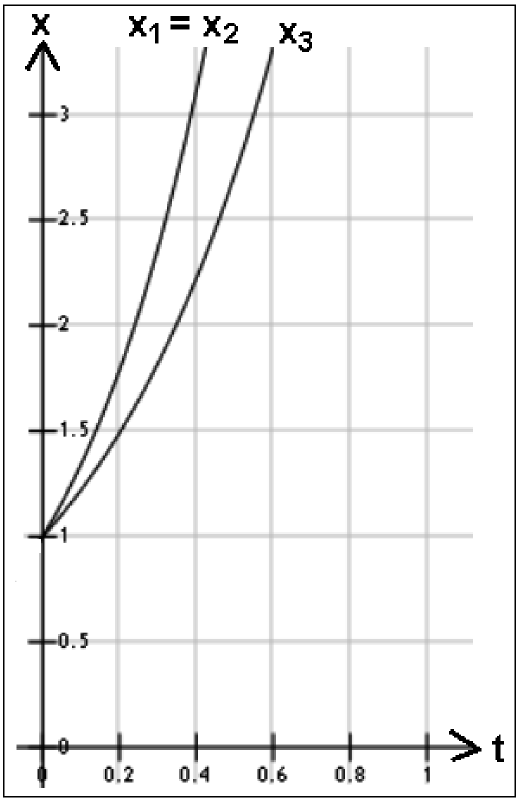


FIG. 9.40. Trayectorias temporales de los resultados contables (VIII).

Por otra parte se presume, también en los tres casos de las funciones anteriores, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si en ellas $t \to \infty$ también tienden a $+\infty$. Y además, en todos los casos: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{x}{t} = +\infty$, luego existe en todas ellas una rama parabólica según el eje Ox (vertical, hacia arriba).

b) Si suponemos, ahora, una extensión de este mismo problema en el caso de tratarse de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneo y de coeficientes constantes, tendríamos el sistema diferencial siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 3x_1 - x_2 + x_3 + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1 + x_3 + f_2(t) \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 - x_2 + 2x_3 + f_3(t) \end{aligned}\right\},$$

siendo las funciones $f_i(t)$ continuas en el intervalo cerrado:

$t \in [t_0,t_1] = \{t: t_0 \leq t \leq t_1\}$. Por consiguiente, se tendrá que:

$$\begin{cases} q_{11}(t-t_0) = (1+t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)} \\ q_{12}(t-t_0) = -(t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)} \\ q_{13}(t-t_0) = (t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)} \\ q_{21}(t-t_0) = -e^{(t-t_0)} + (1+t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)} \\ q_{22}(t-t_0) = e^{(t-t_0)} - (t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)} \\ q_{23}(t-t_0) = (t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)} \\ q_{31}(t-t_0) = -e^{(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)} \\ q_{32}(t-t_0) = e^{(t-t_0)} - e^{2(t-t_0)} \\ q_{33}(t-t_0) = e^{2(t-t_0)} \end{cases}$$

, que serán los elementos de la matriz (con n = 3):

$$e^{A\cdot t} = \left\| q_{ij} \right\|_1^3 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

Substituyendo ahora en la expresión anterior (13) se tiene la solución buscada del sistema no homogéneo dado, a saber:

$$x_1 = (1+t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)}\cdot x_{10} - (t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)}\cdot x_{20} + (t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)}\cdot x_{30} +$$
$$+\int_{t_0}^{t}(1+t-\tau)\cdot e^{2(t-\tau)}\cdot f_1(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t}(t-\tau)\cdot e^{2(t-\tau)}\cdot f_2(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)\cdot e^{2(t-\tau)}\cdot f_3(\tau)d\tau.$$

$$x_2 = \left[-e^{(t-t_0)} + (1+t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)}\right]x_{10} + \left[e^{(t-t_0)} - (t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)}\right]x_{20} +$$
$$+(t-t_0)\cdot e^{2(t-t_0)}\cdot x_{30} + \int_{t_0}^{t}\left[-e^{(t-\tau)} + (1+t-\tau)\cdot e^{2(t-\tau)}\right]f_1(\tau)d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)} - (t-\tau)e^{2(t-\tau)}\cdot f_2(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}(t-\tau)e^{2(t-\tau)}\cdot f_3(\tau)d\tau.$$

$$x_3 = \left[-e^{(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)}\right]x_{10} + \left[e^{(t-t_0)} - e^{2(t-t_0)}\right]x_{20} + e^{2(t-t_0)}\cdot x_{30} +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[-e^{(t-\tau)} + e^{2(t-\tau)}\right]\cdot f_1(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)} - e^{2(t-\tau)}\cdot f_2(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{2(t-\tau)}\cdot f_3(\tau)d\tau.$$

En este caso concreto, $f_1(t) = 2t$, $f_2(t) = -3t$, $f_3(t) = t^2$,con lo que, para distinguirlo del sistema anterior, haremos el siguiente cambio de notación: $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$, y entonces resultará el sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z + 2t \\ y' = 2x + z - 3t \\ z' = x - y + 2z + t^2 \end{cases}$$

, que ofrece como integral general, una vez aplicados los criterios de cálculo anteriormente expuestos, el siguiente resultado que, como puede comprobarse, resulta como siempre de la adición, a cada ecuación del sistema obtenida para el sistema homogéneo, una solución particular de la respectiva ecuación completa, esto es:

$$\begin{cases} x(t) = c_1\, e^{2t}\,(t+1) - c_2\, e^{2t}\, t + c_3\, e^{2t}\, t + \frac{1}{8}\left(2t^2 + 6t + 9\right) \\ y(t) = c_1\, e^{t}\left(e^{t}\, t + e^{t} - 1\right) - c_2\, e^{t}\left(e^{t}\, t - 1\right) + c_3\, e^{2t}\, t + \frac{1}{8}\left(2t^2 + 46t + 49\right) \\ z(t) = c_1\, e^{t}\left(e^{t} - 1\right) - c_2\, e^{t}\left(e^{t} - 1\right) + c_3\, e^{2t} + \frac{1}{2}\left(-t^2 + 4t + 7\right) \end{cases}$$

Si ahora suponemos que, en el inicio de la actividad económica, los resultados contables obtenidos son nulos para las tres empresas en cuestión, resultará que se tiene la condición (PVI):

$x(0) = y(0) = z(0) = 0$, con lo que:

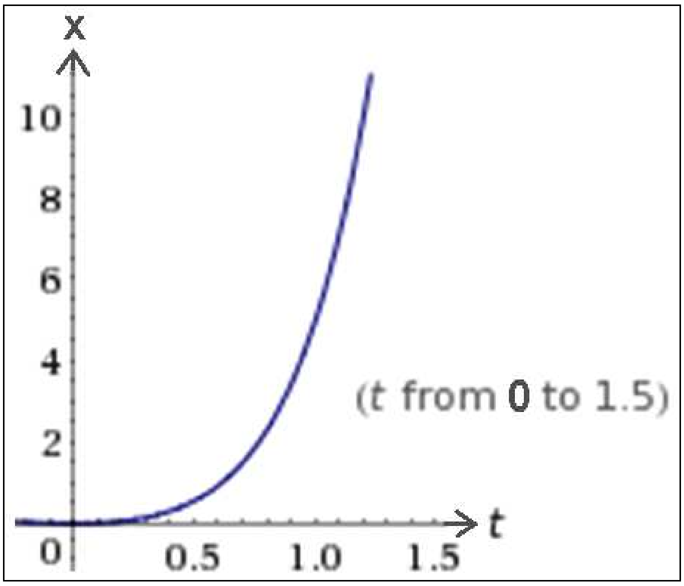
$$\begin{cases} x(0) = c_1 + 9/8 = 0 \Rightarrow c_1 = -9/8 \\ y(0) = c_2 + 49/8 = 0 \Rightarrow c_2 = -49/8 \\ z(0) = c_3 + 7/2 = 0 \Rightarrow c_3 = -7/2 \end{cases}$$

, de lo que resultará, en definitiva, la siguiente integral particular del sistema diferencial dado:

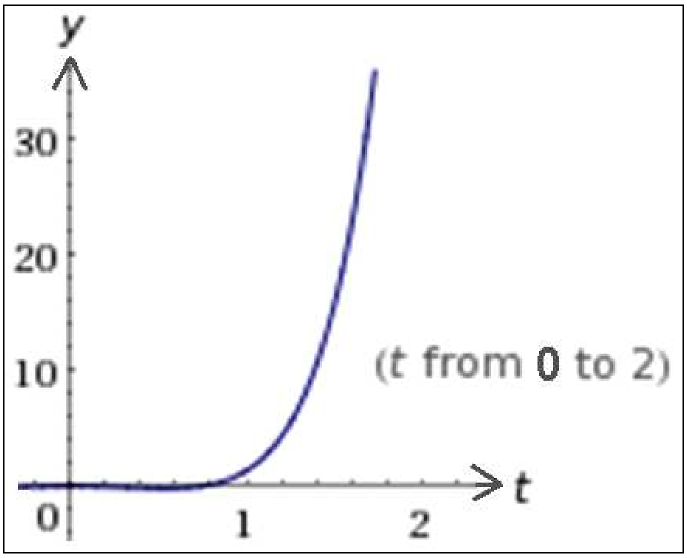
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{8}\left(2\,t^2 + 6\,t + 3\,e^{2t}\,(4\,t - 3) + 9\right) \\ y(t) = \dfrac{1}{8}\left(2\,t^2 + 46\,t - 40\,e^{t} + 3\,e^{2t}\,(4\,t - 3) + 49\right) \\ z(t) = \dfrac{1}{2}\left(-t^2 + 4\,t - 10\,e^{t} + 3\,e^{2t} + 7\right) \end{cases}$$

, con las siguientes representaciones gráficas:

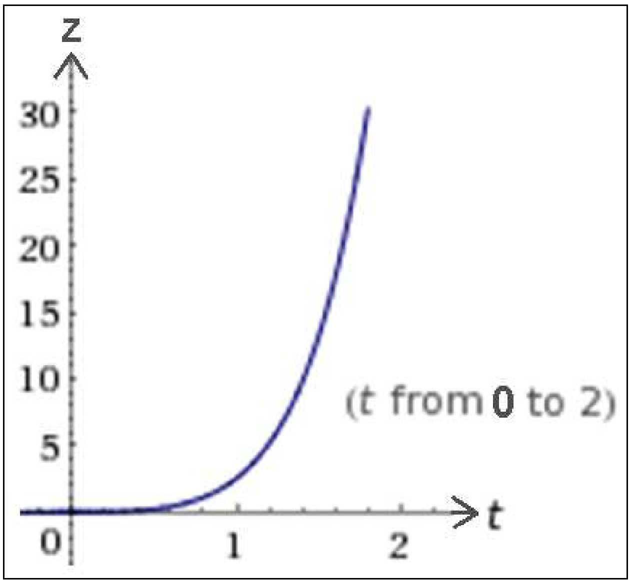
- La correspondiente a x(t):



- La correspondiente a y(t):



- La correspondiente a z(t):



Por otra parte se presume, también en los tres casos de las funciones *x*, *y*, *z*, la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también todas ellas tienden a $+\infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{x,y,z}{t} = +\infty$, luego existe en ellas una rama parabólica según el eje de ordenadas (vertical, hacia arriba).

NOTA: El sistema diferencial anterior, por ejemplo, se puede convertir en el siguiente sistema no homogéneo de coeficientes variables:

$$\begin{cases} x' = 3tx - 5ty + z + 2t \\ y' = -2tx + t^2z - 3t \\ z' = tx - 3ty + 2z + t^2 \end{cases}$$

para cuya resolución emplearíamos las mismas técnicas explicadas en la correspondiente introducción teórica así como en los epígrafes que siguen.

3.1.4. Sistema homogéneo de segundo orden

Sea una matriz cuadrada de orden *n* de números fijos (conocidos) como la siguiente:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_1^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se considera, ahora, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (elementos de la matriz anterior):

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2x_1}{dt^2}+a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+,\ldots,+a_{1n}\cdot x_n=0\\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}+a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+,\ldots,+a_{2n}\cdot x_n=0\\ \cdot\;\cdot\\ \dfrac{d^2x_n}{dt^2}+a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+,\ldots,+a_{nn}\cdot x_n=0\end{array}\right\} \qquad (14)$$

en donde:

- t es la variable independiente o explicativa,
- x_1, x_2, …, x_n, son las variables dependientes o funcionales,
- a_{ij} son coeficientes constantes.

Si se simboliza la matriz (o vector) columna del siguiente modo:

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\begin{pmatrix}\dfrac{d^2x_1}{dt^2}\\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \dfrac{d^2x_n}{dt^2}\end{pmatrix},$$

el sistema (14) se le puede escribir en la forma matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{d^2x_1}{dt^2}\\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \dfrac{d^2x_n}{dt^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12},\ldots,a_{1n}\\ a_{21} & a_{22},\ldots,a_{2n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ a_{n1} & a_{n2},\ldots,a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\;\cdot\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \cdot\;\cdot\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (15)$$

o bien abreviadamente: $\dfrac{d^2X}{dt^2}+A\cdot X=0$. (16)

Para la expresión (16) se pueden presentar dos casos, que:

$\rightarrow |A| \neq 0$ (matriz regular), y
$\rightarrow |A| = 0$ (matriz singular o no regular).

Consideremos el primer caso: donde $|A| \neq 0$. Si n = 1, es decir, si X y A son escalares, con $|A| \neq 0$, la solución general de la ecuación (16) toma la forma:

$$\boxed{X = \cos\left(\sqrt{A}\cdot t\right)\cdot X_0 + \left(\sqrt{A}\right)^{-1}\cdot \sin\left(\sqrt{A}\cdot t\right)\cdot X_0^{'}}, \qquad (17)$$

en donde:

$$\begin{cases} X_0 = X_{t=0} & \text{(valor inicial)} \\ X_0^{'} = \left[\dfrac{dX}{dt}\right]_{t=0} & \end{cases}$$

Por verificación directa se llega a que (17) es una solución del sistema (16) para un *n* arbitrario.

En la determinación se considera, por desarrollo en potencias de *t*:

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\sqrt{A}\cdot t\right) &= E - \frac{1}{2!}A\cdot t^2 + \frac{1}{4!}A^2t^4 +, \dots, \\ \left(\sqrt{A}\right)^{-1}\cdot \sin\left(\sqrt{A}\cdot t\right) &= t - \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{5!}A^2t^5 +, \dots, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

con lo que:

$$X = \left(E - \frac{1}{2!}At^2 + \frac{1}{4!}A^2t^4 +, \dots, \right)\cdot X_0 + \left(t - \frac{1}{3!}At^3 + \frac{1}{5!}A^2t^5 +, \dots, \right)\cdot X_0^{'} \quad . \qquad (19)$$

Los términos de los miembros de la derecha de (18) tienen sentido, incluso en el caso en el que A = 0. Por consiguiente, la expresión:

$$\boxed{X = \cos\left(\sqrt{A}\cdot t\right)\cdot X_0 + \left(\sqrt{A}\right)^{-1}\cdot \sin\left(\sqrt{A}\cdot t\right)\cdot X_0^{'}},$$

es la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales dado, incluso cuando $|A|=0$, con la única condición de que las funciones matriciales: $\cos\left(\sqrt{A}\cdot t\right), \left(\sqrt{A}\right)^{-1}\cdot \sin\left(\sqrt{A}\cdot t\right)$ sean interpretadas como en (18).

NOTA: Si se considera, como origen de la variable independiente o explicativa, el $t = t_0$, en (17) hay que reemplazar:

$$\begin{cases} \cos\left(\sqrt{A}\cdot t\right) \text{ por } \cos\left(\sqrt{A}\cdot (t - t_0)\right) \\ \sin\left(\sqrt{A}\cdot t\right) \text{ por } \sin\left(\sqrt{A}\cdot (t - t_0)\right) \end{cases}$$

con lo que la solución se expresa del siguiente modo:

$$\boxed{X = \cos\left[\sqrt{A}\cdot (t - t_0)\right]\cdot X_0 + \left(\sqrt{A}\right)^{-1}\cdot \sin\left[\sqrt{A}\cdot (t - t_0)\right]\cdot X_0^{'}}.$$

3.1.5. Sistema no homogéneo de segundo orden

Sea una matriz cuadrada dada como la siguiente:

$$A = \| a_{ij} \|_1^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

de elementos que resultan ser números fijos conocidos. Se puede considerar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneo con coeficientes constantes de segundo orden siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2x_1}{dt^2} + a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 +, \ldots, + a_{1n} \cdot x_n = f_1(t) \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 +, \ldots, + a_{2n} \cdot x_n = f_2(t) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \frac{d^2x_n}{dt^2} + a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 +, \ldots, + a_{nn} \cdot x_n = f_n(t) \end{array}\right\} \qquad (20)$$

en donde:

- t es la variable independiente o explicativa,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son funciones dependientes de t,
- a_{ij} son números fijos (elementos de la matriz A),
- $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$, son funciones continuas.

Si se simboliza el vector columna:

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

el sistema matricial correspondiente es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} \\ \ldots \\ \frac{d^2x_n}{dt^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

o bien abreviadamente: $\frac{d^2X}{dt^2} + A \cdot X = f(t).$ (22)

Pues bien, se demuestra que el sistema anterior tiene la solución:

$$\boxed{X = \cos\left(\sqrt{A} \cdot t\right) \cdot X_0 + \left(\sqrt{A}\right)^{-1} \cdot \sin\left(\sqrt{A} \cdot t\right) \cdot X_0^{'} + \left(\sqrt{A}\right)^{-1} \int_0^t \sin\left(\sqrt{A} \cdot (t-\tau) \cdot f(\tau)\right) d\tau} \quad (23)$$

NOTA 1: Igualmente como se ha llevado a cabo en el estudio anterior, si se considera como origen de la variable independiente el t = t_0, en (23) hay que reemplazar:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \cos\left(\sqrt{A} \cdot t\right) & \text{por} & \cos\left[\sqrt{A} \cdot (t-t_0)\right] \\ \sin(A \cdot t) & \text{por} & \sin\left[\sqrt{A} \cdot (t-t_0)\right] \\ \int_0^t & \text{por} & \int_{t_0}^t \end{array}}$$

, con lo que la solución del problema planteado adopta la forma:

$$\boxed{X = \cos\left[\sqrt{A} \cdot (t-t_0)\right] X_0 + \left(\sqrt{A}\right)^{-1} \cdot \sin\left[\sqrt{A} \cdot (t-t_0)\right] \cdot X_0^{'} + \left(\sqrt{A}\right)^{-1} \int_{t_0}^t \sin\left[\sqrt{A}(t-\tau)\right] f(\tau) d\tau}$$

NOTA 2: En el caso particular en el que: f(t) = h·sin (w·t + φ), donde el vector columna: $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$, es tal que sus elementos o componentes son números constantes, y *w*, *φ* son números fijos, la solución general (23) toma la forma siguiente:

$$X = \cos (A \cdot t) \cdot C + (A)^{-1} \cdot \sin (A \cdot t) \cdot D + (A - w^2 E)^{-1} \cdot h \cdot \sin (wt+\varphi),$$

en donde C y D son dos matrices columna (vectores) de elementos constantes arbitrarios.

3.1.6. No negatividad de la solución

En la teoría económica y la teoría de probabilidades, en que las aplicaciones de este tipo de sistemas diferenciales estamos contemplando aquí, en general, aparece el problema de la necesidad de la no negatividad de la solución habida cuenta de la propia naturaleza de muchas de las variables económicas que se manejan. Ello viene aconteciendo a lo largo del presente libro. Es decir, que para la ecuación general no homogénea:

$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + f(t)$, con X_0 = K, donde A es una “matriz constante”, se debe contestar a la interrogante siguiente: ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que hay que imponer a la matriz dada A, para que todas las componentes de X sean no negativas para t ≥ 0, cuando las componentes iniciales de X_0 = K sean no negativas y, las componentes de f(t) sean, también, no negativas, para t ≥ 0?

Se demuestra que, una condición necesaria y suficiente para que todos los elementos de e^{At} sean no negativos, para t ≥ 0, es que todos los elementos no diagonales de la matriz A sean positivos, es decir:

$$\begin{array}{l} a_{ij} > 0, \forall\, i \neq j \\ \left.\begin{array}{l} \forall i = 1, 2, ..., n \\ \forall j = 1, 2, ..., n \end{array}\right\} \end{array} \qquad (24)$$

(Ver: Introducción al análisis matricial de Bellman, ed. Reverté, pág. 191, o, *Functional equations in the theory of dynamic programming* de Bellman, Proc. National Academic Sciences U.S.A., pág. 743 y ss.).

3.2. SISTEMAS DE EDO CON COEFICIENTES VARIABLES

3.2.1. Ecuaciones funcionales homogéneas

Sea ahora la matriz general, cuadrada de orden *n* siguiente:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t), ..., a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t), ..., a_{2n}(t) \\ . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t), ..., a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

en donde: $\forall\, a_{ij}(t) \begin{cases} i = 1, 2, ..., n \\ j = 1, 2, ..., n \end{cases}$, son funciones continuas en *t*.

Ahora vamos a estudiar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneo y de primer orden, cuyos coeficientes son variables en *t*, a saber:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t) \cdot x_1 + a_{12}(t) \cdot x_2 +, ..., + a_{1n}(t) \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(t) \cdot x_i \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t) \cdot x_1 + a_{22}(t) \cdot x_2 +, ..., + a_{2n}(t) \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(t) \cdot x_i \\ . \; . \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t) \cdot x_1 + a_{n2}(t) \cdot x_2 +, ..., + a_{nn}(t) \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(t) \cdot x_i \end{array}\right\} \quad (25)$$

en donde:

- t es la variable independiente o explicativa,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$, son variables dependientes de t,
- $a_{ij}(t)$ son funciones continuas (elementos de la matriz A).

(Ahora, las $a_{ij}(t)$ no tienen por qué ser forzosamente constantes, como así sucedía en los casos anteriores).

Expresado en forma matricial, el sistema diferencial (25) toma la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t), \ldots, a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t), \ldots, a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t), \ldots, a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(t) \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(t) \cdot x_i \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(t) \cdot x_i \end{pmatrix} \quad (26)$$

que abreviadamente se representa por: $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X$. (27)

3.2.2. Teorema de la existencia y unicidad de las soluciones

Para el sistema de ecuaciones diferenciales anterior (27), se demuestra el llamado “teorema de la existencia y unicidad de las soluciones”, que se enuncia del siguiente modo:

“Si A(t) es continua para todo valor positivo ($t \geq 0$), hay una solución única para la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X,$$

con las condiciones iniciales: $X = X_0 = K_0$”.

Esta solución existe para todo $t > 0$ y se puede escribir en la siguiente forma: $X = S(t) \cdot K_0$, donde S(t) es la única matriz que satisface la ecuación diferencial (26):

$$\frac{dS}{dt} = A(t) \cdot S, \quad X_0 = E.$$

(La demostración se la puede encontrar en el libro: *Introducción al análisis matricial* de R. Bellman, ed. Reverté, pág. 182, citado en la bibliografía).

3.2.3. Estudio de las soluciones de las ecuaciones funcionales

Del desarrollo en potencias de *t* (visto con anterioridad), se deduce que:

$$e^{A\cdot t} = E + A\cdot t + \frac{1}{2!}A^2\cdot t^2 +,...,+ \frac{1}{n!}A^n\cdot t^n +,...; e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n\cdot t^n , \qquad (28)$$

admitiendo que: $A^0 = E$. Tratamos previamente:

NOTA 1: $e^{A(s+t)} = e^{A\cdot s}\cdot e^{A\cdot t}$. (29)

Efectivamente, utilizando los desarrollos en serie de las tres exponenciales, y dado que todos ellos son series absolutamente convergentes, se las puede ordenar de modo arbitrario, por lo que se cumple que (27):

$$e^{As}\cdot e^{At} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i t^i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j t^j\right) = \sum A^n \sum_{i+j=n}^{\infty}\left(\frac{1}{i!j!}s^i\cdot t^i\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}A^n\frac{1}{n!}(s+t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n(s+t)^n = e^{A(s+t)},$$

luego efectivamente: $e^{As}\cdot e^{At} = e^{A(s+t)}$.

NOTA 2:

Haciendo ahora: s = -t en (29) se tiene que: $e^{A(-t+t)} = e^{-At}\cdot e^{At}$

como: -t + t = 0, luego: $A\cdot 0 = 0$, y: $e^0 = E$, por lo tanto: $e^{-At}\cdot e^{At} = E$

que nos señala, a su vez, que : $\boxed{\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}}$ (30) ,

luego, e^{At} nunca es una matriz singular (no regular).

Volvamos ahora a la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = A\cdot X. \text{ Se tiene que:}$$

- e^{At} es una solución, con la condición inicial: $X_0 = E$, y
- $e^{A(s+t)}$ es una solución, con la condición inicial: $X_0 = e^{As}$.

Como, por (28): $e^{A(s+t)} = e^{As}\cdot e^{At}$, por tanto, $e^{As}\cdot e^{As}$ es una solución con la condición inicial $X_0 = e^{As}$.

3.2.4. Método de Jacobi

Se demuestra que, el método basado en la denominada "identidad de Jacobi":

$$\int_0^t tr\cdot(A(s))\cdot ds\,,\quad S(t) = e, \qquad (31)$$

establece la "no singularidad" de la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X\,.$$

(Ver el libro: *Introducción al análisis matricial* de R. Bellman, pág. 186, citado en la bibliografía).

3.2.5. Ecuaciones funcionales no homogéneas

Consideremos ahora la matriz cuadrada:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t),\ldots,a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t),\ldots,a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t),\ldots,a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

donde las $a_{ij}(t)$ son funciones continuas.

Sea, ahora, el sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables no homogéneo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)\cdot x_1 + a_{12}(t)\cdot x_2 +,\ldots,+ a_{1n}(t)\cdot x_n + f_1(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}(t)\cdot x_i + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)\cdot x_1 + a_{22}(t)\cdot x_2 +,\ldots,+ a_{2n}(t)\cdot x_n + f_2(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}(t)\cdot x_i + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)\cdot x_1 + a_{n2}(t)\cdot x_2 +,\ldots,+ a_{nn}(t)\cdot x_n + f_n(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}(t)\cdot x_i + f_n(t) \end{array}\right\} \quad (32)$$

donde:

- t es la variable independiente o explicativa,
- x_1, x_2, …, x_n, son variables dependientes de t,
- $a_{ij}(t)$ son funciones continuas en t,
- $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$, son funciones continuas en t.

El sistema anterior (32) se le puede disponer en la forma matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t),\ldots,a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t),\ldots,a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t),\ldots,a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(t)\cdot x_i + f_1(t) \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(t)\cdot x_i + f_2(t) \\ \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(t)\cdot x_i + f_n(t) \end{pmatrix} \quad (33)$$

que abreviadamente puede escribirse así: $\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X + f(t)$. (34)

Sean ahora las condiciones iniciales: $X_0 = K$. Siguiendo la "técnica de Lagrange" de variación de parámetros, se encuentra que una solución de la expresión (34) resulta la de la forma siguiente:

$X = S \cdot Y$ (35), en donde: $S = S(t)$ es la solución de la ecuación diferencial homogénea correspondiente:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X$$

luego: $\frac{dS}{dt} = A(t)\cdot S$, con: $S_0 = E$. (36)

Ahora bien, como: $\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(S\cdot Y) = S'\cdot Y + S\cdot Y'$, y también: $X = S \cdot Y$

substituyendo en la expresión (34) resulta: $\frac{dS}{dt}\cdot Y + S\cdot\frac{dY}{dt} = A(t)\cdot S\cdot Y + f(t)$

Pero, de (36) se tiene que: $\frac{dS}{dt} = A(t)\cdot S$, por consiguiente, substituyendo resulta que: $A(t)\cdot S\cdot Y + S\cdot\frac{dY}{dt} = A(t)\cdot S\cdot Y + f(t)$, de donde se deduce que: $S\cdot\frac{dY}{dt} = f(t)$, es decir, premultiplicando por la matriz S^{-1} (que, por lo visto anteriormente, no es singular, luego existe la matriz inversa):

$S^{-1}\cdot\left(S\cdot\frac{dY}{dt}\right) = S^{-1}\cdot f(t)$, y por la propiedad asociativa: $\left(S^{-1}\cdot S\right)\cdot\frac{dY}{dt} = S^{-1}\cdot f(t)$.

De la propia definición de matriz inversa se deduce que: $S^{-1} \cdot S =$ E, luego también: $E \cdot \frac{dY}{dt} = S^{-1} \cdot f(t)$, por consiguiente: $\frac{dY}{dt} = S^{-1} \cdot f(t)$, de donde: $dY = S^{-1} \cdot f(t) \cdot dt$, es decir, integrando: $Y = K + \int_0^t S^{-1}(\tau) \cdot f(\tau) d\tau$. (37)

En su consecuencia, substituyendo en la expresión (35) se obtiene que: $X = S(t) \cdot K + \int_0^t S^{-1}(\tau) \cdot f(\tau) dt$, o sea:

$$\boxed{X = S(t) \cdot K + \int_0^t S(t) \cdot S^{-1}(\tau) \cdot f(\tau) d\tau}, \qquad (38)$$

que constituye la solución buscada del problema planteado.

3.2.6. Ecuación adjunta

Sea la ecuación diferencial (sistema) no homogéneo anterior (34):

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + f(t).$$

Tratamos, ahora, de encontrar una representación distinta. Para ello se considera una matriz variable Y(t). Premultiplicando la expresión (34) por Y(t) resultará que:

$Y(t) \cdot \frac{dX}{dt} = Y(t) \cdot [A(t) \cdot X + f(t)]$, y por la propiedad distributiva:

$$Y(t) \cdot \frac{dX}{dt} = Y(t) \cdot A(t) \cdot X + Y(t) \cdot f(t).$$

Integrando, ahora, entre 0 y t se tiene que:

$$\int_0^t Y(\tau) \frac{dX}{d\tau} d\tau = \int_0^t [Y(\tau) \cdot A(\tau) \cdot X + Y(\tau) \cdot f(\tau)] d\tau = \int_0^t Y(\tau) \cdot A(\tau) \cdot X d\tau + \int_0^t Y(\tau) \cdot f(\tau) d\tau . (39)$$

Ahora bien, integrando por partes se tiene que:

$$\int_0^t Y(\tau) \frac{dX}{d\tau} d\tau = Y(t) \cdot X - Y(0) \cdot K - \int_0^t \frac{dY}{d\tau} \cdot X(\tau) d\tau ,$$

luego también:

$$Y(t) \cdot X - Y(0) \cdot K - \int_0^t \frac{dY}{d\tau} X(\tau) d\tau = \int_0^t Y(\tau) \cdot A(\tau) \cdot X(\tau) d\tau + \int_0^t Y(\tau) \cdot f(\tau) d\tau .$$

Sin perder generalidad, se puede considerar que: K = 0, ya que es posible la solución adicional a la solución de este caso particular: X (t)·K.

Así pues:

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{dY}{d\tau} = -Y(\tau)\cdot A(\tau)\cdot A(\tau) \\ \text{con}:\ 0 \le \tau \le t,\ y : Y(t) = E\end{array}} \qquad (39)$$

ecuación que se llama: "ecuación adjunta".

A la X se la puede escribir en la forma simple siguiente:

$$X = \int_0^t Y(\tau)\cdot f(\tau)d\tau\,.$$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES INTEGRALES

4.1. CONCEPTO

La transformación de Laplace también puede ser aplicada exitosamente a la resolución de sistemas de ecuaciones integrales de Volterra del tipo siguiente:

$$y_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\int_0^x K_{ij}(x-t)y_j(t)dt\ ,\ \ (\forall i = 1, 2, \ldots, s),$$

donde $K_{ij}(x)$ y $f_i(x)$ son funciones continuas conocidas que poseen imagen según Laplace.

Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación anterior se obtiene que:

$$\phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{s}\tilde{K}_{ij}(p)\phi_j(p)\ ,\ \ \ (\forall i = 1, 2, \ldots, s).$$

Este es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con respecto a $\phi_j(p)$. Resolviéndolo se hallan $\phi_j(p)$, cuyas funciones-objeto serán, precisamente, la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales planteado. Por extensión, la misma operatoria puede aplicarse a los sistemas de ecuaciones integro-diferenciales o bien mixtos (de ecuaciones diferenciales, integrales y/o integro-diferenciales).

4.2. EJEMPLOS

Veamos, al respecto de lo aquí expuesto, algunos ejemplos que juzgamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones integrales simultáneas o interrelacionadas:

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)} y_1(t)dt + \int_0^x y_2(t)dt, \\ y_2(x) &= 4x - \int_0^x y_1(t)dt + 4\int_0^x (x-t)y_2(t)dt. \end{aligned}\right\}$$

, con el precio *y* expresado en €/ud. y la cantidad *x* en millones de unidades del producto, sabiendo que una de ellas es una función de oferta y la otra es de demanda de un bien normal, hallando: a) el correspondiente equilibrio del mercado y los ingresos brutos del ofertante, y b) la elasticidad de la demanda en dicho punto.

Solución:

a) Se trata de sendas ecuaciones integrales de Volterra. Pasando a las imágenes y aplicando el teorema sobre la imagen de una convolución, se obtiene que:

$$\begin{cases} \phi_1(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p-2}\phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\phi_2(p), \\ \phi_2(p) = \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{1}{p}\phi_1(p) + \dfrac{4}{p^2}\phi_2(p). \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenido, con respecto a $\phi_1(p)$ y a $\phi_2(p)$, se halla que:

$$\phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Las funciones-objeto o funciones generatriz Laplace para $\phi_1(p)$ y $\phi_2(p)$ son iguales, respectivamente, a:

$$\begin{cases} y_1(x) = L^{-1}[\dfrac{1}{p+1}] - L^{-1}[\dfrac{1}{(p+1)^2}] = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x) \\ y_2(x) = L^{-1}[\dfrac{8}{9(p-2)}] + L^{-1}[\dfrac{1}{3(p+1)^2}] - L^{-1}[\dfrac{8}{9(p+1)}] = \dfrac{8}{9}e^{2x} + \dfrac{1}{3}x\cdot e^{-x} - \dfrac{8}{9}e^{-x} = \dfrac{8}{9}e^{2x} + e^{-x}(\dfrac{x}{3} - \dfrac{8}{9}) \end{cases}$$

Las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son, pues, la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales, resultando evidente que $y_1(x)$ es la función de demanda (decreciente) e $y_2(x)$ es la de oferta (creciente). En el punto de equilibrio tendrá lugar que D = O, con lo que:

$e^{-x}(1-x) = \frac{8}{9}e^{2x} + e^{-x}(\frac{x}{3} - \frac{8}{9})$, lo que sucederá para los siguientes valores:

$x \approx 0'20$ (200.000 ud.) ; $y \approx 0'65$ €/ud. $\Rightarrow$ E(0'20, 0'65), de donde se deducen unos ingresos brutos del ofertante de:

$$I = p \times q = 0'65 \times 200.000 = 130.000'00 \text{ €},$$

con la siguiente representación gráfica:

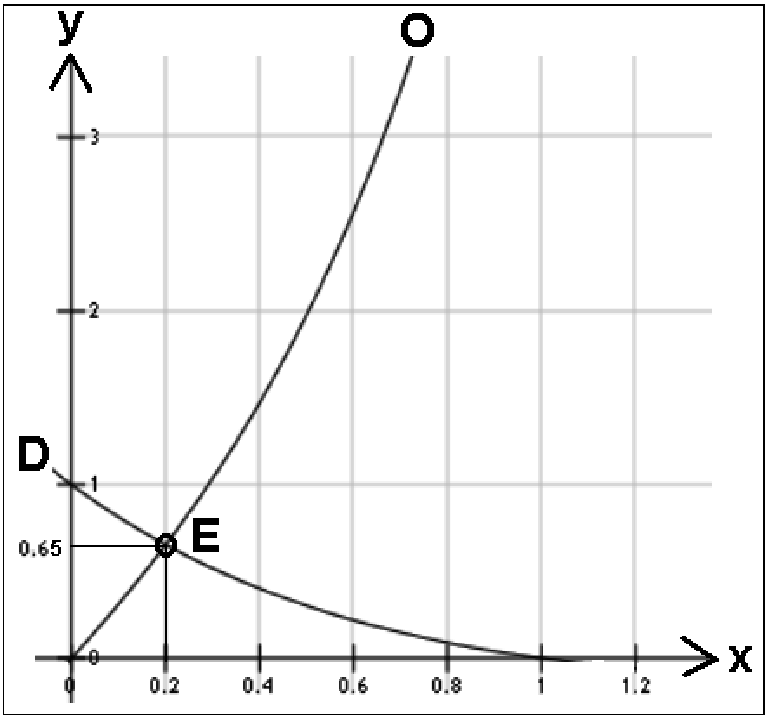


FIG. 9.41. Oferta, demanda y punto de equilibrio (XIII).

La función de demanda se anula en el punto en que x = 1. Y la función de oferta presume la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $x \to \infty$ también y_2 tiende a $+\infty$. Esto es: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y_2}{x} = +\infty$, luego existe en ella una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

b) La elasticidad puntual buscada de la función de demanda en el equilibrio deberá considerar que:

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}(1\text{-}x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2)\,;\, \frac{dx}{dy} = \frac{e^{x}}{x-2}\,;$$

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x-2} \times \frac{e^{-x}(1-x)}{x} = \frac{1-x}{x^2-2x} = \frac{0'8}{0'04-0'4} = -2'22 < -1,$$

luego se trata de una demanda relativamente elástica.

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones integrales simultáneas o interrelacionadas:

$$\left. \begin{array}{l} y_1(x) = e^{2x} + \int_0^x y_2(t) \cdot dt \\ y_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-t)} \cdot y_1(t) \cdot dt \end{array} \right\}$$

, con el precio *y* expresado en €/ud. y la cantidad *x* en miles de unidades del producto, sabiendo que una de ellas es una función de oferta y la otra es de demanda de un bien normal, hallando: a) el correspondiente equilibrio del mercado así como los ingresos brutos del ofertante, y b) la elasticidad de la demanda en dicho punto.

Solución:

a) Se trata de sendas ecuaciones integrales de Volterra. La solución del sistema planteado, como puede comprobar el amable lector/a, una vez efectuados los cálculos pertinentes, es la siguiente:

$$y_1(x) = 3e^x - 2\ ;\ y_2(x) = 3e^x - 2e^{2x}\ .$$

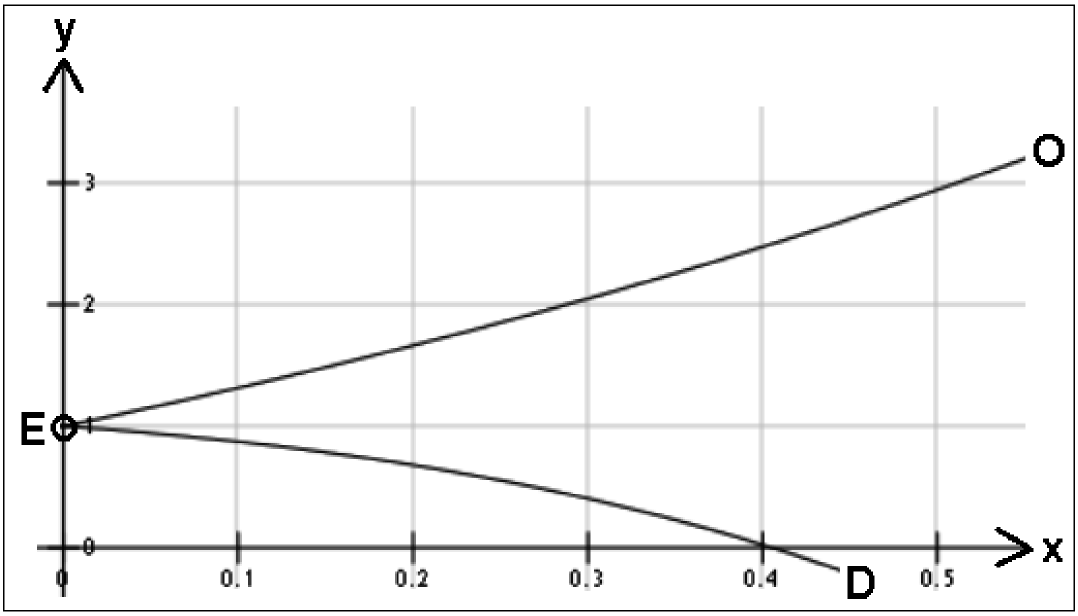
Las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ son, pues, la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales, resultando evidente que $y_2(x)$ es la función de demanda (decreciente) e $y_1(x)$ es la de oferta (creciente).

En el punto de equilibrio tendrá lugar que: O = D, con lo que:

$3e^x - 2 = 3e^x - 2e^{2x}$, lo que sucederá para los valores:

$e^{2x} = 1$; $2x = \ln 1 = 0$; $x = 0$ ud. ; $y = 1'00$ €/ud. $\Rightarrow$ E(0, 1),

lo que obviamente conlleva unos ingresos brutos del ofertante, con la siguiente representación gráfica:



Veamos que la demanda se anula (y = 0) en el punto en que:

$3\cdot e^x = 2\cdot e^{2x}$, esto es: $e^x = 3/2 = 1'5$; $x = \ln 1'5 \approx 0'405$ (405 ud.)

Por otra parte, en el caso de la función de oferta se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $x \to +\infty$ también $y \to +\infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\cdot e^x - 2}{x} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba). Así mismo, en el caso de la función de demanda cabe presumir también la existencia de ramas parabólicas, puesto que si: $x \to +\infty$ también $y \to -\infty$. Y además: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\cdot e^x - 2\cdot e^{2x}}{x} = -\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia abajo).

b) La elasticidad puntual buscada de la función de demanda en el equilibrio E(0, 1) deberá considerar que:

$\frac{dy}{dx} = 3e^x - 2e^{2x}$, con lo que: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3e^x - 2e^{2x}}$; y la elasticidad puntual buscada será:

$$e_p = \frac{dx}{dy} \times \frac{y}{x} = \frac{dx}{dy} \times \frac{1}{0} = -\infty,$$

por lo que se trata de una demanda perfectamente elástica (con tangente horizontal).

Ejemplo 3

Los resultados contables antes de impuestos de tres empresas del mismo *holding*, y_1, y_2 e y_3, que se hallan interrelacionados, ofrecen el siguiente sistema de ecuaciones integrales simultáneas:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= t + \int_0^t y_2(u)\cdot du \\ y_2(t) &= 1 - \int_0^t y_1(u)\cdot du \\ y_3(t) &= \sin t + \frac{1}{2}\int_0^t (t-u)\cdot y_1(u)\cdot du \end{aligned}\right\}$$

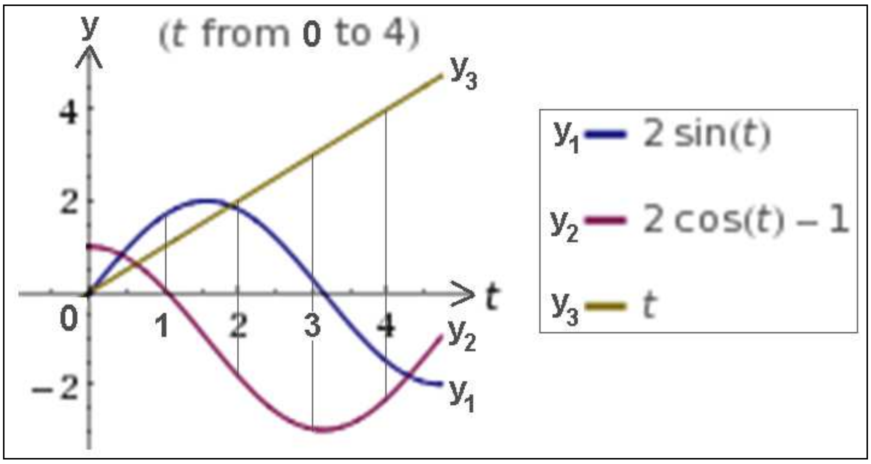
, viniendo *y* expresada en millones de euros y *t* en años (ejercicios económicos). Se pide jerarquizar los resultados contables acumulados del primer cuatrienio de vida de estas empresas y de su conjunto, hallando el beneficio neto global considerando una fiscalidad del 25%. ¿Cuál de ellas ha resultado ser la más rentable?

Solución:

La solución del sistema infinitesimal planteado, a base de ecuaciones integrales de Volterra como puede comprobar el amable lector/a, una vez efectuados los cálculos pertinentes, es la siguiente:

$$y_1(t) = 2\sin t;\ y_2(t) = 2\cos t - 1;\ y_3(t) = t\ ;$$

con la correspondiente representación gráfica:



Los resultados contables del cuatrienio, anuales y acumulados para cada empresa y para el conjunto del *holding* empresarial analizado, pueden verse sintetizados en el cuadro siguiente, del que se concluye claramente la mayor rentabilidad de la empresa y_3, mientras que la y_2 experimenta notables pérdidas en el periodo pese a aportar, al comienzo de su actividad económica, unos beneficios extraordinarios de 1.000.000 de euros. Esto es:

		t (años)					
		0	1	2	3	4	Σ (€)
y (10⁶ €)	y_1	0	1'682942	1'818595	0'28224	-1'513605	2.270.172
	y_2	1	0'080605	-1'832294	-2'979985	-2'307287	-6.038.961
	y_3	0	1'000000	2'000000	3'000000	4'000000	10.000.000
	Σ (€)	1.000.000	2.763.547	1.986.301	302.255	179.108	6.231.211

De él se deduce, así mismo, que el conjunto del *holding* tendrá, en el cuatrienio analizado, un beneficio bruto global π de 6.231.211 € y un beneficio neto global (descontando la fiscalidad) de:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times 6.231.211 = 4.673.408'25 \text{ €} .$$

* * * * *

(*) (Viene del ejemplo 8, pág. 629 y ss.)

La coincidencia de ambos resultados contables brutos tendrá lugar cuando se produzca que:

$$e^t + e^{2t} - 1 = 3 - 2e^t - e^{2t};\ \ 3e^t + 2e^{2t} - 4 = 0;\text{ haciendo: } \begin{cases} e^{2t} = K^2 \\ e^t = K \end{cases} \text{ resulta:}$$

$$2K^2 + 3K - 4 = 0,\text{ de donde: } K = \frac{-3 \pm \sqrt{9+32}}{4} = \frac{-3 \pm 6'4}{4} = \left\langle \begin{matrix} +0'85 \\ -2'35 \end{matrix} \right.,\text{ o sea:}$$

$$t = \ln K = \begin{cases} \ln(-2'35) = \text{no existe} \\ \ln 0'85 = -0'1625 \end{cases},$$

que resulta ser un valor negativo, por lo que la coincidencia de ambos resultados contables tendrá lugar en el pasado de referencia del estudio, con:

$$t = -0'1625 = -1'625 \text{ años e } y = e^{-0'4875} + e^{-0'325} - e^{-0'1625} =$$
$$= 0'614 + 0'722 - 0'850 = 0'486,$$

o sea, con π = 486.000 € y B = 0'75 $\times$ 486.000 = 364.500 € .

Parte V:

Ecuaciones en diferencias finitas.

- **Ecuaciones recurrentes.**
- **Aplicaciones microeconómicas de las ecuaciones recurrentes.**
- **Otras aplicaciones económicas de las ecuaciones recurrentes.**
- **Sistemas de ecuaciones recurrentes.**

* * * * * * *

CAPÍTULO 10

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS O RECURRENTES

1. INTRODUCCIÓN

1.1. DEFINICIONES

Es normal que desde los primeros inicios en el estudio de las matemáticas se aborden los diversos temas desde las funciones continuas, ya sea por facilitar su mejor comprensión o bien simplemente porque es costumbre inveterada hacerlo así. Esto ocasiona en los estudiantes, con frecuencia, una inclinación primigenia hacia la continuidad, en contraposición con la mayoría de los fenómenos físicos o económicos que, finalmente, son modelados por funciones discontinuas o discretas. Realmente, es en asignaturas como Física, Estadística, Biología, Sociología, Microeconomía y Econometría donde empieza a notarse esta inclinación, que conlleva a no pocas dificultades en el manejo matemático de estas áreas. Igual ocurre en el momento de resolver una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, o una ecuación integral o integro-diferencial, donde las técnicas de solución en forma exacta parecieran indicar que esto siempre es posible, en tanto que la realidad muestra que las soluciones de las ecuaciones infinitesimales en términos de funciones elementales son muy pocas y que los métodos de solución aproximada cada vez son más usados y responden adecuadamente a la realidad de los hechos.

La teoría de las *ecuaciones diferenciales e integrales*, como hemos visto, se basa en modelos continuos, donde la variable independiente o explicativa de referencia suele ser el *tiempo*. Pero el tiempo también se puede considerar como una variable discreta ya que, para controlar su transcurso en una experiencia cualquiera, exige la toma de medidas en determinados instantes, y en intervalos determinados, por los instrumentos de medida, que constituyen un conjunto finito, o infinito numerable, de valores de la variable independiente o explicativa.

Los modelos determinísticos discretos, constituidos por las denominadas *ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes*, están referidos normalmente a la variable tiempo pero bajo una óptica discreta. Esto es:

MODELO CONTINUO		**MODELO DISCRETO**
"t" como variable continua	⟷	"t" como variable discreta
Ecuaciones diferenciales e integrales		**Ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes**

FIG. 10.1. Modelos continuos y discretos.

Las ecuaciones recurrentes aparecen, pues, ligadas a la descripción matemática de fenómenos dinámicos, es decir, que varían con el tiempo. No es de extrañar, por tanto, que dichas ecuaciones, junto con otras herramientas matemáticas (como las ecuaciones integro-diferenciales o las cadenas de Markov) constituyan uno de los tópicos fundamentales de la matemática que se aplica al estudio de los fenómenos de evolución en el tiempo. En términos generales, hablamos de *recurrencia* cuando cada estado de un fenómeno determinado puede explicarse en términos de algún o algunos estados antecedentes. Las ecuaciones recurrentes son, entonces, las expresiones matemáticas de esta explicación de cada estado del sistema en función de otros anteriores.

Desde luego, las ecuaciones recurrentes son ecuaciones funcionales (o sea, que comprenden únicamente la función incógnita y no sus derivadas o integrales) de especial importancia en las ciencias sociales y, particularmente, en la Economía en sus diversas ramas. Se presentan, por ejemplo, en el estudio de los procesos estocásticos discretos y como aproximaciones discretas de las ecuaciones diferenciales. En este caso, se define la función incógnita únicamente por números enteros (o, análogamente, por cualquier conjunto equidistante de puntos), no sobre todo el cuerpo de los números reales, y de esta forma la función se escribe así: $f_n = f(n), \forall n \in \boldsymbol{Z}$. La ecuación representa una dependencia entre los valores de la función incógnita para varios enteros sucesivos.

Si la variable independiente toma los valores naturales (enteros positivos) siguientes: **t** = 0, 1, 2, 3, …, n, …, para la variable dependiente ***x*** o funcional tendremos los valores: $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$, $x(2) = x_2$, …, $x(n) = x_n$, …, es decir:

t	1	2	3	…	n	…
x	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…

Una ecuación en diferencias finitas es, pues, una expresión algebraica que relaciona los valores que toma una variable dependiente ***x***, a través de una función, en determinados puntos de un dominio discreto. Con ello, resolver una ecuación en diferencias es hallar una expresión genérica para $\boldsymbol{x_n}$ en términos de n, sin que aparezcan otros términos en *x*.

El presente capítulo de nuestro libro ya muestra la estrecha relación existente entre la ecuación diferencial y la ecuación en diferencias finitas, siendo también estas últimas un recurso útil en la resolución de las primeras. En ello profundizaremos, por cierto, en el epígrafe siguiente. Ahora bien, en la solución de las ecuaciones en diferencias finitas que expondremos aquí, además de detallar por completo su solución en el caso de las de primer y segundo orden, también se mostrará como la transformada Z (TZ o “transformada zeta”) de una función, resulta ser un instrumento sumamente útil para solucionar ecuaciones como la de Fibonacci[1] y, en general, ecuaciones de la forma: $a_{n+1} - a_{n-1} = f(n)$ y $a_{n+1} + a_{n-1} = f(n)$. Desde luego, aplicaciones frecuentes de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en diferencias se encuentran en todas las ciencias; en particular, en Economía hay una interesante aplicación en inventarios, que es el conocido modelo de inventarios de Metzler[2], que viene expresado por una *ecuación en diferencias finitas de segundo orden.*

En general, una ecuación en diferencias finitas o ecuación recurrente es una expresión de la forma siguiente:

$$F[x, f(x), f(x+1), f(x+2), \dots , f(x+k)] = 0,$$

, siendo f(x) una función desconocida de variable entera. Si hacemos como *variable independiente* o *argumento* x = n, se suele emplear las notaciones en subíndices: $f(n) = y_n = u_n = v_n = a_n$, con lo que:

$$F(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k}) = 0,$$

[1] Leonardo Fibonacci (1170-1250), or Leonardo of Pisa, most commonly, simply Fibonacci, was an Italian mathematician, considered by some "the most talented western mathematician of the Middle Ages." Fibonacci is best known to the modern world for the spreading of the Hindu–Arabic numeral system in Europe, primarily through the publication in 1202 of his *Liber Abaci* (*Book of Calculation*), and for a number sequence named the Fibonacci numbers after him, which he did not discover but used as an example in the *Liber Abaci*. *Liber Abaci* also posed, and solved, a problem involving the growth of a population of rabbits based on idealized assumptions. The solution, generation by generation, was a sequence of numbers later known as Fibonacci numbers. The number sequence was known to Indian mathematicians as early as the 6th century, but it was Fibonacci's *Liber Abaci* that introduced it to the West. In the Fibonacci sequence of numbers, each number is the sum of the previous two numbers, starting with 0 and 1. This sequence begins: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 ... The higher up in the sequence, the closer two consecutive "Fibonacci numbers" of the sequence divided by each other will approach the golden ratio (approximately 1 : 1.618 or 0.618 : 1). (FRANQUET, 2013).

[2] Lloyd A. Metzler (1913-1980) fue pionero en investigar formalmente las consecuencias de los esfuerzos empresariales para mantener sus niveles de existencias, a través de variaciones apropiadas en los niveles de producción. Sus primeros trabajos sobre la materia datan del año 1941 (“The Nature and Stability of Inventory Cycles”. Rev. Econ. Statist., vol, 23).

siendo *y* la *variable dependiente*, donde $F : \Omega \subseteq \Re^{k+2} \to \Re$ es una función definida sobre un subconjunto Ω de $\Re^{k+1}$. El número k recibe el nombre de "orden" de la ecuación, y es la diferencia entre el mayor y el menor de los subíndices (argumentos) que aparecen en la ecuación, o sea: $(n + k) - n = k$. Por ejemplo, las ecuaciones:

$$y_{n+2} - y_n = 0,$$
$$n \cdot y_{n+3} - e^{y_{n+3}} \cdot y_n = y_{n+1},$$

son de órdenes 2 y 3, respectivamente. Aparte del orden mencionado, existe una gran diferencia entre las ecuaciones anteriores. En la primera se puede despejar el término y_{n+2}, quedando la ecuación: $y_{n+2} = y_n$, mientras que en la segunda ecuación tal operación no puede realizarse, es decir, no se va a poder despejar explícitamente el término y_{n+3}, que también se halla en el exponente.

Nosotros vamos a centrarnos en el primer tipo de ecuaciones, que llamaremos *resueltas* respecto del mayor término de la sucesión y_n. A partir de este momento, consideraremos ecuaciones en diferencias de la forma:

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k-1}), \quad (1)$$

siendo $f : \Lambda \subseteq \Re^k \to \Re$ una función. Por una solución de la ecuación (1) entenderemos una sucesión x_n de números reales de manera tal que verifique:

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k-1}).$$

Una solución de una ecuación en diferencias finitas es una función que verifica dicha ecuación. La solución general y_n de una ecuación de orden *k* es una solución que contiene *k* constantes arbitrarias. Si en la solución general se particularizan las *k* constantes mencionadas se obtiene una solución particular y_p.

Así, por ejemplo la sucesión constante $x_n = 1$ es solución de la ecuación: $y_{n+2} = y_n$. También lo es la sucesión $x_n = (-1)^n$. Como vemos, una ecuación puede tener distintas soluciones, pero ésta es única si imponemos una serie de *k* condiciones iniciales. Así, $x_n = (-1)^n$ es la única solución de la ecuación: $y_{n+2} = y_n$, con: $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, puesto que se cumple: $x_n = C_1 + C_2(-1)^n$, con $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, como tendremos ocasión de comprobar más adelante.

Llamaremos a estos problemas "de condiciones o valores iniciales" (PVI), por su analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias que hemos estudiado en los capítulos anteriores. Generalmente, las *k* constantes arbitrarias se determinan, a su vez, mediante *k* condiciones complementarias denominadas también "condiciones de contorno".

Dentro de las ecuaciones en diferencias, tienen un especial interés las llamadas “ecuaciones lineales”, que poseen la configuración analítica:

$$y_{n+k} + a^1_n y_{n+k-1} + ... + a^k_n y_n = b_n,$$

en las que todas las formas de *y* son lineales sin importar lo que puedan ser los argumentos (de otro modo se les clasifica como “no lineales”), y donde $a^1_n, ..., a^k_n, b_n$ son sucesiones de números reales.

En el caso de que las sucesiones $a^1_n, ..., a^k_n$ sean constantes, esto es, si: $a^i_n = a_i$ para todo $n \geq 0$ y para todo $i \in \{1, ... , k\}$, la ecuación lineal se dirá “de coeficientes constantes”. En general, también distinguiremos entre *ecuaciones homogéneas* si $b_n = 0$ para todo $n \geq 0$, y *no homogéneas o completas* en caso contrario, como ocurría con las EDO. Así, por ejemplo, las ecuaciones:

$$y_{n+3} + n \cdot y_{n+1} - y_n = 1 + n^3,$$
$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0,$$

son ecuaciones en diferencias lineales, siendo la primera no homogénea y de coeficientes variables y la segunda homogénea y con coeficientes constantes.

1.2. ANALOGÍAS EXISTENTES ENTRE EL CÁLCULO DE DIFERENCIAS Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL

Al definir la derivada de una función como límite de cociente de diferencias de la función y de la variable independiente o explicativa cuando este último tiende a cero, se deducen interesantes analogías entre el cálculo de diferencias finitas y el cálculo diferencial. Revisemos, en primer lugar, la definición de derivada antes de entrar propiamente en el análisis de tales analogías.

Dada una función *y*, se denomina “derivada de dicha función” a una nueva función Dy, cuyo valor en *x* es el siguiente:

$$Dy(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y(x)}{h} = \frac{dy}{dx},$$

donde D es el operador de diferenciación que aplicado a una función da lugar a la derivada de dicha función. El valor de $[\Delta y(x)]/h$ es la pendiente de la recta que une los puntos de la representación gráfica de *y* correspondientes a unas abscisas *x* y *x*+*h*; el valor de Dy(x) es la pendiente de la tangente geométrica en *x*.

Por ejemplo, dado que:

$\Delta x^2 = 2xh + h^2$, aplicando la fórmula anterior tenemos que:

$$Dx^2 = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2xh + h^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

A esa misma conclusión llegaríamos aplicando la denominada "regla general para derivar" (que pese a ostentar tan pomposo nombre, no resulta estrictamente útil de aplicación a todos los casos) que, por lo que se refiere al ejemplo anterior, rezaría así (considerando $h = \Delta x$) para la función $y = x^2$ en los cuatro pasos siguientes:

1º. Tomando incrementos: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + \Delta^2 x + 2x\cdot\Delta x$.
2º. Restando la expresión inicial: $\Delta y = \Delta^2 x + 2x\cdot\Delta x$.
3º. Dividiendo por Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$.
4º. Tomando límites cuando $\Delta x \to 0$: $y' = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$.

Las sucesivas diferenciaciones de una función se indican con potencias sucesivas del operador D; así, la segunda derivada de *y* se representa por D^2y y proviene de D(Dy), la tercera derivada se indica por D^3y, etc.

Consideremos ahora la operación inversa a la diferenciación. Si una función Y es tal que DY = y, se dice que Y es la *función primitiva* de *y*. Para ser consecuentes con la notación hasta ahora utilizada (ya que representamos al operador inverso del operador diferencia por Δ^{-1}), simbolizaremos el operador inverso del de diferenciación con la notación D^{-1} y escribiremos $Y = D^{-1}y$.

Aunque esta notación resulta de gran utilidad en muchos textos, es más frecuente, sin embargo, la clásica notación: $Y = \int y \cdot dx$, y la denominación para Y de "integral indefinida de la función *y*". Obsérvese que hay un número infinito de integrales indefinidas de una función *y*, puesto que DY = y, y también D(Y + C) = y, siendo C una constante cualquiera de integración.

De este modo, en el planteamiento y resolución de las ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes, que vamos a contemplar en el presente capítulo de nuestro libro, se presentan las siguientes analogías con las ecuaciones diferenciales ordinarias que hemos visto en anteriores capítulos del mismo, y que podemos sintetizar en el siguiente cuadro comparativo:

ECUACIONES DIFERENCIALES	ECUACIONES RECURRENTES
1'. $Dy(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y(x)}{h}$.	1. $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$.
2'. $D^n y = D(D^{n-1} y), \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$	2. $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$
3'. $D(cy) = cDy$.	3. $\Delta(cy) = c\Delta y$.
4'. $D(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 Dy_1 + c_2 Dy_2$.	4. $\Delta(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \Delta y_1 + c_2 \Delta y_2$.
5'. Si y es un polinomio de grado n, $D^n y$ es constante y las derivadas de orden superior son nulas.	5. Si y es un polinomio de grado n, $\Delta^n y$ es constante y las diferencias de orden superior son nulas.
6'. $Dx^n = nx^{n-1}$.	6. $\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)}$.
7'. $D(u \cdot v) = uDv + vDu$.	7. $\Delta(u \cdot v) = (Eu)\Delta v + v\Delta u$.
8'. $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vDu - uDv}{v^2}$.	8. $\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}$.
9'. Si: $Dy = y$, $\int y = Y + C$, siendo C una constante de integración.	9. Si $\Delta Y = y$, $\Delta^{-1} y = Y + p$, siendo p una función periódica de período h.

Utilizando esta notación (o sea, el signo integral $\int$ en vez de D^{-1}), exponemos en la tabla anterior algunos resultados conocidos del cálculo diferencial y las fórmulas análogas que les corresponden en el cálculo de diferencias finitas. Una parte ciertamente importante de los resultados obtenidos en el cálculo diferencial pueden demostrarse fácilmente a partir de los correspondientes del cálculo de diferencias sin más que aplicar límites.

1.3. EQUILIBRIO

Las ecuaciones *autónomas o estacionarias* son aquellas que no dependen de *n*, y constituyen un caso particular de las ecuaciones recurrentes. Si reparamos ahora en la ecuación de orden uno autónoma, o sea:

$$u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbf{N}$$

donde f es una función que toma valores reales, estudiemos algunos aspectos del comportamiento de sus soluciones centrándonos en los denominados “puntos de equilibrio”, de particular importancia en la ciencia económica como tendremos ocasión de comprobar a través de numerosos ejemplos expuestos en el siguiente capítulo de este mismo libro.

Un punto de equilibrio de la ecuación anterior es toda solución de la ecuación: $x = f(x)$, o sea: $u_{n+1} = u_n = x$. Su representación gráfica, pues, comenzará por hallar los puntos de corte o intersección entre la gráfica de y = f(x) y la gráfica de y = x (recta bisectriz del primer cuadrante del círculo), esto es:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

Por otra parte, la noción de estabilidad de un punto de equilibrio, de provechosas aplicaciones en el campo de la Teoría Microeconómica, está relacionada con el comportamiento de las soluciones de una ecuación recurrente que comienzan cerca de los puntos de equilibrio. En particular, interesa saber si las soluciones convergen o no a los puntos de equilibrio cerca de los cuales han empezado. Tendremos ocasión de analizar todo ello en numerosas aplicaciones prácticas de los tres siguientes capítulos de nuestro libro.

Veamos ahora algunos ejemplos representativos de lo hasta aquí expuesto:

Ejemplo 1

Calcular los puntos de equilibrio de la ecuación recurrente:

$$u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n - 3,\ \forall n \in \mathbf{N}$$

Solución:

Hacemos: $x = x^2 + 3x - 3$; $x^2 + 2x - 3 = 0$, ecuación que resuelta ofrece las raíces: $\boxed{u_1^* = 1 \text{ y } u_2^* = -3}$, que son así los dos únicos puntos de equilibrio de la ecuación, es decir, que las sucesiones:

$$1, 1, 1, \ldots \ \text{ y } \ -3, -3, -3, \ldots,$$

son soluciones de la ecuación recurrente propuesta.

Ejemplo 2

Calcular el punto de equilibrio de la siguiente ecuación en diferencias finitas: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, así como la solución particular que verifica que: $u_0 = 1$.

Solución:

Como siempre, planteamos la ecuación: $x = f(x) = \frac{x}{1+x}$, cuya única solución es x = 0, por lo que: $\boxed{u^* = 0}$ es un punto de equilibrio de la ecuación propuesta.

Estudiemos ahora la solución particular de la ecuación antedicha que verifica que: $u_0 = 1$, esto es:

$u_1 = \frac{u_0}{1+u_0}$; si hacemos $u_0 = 1$, se tendrá sucesivamente que:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ u_2 = \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}, \\ u_3 = \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1}{4}, \\ u_4 = \frac{1/4}{1+1/4} = \frac{1}{5}, \\ u_5 = \frac{1/5}{1+1/5} = \frac{1}{6}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

de lo que se deduce un término general del tipo: $\boxed{u_n = \frac{1}{n+1}}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Ello también puede demostrarse mediante un proceso de inducción. Para ello, debemos comprobar sendas condiciones, a saber: a) que la fórmula anterior sirve para n = 0, y b) que si la fórmula es cierta para u_{n-1}, entonces también lo es para u_n ($n \geq 1$). Separadamente:

a) Efectivamente, si n = 0, entonces: $u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$, que es cierto.

b) Si ahora suponemos cierto que: $u_{n-1} = \frac{1}{n-1+1} = \frac{1}{n}$, entonces:

$u_n = \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} = \frac{1/n}{1+1/n} = \frac{1}{n+1}$, tal como se quería demostrar.

Por otra parte, esta solución converge al punto de equilibrio, puesto que resulta evidente que: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0$, que constituye precisamente el punto de equilibrio u* = 0 anteriormente hallado.

Ejemplo 3

Calcular los puntos de equilibrio de la ecuación recurrente:

$$u_{n+1} = u_n \text{ , } \forall n \in \mathbf{N}$$

Solución:

Resultaría una expresión (identidad) del tipo: x = x, por lo que es obvio que todo número real es un punto de equilibrio de esta ecuación, y que sus soluciones son todas las sucesiones constantes.

2. ECUACIONES LINEALES

2.1. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Son ecuaciones tales que estén definidas en cierto dominio de una variable y que relacionen una función incógnita de la variable *n* con la función de la variable *n* + 1, que difiere en 1 de la primera, o sea, u_n y u_{n+1}, y se llaman *ecuaciones en diferencias finitas de primer orden.*

Son ecuaciones de la forma: $x_{n+1} = p(n)x_n + q(n)$, siendo *p(n)* y *q(n)* funciones de la variable *n*, o simplemente constantes. En ellas, cada término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a la primera potencia (linealidad).

Cuando *q(n) = 0*, la ecuación se llama *homogénea*, y entonces se cumple que: $x_{n+1} = p(n)x_n$, $\forall n \geq 0$. Vamos a ver ahora que las ecuaciones homogéneas, en realidad, son fórmulas de recurrencia en las que, conocidas las condiciones iniciales, es decir, x_0, es posible calcular todos los términos de la sucesión:

$$x_1 = p(0)x_0 \quad x_2 = p(1)x_1 = p(1)p(0)x_0 \quad x_3 = p(2)x_2 = p(2)p(1)p(0)x_0 \quad \ldots$$

$$x_n = p(n-1)\,p(n-2)\ldots\ldots p(1)\,p(0)x_0$$

Entonces, si la ecuación en diferencias es homogénea, en cualquier forma que se presente, puede ser reducida a la expresión:

$$a_{n+1} - \alpha \cdot a_n = 0$$

y se prueba fácilmente que la solución general de esta ecuación es de la forma: $a_n = C \cdot \alpha^n$, siendo C una constante arbitraria. Esta última ecuación es una función discreta cuyo dominio es el conjunto **N** de los enteros no negativos o naturales.

2.2. ECUACIÓN LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN k

2.2.1. Introducción

Una ecuación en diferencias finitas de orden k es una ecuación que liga los términos de una sucesión relacionando cada término con los k anteriores. El estudio de estas ecuaciones puede resultar muy complicado, aunque aquí se estudiará básicamente el caso concreto de las ecuaciones lineales, que poseen una gran variedad de aplicaciones en la economía y otras ciencias aplicadas.

Uno de los tipos de ecuaciones en diferencias que con mayor frecuencia se presentan son, pues, las llamadas “ecuaciones lineales”, que son de la forma siguiente, usando una notación más generalizada:

$$\varphi_0(n)\cdot u_{n+k} + \varphi_1(n)\cdot u_{n+k-1} + \varphi_2(n)\cdot u_{n+k-2} + \ldots + \varphi_{k-1}(n)\cdot u_{n+1} + \varphi_k(n)\cdot u_n =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(n)\cdot u_{n+k-i} = b_n$$

donde los $\varphi_i(n)$ y b_n son funciones de la variable entera *n*.

Así pues, cuando algún término con subíndice de la relación de recurrencia está multiplicado por un valor variable, como por ejemplo:

$$u_{n+1} - u_n = n\cdot u_{n-1}, \text{ con la condición: } u_0 = 1,\ \forall n \geq 1$$

se dice que estamos en presencia de una “ecuación de coeficientes variables”.

Por el contrario, si los $\varphi_i(n) = a_i$ son constantes, como sucederá en la mayoría de los casos que contemplaremos aquí, la ecuación en cuestión recibe el nombre de *ecuación lineal de coeficientes constantes*. Si además $b_n = 0$, la ecuación se denomina “homogénea” y, en caso contrario, “no homogénea o completa”, como también sucedía con las ecuaciones diferenciales.

Si la ecuación homogénea en diferencias finitas de orden k siguiente:

$$a_0\cdot f(x+k) + a_1\cdot f(x+k-1) + a_2\cdot f(x+k-2) + \ldots + a_{k-1}\cdot f(x+1) + a_k\cdot f(x) = 0;$$

o bien, expresada en notación de subíndices:

$$a_0\cdot u_{n+k} + a_1\cdot u_{n+k-1} + a_2\cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1}\cdot u_{n+1} + a_k\cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i\cdot u_{n+k-i} = 0,$$

admite, como ya hemos dicho, k soluciones particulares linealmente independientes: $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f_3(n)$, … , $f_k(n)$, resulta inmediato comprobar que:

$$u_n = c_1 \cdot f_1(n) + c_2 \cdot f_2(n) + c_3 \cdot f_3(n) + \ldots + c_k \cdot f_k(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot f_i(n),$$

es la solución general de la ecuación propuesta, puesto que contiene k constantes arbitrarias. Por lo tanto, el problema de resolver la ecuación dada se reduce a la obtención de k soluciones particulares linealmente independientes. Para ello, investiguemos las soluciones particulares de la forma: $u_n = r^n$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial tendremos que:

$$a_0 \cdot r^{n+k} + a_1 \cdot r^{n+k-1} + a_2 \cdot r^{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot r^{n+1} + a_k \cdot r^n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{n+k-i} = 0,$$

y después de simplificar dividiendo por r^n obtendremos la ecuación equivalente:

$$a_0 \cdot r^k + a_1 \cdot r^{k-1} + a_2 \cdot r^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot r + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{k-i} = 0,$$

que es una ecuación algebraica asociada, denominada “ecuación característica”, que admitirá las k “raíces características”: r_1, r_2, r_3, … , r_k, y a cuyo primer miembro: $\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot r^{k-i}$ se le suele denominar “polinomio característico asociado”. Así pues, las soluciones para las ecuaciones en diferencias finitas normalmente se clasifican como *particulares* o *generales*, dependiendo de si hay o no *condiciones iniciales* asociadas. Las soluciones se verifican por medio de la substitución directa. La teoría de las soluciones para este tipo de ecuaciones resulta virtualmente idéntica a la de las ecuaciones diferenciales y las técnicas de “intuir soluciones” son, de algún modo, una reminiscencia de los métodos empleados y ya vistos para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.2.2. Raíces reales distintas

Si las raíces son reales y distintas ($\forall\ r_i \neq r_j$), es inmediato comprobar que las k soluciones particulares siguientes: r_1^n, r_2^n, r_3^n, … , r_k^n, son linealmente independientes y, por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias será una combinación lineal de las funciones r_1^n, r_2^n, …, así:

$$u_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n + \ldots + c_k \cdot r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n,$$

siendo las c_i constantes arbitrarias.

2.2.3. Raíces reales múltiples

En el caso de que una de las raíces sea doble, por ejemplo, las r_i, se tiene que r_i^n y r_i^n no son linealmente independientes sino iguales, y se hace necesario encontrar una segunda solución, aunque se comprueba que: $(c_i + c_{i+1}\cdot n)r_i^n$ es una solución particular de la ecuación recurrente planteada.

Del mismo modo, si r_i es raíz triple, se tendrá que:

$$(c_i + c_{i+1}\cdot n + c_{i+2}\cdot n^2)r_i^n,$$

es también una solución particular, y así sucesivamente según el grado de multiplicidad de la raíz en cuestión.

Se ha de tener en cuenta, en definitiva, que si alguna de las raíces es múltiple, las soluciones correspondientes a cada una de ellas deberían aparecer en la combinación lineal tantas veces como indicase su orden o grado de multiplicidad, siendo necesario multiplicar cada solución por n cuando aparezca por segunda vez, por n^2 si aparece por tercera vez, y así sucesivamente, hasta completar en cada caso el número de veces que aparece.

2.2.4. Raíces complejas

Si una de las raíces de la ecuación característica es compleja (pura o mixta), expresada en la forma binómica general: a + bi, también existirá la conjugada: a – bi, con módulo r y argumento θ.

Escritas en forma polar, resultará la expresión:

$$c_1(a + bi)^n + c_2(a - bi)^n = c_1\cdot r^n(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)^n + c_2\cdot r^n(\cos\theta - i\cdot\sin\theta)^n =$$

$$= c_1\cdot r^n(\cos n\theta + i\cdot\sin n\theta) + c_2\cdot r^n(\cos n\theta - i\cdot\sin n\theta)$$

Elegidos convenientemente los números complejos c_1 y c_2, se obtiene una solución general de la ecuación recurrente planteada de la forma:

$$r^n(c_1\cdot\cos n\theta + c_2\cdot\sin n\theta) \quad (1),$$

aunque también se pueden emplear las expresiones alternativas siguientes:

$$u_n = C\cdot r^n\cdot\cos(n\theta + \phi) \;\; (2) \text{ o bien: } u_n = (\alpha + i\beta)\cdot r_1^n + (\alpha - i\beta)\cdot r_2^n \;\; (3)$$

En el caso de obtenerse raíces complejas múltiples se opera como en el caso ya visto de las raíces reales múltiples, esto es, combinando los procedimientos anteriores.

En el siguiente ejercicio se resumen los fundamentos teóricos explicados hasta ahora.

a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+4} + 2u_{n+2} + u_n = 0, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

b) Resumir simplificadamente las distintas formas que puede tener una ecuación en diferencias finitas, lineal, homogénea y de coeficientes constantes, según sean las raíces correspondientes de la ecuación característica asociada.

Solución:

a) La ecuación característica asociada: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ tiene las raíces complejas i y –i (ambas dobles). Así pues, la solución general es la siguiente:

$$\boxed{u_n = A_1 \sin \frac{n\pi}{2} + B_1 \cos \frac{n\pi}{2} + n \cdot \left(A_2 \sin \frac{n\pi}{2} + B_2 \cos \frac{n\pi}{2}\right)}$$

, que también puede expresarse de otras formas como veremos posteriormente en otro ejercicio de este mismo capítulo.

b) Al respecto, cabe realizar las siguientes consideraciones:

- Si $\mathbf{r_0}$ es una solución real de la ecuación característica, entonces sucede que: $\mathbf{n^{h-1} \cdot r_0^n}$ resulta ser una solución particular de la ecuación en diferencias planteada, siendo *h* el orden de multiplicidad de la expresada solución.

- Si $\rho(\mathbf{cos}\ \alpha + \mathbf{i \cdot sin}\ \alpha)$ y $\rho(\mathbf{cos}\ \alpha - \mathbf{i \cdot sin}\ \alpha)$ son raíces complejas de la ecuación característica, entonces también $\mathbf{n^{h-1} sin\ n}\alpha$ y $\mathbf{n^{h-1} cos\ n}\alpha$ son soluciones particulares de la ecuación en diferencias, siendo *h* el orden o grado de multiplicidad de las soluciones.

- La solución general se obtiene formando una combinación lineal, por el método de los coeficientes indeterminados, con todas las soluciones particulares asociadas a las distintas soluciones de la ecuación característica.

2.3. ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES Y ORDEN K

2.3.1. Introducción

Sea la ecuación lineal no homogénea o completa de coeficientes constantes:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = b_n \, .$$

Sea u_n^* la solución de la correspondiente ecuación homogénea:

$$a_0 \cdot u_{n+k} + a_1 \cdot u_{n+k-1} + a_2 \cdot u_{n+k-2} + \ldots + a_{k-1} \cdot u_{n+1} + a_k \cdot u_n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot u_{n+k-i} = 0,$$

y sea u_p una solución particular de la ecuación completa dada. Entonces, se verifica que la solución general de la ecuación buscada será la suma de las soluciones anteriores, esto es: $u_n = u_n^* + u_p$, como sucedía también con las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas.

Por otra parte, se cumplen las siguientes proposiciones que admitiremos sin demostración: a) Si u_n y v_n son soluciones de la ecuación no homogénea, $(u_n - v_n)$ lo es de la homogénea asociada; b) si u_n es solución de la no homogénea y v_n lo es de la homogénea, entonces $(u_n + v_n)$ lo es de la no homogénea.

Obviamente, como sucedía también con las ecuaciones diferenciales, según la naturaleza analítica de la función del segundo miembro habrá que ensayar diferentes tipos de soluciones particulares, cuestión ésta que desarrollaremos en los epígrafes siguientes para los casos más frecuentes que se pueden presentar en la práctica.

Existen diversos métodos para calcular soluciones particulares de la ecuación completa. El más común es el de los *coeficientes indeterminados*, aunque también se emplea el de *variación de parámetros o constantes* (este segundo será objeto de tratamiento en posteriores epígrafes de este mismo capítulo).

Por lo que se refiere al primero de ellos, veamos que dicho método consiste en probar como posible solución de la ecuación completa una combinación lineal de las funciones que forman el término independiente b_n con los coeficientes indeterminados y, posteriormente, de las ecuaciones que resultan de identificar los coeficientes de los términos semejantes, calcular los coeficientes de la combinación lineal. Además, hay que tener en cuenta que si alguna de las funciones monomio que forman el término independiente es, a la vez, solución de la ecuación homogénea con un cierto orden de multiplicidad (las simples tienen orden de multiplicidad 1), dicha función debe entrar en la combinación lineal que forma la solución multiplicada por n^p, siendo *p* dicho orden o grado de multiplicidad.

Para obtener la solución general de la ecuación de recurrencia realizamos los siguientes pasos:

- Resolvemos la relación homogénea asociada como se conoce (sin sacar las constantes), pasos anteriormente dados, y así obtenemos la solución homogénea asociada (u_n*).

- Ahora iremos a obtener la solución particular de la ecuación completa. Lo primero es ver la naturaleza analítica la función dada en b_n y observamos la tabla siguiente para ver cuál es el ensayo de la u_p más conveniente, a saber:

b_n	u_p
c, constante	A, constante
n	$A_1n + A_0$
n^2	$A_2n^2 + A_1n + A_0$
n^t, $t \in \mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$	$A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + ... + A_1n + A_0$
r^n, $r \in \mathbf{R}$	Ar^n
n^tr^n	$r^n (A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + ... + A_1n + A_0)$

Solo faltaría (en su caso, si se trata de un problema de valor inicial o de contorno) calcular los valores constantes c_i (de la solución homogénea asociada), mediante un sencillo sistema de ecuaciones, substituyendo con las condiciones iniciales dadas. Y con esto, tenemos ya la solución general buscada de la relación de recurrencia planteada.

Veamos, a continuación, los diferentes casos que se pueden plantear en función de la naturaleza de la b_n, con mayor especificidad.

2.3.2. Si b_n es un polinomio

En este caso, se ensaya un polinomio genérico de igual o menor grado que se obtiene por aplicación del método de los coeficientes indeterminados. Los coeficientes de este polinomio son las incógnitas a determinar, lo que se puede llevar a efecto substituyendo en el ecuación en diferencias dada. Si se obtuviese un sistema incompatible (problema de "resonancia"), se ensayaría un polinomio de grado una unidad mayor. En general, si en la solución de la homogénea figurasen términos de un polinomio, se debería multiplicar el polinomio a ensayar por una potencia conveniente de *n* para que no resultasen términos linealmente dependientes.

2.3.3. Si b_n es una función exponencial

Si el segundo miembro de la ecuación es del tipo: $b_n = h \cdot a^n$, se debe ensayar otra función exponencial de la forma: $u_p = C \cdot a^n$, donde la constante C se determina igualando coeficientes. Si *a* fuera una raíz de orden de multiplicidad *p* de la ecuación característica de la homogénea, la solución particular que debe ensayarse será del tipo: $u_p = C \cdot n^p \cdot a^n$, de modo que este término no aparezca en la ecuación complementaria (solución de la ecuación homogénea asociada).

2.3.4. Si b_n es una expresión trigonométrica

Éste es un caso bastante menos común que los anteriores en Economía. Si el segundo miembro es de la forma *cos an* o bien *sin an*, se ensayará una solución de la forma: $A \cdot \cos an + B \cdot \sin an$.

2.3.5. Si b_n es una combinación lineal de los anteriores

En este caso, se ensayará también una combinación lineal de las soluciones particulares propuestas. Del mismo modo, si el segundo miembro es el producto de una exponencial a^n por un polinomio bastará con ensayar el producto de dicha exponencial por un polinomio del mismo grado, teniendo en cuenta las advertencias realizadas en los epígrafes anteriores.

2.4. ECUACIÓN NO LINEAL

En este tipo de ecuaciones recurrentes, algún término con subíndice de la relación de recurrencia aparece elevado a una potencia diferente a la primera potencia, como por ejemplo en la que sigue:

$$u_{n+1}^2 = 3u_n^2,\ u_0 = 3,\ \forall n \geq 0.$$

Se puede transformar una relación de recurrencia no lineal a otra lineal para poder resolverla mediante una substitución algebraica del tipo: $b_n = u_n^2$.

Esta modalidad de ecuaciones en diferencias finitas, cuya presencia resulta menos común en el análisis de algoritmos que las lineales, se pueden resolver también, además de la substitución ya reseñada, por diferentes procedimientos (cambio de variable, inducción constructiva, fórmulas maestras, etc.). Veámoslo posteriormente mediante un sencillo ejemplo en que se trata de hallar u_n en función de n.

Existen, sin embargo, otras ecuaciones no lineales que resultan más complicadas de resolver. Un ejemplo de ellas podría ser el siguiente:

$$u_{n+2}^{3} - 3u_{n+1} \cdot u_n = 1$$

En cualquier caso, toda ecuación en diferencias finitas da una relación recurrente siempre que podamos despejar. Así, en el ejemplo anterior, es:

$$u_{n+2} = \sqrt[3]{1 + 3u_n \cdot u_{n+1}}$$

Ello posibilita calcular un gran número de términos partiendo de los iniciales, siempre que éstos sean fijos y mediante el uso de ordenadores con el *software* adecuado. El inconveniente de esta solución estriba en que puede complicar notablemente el estudio de algunas propiedades importantes como, por ejemplo, los comportamientos a largo plazo, o bien los estudios de sensibilidad, y no permite, en general, llevar a cabo trabajos sobre la expresión analítica de las funciones.

Volveremos a tratar este tipo de ecuaciones recurrentes en el último epígrafe (9.4.) de este mismo capítulo.

3. EL OPERADOR DIFERENCIA Δ Y SU INVERSO Δ^{-1}

De una forma general, se define el operador Δ de la forma siguiente: $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$, donde *h* es un número dado llamado "intervalo de diferencia". La teoría que desarrollaremos a continuación corresponde al caso particular en que h = 1.

Así pues, la ecuación en diferencias finitas se puede expresar, genéricamente, de esta forma:

$$F[x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)] = 0.$$

Hay que tener en cuenta que:

$$\begin{cases} \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) \\ \Delta^3 f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

y así sucesivamente.

Generalmente, venimos empleando la notación:

$$f(x) = u_n \ ; \ f(x+1) = u_{n+1} \ ; \ f(x+2) = u_{n+2} \ ; \ \ldots \ ; \ f(x+k) = u_{n+k} \ .$$

Pues bien, dadas dos funciones de variable entera que designaremos por f(x) y F(x), tales que: $\Delta F(x) = F(x + 1) – F(x) = f(x)$, se define el operador Δ^{-1}, como el operador tal que: $\Delta^{-1}f(x) = F(x)$.

Es inmediato comprobar que el operador Δ^{-1} es lineal, esto es, que cumple las siguientes propiedades:

a) $\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x)$
b) $\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = k\cdot\Delta^{-1}f(x)$

siendo k una constante arbitraria.

Los operadores Δ y Δ^{-1} son tales que: $\Delta\cdot\Delta^{-1} = \Delta^{-1}\cdot\Delta = I$, donde I denota el operador unidad o identidad; en otros términos, Δ y Δ^{-1} son operadores inversos. En efecto, a partir de: $\Delta^{-1}f(x) = F(x)$, se obtiene:

$\Delta[\Delta^{-1}f(x)] = \Delta F(x)$, o sea: $(\Delta\Delta^{-1})f(x) = f(x)$, de donde $\Delta\Delta^{-1}\Delta = I$.
Análogamente, de: $\Delta F(x) = f(x)$, se deduce que:

$$\Delta^{-1} [\Delta F(x)] = \Delta^{-1}f(x),\ \text{de donde: } \Delta^{-1}\cdot\Delta = I,\ \text{c.s.q.d.}$$

A partir de aquí, y de la linealidad de Δ, se comprueba que:

$$\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x),\ \text{puesto que:}$$

$$\Delta\Delta^{-1}[f(x) + g(x)] = \Delta[\Delta^{-1}f(x) + \Delta^{-1}g(x)]\ \ \text{resulta ser una identidad.}$$

Análogamente se tiene que: $\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = k\cdot\Delta^{-1}f(x)$, pues resulta también una identidad: $\Delta\Delta^{-1}[k\cdot f(x)] = \Delta[k\cdot\Delta^{-1}f(x)]$.

Una propiedad interesante del operador Δ^{-1}, que pone de manifiesto su analogía con el operador D^{-1}, inverso del operador derivada que ha sido empleado en la resolución de las ecuaciones diferenciales (ver capítulos anteriores), es la siguiente:

Si dos funciones tienen la misma diferencia, ambas funciones, no son necesariamente iguales, sino que pueden diferir en una función periódica de período unidad, esto es, una función C(x) tal que:

$$C(1) = C(2) = ... = C(x) = C(x + 1) = ...$$

En efecto, sean las funciones F(x) y F(x) + C(x); se verifica que:

a) $\Delta F(x) = F(x + 1) – F(x)$
b) $\Delta[F(x) + C(x)] = F(x + 1) + C(x + 1) - [F(x) + C(x)] = F(x + 1) - F(x)$,

luego ambas poseen la misma diferencia.

Otra interesante propiedad se deduce a partir de la diferencia de un producto; en efecto, de la igualdad:

$\Delta[f(x) \cdot g(x)] = \Delta f(x) \cdot g(x + 1) + f(x) \cdot \Delta g(x)$, se obtiene:

$$f(x) \cdot \Delta g(x) = \Delta [f(x) \cdot g(x)] - g(x + 1) \cdot \Delta f(x),$$

y después de aplicar el operador Δ^{-1}, resultará que:

$$\Delta^{-1}[f(x) \cdot \Delta g(x)] = f(x) \cdot g(x) - \Delta^{-1}[g(x + 1) \cdot \Delta f(x)],$$

fórmula ésta que recuerda la de la integración por partes y que algunos autores denominan, precisamente por esta razón, de “sumación por partes”.

4. EL OPERADOR “E” EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Suele ser conveniente, en ocasiones, el empleo del operador E, que se define del siguiente modo: $Ef(x) = f(x + 1)$.

De la igualdad anterior, se deduce que:

$$Ef(x) – f(x) = f(x + 1) – f(x), \text{ o bien: } (E – 1)f(x) = \Delta f(x),$$

donde por 1 se designa el operador identidad; luego se tendrá que:

$E – 1 = \Delta$, o bien: $E = 1 + \Delta$. Entonces, resulta evidente que:

$$\begin{cases} f(x + 2) = Ef(x + 1) = E^2f(x) \\ f(x + 3) = Ef(x + 2) = E^2f(x + 1) = E^3f(x) \end{cases}$$ etc., y así sucesivamente.

Usando esta misma notación, la ecuación:

$f(x + 3) + a\cdot f(x + 2) + b\cdot f(x + 1) + c\cdot f(x) = 0$, se escribirá del siguiente modo:

$$E^3f(x) + a\cdot E^2f(x) + b\cdot Ef(x) + c\cdot f(x) = 0, \text{ o bien: } (E^3 + aE^2 + bE + c)f(x) = 0.$$

En definitiva, veamos que la forma general de una ecuación en diferencias finitas o recurrente de segundo orden y homogénea es la siguiente:

$$(a_2.E^2 + a_1.E + a_0).y[n] = 0.$$

Suponemos que la ecuación tiene soluciones de la forma exponencial, así: $y(n) = r^n$. Se toman los dos primeros desplazamientos y se substituyen en la ecuación.

$$E\cdot y(n) = r^{n+1} \;;\quad E^2\cdot y(n) = r^{n+2} \;;\quad a_2\cdot r^{n+2} + a_1\cdot r^{n+1} + a_0\cdot r^n = 0 \,.$$

A partir de la identidad anterior obtenemos la ecuación característica, la cual es una sencilla ecuación cuadrática que posee, como es sabido, las dos soluciones siguientes:

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4{\cdot}a_2{\cdot}a_0}}{2{\cdot}a_2} \;;\quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4{\cdot}a_2{\cdot}a_0}}{2{\cdot}a_2}$$

Análogamente, por ejemplo, la ecuación no homogénea en diferencias finitas dada por: $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 1$, $\forall n\in \mathbf{N}$, se podrá escribir así, usando el operador E:

$$(E^2 + 3E + 2)\cdot u_n = n^2 + 1,$$

donde el segundo miembro de la ecuación, b_n, es un polinomio o función polinómica de segundo grado.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones se emplearán, también con el operador "E" los mismos criterios ya expuestos. De esta suerte, para resolver la ecuación no homogénea de segundo orden, representada por la expresión $(a_2E^2 + a_1E + a_0)\, y(n) = F[n] = b_n$, debemos sumar como siempre una solución particular de esta ecuación a la solución obtenida de resolver la ecuación homogénea:

$$(a_2E^2 + a_1E + a_0)\, y(n) = 0.$$

Para hallar la solución particular necesaria, empleamos el método de los coeficientes indeterminados, comenzando con una combinación lineal arbitraria de todos los términos independientes que se obtienen a partir de b_n por aplicación repetida del operador E.

Como también sucedía en el caso de las ecuaciones diferenciales, si cualquier término de la expresión elegida inicialmente para la solución particular u_p es repetición de algún término de la solución complementaria (solución de la ecuación en diferencias homogénea), éste y todos los términos asociados deben multiplicarse por la menor potencia entera positiva de n, hasta eliminar toda posible duplicación.

El proceso a seguir es análogo al empleado para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior, por lo que juzgamos interesante, llegados a este punto, efectuar un somero repaso del mismo.

La solución particular a ensayar, en los casos más relevantes que se pueden presentar en la práctica, se resume en la siguiente tabla que completa otra anterior de este mismo capítulo de nuestro libro:

$F[n] = b_n$	Forma que debe tomar $Y_p = u_p$
α (constante)	A (constante)
αn^k (k entero positivo)	$A_0 n^k + A_1 n^{k-1} + \ldots\ldots + A_{k-1} n + A_0$
$\alpha . k^n$	$A . k^n$
$\alpha . \cos kn$	$A \cos kn + B \operatorname{sen} kn$
$\alpha . \operatorname{sen} kn$	$A \cos kn + B \operatorname{sen} kn$
$\alpha n^k l^n \cos tn$	$(A_0 n^k + \ldots + A_{k-1} n + A_k) l^n \cos tn + (B_0 n^k + \ldots + B_{k-1} n + B_k) l^n \operatorname{sen} tn$
$\alpha n^k l^n \operatorname{sen} tn$	$(A_0 n^k + \ldots + A_{k-1} n + A_k) l^n \cos tn + (B_0 n^k + \ldots + B_{k-1} n + B_k) l^n \operatorname{sen} tn$

Prosiguiendo con el parangón de las ecuaciones diferenciales, reparemos en que cuando b_n está formada por la suma de varios términos, la selección apropiada para u_p es la suma de las expresiones u_p correspondientes a cada uno de los términos por separado.

5. EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Hemos visto anteriormente que para obtener una solución particular de una ecuación lineal no homogénea, en el caso de ser el segundo miembro un polinomio, bastaba con ensayar un polinomio de igual grado (salvo que se presentasen fenómenos de *resonancia*), que se obtenía por aplicación del método de los coeficientes indeterminados.

De igual forma, si el segundo miembro es una exponencial del tipo a^n, bastaba con ensayar otra expresión exponencial de la forma $A \cdot a^n$, donde A se determinaba también igualando coeficientes. En el caso de que *a* fuera raíz de la ecuación característica, téngase en cuenta lo dicho, en caso similar, para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Vamos a exponer, a continuación, un método aplicable en todo caso para la determinación de la solución general de la ecuación lineal no homogénea una vez conocida la correspondiente solución de la homogénea asociada. Se denomina de “variación de parámetros o constantes” y, como casi siempre, tiene su parangón en la resolución de las ecuaciones diferenciales. Sea, v. gr., la ecuación siguiente, que tomamos de tercer orden, para hacer más clara la exposición subsiguiente,

$$a \cdot u_{n+3} + b \cdot u_{n+2} + c \cdot u_{n+1} + d \cdot u_n = \varphi(n),\ \forall n \in \mathbf{N},$$

y supongamos que la homogénea correspondiente, admite las tres soluciones particulares, linealmente independientes v_1, v_2 y v_3; por tanto, la solución general de la homogénea será: $u_n^* = Av_1 + Bv_2 + Cv_3$.

Si ahora suponemos que las tres constantes A, B y C se substituyen por tres funciones de n, A_n, B_n y C_n con la condición de que: $u = A_n v_1 + B_n v_2 + C_n v_3$ sea la solución general de la homogénea de la ecuación completa.

Teniendo en cuenta que:

$\Delta u = A_n \Delta v_1(n) + B_n \Delta v_2(n) + C_n \Delta v_3(n) + v_1(n+1) \cdot \Delta A_n + v_2(n+1) \cdot \Delta B_n +$ $+ v_3(n+1) \cdot \Delta C_n$, se puede obtener una condición complementaria, haciendo:

$$v_1(n+1) \cdot \Delta A_n + v_2(n+1) \cdot \Delta B_n + v_3(n+1) \cdot \Delta C_n = 0 . \qquad [I]$$

Entonces la expresión de $\Delta^2 u$, resulta ser:

$\Delta^2 u = A_n \Delta^2 v_1(n) + B_n \Delta^2 v_2(n) + C_n \Delta^2 v_3(n) + \Delta v_1(n+1) \cdot \Delta A_n + \Delta v_2(n+1) \cdot \Delta B_n +$ $+ \Delta v_3(n+1) \cdot \Delta C_n$.

Una nueva condición complementaria se obtiene de:

$$\Delta v_1(n+1) \cdot \Delta A_n + \Delta v_2(n+1) \cdot \Delta B_n + \Delta v_3(n+1) \cdot \Delta C_n = 0 . \qquad [II]$$

De forma análoga se obtiene $\Delta^3 u$:

$$\Delta^3 u = A_n \Delta^3 v_1(n) + \cdots + \Delta^2 v_3(n+2) \cdot \Delta C_n .$$

La ecuación propuesta, en definitiva, se puede escribir así:

$(a \cdot E^3 + b \cdot E^2 + c \cdot E + d)u_n = \varphi(n)$, y como $E = 1 + \Delta$, se tendrá que:

$$[a(1+\Delta)^3 + b(1+\Delta)^2 + c(1+\Delta) + d]u_n = \varphi(n)$$

o sea: $[a\Delta^3 + (3a + b)\Delta^2 + (3a + 2b + c)\Delta + (a + b + c + d)]u_n = \varphi(n)$.

Substituidos, en esta igualdad, los valores de Δu, $\Delta^2 u$ y $\Delta^3 u$, se obtiene una ecuación que, junto con [I] y [II], conforma un sistema que permite despejar

$$\Delta A_n = F_1(n); \quad \Delta B_n = F_2(n) \quad y \quad \Delta C_n = F_3(n) \; .$$

Si $\Delta^{-1}F_1$, $\Delta^{-1}F_2$ y $\Delta^{-1}F_3$ son calculables, sus expresiones conteniendo, cada una de ellas, una nueva constante, proporcionan la solución buscada.

6. ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Las ecuaciones lineales de coeficientes variables, de orden superior al primero, no son siempre resolubles exactamente. Pero en el caso de que se pueda descomponer en factores lineales P(E), su solución es perfectamente viable; esto es, si escribimos el primer miembro de la ecuación, en la forma:

$$E^k u_n + A_1 E^{k-1} u_n + \cdots + A_k u_n = (E^k + A_1 E^{k-1} + \cdots + A_k) u_n = P(E) u_n \; .$$

P(E) se puede descomponer en factores de la forma:
$(E - B_1)(E - B_2) \dots (E - B_k)$, donde tanto las A_i como las B_i son funciones de *n*, y la solución de la ecuación se obtiene a partir de ecuaciones de primer orden. Por tanto, el problema previo a resolver es el relativo a la ecuación lineal de primer orden. Hay que tener cuidado con la descomposición de P(E), pues hay que recordar que "E" no es más que un operador.

Sea, ahora, la ecuación:

$u_{n+1} - B_n u_n = (E - B_n)u_n = 0$, de donde: $u_{n+1} = B_n u_n$, y dando valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n = B_{n-1} \cdot u_{n-1} \\ u_{n-1} = B_{n-2} \cdot u_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_2 = B_1 \cdot u_1 \end{array} \right.$$

y multiplicando, se tendrá que: $u_n = B_{n-1} \cdot B_{n-2} \dots \cdot B_1 u_1$, y tomando el valor u_1, como una constante C, resulta en definitiva:

$$u_n = C \cdot B_1 \cdot B_2 \dots \cdot B_{n-1} = C \cdot \prod_{i=1}^{n-1} B_i \; .$$

Si la ecuación fuese no homogénea, se tendría una expresión del tipo: $u_{n+1} - B_n u_n = \varphi(n)$, que se puede determinar su solución por el método de variación de parámetros. En efecto, haciendo:

$u_n = C_n B_1 B_2 \dots B_{n-1}$; $Eu_n = C_{n+1} B_1 B_2 \dots B_{n-1} B_n$; y por tanto:

$B_1 B_2 \dots B_n (C_{n+1} - C_n) = \varphi(n)$, o bien: $\Delta C_n = \frac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \dots B_n}$, de donde:

$$C_n = \Delta^{-1} \frac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \dots B_n} = \sum_{n=1}^{n-1} \frac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \dots B_n} + K$$, donde K es una nueva constante.

Por lo tanto, se tendrá que: $u_n = B_1 B_2 \dots B_{n-1} \sum_{n=1}^{n-1} \frac{\varphi(n)}{B_1 B_2 \dots B_n} + K B_1 B_2 \dots B_{n-1}$.

7. LA TRANSFORMADA Z

7.1. CONCEPTO

Del mismo modo que la transformada de Laplace resulta una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales, la transformada Z lo es homólogamente para resolver ecuaciones en diferencias finitas lineales. Y así, veamos, v. gr., como en el campo de la Ingeniería Electrónica la transformada Z convierte una señal real o compleja, definida en el dominio del tiempo discreto, en una representación en el dominio de la frecuencia compleja.

El nombre de "Transformada Z" procede de la variable del dominio, al igual que se podría llamar "Transformada S" o "Transformada p" a la Transformada de Laplace. Probablemente, un nombre más adecuado para la TZ podría haber sido el de "Transformada de Laurent", ya que está basada en la serie de Laurent[3]. La TZ es a las señales de

[3] The *Laurent series* of a complex function *f*(*z*) is a representation of that function as a power series which includes terms of negative degree. It may be used to express complex functions in cases where a Taylor series expansion cannot be applied. The Laurent series was named after and first published by Pierre Alphonse Laurent in 1843. Karl Weierstrass may have discovered it first in 1841 but did not publish it at the time. More generally, Laurent series can be used to express holomorphic functions defined on an annulus, much as power series are used to express holomorphic functions defined on a disc. A *Laurent polynomial* is a Laurent series in which only finitely many coefficients are non-zero. Laurent polynomials differ from ordinary polynomials in that they may have terms of negative degree. Laurent series cannot in general be multiplied. Algebraically, the expression for the terms of the product may involve infinite sums which need not converge (one cannot take the convolution of integer sequences). Geometrically, the two Laurent series may have non-overlapping annuli of convergence. Two Laurent series with only *finitely* many negative terms can be multiplied: algebraically, the sums are all finite; geometrically, these have poles at *c*, and inner radius of convergence 0, so they both converge on an overlapping annulus. Thus when defining formal Laurent series, one requires Laurent series with only finitely many negative terms. Similarly, the sum of two convergent Laurent series need not converge, though it is always defined

tiempo discreto lo mismo que la de Laplace a las señales de tiempo continuo.

La transformada Z, al igual que otras transformaciones integrales, puede ser definida como una transformada unilateral o bilateral, como veremos a continuación.

7.2. LA TRANSFORMADA Z BILATERAL

La TZ bilateral de una señal definida en el dominio del tiempo discreto x[n] es una cierta función X(z) que se define así:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

, donde n es un número entero y z es, en general, un número complejo de la forma: $z = A \cdot e^{i\omega}$. Aquí, A es el módulo de z, y ω podría ser la frecuencia o velocidad angular expresada en radianes por segundo (rad/s.) en cierto tipo de problemas.

7.3. LA TRANSFORMADA Z UNILATERAL

De forma alternativa, en los casos en que x[n] está definida únicamente para *n* = 0, la transformada Z *unilateral* se define como:

$$X^{+}(z) = Z^{+}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

En el procesamiento de señales, se usa esta definición cuando la señal es causal. En este caso, la transformada Z resulta ser una serie de Laurent con ROC del tipo $|z| > R$, es decir, que dicha serie converge "hacia afuera".

Un ejemplo interesante de la TZ unilateral es la función de generación de probabilidades, donde x[n] es justamente la probabilidad que toma una variable discreta aleatoria en el instante *n*, y la función X(z) suele escribirse como X(s), ya que s = z-1.

Pues bien, como consecuencia de todo ello, las propiedades de las transformadas Z resultan especialmente útiles en la teoría de la probabilidad.

formally, but the sum of two bounded below Laurent series (or any Laurent series on a punctured disk) has a non-empty annulus of convergence. (FRANQUET, 2013).

7.4. LA TRANSFORMADA Z INVERSA

La Transformada Z inversa se define del siguiente modo[4]:

$$x[n] = Z^{-1}\{(X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Aquí, C es un círculo cerrado que envuelve el origen y la región de convergencia (ROC). El contorno C debe contener todos los polos de X(z). Un caso especial y simple de esta integral circular es que cuando C es el círculo unidad (que también puede usarse cuando la ROC incluye el círculo unidad), obtenemos la transformada inversa de tiempo discreto de Fourier.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

La TZ con un rango finito de *n* y un número finito de *z* separadas de forma uniforme puede ser procesada de forma eficiente con el algoritmo de Bluestein[5]. La transformada discreta de Fourier (DFT) es un caso especial de la TZ, y se obtiene limitando *z* para que coincida con el círculo unidad.

7.5. REGIÓN DE CONVERGENCIA

La región de convergencia, también conocida abreviadamente como ROC, define la región donde la transformada-z existe. La ROC es una región del plano complejo donde la TZ de una señal tiene una suma finita.

---

[4] Aquí se utiliza el concepto de *integral de contorno*. Una *integral de línea* o *curvilínea* es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva. En el caso que se trate de una curva es cerrada en dos dimensiones o del plano complejo o plano de Gauss, y se llama también *integral de contorno*. Ejemplos prácticos de su utilización pueden ser los siguientes:

- el cálculo de la longitud de una curva en el espacio,
- el cálculo del volumen de un objeto descrito por una curva, objeto del que se posee una función (campo escalar) que describe su volumen a lo largo de la curva,
- también para el cálculo del trabajo que se realiza para mover algún objeto a lo largo de una trayectoria teniendo en cuenta los campos de fuerzas (descritos por campos vectoriales) que actúen sobre el mismo.

[5] El algoritmo de Bluestein FFT (1968), comúnmente llamado el *chirrido transformada Z algoritmo* (1969), es una transformada rápida de Fourier (FFT) o algoritmo que calcula la transformada de Fourier discreta (DFT) de tamaños arbitrarios (incluidos los primeros tamaños) por re-expresión de la DFT como una convolución. El otro algoritmo de FFT de tamaños primos, conocido como algoritmo de Rader, también trabaja por la reescritura de la DFT como una convolución. De hecho, el algoritmo de Bluestein se puede utilizar para calcular las transformaciones más generales que la DFT, basado en la transformada Z unilateral.

La ROC para una x[n] es definida como el rango de z para la cual la transformada-z converge. Ya que la transformada-z es una serie de potencia, converge cuando $x[n]\cdot z^{-n}$ es absolutamente sumable. Y así:

$$ROC = \{z : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} < \infty\}$$

7.6. MULTIPLICACIÓN POR a^n

Una propiedad interesante consiste en que si X[Z] es la transformada Z de X[n], entonces la transformada Z de $a^n X[n]$ está dada por $X[a^{-1}Z]$.

Demostración:

$$Z(a^n X[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n X[n] Z^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} X[n](a^{-1}z)^{-n} = X[a^{-1}z]$$

Siempre estamos suponiendo que X[n] = 0 para n < 0.

7.7. TABLAS CON LOS PARES MÁS HABITUALES DE LA TRANSFORMADA Z

Dada una ecuación en diferencias finitas de orden *n*, utilizamos las propiedades de la transformada Z, en especial las de linealidad y desplazamiento, para transformarla en una ecuación algebraica. Después, aplicaremos las siguientes tablas:

	Señal, x(n)	Transformada Z, X(z)	ROC
1	$\delta(n)$	1	todo z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$

(continúa)

	Señal, x(n)	Transformada Z, X(z)	ROC
6	$-na^n u(-n-1)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
7	$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
8	$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
9	$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
10	$a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Por otra parte, la siguiente tabla muestra la correspondiente transformada Z de algunas secuencias discretas, usando la propiedad de desplazamiento:

Función Discreta	Transformada Z
X[n+4]	$Z^4X[Z]-Z^4X[0]-Z^3[1]-Z^2X[2]-ZX[3]$
X[n+3]	$Z^3X[Z]-Z^3X[0]-Z^2X[1]-ZX[2]$
X[n+2]	$Z^2X[Z]-Z^2X[0]-ZX[1]$
X[n+1]	ZX[Z]-ZX[0]
X[n]	X[Z]
X[n-1]	$Z^{-1}X[Z]$
X[n-2]	$Z^{-2}X[Z]$
X[n-3]	$Z^{-3}X[Z]$
X[n-4]	$Z^{-4}X[Z]$
…	…
X[n-k]	$Z^{-k}X[Z]$

7.8. LA SERIE DE POTENCIAS COMO TRANSFORMACIÓN FUNCIONAL

Sea la sucesión: a_0, a_1 …, a_n, … que representaremos por $\{a_n\}$. Vamos a establecer la transformación funcional que hace corresponder a $\{a_n\}$, la siguiente función de variable compleja:

$$X(z) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ,$$

y que, por analogía con la transformación de Laplace ya estudiada para la variable continua, representaremos por:

$$X(z) = f(z) = T\{a_n\} = Z\{a_n\}.$$

Calculemos ahora la transformada de la sucesión: a_k, a_{k+1}, …, a_{k+n} ,

que representaremos por $\{a_{n+k}\}$. Esto es:

$$T\{a_{n+k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} z^n = \frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \frac{1}{z^k}\left(a_0 + a_1 z + ... + a_{k-1} z^{k-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{z^k} f(z) - \frac{1}{z^k}\left(a_0 + a_1 z + ... + a_{k-1} z^{k-1}\right).$$

Obtengamos ahora la transformación de la sucesión:

a^0, a^1, a^2, … a^n, … = $\{a^n\}$. Se tendrá que: $T\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n$.

Eligiendo z de forma que: $|az|<1$, resulta en definitiva, que:

$$T\{a^n\} = \frac{1}{1 - az} .$$

8. ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE VOLTERRA DEL TIPO CONVOLUCIÓN

8.1. INTRODUCCIÓN

Consideremos la ecuación en diferencias de Volterra escalar del tipo convolución de la forma:

$$x(t+1) = c \cdot x(t) + \sum_{i=0}^{t} k(t-i) \cdot x(i), \forall c \in \Re .$$

Esta ecuación resulta análoga, en versión discreta, a la ecuación integrodiferencial de Volterra del tipo convolución siguiente:

$$x'(t) = c\cdot x(t) + \int_0^t k(t-s)\cdot x(s)\,,$$

al tiempo que constituye un caso particular de la ecuación:

$$x(t+1) = c(t)\cdot x(t) + \sum_{i=t_0}^{t} k(t,i)\cdot x(i) + g(t).$$

Pues bien, se puede usar la transformada Z para resolver y analizar la estabilidad de la solución nula de la ecuación planteada utilizando la definición de convolución, con lo que podemos reescribir dicha ecuación en la forma siguiente:

$$x(t + 1) = c\cdot x(t) + k(t) * x(t).$$

Aplicando ahora la transformada Z a ambos miembros de esta ecuación obtendremos que:

$$z\cdot\tilde{x}(z) - z\cdot x(0) = c\cdot\tilde{x}(z) + \tilde{k}(z)\cdot\tilde{x}(z)\,,$$

y despejando $\tilde{x}(z)$ obtenemos: $\tilde{x}(z) = \dfrac{z\cdot x(0)}{z - c - \tilde{k}(z)}$, con lo que tomando la transformada Z inversa correspondiente a esta última ecuación podemos obtener la solución buscada de la ecuación inicialmente planteada.

8.2. EJEMPLO 1

Consideremos la ecuación en diferencias de Volterra escalar, de tipo convolución, dada por la expresión:

$$x(t+1) = x(t) + \sum_{i=0}^{t} k(t-i)\cdot x(i) \text{ , con: } x(0) = x_0\,,$$

donde: $(k(t)) = (0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots)$.

Para $x_0 \neq 0$ tomando la Z-transformada a ambos miembros de esta igualdad y despejando $\tilde{x}(z)$ obtenemos que:

$$\tilde{x}(z) = \frac{(z-2)\,x_0}{(z-3)}\,.$$

Utilizando fracciones parciales y tomando la Z-transformada inversa obtenemos como solución general: $x(t) = (3^{t-1})x_0$ para $t \geq 1$.

8.2. EJEMPLO 2

Se trata de hallar la solución de la ecuación en diferencias de Volterra dada por la expresión:

$$x(t+1) = 1 - \sum_{i=0}^{t} e^{t-i} x(i) \text{ , con: } x(0) = x_0.$$

Tomando la Z-transformada a ambos miembros de la ecuación y despejando $\tilde{x}(z)$ obtenemos que:

$$\tilde{x}(z) = \frac{(z-e)(1+x_0(z-1))}{(z-1)(z-e+1)}.$$

Para $|z| > e$, utilizando fracciones parciales, tenemos que:

$$\tilde{x}(z) = \frac{1-e}{(z-1)(2-e)} + \frac{1}{(2-e)(z-e+1)} + \frac{x_0 z}{z-e+1} - \frac{e \cdot x_0}{z-e+1}.$$

Tomando la Z-transformada inversa y por la linealidad obtenemos:

$$(x(t)) = \left(x_0, \frac{1-e}{2-e} + \left(\frac{1}{2-e}\right) + x_0(e-1) - e \cdot x_0, \frac{1-e}{2-e} + \left(\frac{1}{2-e}\right)(e-1) + x_0(e-1)^2 - e \cdot x_0 (e-1), \right.$$
$$\left. , \frac{1-e}{2-e} + \left(\frac{1}{2-e}\right)(e-1)^2 + x_0(e-1)^3 - e \cdot x_0(e-1)^2, \ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

de donde deducimos que la solución general buscada será:

$$x(t) = \frac{1-e}{2-e} + \left(\frac{1}{2-e} - x_0\right)(e-1)^{t-1} \text{ , } \forall\ t > 0.$$

8.3. EJEMPLO 3

Consideremos ahora la ecuación de tipo convolución de Volterra dada por la expresión:

$$x(t+1) = \frac{-1}{4} x(t) + \sum_{r=0}^{t} \left(\frac{1}{2}\right)^{r-t} x(r).$$

Tomando la Z-transformada en ambos lados de la ecuación dada y despejando x(z), tenemos que:

$$x(z) = \frac{z \cdot x(0)}{z + \frac{1}{4} - \frac{z}{z-2}}.$$

En este caso tenemos que: $g(z) = z + \frac{1}{4} - \frac{z}{z-2}$ y sus raíces son $z_1 = \frac{11+\sqrt{153}}{8} = \frac{11+3\sqrt{17}}{8}$ y $z_2 = \frac{11-\sqrt{153}}{8} = \frac{11-3\sqrt{17}}{8}$, que son polos simples de $\frac{1}{g(z)}$. Calculamos el residuo en el primer polo, y así tenemos:

$$g_{-1} = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{1}{g(z)} = \frac{-5+\sqrt{153}}{2\sqrt{153}}$$, y para el otro polo tenemos que:

$$g_{-1} = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) \frac{1}{g(z)} = \frac{5+\sqrt{153}}{2\sqrt{153}},$$

luego la solución general buscada es la siguiente:

$$x(t) = x(0)\left(\left(\frac{-5+\sqrt{153}}{2\sqrt{153}} \right)\left(\frac{11+\sqrt{153}}{8} \right)^t + \left(\frac{5+\sqrt{153}}{2\sqrt{153}} \right)\left(\frac{11-\sqrt{153}}{8} \right)^t \right).$$

9. ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO DEL MERCADO

9.1. EL MODELO DE LA “TELARAÑA”

P. A. Samuelson[6], en sus “Fundamentos del análisis económico”, acepta la siguiente definición de Ragnar Frisch: “Un sistema es *dinámico* si su conducta en el tiempo está determinada por las ecuaciones funcionales, en las cuales están involucradas en forma esencial las variables en diferentes puntos del tiempo”.

Los modelos dinámicos más utilizados en Economía vienen determinados por ecuaciones en diferencias finitas o recurrentes, aunque también pueden estar definidos por ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, e incluso por ecuaciones integrales e integro-diferenciales. Ahora bien, si la variable *tiempo* figura explícita en el modelo o bien si se incluye la derivada respecto al tiempo de una variable económica (consumo o producción, por ejemplo), el modelo en cuestión no es necesariamente dinámico, pudiendo, en tales casos, tratarse de un modelo estático histórico.

El modelo dinámico causal o no histórico más sencillo es el que aparece en los manuales de Economía con el nombre de *teorema de la telaraña*. Se consigue al dinamizar el modelo de equilibrio en un mercado

[6] Obra citada en la bibliografía.

de libre concurrencia, presentado en su forma más elemental, bajo el supuesto de que la demanda de un bien o servicio reacciona de manera instantánea tras las variaciones del precio, en tanto que la cantidad ofrecida se ajusta al precio de un período (*lag* o retardo) anterior[7].

Pues bien, expresadas las correspondientes ecuaciones en forma lineal, el modelo viene dado así:

$$\begin{cases} \text{Demanda (D)} \Rightarrow X_t = a + b\cdot P_t \\ \text{Oferta (S = O)} \Rightarrow X_t = a' + b'\cdot P_{t-1} \end{cases}$$

Este retardo existente en el modelo se justifica, v. gr., en el caso de la producción agraria, porque el agricultor siembra determinados productos cuando está vigente el precio de la última campaña y supone que dicho precio se mantendrá aproximadamente cuando recoja su cosecha.

En una situación de equilibrio del mercado en que $P_t = P_{t-1} = P_e$, como se sabe, se verifica que:

$$D = S \Rightarrow X_e = a + b\cdot P_e = a' + b'\cdot P_e;\ \text{de donde: } P_e = (a-a')/(b'-b),$$

en donde X_e y P_e son, respectivamente, la cantidad y el precio de equilibrio para los que se satisface la coincidencia de la cantidad ofrecida y demandada.

Se parte, en principio, de una situación inicial que no es de equilibrio (X_0, P_0) como consecuencia de algún hecho excepcional (una sequía o una importación masiva, por ejemplo). Para este precio P_0 la demanda está dispuesta a adquirir una cantidad X_1 que será su oferta para el período 1; sin embargo, la oferta X_1 determina un precio P_1 para el que la demanda solamente está dispuesta a comprar la cantidad X_2, y así sucesivamente, como muestra la figura siguiente.

En este caso se tiende a un punto de equilibrio al ocurrir que la relación de las pendientes, expresadas en valor absoluto, de las funciones de oferta y demanda, es menor que la unidad, es decir, que se cumple:

$$|b'| < |b|.$$

Véase, al respecto, la siguiente representación gráfica:

[7] El modelo de telaraña dinámico se caracteriza por un retardo en la oferta. En el equilibrio de mercado, como sabemos, la oferta es igual a la demanda. El modelo entra a formar parte de la econometría en su planteamiento y de la metodología matemática con respecto a la solución, al llegar a una ecuación de diferencias finitas de primer orden.

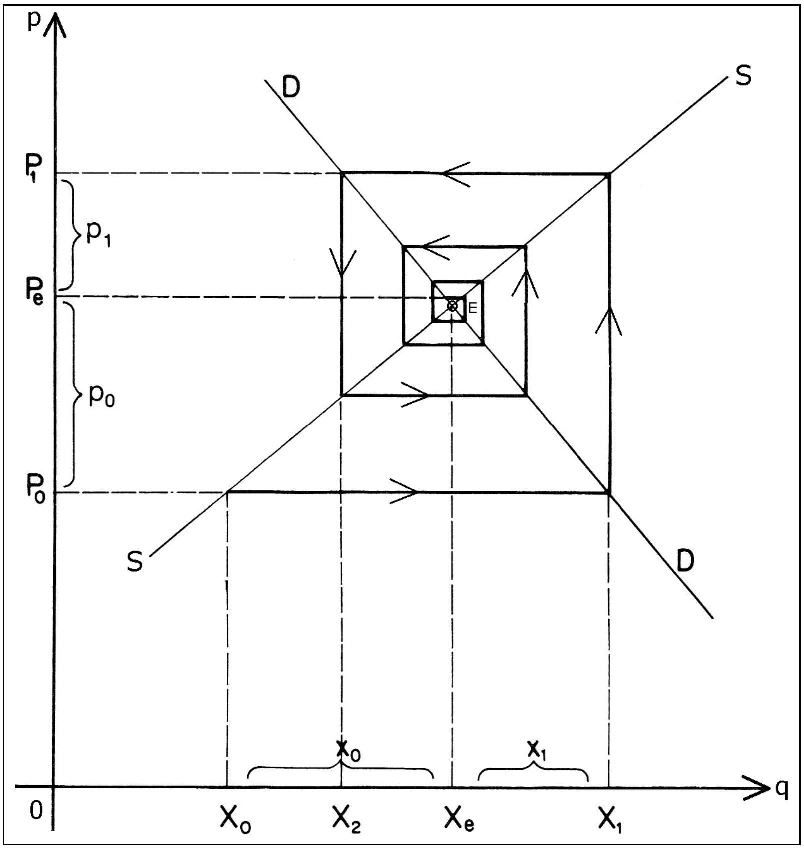


FIG. 10.2. Modelo de la telaraña convergente al equilibrio.

Como puede comprobarse gráficamente, si $|b'|>|b|$ sucede que las posiciones sucesivas para cada valor de *t* son puntos que se alejan cada vez más del punto de intersección (equilibrio) de las funciones de oferta y demanda y nos hallamos en el caso de un movimiento *explosivo*. Por último, si resulta que $|b'|=|b|$ nos moveremos siempre entre los cuatro vértices de un rectángulo y no existirá convergencia ni divergencia.

En realidad, la hipótesis mencionada de "esperar que se mantenga el precio del año anterior" no está plenamente justificada con la actitud normal de los agricultores o, en general, de otros productores o fabricantes, que planifican su producción del año siguiente a partir de un cierto *precio esperado* P_t^* que, solo en el caso de coincidir con el del año anterior (P_{t-1}), nos situaría de nuevo en el modelo expuesto de la telaraña.

9.2. ECUACIONES RECURRENTES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Estas ecuaciones, que intervienen en algunos modelos económicos y, particularmente en el de la telaraña, se pueden resolver explícitamente y adoptan la forma general:

$$v_{n+1} = a \cdot v_n + b_n \text{ , } \forall\ n \in \mathbf{N = Z^+},$$

con $a \in \Re$ y siendo b_n una aplicación definida sobre los números naturales y con valores reales.

En el caso en que b_n = constante, la ecuación antedicha adopta la configuración:

$$v_{n+1} = a \cdot v_n + c \ , \ \forall \ n \in \mathbf{N}, \text{ con } a,c \in \Re.$$

Como siempre, la resolución de esta ecuación exige buscar, en principio, la solución de la homogénea, esto es:

$v_{n+1} - a \cdot v_n = 0$, o bien su ecuación equivalente: $v_n - a \cdot v_{n-1} = 0$.

La ecuación característica de la homogénea será: $r - a = 0$, de donde: $r = a$, con lo que la solución de la homogénea es: $v_n^* = \alpha \cdot r^n$, siendo α una constante arbitraria.

La solución de la ecuación inhomogénea o completa exige ensayar la solución particular constante: $v_p = k$, con lo que:

$$k - a \cdot k = c = (1 - a)k \ , \text{ de donde: } k = \frac{c}{1-a} \ ,$$

y la solución general buscada de la ecuación recurrente planteada, será la siguiente:

$$\boxed{v_n = v_n^* + v_p = \alpha \cdot r^n + \frac{c}{1-a}}.$$

En el estudio de la estabilidad y los puntos de equilibrio del mercado pueden presentarse, entonces, los siguientes casos:

1. Si $|r| = 1$, que puede presentar dos subcasos, esto es:

   - si $r = 1$, entonces no hay puntos de equilibrio (si $c \neq 0$), o bien todos los números reales son puntos de equilibrio (si $c = 0$).
   - si $r = -1$, entonces se trata de una sucesión que oscila solo entre dos valores (oscilaciones constantes).
2. Si $|r| \neq 1$, también se pueden presentar dos situaciones diferentes, a saber:

   - si $|r| < 1$, entonces todas las soluciones convergen a un punto de equilibrio estable y, a su vez, se presentan los siguientes subcasos:

- si $0 < r < 1$, entonces todas las soluciones son monótonas, es decir, crecientes o decrecientes.
- si $-1 < r < 0$, entonces todas las soluciones son oscilantes. Ello significa que los términos de índice par tienen signo diferente que los de índice impar, y los precios tienden al precio de equilibrio.
- si $r = 0$, entonces también $a = 0$ y la solución de la homogénea es $v_n^* = 0$, y se tendrá que:

$$v_n = v_n^* + v_p = 0 + c = c \text{ (cte.)}$$

- si $|r| > 1$, entonces no existe convergencia al punto de equilibrio y todas las sucesiones solución son divergentes. También aquí pueden presentarse dos subcasos:

  - si $r > 1$, entonces las soluciones son sucesiones monótonas.
  - si $r < -1$, entonces las soluciones son oscilantes, de terminando "oscilaciones explosivas". En este caso, el modelo en estudio solo tiene sentido para un período de tiempo limitado hasta que aparecen precios negativos, lo que carece de significado económico.

9.3. ECUACIONES RECURRENTES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

9.3.1. Ecuaciones de segundo orden

En este caso, se tendrá una expresión general del tipo:

$$v_{n+2} = a \cdot v_{n+1} + b \cdot v_n + b_n, \ \forall\ n \in \mathbf{N}, \text{ con } a,b \in \Re,$$

y siendo b_n una aplicación definida sobre los números naturales y con valores reales.

En el caso en que b_n = constante, la ecuación antedicha adopta la configuración:

$$v_{n+2} = a \cdot v_{n+1} + b \cdot v_n + c \ , \ \forall\ n \in \mathbf{N}, \text{ con } a, b, c \in \Re.$$

Como siempre, la resolución de esta ecuación exige buscar, en principio, la solución de la homogénea, esto es:

$$v_{n+2} - a \cdot v_{n+1} - b \cdot v_n = 0, \text{ o bien su ecuación equivalente:}$$

$$v_n - a \cdot v_{n-1} - b \cdot v_{n-2} = 0.$$

La ecuación característica de la homogénea, será:

$$r^2 - a \cdot r - b = 0, \text{ con las raíces:}$$

$$r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} ; r_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \; ; r_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \,.$$

En el caso de ser estas raíces reales y distintas ($\forall\ r_i \neq r_j$), la solución de la ecuación homogénea será:

$$v_n^* = c_1 \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^n + c_2 \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n.$$

En el caso de ser estas raíces reales múltiples, las soluciones correspondientes a cada una de ellas deberían aparecer en la combinación lineal tantas veces como indicase su orden o grado de multiplicidad, siendo necesario multiplicar cada solución por *n* cuando aparezca por segunda vez, por n^2 si aparece por tercera vez, y así sucesivamente, hasta completar, en cada caso, el número de veces que aparece.

La solución de la ecuación inhomogénea o completa exige ensayar la solución particular constante: $v_p = k$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que:

$$k - a \cdot k - b \cdot k = c = (1 - a - b)k \text{ , de donde: } k = \frac{c}{1 - a - b} \,,$$

y la solución general buscada de la ecuación en diferencias finitas planteada, será:

$$\boxed{v_n = v_n^* + v_p = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + \frac{c}{1 - a - b}}\,.$$

Por último, en el estudio de la estabilidad y los puntos de equilibrio del mercado pueden presentarse diferentes casos y subcasos en función de los valores de *r*, al igual que sucedía con las ecuaciones recurrentes lineales de primer orden, que no entraremos a detallar aquí por obvias razones de espacio y oportunidad, habida cuenta de la menor incidencia y aplicabilidad de este tipo de ecuaciones en diferencias finitas en las diversas ramas de la Economía.

9.3.2. Ecuaciones de tercer y mayor orden

En este caso, se tendrá una expresión general del tipo:

$$v_{n+3} = a_1 \cdot v_{n+2} + a_2 \cdot v_{n+1} + a_3 \cdot v_n + b_n,\ \forall\ n \in \mathbf{N}, \text{ con } a_1,a_2,a_3 \in \Re,$$

y siendo b_n una aplicación definida sobre los números naturales y con valores reales. En el caso en que b_n = constante, la ecuación antedicha adopta la configuración siguiente:

$$v_{n+3} = a_1 \cdot v_{n+2} + a_2 \cdot v_{n+1} + a_3 \cdot v_n + c\ ,\ \forall\ n \in \mathbf{N}, \text{ con } (a_1,a_2,a_3,c) \in \Re.$$

Como siempre, la resolución de esta ecuación exige buscar, en principio, la solución de la homogénea o incompleta, esto es:

$$v_{n+3} - a_1 \cdot v_{n+2} - a_2 \cdot v_{n+1} - a_3 \cdot v_n = 0, \text{ o bien su ecuación equivalente:}$$

$$v_n - a_1 \cdot v_{n-1} - a_2 \cdot v_{n-2} - a_3 \cdot v_{n-3} = 0.$$

La ecuación característica de la homogénea, será:
$r^3 - a_1 \cdot r^2 - a_2 r - a_3 = 0$, con las raíces correspondientes, de tal suerte que en el caso de ser estas raíces reales y distintas ($\forall\ r_i \neq r_j \neq r_m$), la solución de la ecuación homogénea correspondiente será:

$$v_n^* = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n\ .$$

En el caso de tratarse de raíces reales múltiples, valgan al respecto las mismas consideraciones realizadas en el epígrafe anterior. Evidentemente, en el caso de tratarse de una ecuación recurrente de orden k, es inmediato comprobar que las *k* soluciones particulares siguientes: r_1^n, r_2^n, r_3^n, … , r_k^n, son linealmente independientes y, por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias será una combinación lineal de las funciones r_1^n, r_2^n, …, así:

$$v_n^* = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n + \dots + c_k \cdot r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot r_i^n\ ,$$

siendo las c_i constantes arbitrarias.

La solución de la ecuación inhomogénea o completa exige ensayar la solución particular constante: $v_p = k$; para ello substituiremos este valor en la ecuación inicial, con lo que se obtiene:

$$k - a_1 \cdot k - a_2 \cdot k - a_3 \cdot k = c = (1 - a_1 - a_2 - a_3)k,$$

de donde: $k = \dfrac{c}{1 - a_1 - a_2 - a_3}$, y la solución general buscada de la ecuación recurrente planteada, será:

$$\boxed{v_n = v_n^* + v_p = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n + \frac{c}{1 - a_1 - a_2 - a_3}}.$$

Las mismas consideraciones pueden hacerse extensivas a las ecuaciones recurrentes de orden *k*.

Veamos, en fin, que también aquí en el estudio de la estabilidad y los puntos de equilibrio del mercado pueden presentarse diferentes casos y subcasos en función de los valores de *r*, al igual que sucedía con las ecuaciones recurrentes lineales de primer orden, que no entraremos a detallar aquí por obvias razones de espacio y oportunidad, habida cuenta de la menor incidencia y aplicabilidad de este tipo de ecuaciones recurrentes en las diversas ramas de la Economía.

9.4. ECUACIONES RECURRENTES NO LINEALES

Al igual que sucedía en la teoría de las ecuaciones diferenciales, los problemas serios comienzan cuando se trata de resolver ecuaciones de recurrencia no lineales, a las que ya nos hemos referido, por cierto, en el epígrafe 2.4. del presente capítulo. No hay métodos que funcionen para todos los casos, pero para ciertas familias de ecuaciones es posible efectuar ciertas transformaciones de los espacios que hacen las veces de dominio y rango de las posibles soluciones, de tal suerte que la ecuación transformada sí resulta lineal. Así, para una ecuación de recurrencia sobre una incógnita a_n, un cambio de rango es una transformación sobre la incógnita. Dichas ecuaciones, como las lineales que acabamos de ver, pueden ser homogéneas o no y de coeficientes constantes o variables. Un ejemplo cualquiera de ellas vendría dado por la función de beneficio en el tiempo siguiente: $B^2_{t+2} = t^2 \cdot B_t \cdot B_{t+1}$, que podrá resolverse siguiendo las técnicas de resolución ejemplificadas en el capítulo siguiente de nuestro libro.

Las colecciones de secuencias de datos aparecen en problemas muy variados relacionados con la Economía en los que se dispone de conjuntos de datos discretos que se pueden modelizar a través de una relación de recurrencia, por ejemplo, unidades anuales de producción de cierta materia prima. Además de los tipos de problemas mencionados, también se puede considerar un abanico mucho más amplio de cuestiones relacionadas con problemas económicos que se expresan como EDO, o bien como ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

CAPÍTULO 11

APLICACIONES MICROECONÓMICAS DE LAS ECUACIONES RECURRENTES

1. INTRODUCCIÓN

De hecho, los ejercicios que se incluyen en el presente apartado se refieren fundamentalmente a problemas de equilibrio dinámico con ajuste retrasado. En ellos, las funciones de oferta de los productores indican la manera acerca de cómo ajustan sus *outputs* al precio vigente. Puesto que la producción requiere tiempo, el ajuste no puede ser instantáneo, sino que sólo resulta perceptible al cabo de un determinado período de tiempo.

Como ya hemos visto en el capítulo anterior, los artículos agrícolas proporcionan, con frecuencia, casos típicos de ofertas retrasadas, en que el empresario agrario basa sus planes de producción de acuerdo con el precio del mercado en períodos anteriores y se realizan después de la cosecha; su output solamente se materializa en el período siguiente. Y así, la cantidad demandada en cualquier período depende del precio en aquel período, pero la cantidad ofrecida del bien o servicio depende del precio del período o períodos precedentes; en el primer caso (un período) nos hallaremos en presencia de una ecuación recurrente de primer orden, mientras que en el segundo caso (varios períodos) se tratará de ecuaciones recurrentes de orden superior (HENDERSON-QUANDT, 1962).

Desde luego, las condiciones de estabilidad dinámica no son siempre las mismas. En el caso dinámico simple, la estabilidad depende del parámetro *k* y de las pendientes de las curvas de oferta y de demanda; compradores y vendedores reaccionan ante el exceso de demanda. En cambio, en las situaciones de “telaraña” el exceso de demanda es nulo. Los compradores reaccionan ante las ofertas resultantes para los precios que ellos ofrecen, mientras que los vendedores responden ante los precios que resultan para las cantidades que ellos ofrecen para el período siguiente.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos representativos de lo aquí expuesto.

2. ECUACIONES RECURRENTES DE PRIMER ORDEN

2.1. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Ejemplo 1

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $2P_{t+1} + 3P_t = 0$, $\forall$ $t \in$ **N**, con la condición inicial: P_2 = 2’00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Primero se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores. La ecuación característica es: 2r + 3 = 0; r = -(3/2), y la solución general es: $P_t = C\left(-\frac{3}{2}\right)^n$.

Para hallar la solución particular se substituyen los valores de la condición dada en la ecuación general, de tal forma que:

$$P_2 = C\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 2\,;$$

se despeja C, de donde C = $\frac{8}{9}$, y la solución particular buscada será, por tanto:

$$\boxed{P_t = \frac{8}{9}\left(-\frac{3}{2}\right)^t = f(t)}.$$

b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \frac{8}{9}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^t = \pm\infty$$

Se tiene que $|r|$ = 3/2 = 1’5 > 1 y r < 0, con lo que las soluciones siempre divergen de forma oscilante mediante oscilaciones explosivas, y el modelo en cuestión carece de sentido económico a partir del período que t = 1 en que el precio resulta negativo, por lo que obviaremos la representación gráfica correspondiente.

Por otra parte, el precio de equilibrio sería: $5P_e = 0$; o sea: $P_e = 0$ €/ud.

Ejemplo 2

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $2P_{t+3} + P_{t+2} = 0$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con la condición inicial: $P_4 =$ 1'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Al ser una ecuación de primer orden, se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores, pasando primero a la ecuación equivalente siguiente: $2P_{t+1} + P_t = 0$, de donde:

$$P_{t+1} = -\frac{1}{2}P_t \text{ ; luego la solución general es: } P_t = C\left(-\frac{1}{2}\right)^t .$$

Para hallar la solución particular se procede de forma análoga al problema anterior, esto es:

$$P_4 = C\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1,$$

se despeja C, de donde C = 16 y, por tanto, la solución particular resulta ser:

$$\boxed{P_t = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^t = f(t)}.$$

b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t\to+\infty} P_t = 16 \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^t = 0 .$$

El modelo en cuestión carece de sentido económico a partir del período t = 1 en que el precio resulta negativo ($P_1 = -8$), por lo que obviaremos la representación gráfica correspondiente. Por otra parte, el precio de equilibrio sería: $3P_e = 0$; o sea: $P_e = 0$ €/ud., al que se tendería de modo oscilante, al ser: $|r| < 1$ y $-1 < (r = -1/2) < 0$.

Ejemplo 3

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+1} + 3P_t = 0$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con la condición inicial: P_0 = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
d) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Al ser una ecuación de primer orden, se calcula la solución general como en los ejercicios anteriores, por lo que:

$$P_t = C(-3)^t.$$

Por otra parte, la solución particular buscada se cumple para:

$P_0 = C = 2$, por lo que dicha solución será: $\boxed{P_t = 2(-3)^t = f(t)}$.

b) A largo plazo sucederá que: $\lim\limits_{t\to\infty} P_t = 2 \cdot \lim\limits_{t\to\infty} (-3)^t = \pm\infty$

Se tiene que $|r| = 3 > 1$ y $r < -1$, con lo que las soluciones siempre divergen de forma oscilante mediante oscilaciones explosivas, y el modelo en cuestión carece de sentido económico precisamente a partir del período t = 1 en que el precio resulta negativo, por lo que obviaremos la representación gráfica correspondiente. Por otra parte, el precio de equilibrio sería: $4P_e = 0$; o sea: $P_e = 0$ €/ud.

Ejemplo 4

Una explotación petrolífera produce $n_k \in \mathbf{N}$ barriles de petróleo diarios durante el año k, $\forall k \in K \subset \mathbf{N}$. En el k-ésimo año, la producción de petróleo aumenta en un k% respecto a la del año anterior. En estas condiciones, se pide encontrar el número de barriles que se extraen durante el año *k* sabiendo que se trabaja 300 días al año y que, durante el año cero, se extraen 100 barriles diarios.

Solución:

Si, $\forall k \in K \subset \mathbf{N}$, y_k indica el número de barriles extraídos durante el año *k*, entonces tenemos que $y_k = 300 \cdot n_k$. Además, como en el k-ésimo año la producción aumenta un k% respecto al año anterior, tenemos, $\forall k \in K \subset \mathbf{N}$, con $k \geq 1$,

$\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1} = \frac{k}{100} \cdot y_{k-1}$. Por lo tanto, incrementando un período se tendrá que: $\Delta y_k = \frac{k+1}{100} \cdot y_k$, de donde $\Delta y_k = \frac{k+1}{100} \cdot y_k = 0$.

De hecho, la ecuación en diferencias finitas resultante, lineal y homogénea, expresada en notación de subíndices, resulta ser:

$$100y_k - (100 + k)y_{k-1} = 0,$$

o bien incrementando un período resulta la ecuación equivalente:

$$100y_{k+1} - (100 + k + 1)y_k = 0.$$

Su ecuación característica es: $100r - 101 - k = 0$; $r = \frac{101+k}{100}$.

De aquí se deduce la solución general: $y_k = c \cdot \left(\frac{101+k}{100}\right)^k$.

Pero la condición inicial dada exige que:

$y_0 = c = 100$ barriles/día x 300 días/año = 30.000 barriles/año,

con lo que la solución particular buscada será: $y_k = 30.000 \cdot \left(\frac{101+k}{100}\right)^k$.

En otro orden de ideas, veamos que se trata de una ecuación en diferencias finitas lineal reducida de primer orden, con $p(k) = -\frac{k+1}{100}$. La solución general y_k, $\forall k \in K \subset \mathbf{N}$, será:

$$y_k = y_0 \prod_{s=0}^{k-1} [1 - p(s)] = y_0 \cdot \prod_{s=0}^{k-1} \left(1 + \frac{k+1}{100}\right) = y_0 \cdot \prod_{t=1}^{k} \left(1 + \frac{t}{100}\right),$$

que depende del parámetro y_0, que es el número de barriles que se extraen diariamente durante el año cero.

Por lo tanto, el número de barriles extraídos durante el año k, o sea, y_k, $\forall k \in K \subset \mathbf{N}$, será:

$$y_k = 300 \cdot n_k = 300 \cdot n_0 \cdot \coprod_{t=1}^{k} \left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

En consecuencia, si n_0 = 100 barriles/día, entonces se tendrá que:

$$\boxed{y_k = 300 \cdot 100 \cdot \coprod_{t=1}^{k} \left(1 + \frac{t}{100}\right) = 30.000 \cdot \coprod_{t=1}^{k} \left(\frac{100+t}{100}\right)}.$$

2.2. ECUACIONES INHOMOGÉNEAS O COMPLETAS

Ejemplo 1

El modelo de la telaraña es clásico en microeconomía. Con él se analiza, mediante una ecuación recurrente lineal, la variación de los precios de un bien o de un servicio ocasionada por la interacción entre la oferta y la demanda del mismo. Su nombre se debe a la semejanza que tiene su representación gráfica con una tela de araña. Pues bien, con los datos que se dan para el modelo de la telaraña, obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente.

Datos: $D_t = 5 – 3P_t$; $O_t = -2 + P_{t-1}$; P_0 = 4'00 €/ud.

Solución:

a) Las funciones de demanda y oferta son, respectivamente:

$$D_t = 5 – 3P_t, \quad S_t = O_t = -2 + P_{t-1}.$$

Igualando demanda y oferta para la búsqueda del punto de equilibrio, se tendrá que: $5 – 3P_t = -2 + P_{t-1}$. Por tanto, se tiene que:

$P_t + 1/3 \cdot P_{t-1} = 7/3$, que resulta ser una ecuación en diferencias de primer orden equivalente a: $3P_{t+1} + P_t = 7$, cuya ecuación característica de la homogénea es: $3r + 1 = 0$; $r = -(1/3)$.

Al ser: $0 < |r| < 1$ y $r < 0$, la solución converge de forma oscilante al punto de equilibrio estable; es decir, los precios tienden al precio de equilibrio. De hecho, la ecuación anterior se puede escribir de la forma siguiente:

$P_{t+1} = a \cdot P_t + c = -\frac{1}{3}P_t + \frac{7}{3}$, en que se cumple que: $a = -(1/3)$ y $c = 7/3$. Al ser: $-1 < (a = r = -0'333) < 0$, todas las soluciones son oscilantes, y los términos de índice par tienen signo diferente que los de índice impar.

La solución de la ecuación homogénea es: $P^*_t = k\left(-\frac{1}{3}\right)^t$, con k como constante arbitraria, ya que el polinomio característico es: 3r + 1.

Como solución particular busquemos: P_p = k', y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$k' + \frac{1}{3}k' = \frac{7}{3};\ \ \frac{4}{3}k' = \frac{7}{3};\ \ k' = \frac{7}{4}.$$

La solución general de la ecuación no homogénea o completa es:

$$\boxed{P_t = P^*_t + P_p = \frac{7}{4} + k\left(-\frac{1}{3}\right)^t},\ \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

Del mismo modo, si hacemos $P_t = P_{t-1} = P_e$, resultará un precio de equilibrio de: P_e = 7/4 = 1'75 €/ud., con q_e = -0'25 (lo que carecería de significado económico).

La representación gráfica del equilibrio del mercado, en cualquier caso, es la siguiente:

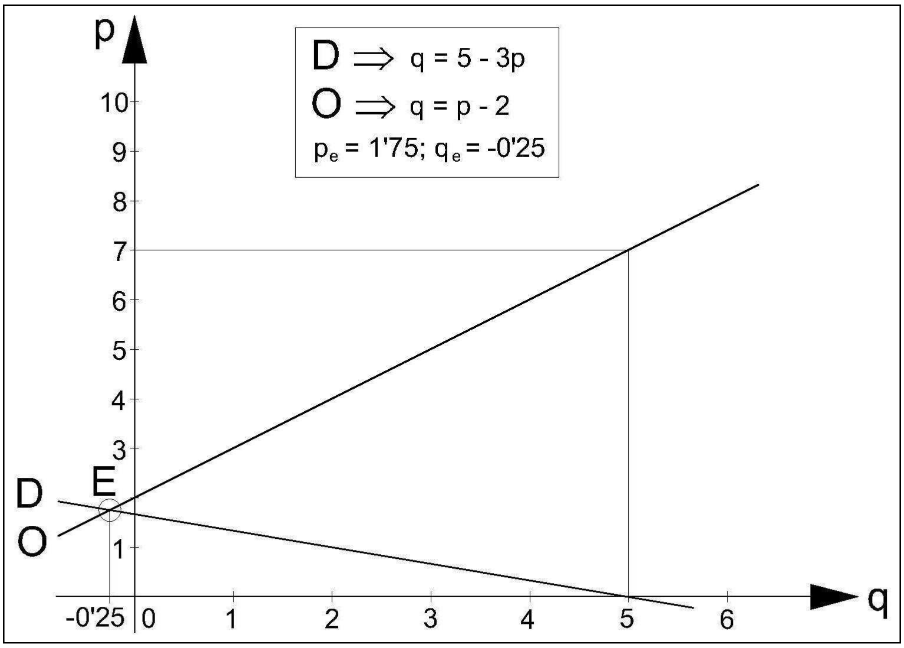


FIG. 11.1. Oferta, demanda y punto de equilibrio (I).

b) Puesto que la condición inicial dada exige que: P_0 = 4'00 €/ud., se tendrá que:

$$\frac{7}{4} + k\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 4;\ \ \frac{7}{4} + k = 4;\ \ k = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}.$$

Así pues, la solución particular es: $P_t = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t$, $\forall$ t $\in$ **N**

y, a largo plazo, sucederá que: $\boxed{\lim_{t\to+\infty} P_t = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^t = \frac{7}{4}}$ = 1'75 €/ud.,

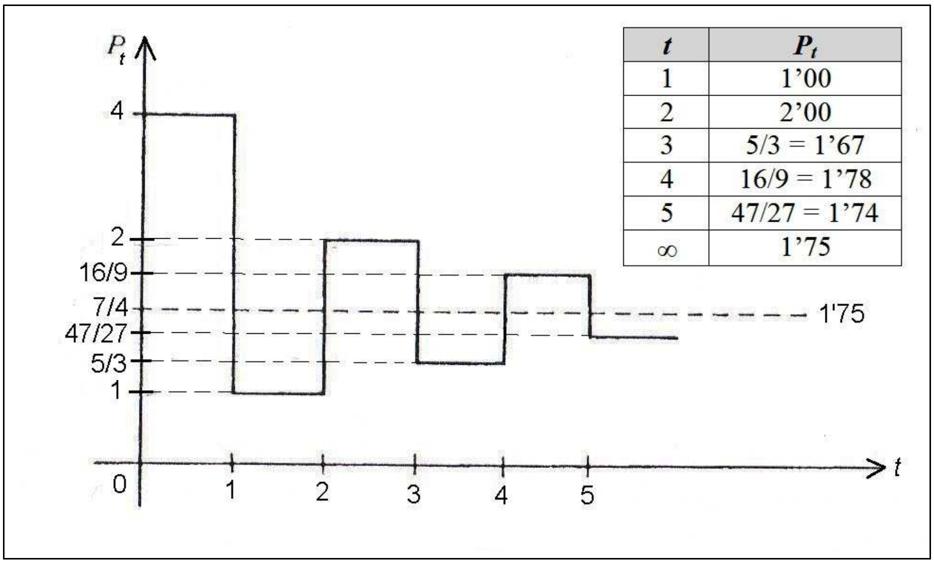
es decir, que el precio de equilibrio se estabilizará en (7/4) €/ud.

En el modelo de la telaraña pueden presentarse dos casos diferenciados, a saber:

- Si la pendiente de la curva de oferta es mayor que la pendiente de la curva de demanda, entonces las fluctuaciones disminuyen en magnitud con cada ciclo, así que un diagrama de precios mostrará que en un cierto plazo las cantidades parecerían una espiral interna, según lo ilustrado en el diagrama correspondiente. Este se llama *caso estable o convergente* y supone que los productores del bien o servicio van corrigiendo paulatinamente los errores de estimación del precio futuro.

- Si la pendiente de la curva de oferta es menor que la pendiente de la curva de demanda (la elasticidad de la demanda es menor que la de la oferta) entonces las fluctuaciones aumentan de magnitud con cada ciclo, de tal modo que la espiral de los precios y las cantidades se moverá hacia afuera. Este se llama el *caso inestable o divergente*.

Gráficamente, lo expuesto hasta ahora se puede representar mediante la siguiente figura:



t	P_t
1	1'00
2	2'00
3	5/3 = 1'67
4	16/9 = 1'78
5	47/27 = 1'74
∞	1'75

FIG. 11.2. Evolución temporal del precio (I).

Ejemplo 2

Con los datos que se dan para el siguiente modelo de la telaraña, obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio.
b) La tendencia del precio a largo plazo, así como la secuencia de precios (en €/ud.) y cantidades (en miles de ud.) para los dos siguientes períodos.
c) La representación gráfica correspondiente.

Datos: $D_t = 10 - P_t$; $O_t = 2P_{t-1}$; $P_0 = 4'00$ €/ud.

Solución:

a) Las funciones de demanda y oferta son, respectivamente:

$$D_t = 10 - P_t\ ,\quad S_t = O_t = 2P_{t-1}.$$

Igualando demanda y oferta para la búsqueda del punto de equilibrio del mercado, se tendrá que: $10 - P_t = 2P_{t-1}$. Por tanto, se tiene que:

$P_t + 2\cdot P_{t-1} = 10$, que resulta ser una ecuación en diferencias de primer orden equivalente a:

$P_{t+1} + 2P_t = 10$, cuya ecuación característica de la homogénea es la siguiente: $r + 2 = 0$; $r = -2 < -1$.

La solución de la ecuación homogénea es: $P^*_t = k(-2)^t$, con k como constante arbitraria, y resulta un equilibrio inestable (se trata de una solución compleja infinita) cuando t tiende a $+\infty$, puesto que el mercado en cuestión presenta oscilaciones explosivas.

Como solución particular busquemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$$k' + 2k' = 10\ ;\quad 3k' = 10\ ;\quad k' = \frac{10}{3}.$$

La solución general de la ecuación no homogénea o completa es:

$$\boxed{P_t = P^*_t + P_p = k(-2)^t + \frac{10}{3}},\ \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

Del mismo modo, si hacemos $P_t = P_{t-1} = P_e$, resultará un precio de equilibrio de: $P_e = 10/3 = 3'33$ €/ud., con $q_e = 20/3 = 6'67$ (6.667 ud.) y le corresponderán unos ingresos brutos de los vendedores de:

$$I_e = P_e \times q_e = 3'33 \times 6.667 = 22.222'22 \text{ €} .$$

La representación gráfica correspondiente del equilibrio del mercado es la siguiente:

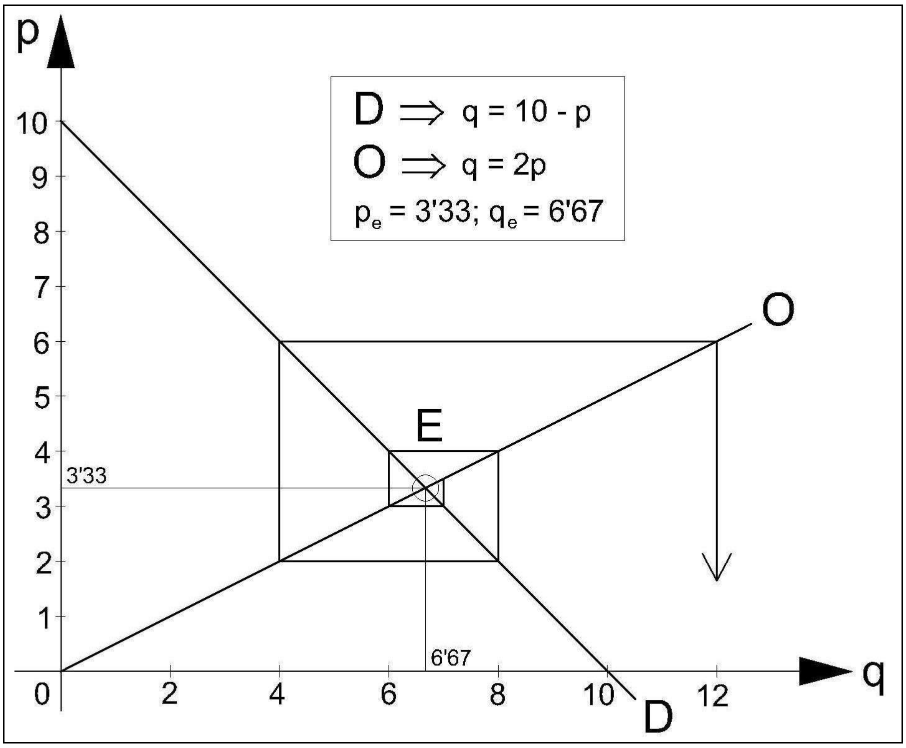


FIG. 11.3. Oferta, demanda y punto de equilibrio (II).

b) Puesto que la condición inicial dada exige que: $P_0 = 4'00$ €/ud., se tendrá que:

$$P_0 = \frac{10}{3} + k(-2)^0 = 4\,; \quad \frac{10}{3} + k = 4\,; \quad k = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}.$$

Así pues, la solución particular es: $P_t = \frac{10}{3} + \frac{2}{3}(-2)^t$, $\forall\, t \in \mathbf{N}$

y, a largo plazo, sucederá que: $\lim\limits_{t\to+\infty} P_t = \frac{10}{3} + \frac{2}{3}\lim\limits_{t\to+\infty}(-2)^t$, que, como ya se ha dicho, se trata de una solución compleja infinita.

Por otra parte, la secuencia temporal de precios y cantidades (tanto para la función de oferta como para la de demanda) pedida resulta claramente explosiva y se establece algebraicamente en el siguiente cuadro:

t	***P_t* (€ /ud.)**	***q_d* (ud.)**	***q_o* (ud.)**
0	4	6	8
1	2	8	4
2	6	4	12
3	-2	12	-4
4	14	-4	28
5	-18	28	-36
…	…	…	…
+∞	± ∞	--	--

c) Gráficamente, lo expuesto hasta ahora se puede representar mediante la siguiente figura:

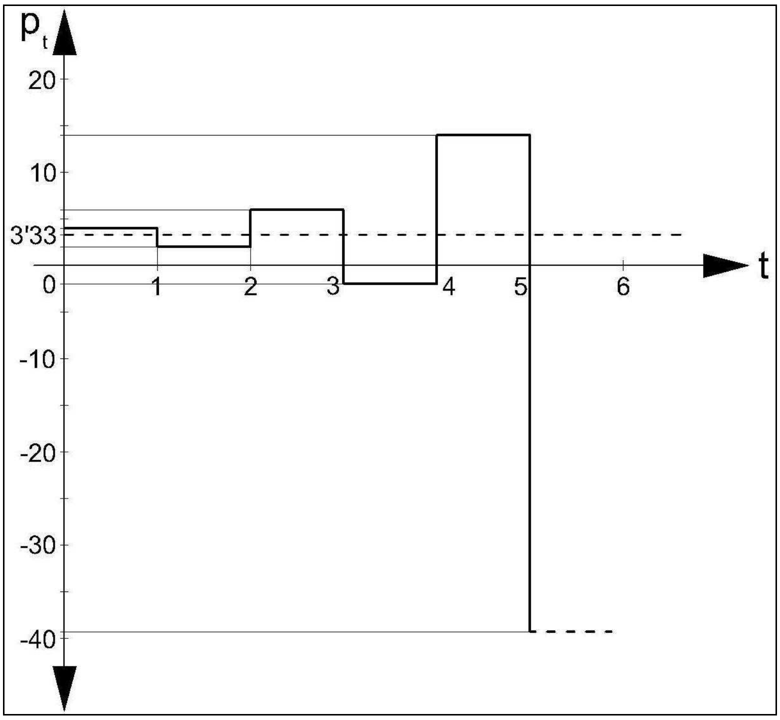


FIG. 11.4. Evolución temporal del precio (II).

En cualquier caso, a partir de t = 3 (con P_t = -2) se obtienen algunos precios y cantidades negativos, por lo que el modelo analizado carece de significado económico a medio y largo plazo.

Ejemplo 3

La función de la demanda de un cierto producto agrario viene dada por la ecuación: $X_t = 500 – 3P_t$, y la de la oferta por: $X_t = -200 + 4P_{t–1}$. Se pide:

a) La determinación del punto de equilibrio y la justificación de si las oscilaciones en torno a dicho punto siguen un movimiento amortiguado que las aproxima al precio de equilibrio o si, por el contrario, se trata de un movimiento explosivo.

b) Suponiendo que la sucesión de precios parte del inicial P_0 = 80 €/ud., determinar los precios sucesivos cuando t = {1, 2, 3, 4, 5}.

Solución:

a) La igualdad entre la cantidad demandada y la ofrecida (expresadas en miles de unidades) nos permite calcular el precio de equilibrio, es decir:

$$500 - 3P_t = -200 + 4P_{t-1} \ ,$$

y en la posición de equilibrio: $P_t = P_{t-1} = P_e$; de donde $700 = 7P_e$, es decir, que P_e = 100 €/ud. y q_e = 200 (200.000 ud.).

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:

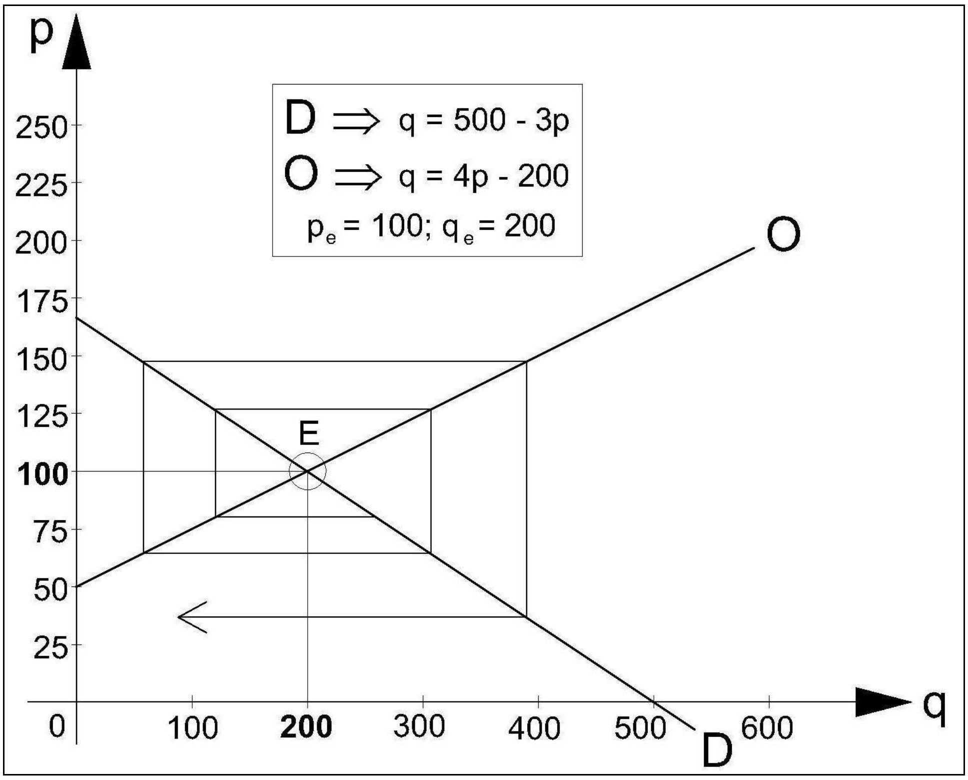


FIG. 11.5. Oferta, demanda y punto de equilibrio (II).

Por otra parte, como 4 > |-3|, es decir, como |b'| > |b|, se trata de un movimiento explosivo o dinámicamente inestable.

La ecuación en diferencias finitas lineal, de primer orden e inhomogénea resultante, es la siguiente:

$$-3P_t + 700 - 4P_{t-1} = 0, \text{ esto es:}$$

$3P_{t+1} + 4P_t = 700$; y la ecuación característica correspondiente de la homogénea es: $3r + 4 = 0$; $r = -\frac{4}{3} < -1 \rightarrow P_t^* = c\left(-\frac{4}{3}\right)^t$.

Ensayaremos ahora una solución particular constante de la ecuación completa, con lo que: $P_p = a$; y substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que:

$3a + 4a = 700 \rightarrow a = 100$; y entonces: $P_t = P_t^* + P_p = c\left(-\frac{4}{3}\right)^t + 100$;

b) Como: $P_0 = 80$ €/ud. $\rightarrow c + 100 = 80$; $c = -20$; la trayectoria temporal pedida del precio será:

$$\boxed{P_t = -20 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^t + 100}.$$

A partir de la solución del modelo dinámico, se tendrá que:

$$P_t - P_e = (b'/b) \cdot (P_{t-1} - P_e)$$

es decir, $P_t - 100 = -\frac{4}{3}(P_{t-1} - 100)$; o bien: $P_t = -\frac{4}{3}P_{t-1}$;

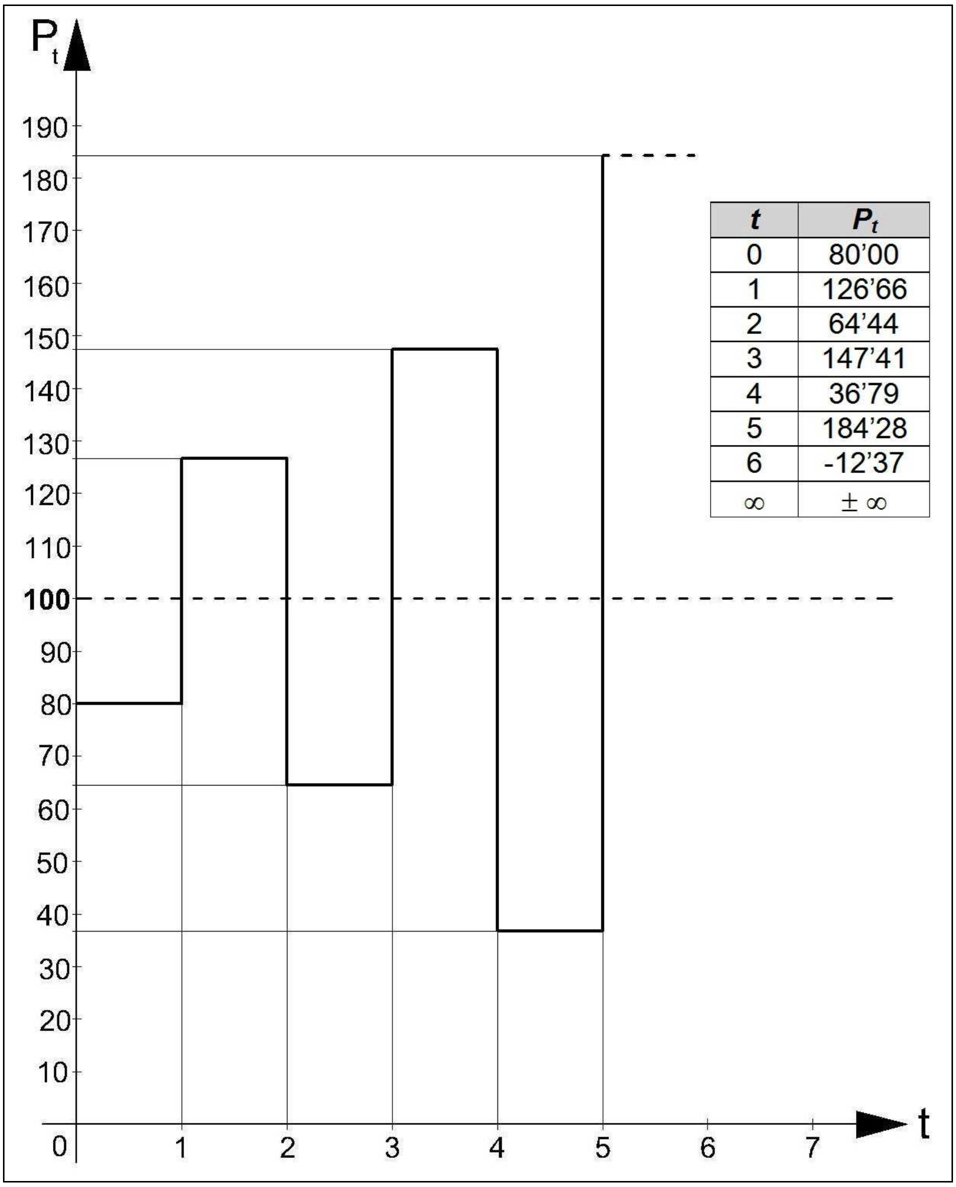
y, para t = {1, 2, 3, 4, 5}, se tendrá que:

$$P_1 = -\frac{4}{3}P_0 \;;\; P_2 = -\frac{4}{3}P_1 \;;\; \ldots \;;\; P_5 = -\frac{4}{3}P_4 \;;\; \ldots$$

y entonces se tiene que (con las cantidades expresadas en 10^3 ud.):

$$\begin{cases} P_1 - 100 = (-\frac{4}{3})(80 - 100); & P_1 = \frac{380}{3} = 126'66 \text{ € / ud.}; q_d = 120'00; q_o = 306'67 \\ P_2 - 100 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2(80 - 100); & P_2 = \frac{580}{9} = 64'44 \text{ € / ud.}; q_d = 306'67; q_o = 57'78 \\ P_3 - 100 = \left(-\frac{4}{3}\right)^3(80 - 100); & P_3 = \frac{3.980}{27} = 147'41 \text{ € / ud.}; q_d = 57'78; q_o = 389'63 \\ P_4 - 100 = \left(-\frac{4}{3}\right)^4(80 - 100); & P_4 = \frac{2.980}{81} = 36'79 \text{ € / ud.}; q_d = 389'63; q_o = -52'84 \\ P_5 - 100 = \left(-\frac{4}{3}\right)^5(80 - 100); & P_5 = \frac{44.780}{243} = 184'28 \text{ € / ud.}; q_d = -52'84; q_o = 537'12 \end{cases}$$

……………. y así sucesivamente, con la siguiente representación gráfica:



t	P_t
0	80’00
1	126’66
2	64’44
3	147’41
4	36’79
5	184’28
6	-12’37
∞	± ∞

FIG. 11.6. Evolución temporal del precio (III).

En este caso, a largo plazo se tendrá que:

$$\underset{t\to+\infty}{\text{lím.}} P_t = -20 \cdot \underset{t\to+\infty}{\text{lím.}} \left(-\frac{4}{3}\right)^t + 100 = \pm\infty,$$

Resulta un equilibrio ciertamente inestable (solución compleja infinita) cuando t tiende a +∞, puesto que el mercado presenta oscilaciones explosivas. En particular, el punto o precio de equilibrio no resulta estable y el modelo en cuestión solo tiene sentido para un período de tiempo limitado, precisamente el período o lapso a partir del cual comienzan a aparecer precios negativos que carecen de sentido económico (o sea, hasta que se cumple t = 6, puesto que P_6 = -12’37 €/ud.).

Ejemplo 4

Determinar la evolución temporal del precio de un bien determinado en un modelo donde la oferta y la demanda, expresadas en millones de ud., vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} D_t = 3 - 5P_t \\ O_t = -2 + 4P_{t-1} \end{cases}$$

y el precio de mercado, en cada período de tiempo, es el resultado de equilibrar la oferta y la demanda. Considérese P_0 = 0'60 €/ud.

Solución:

Igualando ambas ecuaciones para buscar el punto de equilibrio, se tiene que: $3 - 5P_t = -2 + 4P_{t-1}$; esto es: $5P_{t+1} + 4P_t - 5 = 0$, que es una ecuación equivalente en diferencias finitas, lineal y de primer orden, cuya ecuación característica de la homogénea viene dada por: $5r + 4 = 0$, de donde: $r = -\frac{4}{5}$.

La representación gráfica del equilibrio del mercado con su "telaraña" será la siguiente:

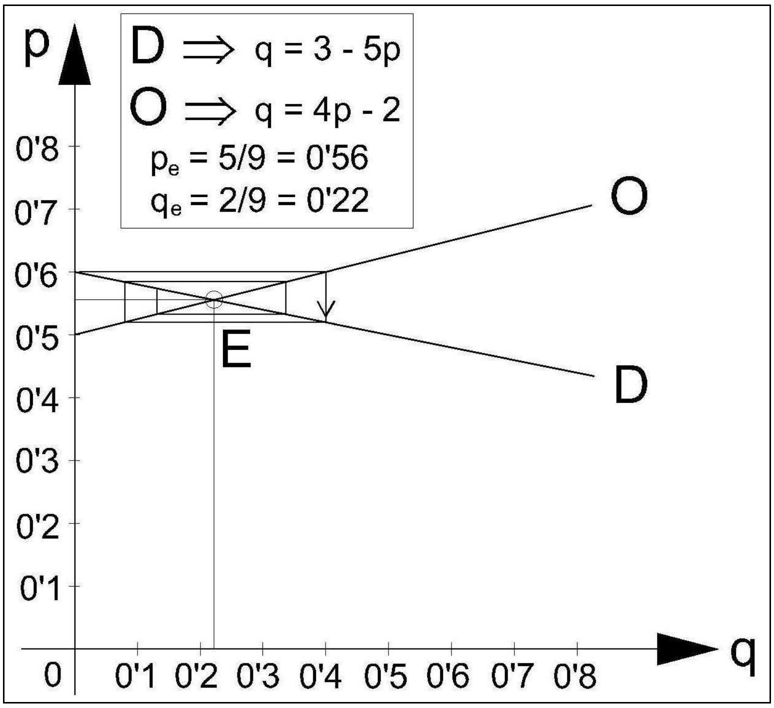


FIG. 11.7. Oferta, demanda y punto de equilibrio (IV).

Al ser: $0 < | r | < 1$, y $-1 < r < 0$, la solución converge de forma oscilante al punto de equilibrio. Es decir, los precios tienden al precio de equilibrio.

La solución de la ecuación homogénea es, pues: $P_t^* = k(-\frac{4}{5})^t$, siendo k una constante arbitraria. Como solución particular de la ecuación completa ensayemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$5k' + 4k' = 5, \text{ de donde: } k' = 5/9,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea o completa será:

$$\boxed{P_t = P_t^* + P_p = k(-\frac{4}{5})^t + \frac{5}{9}}\ , \forall\ t \in N$$

O también, para t = 0, se tendrá que: $P_0 = k + \frac{5}{9} = 0'60$, o sea:

$$\boxed{P_t = (P_0 - \frac{5}{9})\cdot(-\frac{4}{5})^t + \frac{5}{9} = \frac{2}{45}\cdot(-\frac{4}{5})^t + \frac{5}{9}}\ , \forall\ t \in N$$

Dando valores se obtiene que:

t	***P_t***	***q_d***	***q_o***
0	3/5 = 0'60	0	0'40
1	13/25 = 0'52	0'40	2/25 = 0'08
2	73/125 = 0'58	2/25 = 0'08	42/125 = 0'34
3	333/625 = 0'53	42/125 = 0'34	82/625 = 0'13
4	1793/3.125 = 0'57	82/625 = 0'13	922/3.125 = 0'30
5	8.453/15.625 = 0'54	922/3.125 = 0'30	2.562/15.625 = 0'16
…	…	…	…
+∞	5/9 = 0'56	2/9 = 0'22	2/9 = 0'22

A largo plazo sucederá, efectivamente, que:

$$P_e = \lim_{t \to +\infty} P_t = \frac{5}{9} + k \cdot \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^t = \frac{5}{9} = 0'56\ €/ud.,$$

con lo que el precio de equilibrio se estabilizará necesariamente en 0'56 €/ud., con $q_e = q_d = q_o = 2/9 = 0'22$ (222.222 ud.).

De hecho, también el precio de equilibrio vendría dado por la condición ($P_{t+1} = P_t = P_e$), o sea: $5P_e + 4P_e - 5 = 0$, de donde se deduce igualmente que: $P_e = 0'56$ €/ud. Los ingresos brutos del vendedor se deducirían así:

$$I_e = P_e \times q_e = 0'56 \times 222.222 = 124.444'32\ €\ .$$

Por último, la representación gráfica de la trayectoria temporal del precio de mercado será la siguiente:

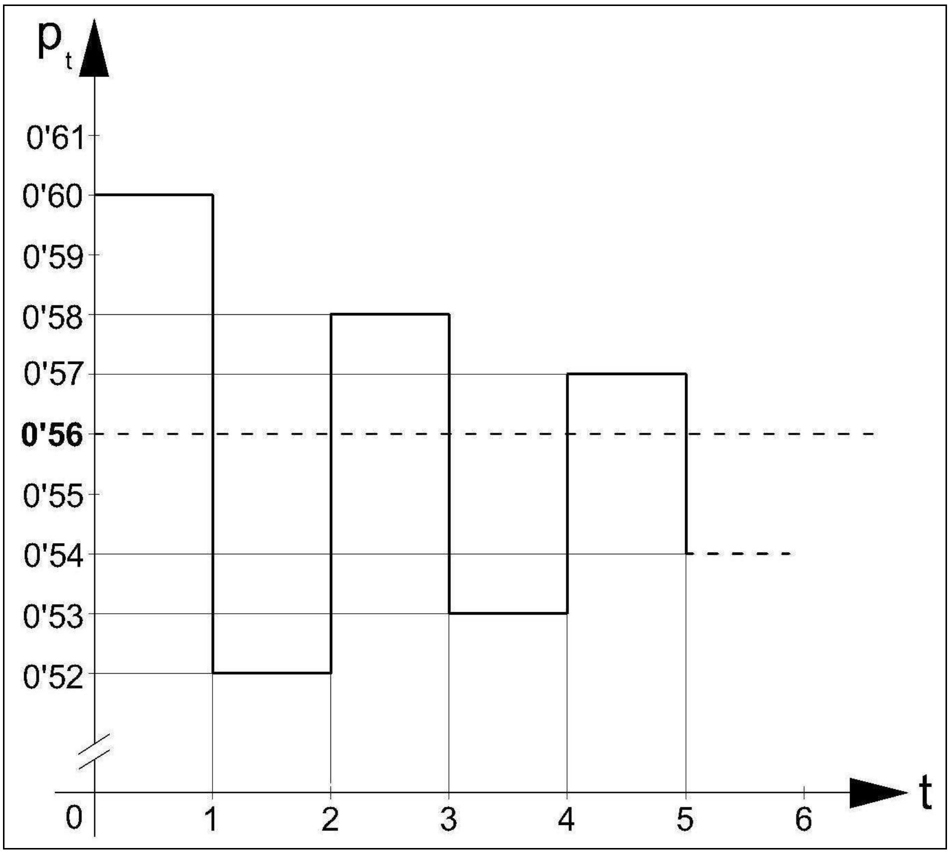


FIG. 11.8. Evolución temporal del precio (IV).

Ejemplo 5

En un mercado supuesto de competencia perfecta, las funciones de oferta y de demanda vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$\begin{cases} \text{Oferta del mercado } (S_t = O_t)\text{: } p = 8 - 0'025 \cdot q \\ \text{Demanda del mercado } (D_t)\text{: } p = 10 - 0'05 \cdot q \end{cases}$$

estando el precio (p) expresado en euros/ud. y la cantidad (q) del bien en unidades/día. Se pide:

1º) Comprobar si el equilibrio del mercado es estable, según la condición de estabilidad estática de Walras.

2º) Si la reacción dinámica del mercado es: $q_t - q_{t-1} = k \cdot F(q_{t-1})$, siendo $F(q_{t-1})$ la función de exceso del precio de demanda, determinar la estabilidad dinámica del mercado, según la condición de Marshall, para los valores de k siguientes: $k_1 = 10$, $k_2 = 60$ y $k_3 = 120$. Estimar los ingresos brutos anuales del vendedor, con un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

1º) No se cumple la condición de estabilidad estática de Walras[1]. Las condiciones de estabilidad se derivan de supuestos sobre la conducta en el mercado de compradores y vendedores. La condición antedicha se basa en el supuesto de que los compradores tienden a subir sus pujas si el exceso de demanda es positivo, mientras que los vendedores tienden a bajar sus precios si resulta negativo. Si este supuesto de conducta resulta correcto, un mercado es estable si una subida de precio disminuye el exceso de demanda.

En nuestro caso, la función de exceso de demanda es:

$$\begin{cases} O(p) \rightarrow 0'025 \cdot q = 8 - p \text{ ; } q = 320 - 40 \cdot p \\ D(p) \rightarrow 0'05 \cdot q = 10 - p \text{ ; } q = 200 - 20 \cdot p \end{cases}$$

$E(p) = D(p) - O(p) = 200 - 20 \cdot p - 320 + 40 \cdot p = 20 \cdot p - 120$, con lo que:

$$\frac{dE(p)}{dp} = 20 > 0, \text{ luego el mercado no es estable.}$$

2º) La función de exceso del precio de demanda es la diferencia existente entre el precio que los compradores están dispuestos a pagar, y los vendedores a pedir, por una cantidad dada del bien o servicio. El supuesto de conducta subyacente en la condición de estabilidad de Marshall establece que los productores tendrán tendencia a aumentar su *output* cuando el precio de exceso de demanda es positivo, y a bajarlo cuando es negativo. Si el precio del exceso de demanda es positivo, el productor se da cuenta de que los consumidores están ofreciendo un precio mayor que el que él pide para su producto y deduce que puede aumentar con provecho la cantidad ofrecida.

Para el caso contrario sirve un razonamiento análogo. Así, un equilibrio es estable en el sentido de Marshall cuando un aumento de la cantidad de producto reduce el precio del exceso de demanda.

[1] Léon Walras (1834-1910) was a French mathematical economist. He formulated the marginal theory of value (independently of William Stanley Jevons and Carl Menger) and pioneered the development of general equilibrium theory. In 1874 and 1877 Walras published *Elements of Pure Economics*, a work that led him to be considered the father of the general equilibrium theory. The problem that Walras set out to solve was one presented by Cournot, that even though it could be demonstrated that prices would equate supply and demand to clear individual markets, it was unclear that an equilibrium existed for all markets simultaneously. Walras constructed his basic theory of general equilibrium by beginning with simple equations and then increasing the complexity in the next equations. He began with a two person bartering system, then moved on to the derivation of downward-sloping consumer demands. Next he moved on to exchanges involving multiple parties, and finally ended with credit and money. Walras created a system of simultaneous equations in an attempt to solve Cournot's problem (which supposedly Walras at first thought was complete merely because the number of equations equalled the number of unknowns). (FRANQUET, 2013).

En nuestro caso será:

F(q) = D(q) – O(q) = (10 – 0’05·q) – (8 – 0’025·q) = 2 – 0’025·q, y entonces:

$\frac{dF(q)}{dq} = -0'025 < 0$, por lo que sí se cumple la condición de estabilidad estática de Marshall[2].

Puesto que la curva de demanda tiene pendiente negativa, ambas condiciones de estabilidad estática se satisfacen si la curva de oferta tiene pendiente positiva. Por lo tanto, la situación ordinaria de oferta-demanda resulta estable según ambas definiciones de Walras y Marshall. Contrariamente, si la curva de oferta tiene pendiente negativa, el equilibrio no puede ser estable de acuerdo con las dos definiciones[3]. Ambas condiciones no pueden cumplirse simultáneamente: si un equilibrio es estable en el sentido de Walras, dicho equilibrio es inestable en el sentido de Marshall. De hecho, estos resultados se pueden comprobar gráficamente de una forma más directa.

Así pues, la función de exceso del precio de demanda puede expresarse así:

$$F(q_{t-1}) = 2 - 0'025 \cdot q_{t-1} = 2 - \frac{q_{t-1}}{40}, \text{ o sea:}$$

[2] Alfred Marshall (1842-1924) was one of the most influential economists of his time. His book, *Principles of Economics* (1890), was the dominant economic textbook in England for many years. It brings the ideas of supply and demand, marginal utility, and costs of production into a coherent whole. He is known as one of the founders of economics. He desired to improve the mathematical rigor of economics and transform it into a more scientific profession. In the 1870s he wrote a small number of tracts on international trade and the problems of protectionism. In 1879, many of these works were compiled into a work entitled *The Theory of Foreign Trade: The Pure Theory of Domestic Values*. In the same year (1879) he published *The Economics of Industry* with his wife Mary Paley. Although Marshall took economics to a more mathematically rigorous level, he did not want mathematics to overshadow economics and thus make economics irrelevant to the layman. Accordingly, Marshall tailored the text of his books to laymen and put the mathematical content in the footnotes and appendices for the professionals. (FRANQUET, 2013).

[3] Las curvas o funciones de oferta que pueden tener pendiente negativa son la de oferta de *inputs* primarios tales como el trabajo y las de oferta de productos cuando existan economías o deseconomías externas. Solamente en estos casos pueden darse equilibrios inestables. Se pueden encontrar curvas de oferta negativas, por lo menos en un cierto tramo (no en su totalidad): la curva de oferta de trabajo, por ejemplo, tiene esa particularidad y está relacionada con los efectos ingreso y substitución. Por otra parte, la curva de oferta depende de la función de costes que, a su vez, depende de la tecnología y de los precios de los inputs del proceso productivo. Nada impide, pues, que con una tecnología concreta y unos determinados precios de los inputs resulte una curva de oferta con pendiente negativa. Y así sucede si imaginamos un mercado perfectamente competitivo y que la tecnología es tal que el coste marginal es decreciente, o bien que existe un coste fijo muy alto y coste marginal constante, o sea, con rendimientos crecientes a escala. Bajo estas circunstancias, el precio no será igual al coste marginal porque las empresas tendrían pérdidas, sino que el precio será igual al coste medio. En este caso, la curva de oferta -el coste medio- será decreciente, ya que el coste medio es también decreciente. Tal situación no resulta necesariamente estable, ya que se trata de un monopolio natural.

$$\Delta q = q_t - q_{t-1} = k \cdot F(q_{t-1}) = 2k - \frac{k \cdot q_{t-1}}{40};$$

$$q_t = 2k - \frac{k \cdot q_{t-1}}{40} + q_{t-1} = 2k + q_{t-1}(1 - \frac{k}{40}) = a + b \cdot q_{t-1}, \text{ donde:}$$

$a = 2k$ y $b = 1 - \frac{k}{40}$. Esto es: $q_t - b \cdot q_{t-1} = a$, o bien su ecuación en diferencias finitas lineal y de primer orden equivalente: $q_{t+1} - b \cdot q_t = a$.

La ecuación característica de la homogénea será: $r - b = 0$, o sea: $r = b$, por lo que la solución de la homogénea será: $q^*_t = c \cdot b^t$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la forma: $q_p = k$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que: $k - b \cdot k = a$; $k(1-b) = a$; $k = \frac{a}{1-b}$, y la solución general del problema planteado vendrá dada por la expresión:

$$q_t = q^*_t + q_p = c \cdot b^t + \frac{a}{1-b}, \text{ y entonces se tendrá que:}$$

$$q_0 = c + \frac{a}{1-b}, \text{ y } c = q_0 - \frac{a}{1-b}; \text{ de donde: } q_t = (q_0 - \frac{a}{1-b}) \cdot b^t + \frac{a}{1-b}.$$

Si $a = 2k$, y $b = 1 - \frac{k}{40}$, resultará que: $q_e = \frac{a}{1-b} = \frac{2k}{k/40} = 80$, que es la cantidad de equilibrio, con la nueva expresión de la solución general:

$$q_t = (q_0 - 80) \cdot (1 - \frac{k}{40})^t + 80, \ \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

Dicha cantidad de equilibrio también podría haberse obtenido igualando las funciones dadas de oferta y demanda, esto es:

$p_e = 8 - 0'025 \cdot q_e = 10 - 0'05 \cdot q_e$, de lo que se deduce: $q_e = 80$ ud./día, con $p_e = 6'00$ €/ud.

En estas condiciones, los ingresos brutos anuales obtenidos por el vendedor, considerando un calendario laboral de 240 días/año, serán los siguientes:

$$I = p_e \times q_e = 6'00 \text{ €/ud.} \times 80 \text{ ud./día} \times 240 \text{ días/año} = 115.200 \text{ €/año.}$$

La representación gráfica del equilibrio del mercado es la siguiente, de donde se deduce que no se trata de un "bien normal", puesto que la función de oferta es decreciente, esto es:

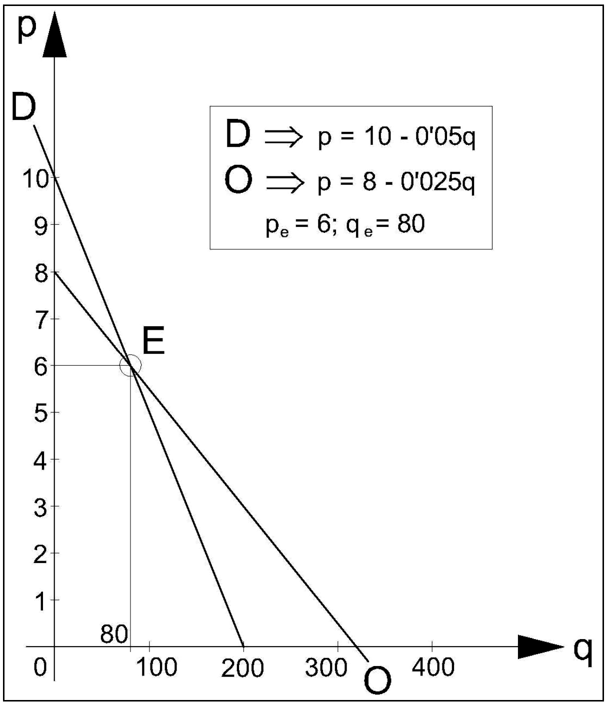
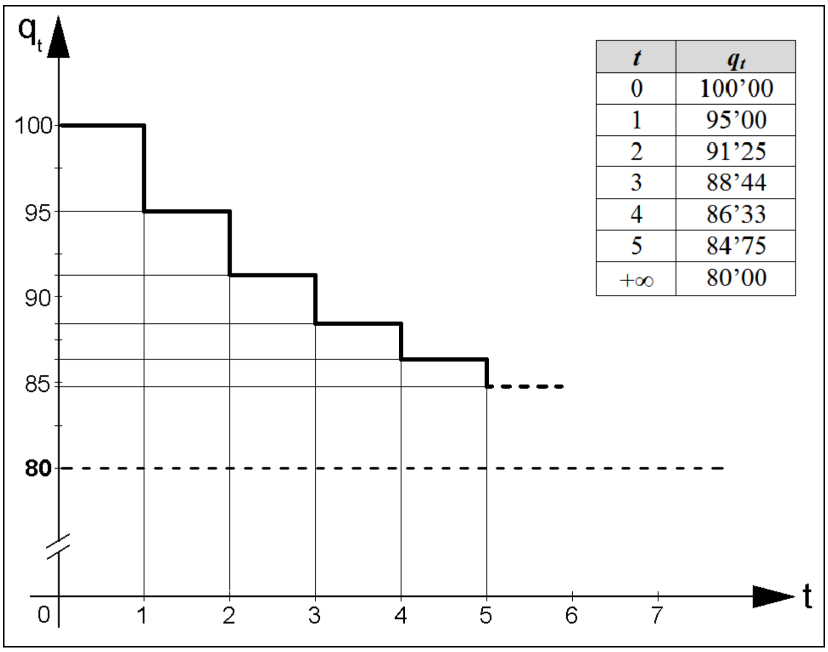


FIG. 11.9. Oferta, demanda y punto de equilibrio (V).

Ahora bien, para los diferentes valores de k propuestos, y para el supuesto, v. gr., de que q_0 = 100 ud./día, se tendrá, a su vez, en cada caso:

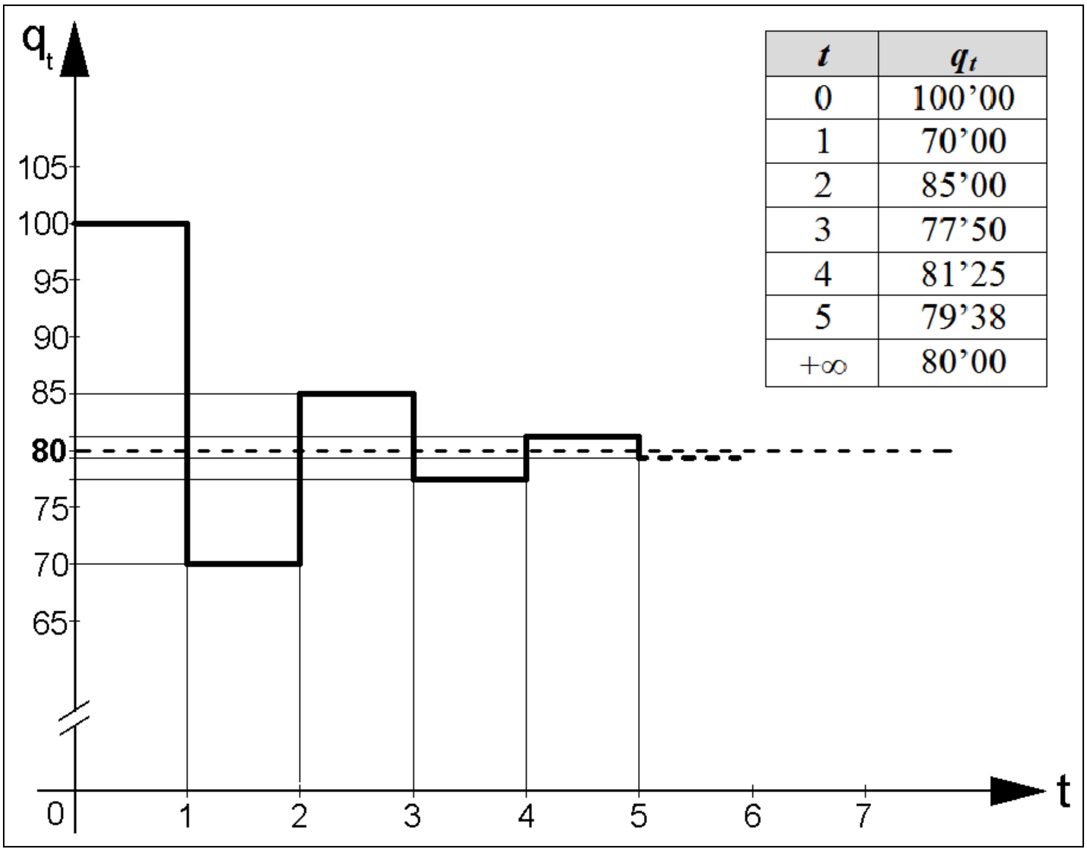
a) Si $k_1 = 10 \rightarrow q_t = (q_0 - 80)\cdot(\frac{3}{4})^t + 80 = 20\cdot(\frac{3}{4})^t + 80$. Resulta un equilibrio estable porque el primer miembro tiende a cero cuando t tiende a $+\infty$, y $|r| < 1$, con: $0 < (r = 0'75) < 1$, con la siguiente representación gráfica monótona decreciente:



t	*q_t*
0	100’00
1	95’00
2	91’25
3	88’44
4	86’33
5	84’75
+∞	80’00

FIG. 11.10. Evolución temporal de la cantidad (I).

b) Si $k_2 = 60 \rightarrow q_t = (q_0 - 80)\cdot(-\frac{1}{2})^t + 80 = 20\cdot(-\frac{1}{2})^t + 80$. Veamos que, en este caso, la cantidad oscila en el tiempo pero acercándose al nivel de equilibrio cuando t tiende a $+\infty$, y $|r| < 1$, con: $-1 < (r = -0'5) < 0$, con la siguiente representación gráfica donde se observa que todas las soluciones son oscilantes[4] amortiguadas, así:

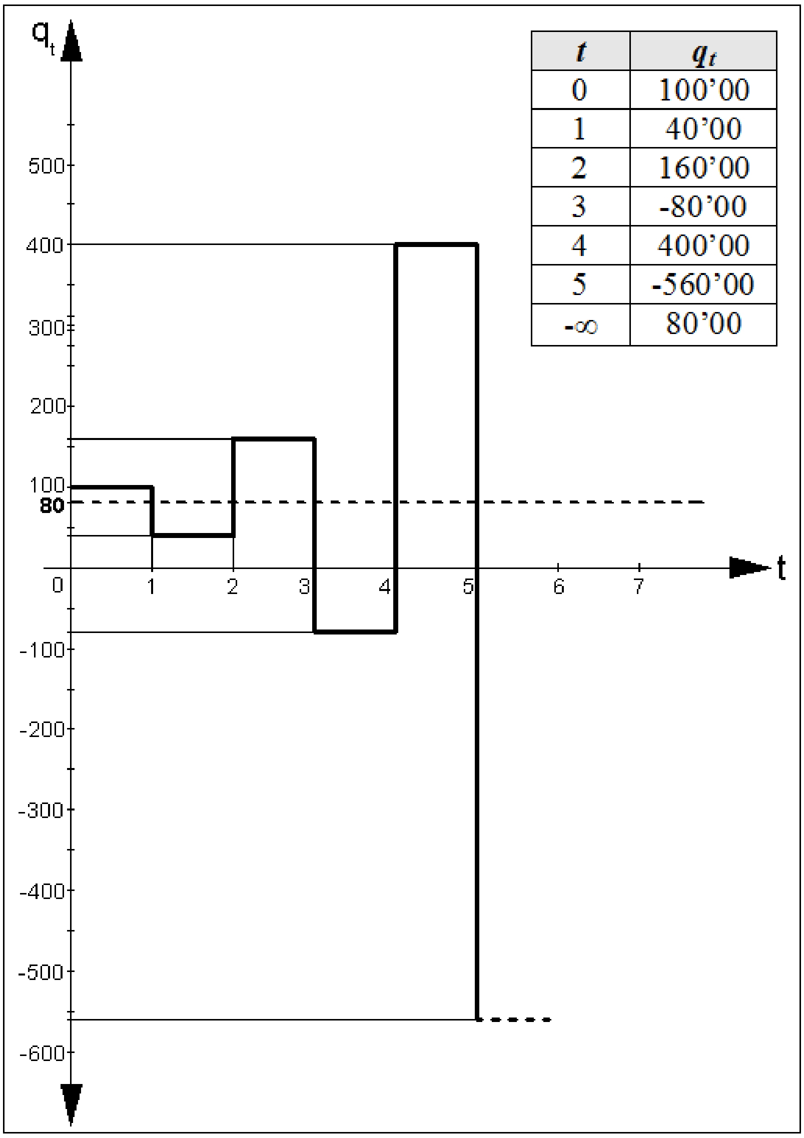


t	q_t
0	100'00
1	70'00
2	85'00
3	77'50
4	81'25
5	79'38
$+\infty$	80'00

FIG. 11.11. Evolución temporal de la cantidad (II).

c) Si $k_3 = 120 \rightarrow q_t = (q_0 - 80)\cdot(-2)^t + 80 = 20\cdot(-2)^t + 80$. Resultará entonces un equilibrio inestable (se trata de una solución compleja infinita) cuando t tiende a $+\infty$, puesto que el mercado presenta oscilaciones explosivas al ser $|r| > 1$ y $r = -2 < -1$, con la siguiente representación gráfica:

[4] Las sucesiones "oscilantes" son las que no tienen límite, es decir que no son convergentes ni divergentes. Son sucesiones con más de un punto de acumulación. Sus términos alternan de mayor a menor o viceversa. Existe un criterio de clasificación de dichas sucesiones en base a la distancia existente entre sus términos consecutivos. De este modo, si dicha distancia permanece constante la sucesión será *oscilante regular*; si la distancia decrece la sucesión será *oscilante amortiguada* y si, por el contrario, se incrementa, se tratará de una sucesión *oscilante explosiva*. Ejemplos de todas ellas se ven reflejados en los diversos ejercicios que aquí se proponen.



t	q_t
0	100’00
1	40’00
2	160’00
3	-80’00
4	400’00
5	-560’00
-∞	80’00

FIG. 11.12. Evolución temporal de la cantidad (III).

Debe tenerse en cuenta, en definitiva, que las afirmaciones acerca de la estabilidad del equilibrio dependen de los supuestos hechos sobre el mecanismo del mercado y la conducta de los que participan en él. *A priori*, no puede afirmarse cuál de las dos condiciones (Walras o Marshall) es más plausible en la realidad. En cualquier situación concreta, solo puede establecerse el punto de equilibrio después de acumular información empírica suficientemente validada acerca de los modelos de comportamiento de los que participan en el mercado en cuestión.

Las condiciones de estabilidad estática se formulan en términos de la relación de variación del exceso de demanda respecto al precio, o bien de la relación de cambio del precio del exceso de demanda respecto a la cantidad. Pero el análisis estático no intenta investigar el aspecto temporal del proceso de ajuste; en cambio, en el modelo de estabilidad dinámica no se esperan ajustes instantáneos: si el precio inicial no es igual al equilibrio, cambia y tiene lugar la recontratación. Si el nuevo precio sigue difiriendo del de equilibrio se ve forzado a cambiar otra vez. El equilibrio es estable en sentido dinámico si el precio converge (o se acerca) al precio de equilibrio con el tiempo, y es inestable si, con el cambio, el precio se aleja del equilibrio. También puede definirse la estabilidad dinámica en términos de convergencia de la cantidad ofrecida a la de equilibrio. La primera definición de estabilidad corresponde a la de Walras (suponiendo que el mecanismo de Walras operase en el mercado, un exceso de demanda positivo tendería a aumentar el precio) y la última a la de Marshall.

Ejemplo 6

La demanda de patatas por parte de los consumidores responde al precio del mercado según la función siguiente: $q = 500\ (10 - p_t)$. La oferta de patatas por parte de los agricultores, que venden su producto al consumidor en régimen cooperativo, y que es proporcional a la superficie sembrada de dicho tubérculo, responde al precio de mercado que rigió el año o campaña anterior, según la función siguiente: $q = 1.000\ (p_{t-1} - 1)$. Se pide:

1º) Determinar el precio de equilibrio del mercado y la producción de patatas correspondiente, así como los ingresos netos de los pequeños agricultores, considerando un 15% de impuestos.

2º) Estudiar la estabilidad del equilibrio del mercado con las representaciones gráficas correspondientes, suponiendo un p_0 = 5’00 €/kg.

Solución:

Se contestará a ambos apartados simultáneamente.

La condición de equilibrio es que la oferta del mercado iguale a la demanda, por lo que igualando ambas ecuaciones resulta:

$500\ (10 - p_t) = 1.000\ (p_{t-1} - 1)$; $10 - p_t = 2p_{t-1} - 2$; y resulta que:

$p_t + 2p_{t-1} = 12$, o bien su ecuación en diferencias finitas lineal de primer orden equivalente: $p_{t+1} + 2p_t = 12$.

La ecuación característica de la homogénea será:

$r + 2 = 0$; $r = -2$ y la solución de la homogénea será: $p_t^* = c\cdot(-2)^t$.

Ensayamos ahora una solución particular de la ecuación completa, del tipo: $p_p = k$, y substituyendo en la ecuación inicial se tiene que:

$$k + 2k = 12, \text{ de donde: } k = 4, \text{ con la solución general:}$$

$$p_t = p_t^* + p_p = c\cdot(-2)^t + 4.$$

Si ahora hacemos $t = 0$, $p_0 = c + 4$, entonces: $c = p_0 – 4$, luego:

$$p_t = (p_0 - 4)\cdot(-2)^t + 4,\ \forall\, t \in \mathbf{N}$$

De hecho, genéricamente, la solución de la ecuación recurrente:

$$a\cdot p_t + b\cdot p_{t-1} + c = 0, \text{ es la siguiente: } p_t = \left(p_0 + \frac{c}{a-b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)^t - \frac{c}{a+b}.$$

Veamos, en fin, que el precio de equilibrio es de 4’00 €/kg., y el mercado oscila alrededor del nivel de equilibrio con tendencia a alejarse. En efecto, al ser $|r| = 2 > 1$ y $r < -1$, las soluciones (todas las sucesiones) siempre divergen de forma oscilante (salvo, evidentemente, la solución constantemente igual a 4’00 €/kg.). En particular, el punto de equilibrio dado por: $p^* = \frac{12}{1+2} = 4$, no es estable, puesto que se trata de oscilaciones explosivas.

En este caso, el modelo solo tiene sentido económico para un período de tiempo limitado, precisamente el período a partir del cual aparecen precios negativos (o sea, hasta que se cumple $t = 3$, puesto que $p_3 = -4’00$ €/kg.).

El precio de equilibrio del mercado también resultará de la ecuación que iguala la oferta y la demanda (con $p_t = p_{t-1} = p_e$) siguiente:

$$500\ (10 – p_e) = 1.000\ (p_e – 1), \text{ de donde:}$$

$$p_e = 4’00\ € \text{ y } q_e = 500\ (10 – 4) = 3.000 \text{ kg.},$$

con lo que los ingresos netos de los agricultores (deduciendo los impuestos) serán:

$$\boxed{I = 0’85 \times p \times q = 0’85 \times 4’00\ €/\text{kg.} \times 3.000 \text{ kg.} = 10.200\ €\ .}$$

Por otra parte, evidentemente si se tiene un precio inicial dado de $p_0 = 5’00$ €/kg., se tendrá que:

$p_0 = c\cdot(-2)^0 + 4 = 5$, de donde se deduce que: $c = 1$, y la expresión de la trayectoria temporal del precio será: $p_t = (-2)^t + 4$, lo que nos permite la elaboración de la siguiente tabla, con la secuencia temporal de precios y cantidades (tanto para la función de oferta como para la de demanda):

t	p_t	q_d	q_o
0	5	2.500	4.000
1	2	4.000	1.000
2	8	1.000	7.000
3	-4	7.000	-5.000
4	20	-5.000	19.000
5	-28	19.000	-29.000
…	…	…	…
+∞	± ∞	--	--

La representación gráfica correspondiente del equilibrio del mercado es la siguiente:

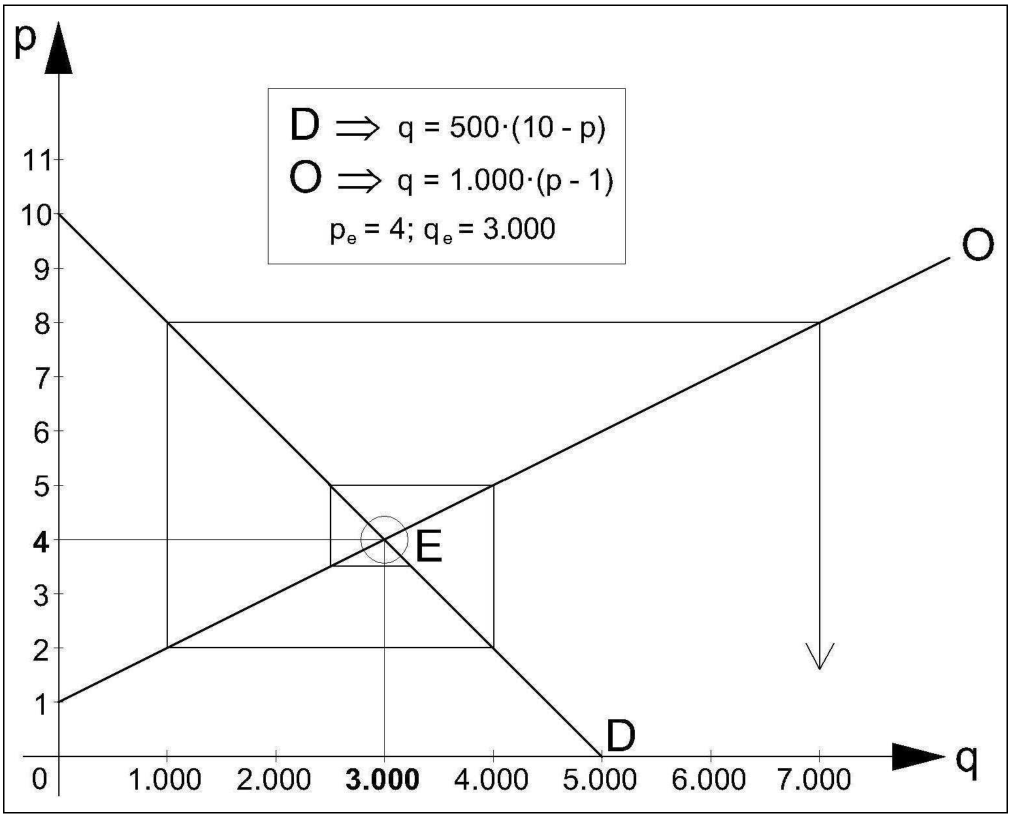


FIG. 11.13. Oferta, demanda y punto de equilibrio (VI).

Así mismo, la representación gráfica de la trayectoria temporal del precio, que se trata de una sucesión oscilante explosiva, será la siguiente:

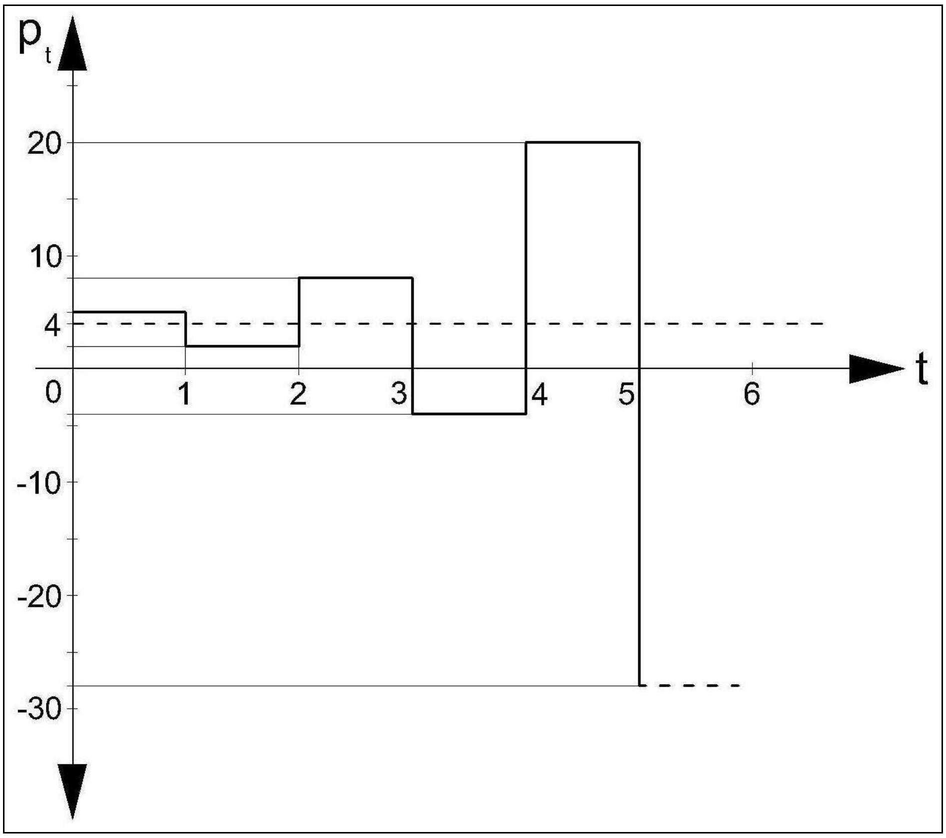


FIG. 11.14. Evolución temporal del precio (V).

Ejemplo 7

Hallar la solución de equilibrio de mercado de la siguiente ecuación en diferencias y mostrar la trayectoria temporal del precio que se seguirá a partir de su condición inicial.

$$P_{t+1} = -1'5 \cdot P_t + 2 \; ; \quad P_0 = 0'75 \text{ €/kg.}$$

Solución:

En primer lugar debemos obtener la solución de la ecuación recurrente según la formulación general:

$$P_t = a^t P_0 + b\frac{1-a^t}{1-a} = \frac{b}{1-a} + \left(P_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^t .$$

Obtenemos por tanto:

$$P_t = \frac{2}{1+1'5} + \left(P_0 - \frac{2}{1+1'5}\right)(-1'5^t) .$$

Particularizamos para la condición inicial dada, con lo que:

$$P_t = \frac{2}{1+1'5} + \left(0'75 - \frac{2}{1+1'5}\right)(-1'5^t) = 0'8 + \left[-0'05(-1'5^t)\right].$$

A esta misma conclusión llegaríamos resolviendo la ecuación en diferencias finitas dada planteando, en primer lugar y como siempre, la ecuación característica de la homogénea, esto es: r + 1’5 = 0, de donde se deduce que: r = -1’5. De este modo, se tendrá la solución:

$$P_t^* = k(-1'5)^t.$$

A continuación, ensayaremos una solución particular de la completa del tipo: $P_p = A$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tiene que: A + 1’5·A = 2 = 2’5·A, de donde: A = (2/2’5) = 0’8, por lo que se tendrá la solución general:

$P_t = P_t^* + P_p = k(-1'5)^t + 0'8$, y aplicando la condición inicial dada, resultará que:

0’75 = k + 0’8, de donde: k = -0’05, y la solución particular buscada será:

$$\boxed{P_t = 0'8 + \left[-0'05(-1'5^t)\right]} \text{ , c.s.q.d.}$$

El precio de equilibrio es, pues, de 0’80 €/kg., y el mercado oscila alrededor del nivel de equilibrio con tendencia a alejarse del mismo. A esta misma conclusión llegaríamos considerando que: $P_e = P_{t+1} = P_t$, con lo que: $P_e + 1'5P_e = 2'5P_e = 2$, de donde: $P_e = 2/2'5 = 4/5 = 0'80$ €/kg.

La trayectoria temporal del precio la analizamos mediante:

$$\lim_{t\to+\infty} P_t = \lim_{t\to+\infty} 0'8 + \left[-0'05(-1'5^t)\right] = \pm\infty .$$

Por otra parte, se tendrá que:

$$\lim_{t\to-\infty} P_t = \lim_{t\to-\infty} 0'8 + \left[-0'05(-1'5^t)\right] = 0'80.$$

Por tanto, la evolución temporal del precio buscada presentará una trayectoria oscilante divergente, con oscilaciones explosivas, dado que:

|r| = 1’5 > 1, y a su vez: r = -1‘5 < -1,

como puede comprobarse en la figura siguiente:

t	P(t)
0	0,75
1	0,875
2	0,6875
3	0,96875
4	0,546875
5	1,179688
6	0,230469
7	1,654297
8	-0,48145
9	2,722168
10	-2,08325

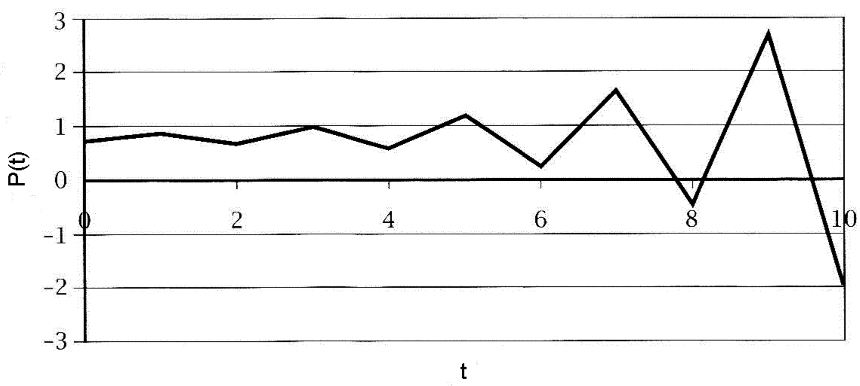


FIG. 11.15. Evolución temporal del precio (VI).

En cualquier caso, la validez del presente modelo queda restringida hasta el período en que t = 8, donde ya comienzan a aparecer precios negativos, lo que carece de significado económico.

Ejemplo 8

Se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda de un mercado determinado:

$$\begin{cases} D_t = 4 - 3P_t \\ O_t = -1 + 2P_{t-1} \end{cases}$$

Sabiendo que P_0 = 3/2 €/kg., obténgase la trayectoria temporal del precio, así como su tendencia a largo plazo, viniendo las cantidades ofertadas y demandadas expresadas en toneladas/día. Calcular los ingresos brutos anuales de los vendedores considerando un calendario laboral de 240 días/año.

Solución:

Como es bien sabido, el mercado estará en equilibrio cuando la cantidad ofrecida y demandada coincidan, es decir, en el instante en el que se verifique que:

$$D_t = O_t \,.$$

Por lo tanto, de acuerdo con la anterior igualdad, obtenemos que: $4 - 3P_t = -1 + 2P_{t-1}$. Reordenando y reescribiendo la ecuación para el período siguiente resulta la ecuación en diferencias finitas equivalente:

$$P_{t+1} = -\frac{2}{3}P_t + \frac{5}{3}, \text{ o bien: } 3P_{t+1} + 2P_t - 5 = 0.$$

se cumplirá, igualando la oferta y la demanda, que ($P_e = P_t = P_{t-1}$), y resulta la ecuación equivalente y el precio y cantidad de equilibrio del mercado siguiente:

$3P_e + 2P_e = 5$; $5P_e = 5$; $P_e = 1'00$ €/kg., que se corresponde con $q_e = 1$ Tm./día, lo que ocasionará unos ingresos brutos diarios de:

$$I = P_e \times q_e = 1'00 \text{ €/kg.} \times 1.000 \text{ kg./día} = 1.000 \text{ €/día.} \equiv 240.000 \text{ €/año.}$$

La representación gráfica del equilibrio del mercado, con la correspondiente "telaraña", será la siguiente:

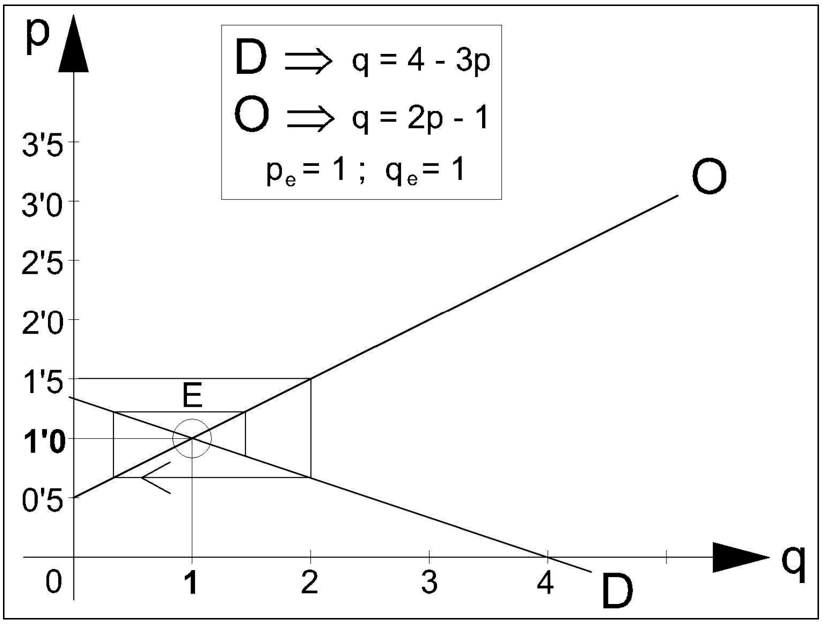


FIG. 11.16. Oferta, demanda y punto de equilibrio (VII).

Demostramos anteriormente que la ecuación en diferencias genérica de primer orden: $y_{x+1} = a\cdot y_x + b$, donde a y b son constantes y además $a \neq 1$, tiene como solución general:

$$y_x = \frac{b}{1-a} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^x$$

De este modo, para el caso que nos ocupa la solución buscada es:

$$P_t = \frac{5/3}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} + \left(P_0 - \frac{\frac{5}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\right)(-2/3)^t$$

Particularizamos para la condición inicial dada: $P_0 = 3/2$ €/kg., de tal modo que:

$$P_t = \frac{5/3}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} + \left(3/2 - \frac{\frac{5}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}\right)(-2/3)^t,$$

y operando se obtiene finalmente la expresión:

$$\boxed{P_t = \frac{1}{2}(-2/3)^t + 1},$$

que nos proporciona la trayectoria temporal del precio.

A esta misma conclusión llegaríamos resolviendo la ecuación en diferencias finitas dada planteando, en primer lugar, la ecuación característica de la homogénea, esto es: 3r + 2 = 0, de donde: r = -(2/3). De este modo, se tendrá la solución: $P_t^* = k(-\frac{2}{3})^t$.

Por otra parte, al ser: |r| < 1, todas las soluciones convergen a un punto de equilibrio estable, y también: -1 < (r = -2/3) < 0, por lo que las soluciones serán oscilantes, como tendremos ocasión de comprobar seguidamente.

A continuación, ensayaremos una solución particular de la completa del tipo: $P_p = A$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tiene que: 3·A + 2·A = 5 = 5·A, de donde: A = 1, por lo que se tendrá la solución general:

$P_t = P_t^* + P_p = k(-\frac{2}{3})^t + 1$, y aplicando la condición inicial dada:

(3/2) = k + 1, de donde: k = 1/2, y la solución particular buscada será:

$$\boxed{P_t = \frac{1}{2}(-2/3)^t + 1} \text{ c.s.q.d.}$$

Con ello, puede elaborarse la siguiente tabla:

t	$\boldsymbol{P_t}$	$\boldsymbol{q_d}$	$\boldsymbol{q_o}$
0	1’50	-0’50	2’00
1	0’67	2’00	0’33
2	1’22	0’33	1’44
3	0’85	1’44	0’70
4	1’10	0’70	1’20
5	0’93	1’20	0’86
…	…	…	…
+∞	1’00	1’00	1’00

La tendencia a largo plazo la discutiremos analizando así:

$P_e = \lim\limits_{t \to +\infty} . P_t = \lim\limits_{t \to +\infty} . \left[1/2(-2/3)^t + 1 \right] = 1'00 \text{ €}/\text{kg.}$, que se corresponde con el precio de equilibrio anteriormente hallado. Tenemos, por tanto, que las fuerzas del mercado hacen que el precio del bien en cuestión a largo plazo tienda a estabilizarse en 1’00 €/kg., como también puede comprobarse en la figura siguiente:

t	$P_{(t)}$
0	1.5
1	0.666667
2	1.222222
3	0.851852
4	1.098765
5	0.934156
6	1.043896
7	0.970736
8	1.019509
9	0.986994
10	1.008671

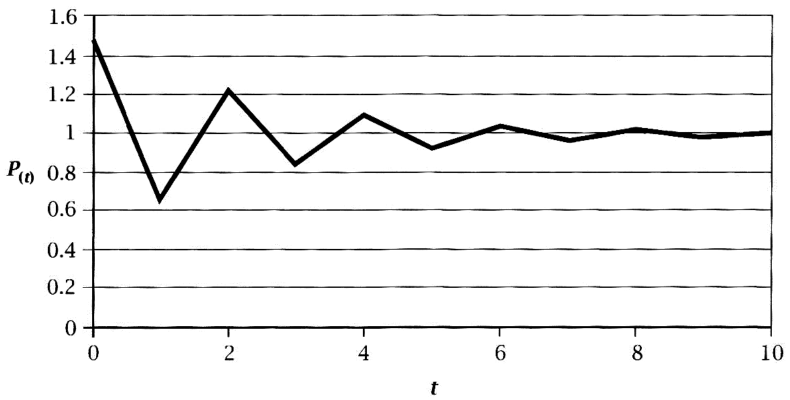


FIG. 11.17. Evolución temporal del precio (VII).

Ejemplo 9

A veces se produce un ajuste retrasado en dos mercados interrelacionados, en que puede acontecer una interesante conducta oscilatoria como se verá en el ejercicio que sigue a continuación, donde el tipo de mercado que se estudia constituye una versión simplificada del mismo.

Se supone que, en una economía determinada, los mercados del maíz en grano y de la carne de cerdo se hallan interrelacionados de forma que las funciones de oferta y demanda en el mercado del maíz, que son independientes del mercado del cerdo, son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Oferta} \rightarrow q_m = 2.000 \cdot p_{m,t-1} \\ \text{Demanda} \rightarrow q_m = 5.000 \cdot (7 - p_{m,t}) \end{cases}$$

, esto es, la demanda de maíz es función del precio actual del mercado, mientras que la oferta es función del precio que rigió el año anterior. Por otra parte, las funciones de oferta y demanda en el mercado del cerdo son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Oferta} \rightarrow q_c = 15 \cdot p_{c,t-1} - 100 - 80 \cdot p_{m,t-1} \\ \text{Demanda} \rightarrow q_c = 25 \cdot (40 - p_{c,t}) \end{cases}$$

, o sea, que la demanda de la carne de cerdo es función del precio actual del mercado mientras que la oferta depende de los precios que alcanzaron el año anterior tanto el cerdo como el maíz. Se pide:

1º) Determinar los precios de equilibrio del maíz y del cerdo, así como las cantidades respectivas que se producen.

2º) Comprobar si la situación de equilibrio[5] de los dos mercados interrelacionados es estable.

Solución:

1º) a) *Mercado del maíz*. Las condiciones de equilibrio de este mercado son las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Oferta = Demanda}\\ p_{m,t} = p_{m,t-1} = p_m\end{array}}$$

o sea: $2.000 \cdot p_m = 35.000 - 5.000 \cdot p_m$; $p_m = 35/7 = 5$;

y también: $q_m = 2.000 \times p_m = 2.000 \times 5 = 10.000$.

b) *Mercado del cerdo*. Las condiciones de equilibrio de este mercado son las siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Oferta = Demanda}\\ p_{c,t} = p_{c,t-1} = p_c\\ p_{m,t-1} = 5\end{array}}$$

o sea: $15 \cdot p_c - 100 - 80 \times 5 = 1.000 - 25 \cdot p_c$; $p_c = 1.500/40 = 37'5$;

y también: $q_c = 25\ (40 - 37'5) = 62'5$.

A continuación, pueden verse las representaciones gráficas de los puntos de equilibrio de ambos mercados y las correspondientes funciones de oferta y demanda:

[5] Habrá una situación de equilibrio entre la oferta y la demanda cuando, a los precios de mercado, todos los consumidores puedan adquirir las cantidades que deseen y los oferentes consigan vender todas las existencias. El precio y la cantidad de producto que se intercambiará realmente en el mercado queda determinado automáticamente como consecuencia de la forma de las curvas de oferta y demanda del producto. Si el precio es muy alto, los productores estarán ofreciendo mucho más producto del que demandan los consumidores por lo que se encontrarán con *excedentes*, cantidades que no pueden vender, por lo que reducirán sus producciones y bajarán los precios. Por el contrario, si el precio resulta ser demasiado bajo, las cantidades demandadas serán mayores que las ofrecidas por lo que se producirá *escasez*. Algunos consumidores estarán dispuestos a pagar más dinero por ese bien. El precio y la cantidad producida aumentarán en ese caso.

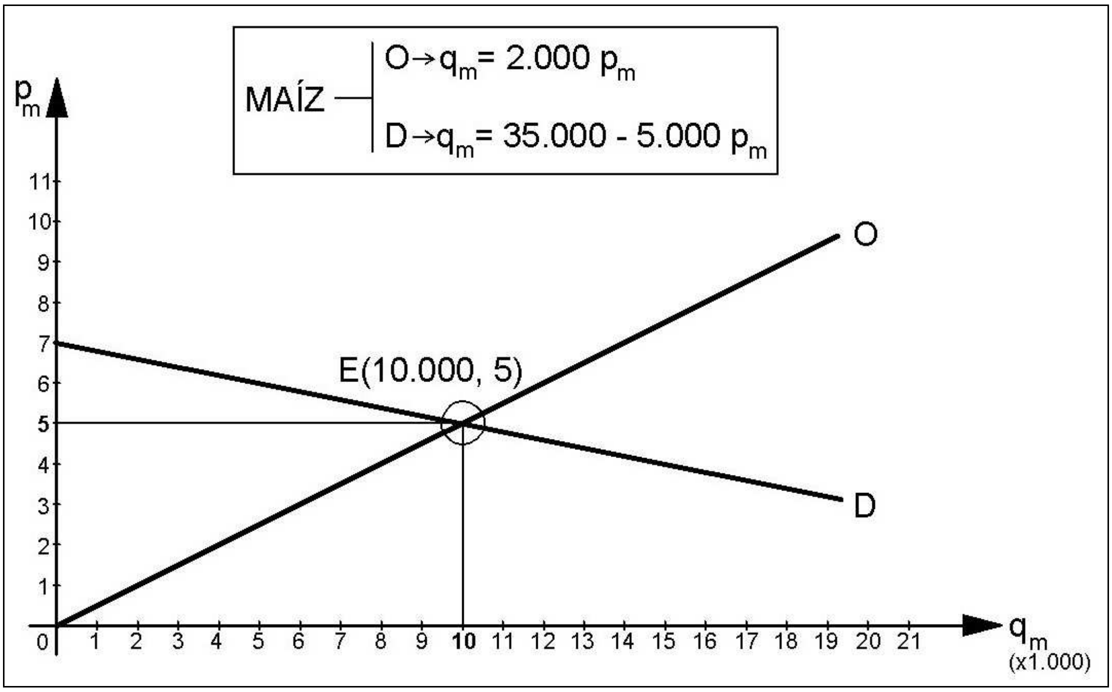


FIG. 11.18. Funciones de oferta y demanda del maíz.

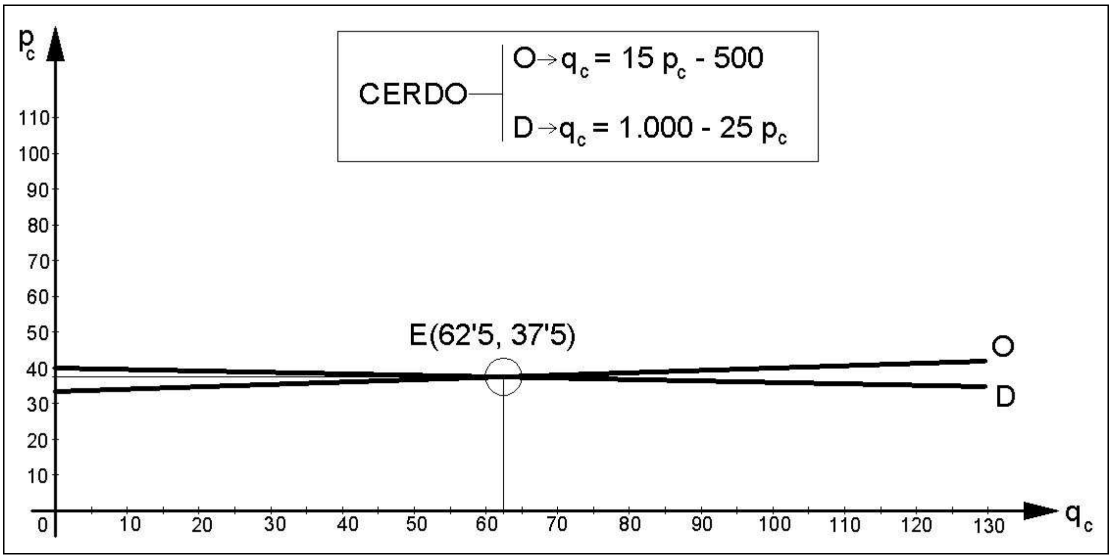


FIG. 11.19. Funciones de oferta y demanda del cerdo.

2º) Por lo que se refiere a la estabilidad del equilibrio, veamos que:

a) Mercado del maíz.

Es autosuficiente, es decir, independiente del mercado del cerdo. Así mismo, es estable, puesto que la elasticidad de la demanda es mayor que la elasticidad de la oferta. En efecto:

Elasticidad de la D $\rightarrow$ q = 5.000 (7 – p) = 35.000 – 5.000·p;

$$p = 7 - \frac{q}{5.000}, \text{ y: } \varepsilon_D = \frac{p}{q} x \frac{dq}{dp} = \left(\frac{7}{q} - \frac{1}{5.000}\right) \cdot (-5.000) = 1 - \frac{35.000}{q}.$$

Elasticidad de la O $\rightarrow$ $q = 2.000 \cdot p$; $p = \frac{q}{2.000}$, y entonces:

$$\varepsilon_O = \frac{p}{q} x \frac{dq}{dp} = \frac{1}{2.000} x 2.000 = 1 \text{ (elasticidad unitaria), luego: } \varepsilon_D < \varepsilon_O .$$

De la condición de equilibrio: Oferta = Demanda, se obtiene que:

$2.000 \cdot p_{m,t-1} = 35.000 - 5.000 \cdot p_{m,t}$; del que se obtiene la siguiente ecuación en diferencias finitas: $5 \cdot p_{m,t} + 2 \cdot p_{m,t-1} = 35$. La ecuación característica de la homogénea es: $5r + 2 = 0$, con lo que: $r = -(2/5)$ y la solución de la homogénea será:

$$p_{m,t}^* = c \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^t .$$

Nótese que dicha ecuación recurrente resulta equivalente a la otra:

$$5 \cdot p_{m,t} = -2 \cdot p_{m,t-1} + 35; \text{ de donde: } p_{m,t+1} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot p_{m,t} + 7,$$

por lo que tiene un punto de equilibrio estable y todas las soluciones convergen a él. Pero como: $-1 < (-2/5) = -0'4 < 0$, resulta que todas las soluciones son oscilantes y los términos de índice par tienen signo diferente que los de índice impar.

Ensayamos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo: $p_p = k$, por lo que substituyendo en la ecuación inicial se tiene que: $5k + 2k = 35$, de donde: $k = 5$, y entonces, la solución general es:

$$p_{m,t} = p_{m,t}^* + p_p = c \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^t + 5, \ \forall\, t \in \mathbf{N}.$$

A largo plazo sucederá que: $\lim\limits_{t \to +\infty} p_{m,t} = 5.$

b) Mercado del cerdo.

De la condición: Oferta = Demanda, se obtiene que:

$$15 \cdot p_{c,t-1} - 100 - 80 \cdot p_{m,t-1} = 1.000 - 25 \cdot p_{c,t} \text{ ; o sea:}$$

$$16 \cdot p_{m,t-1} = 5 \cdot p_{c,t} + 3 \cdot p_{c,t-1} - 220, \text{ y entonces :}$$

$$p_{m,t-1} = \frac{5 \cdot p_{c,t} + 3 \cdot p_{c,t-1} - 220}{16} \text{, y también: } p_{m,t} = \frac{5 \cdot p_{c,t+1} + 3 \cdot p_{c,t} - 220}{16}.$$

Substituyendo estos valores en la ecuación: $5 \cdot p_{m,t} + 2 \cdot p_{m,t-1} = 35$, se tiene que:

$$\frac{25 \cdot p_{c,t+1} + 15 \cdot p_{c,t} - 1.100}{16} + \frac{10 \cdot p_{c,t} + 6 \cdot p_{c,t-1} - 440}{16} = 35 \text{ ;}$$

$25 \cdot p_{c,t+1} + 25 \cdot p_{c,t} + 6 \cdot p_{c,t-1} - 1.540 = 560$, y resulta, en definitiva, la ecuación recurrente equivalente de segundo orden:

$$25 \cdot p_{c,t+2} + 25 \cdot p_{c,t+1} + 6 \cdot p_{c,t} = 2.100.$$

Su ecuación característica será: $25r^2 + 25r + 6 = 0$, de la que se deducen las dos raíces reales: $r_1 = -(2/5)$ y $r_2 = -(3/5)$, con lo que la solución de la homogénea será:

$$p_{c,t}^* = c_1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^t + c_2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^t.$$

Para la búsqueda de una solución particular de la ecuación completa, ensayaremos: $p_p = k$, y substituyendo en la ecuación inicial se tiene que:

$$25k + 25k + 6k = 2.100, \text{ por lo que:}$$

$$k = 2.100/56 = 37'5, \text{ y la solución general será:}$$

$$p_{c,t} = p_{c,t}^* + p_p = c_1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^t + c_2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^t + 37'5,\ \forall\ t \in \mathbf{N}$$

A largo plazo, se tendrá que: $\lim\limits_{t \to +\infty} p_{c,t} = 37'5$, que es el precio de equilibrio, y resulta que el equilibrio del mercado de cerdo es estable.

Obsérvese también que:

- $r_1 = -(2/5)$, es la relación entre las pendientes de las curvas de oferta y de demanda de maíz.

- $r_2 = -(3/5)$, es la relación entre las pendientes de las curvas de oferta y de demanda de cerdo.

Por otra parte, si las curvas de demanda, en los dos mercados, son más elásticas que las curvas de oferta, el equilibrio en los dos mercados interrelacionados resulta estable.

De cualquier modo, tanto en el caso del maíz como del cerdo, se cumple que: $0 < |r| < 1$, con: $-1 < r < 0$, por lo que todas las soluciones convergen de forma oscilante al punto de equilibrio; es decir, los precios tienden al precio de equilibrio correspondiente.

Ejemplo 10

En un supuesto de estabilidad dinámica del comportamiento de un mercado de carne de pollo, cuya función de oferta de un producto es: $q_o = 1.000 (p - 1)$, y la función de demanda es: $q_d = 500 (10 – p)$, sucede que inicialmente: p_0 = 8'00 €/kg. y $k = 1/3.000$. Se pide:

1º) Hallar el punto de equilibrio estático y hacer la representación gráfica correspondiente.
2º) Si el incremento de precios viene dado por la expresión:
$\Delta p = p_t – p_{t-1} = k\cdot(q_d – q_o)$, $\forall k > 0$, hallar la correspondiente fórmula de recurrencia.

Solución:

1º) Oferta = Demanda, por lo que: $1.000 (p_e - 1) = 500 (10 – p_e)$, de lo que se deduce que el punto de equilibrio buscado es: p_e = 4'00 €/kg. y q_e = 3.000 kg., por lo que los ingresos de los productores serán:

$$I = p_e \times q_e = 4'00 \text{ €/kg.} \times 3.000 \text{ kg.} = 12.000 \text{ € .}$$

con la siguiente representación gráfica:

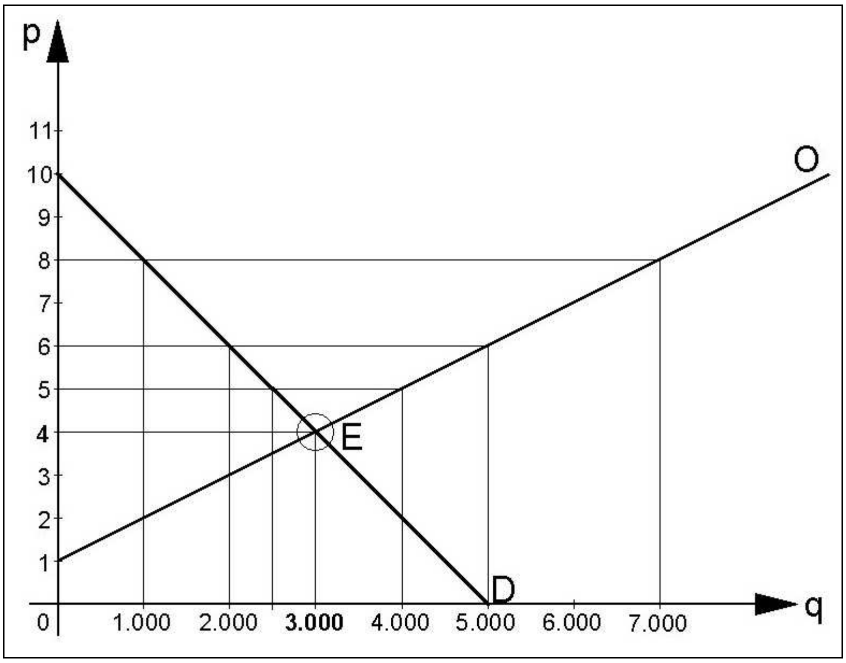


FIG. 11.20. Funciones de oferta, demanda y punto de equilibrio.

2º) En el período t_0 se tendrá que: p_0 = 8 €/kg., con lo que:

$$\begin{cases} q_d = 500\cdot(10 - p) \text{ y } p = p_0, \text{ implica que } q_d = 1.000 \text{ kg.} \\ q_o = 1.000\cdot(p - 1) \text{ y } p = p_0, \text{ implica que } q_0 = 7.000 \text{ kg.} \end{cases}$$

$$\Delta p = p_t - p_{t-1} = k\cdot(q_d - q_o) = \frac{1}{3.000}(1.000 - 7.000) = -2 \text{ €/kg.},$$

con lo que: p_{t-1} = 8'00 €/kg., $\Delta p = p_t - p_{t-1}$; esto es, -2 = p_t – 8, y p_t = 6'00 €/kg., y así sucesivamente hasta alcanzar el punto de equilibrio.

Ello puede verse reflejado en la siguiente tabla y gráfica:

Período (t)	**Precio (p_t) (€ /kg.)**	**Cantidad demandada (q_d)**	**Cantidad ofrecida (q_o)**	**Δp (€ /kg.)**	**$q_o - q_d$ (kg.)**
0	p_0 = 8'00	1.000	7.000	-2'000	6.000
1	p_1 = 6'00	2.000	5.000	-1'000	3.000
2	p_2 = 5'00	2.500	4.000	-0'500	1.500
3	p_3 = 4'50	2.750	3.500	-0'250	750
4	p_4 = 4'25	2.875	3.250	-0'125	375
…	…	…	…	…	…
+ ∞	p_∞ = 4'00	3.000	3.000	0	0

El equilibrio, pues, tendrá lugar cuando p = 4'00 €/kg. (cuando $t \rightarrow +\infty$), lo que puede verse gráficamente del siguiente modo:

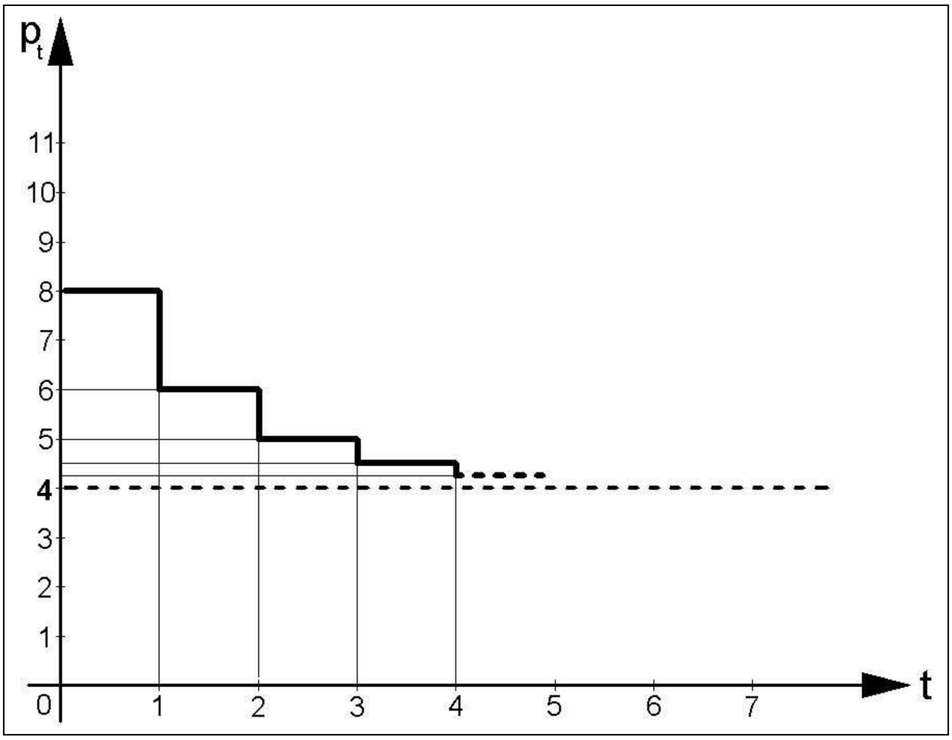


FIG. 11.21. Evolución temporal del precio (VIII).

Hallemos ahora la fórmula de recurrencia:

$$\Delta p = p_t - p_{t-1} = \frac{1}{3.000}\left[500(10 - p_{t-1}) - 1.000(p_{t-1} - 1)\right] =$$
$$= \frac{1}{30}(60 - 15 \cdot p_{t-1}) = 2 - 0'5 \cdot p_{t-1}\ ;$$

$$p_t = p_{t-1} + 2 - \frac{1}{2}p_{t-1} \Rightarrow \boxed{p_t = \frac{1}{2}p_{t-1} + 2}$$ (ley de recurrencia).[6]

Se tendrá, en definitiva, la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$2p_t = p_{t-1} + 4$, o bien su ecuación equivalente: $2p_{t+1} – p_t = 4$.

De la expresión: $p_t = \frac{1}{2}p_{t-1} + 2$, deducimos que todas las soluciones convergen al punto de equilibrio, y además: $0 < (r = ½) < 1$, luego todas las soluciones son monótonas, es decir, crecientes o decrecientes.

La ecuación característica de la homogénea será la siguiente: $2r – 1 = 0$; $r = ½$; con lo que la solución de la homogénea es:

$$p_t^* = C\cdot(1/2)^t\ .$$

Ensayamos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo: $p_p = k$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que: $2k – k = 4 \rightarrow k = 4$, y la solución general buscada será:

$$p_t = p_t^* + p_p = C\cdot(1/2)^t + 4,\ \forall\ t \in \mathbf{N}$$

$p_0 = C + 4$; $C = p_0 – 4$, y la solución queda así:

$p_t = (p_0 - 4)\cdot(1/2)^t + 4 = \left(p_0 - \frac{b}{1-a}\right)\cdot a^t + \frac{b}{1-a}, \text{con}: \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$, y tendremos que:

---

[6] Una *relación o ley de recurrencia* es una fórmula que define una secuencia recursiva; cada término de la secuencia es definido como una función de términos anteriores. Una ecuación recurrente, como las que aquí estudiamos, es un tipo específico de relación de recurrencia. Una relación de recurrencia para la sucesión: $p_0, p_1, p_2, \ldots$, es una ecuación que relaciona p_t con alguno de sus términos predecesores: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{t-1}$. Las condiciones iniciales para la sucesión: $p_0, p_1, \ldots$, son valores dados en forma explícita para un número finito de términos de la sucesión. Resolver una relación de recurrencia consiste en determinar una fórmula explícita (cerrada) para el término general p_t, es decir, una función no recursiva de *n*. Hay dos métodos para resolver las relaciones recurrentes, a saber: iteración y un método especial que se aplica a las relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes.

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
p_1 = \frac{1}{2}p_0 + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^t \\
p_2 = \frac{1}{2}p_1 + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} \\
p_3 = \frac{1}{2}p_2 + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^{t-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{t-1} = \frac{1}{2}p_{t-2} + 2 \rightarrow \times\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
p_t = \frac{1}{2}p_{t-1} + 2 \rightarrow \times\frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

Se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón ½ , por lo que operando adecuadamente obtendremos que:

$$p_t = p_0\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] = p_0\left(\frac{1}{2}\right)^t - 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^t - 1\right] = (p_0 - 4)\cdot(1/2)^t + 4,$$

como queríamos demostrar. Así pues, para un *t* suficientemente grande (cuando *t* tiende a + ∞), el precio de mercado se aproxima al de equilibrio (p_t = 4'00 €/kg.).

Ejemplo 11

En el modelo de la telaraña las ecuaciones que ligan la oferta y la demanda en un mercado de pescado con el precio son las siguientes:

$$D_t = 100 - 2\cdot p_t \ ; \quad O_t = -20 + 3\cdot p_{t-1} \ .$$

Si las cantidades vienen expresadas en kg./día, se trata de encontrar el precio de equilibrio y analizar si es estable o no. Si sucede que: p_0 = 25'00 €/kg., se pide calcular los precios p_1, p_2, p_3 y p_4.

Solución:

Igualando oferta y demanda, se tendrá que:

$100 - 2\cdot p_t = -20 + 3\cdot p_{t-1}$, de donde se deduce la ecuación recurrente:

$2\cdot p_{t+1} + 3\cdot p_t = 120$; la ecuación característica de la homogénea será:

$2r + 3 = 0$; $r = -(3/2)$, y la solución de la homogénea será: $p_t^* = c\cdot(-\frac{3}{2})^t$.

El precio de equilibrio vendrá dado por ($p_{t+1} = p_t = p_e$):

$2p_e + 3p_e = 120$, y p_e = 24'00 €/kg. (q_e = 52 kg./día), lo que supone unos ingresos brutos anuales (con un calendario laboral de 240 días/año) para el vendedor de:

$$I = p_e \times q_e = 24'00 \text{ €/kg.} \times 52 \text{ kg./día} \times 240 \text{ días/año} = 299.520 \text{ €/año.}$$

La representación gráfica correspondiente es la siguiente:

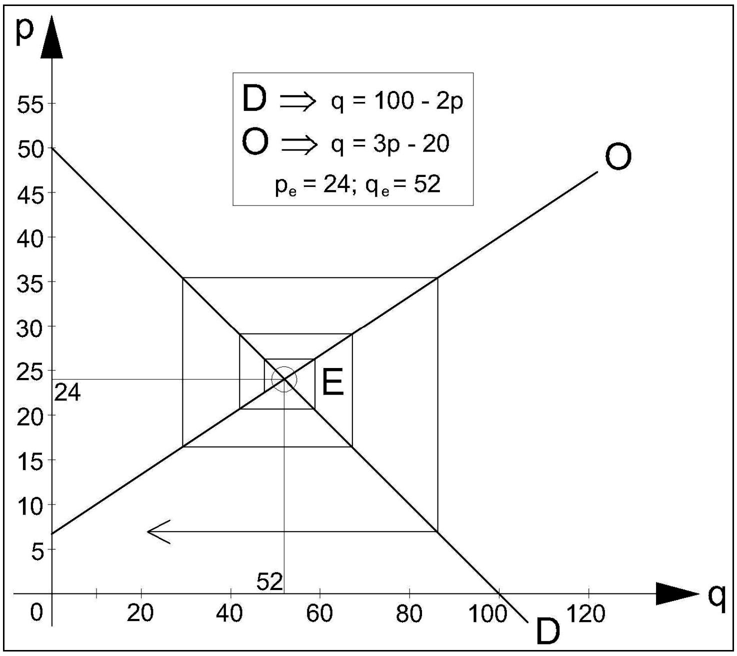


FIG. 11.22. Oferta, demanda y punto de equilibrio (VIII).

Ensayaremos ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo: $p_p = k$; $5k = 120$; $k = 24$, por lo que la solución general de la ecuación en cuestión será:

$$p_t = p_t^* + p_p = c\cdot(-\frac{3}{2})^t + 24,\ \forall\ t \in \mathbf{N}$$

Se tendrá que: $p_0 = c + 24$ y $c = p_0 - 24$; para p_0 = 25'00 €/kg. con lo que: $c = 1$. En cada período, los precios correspondientes serán los siguientes:

$$\begin{cases} p_0 = 1 + 24 = 25'00 \text{ €/kg.} \\ p_1 = -(3/2) + 24 = 22'50 \text{ €/kg.} \\ p_2 = 9/4 + 24 = 26'25 \text{ €/kg.} \\ p_3 = -(27/8) + 24 = 20'625 \text{ €/kg.} \\ p_4 = 81/16 + 24 = 29'0625 \text{ €/kg.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{y así sucesivamente.} \end{cases}$$

Ello puede verse reflejado en la siguiente tabla y gráfica:

Período (t)	**Precio (p_t) (€ /kg.)**	**Cantidad demandada (q_d)**	**Cantidad ofrecida (q_o)**	**Δp (€ /kg.)**	**$q_o - q_d$ (kg.)**
0	p_0 = 25’0000	50’000	55’0000	-2’5000	+5’0000
1	p_1 = 22’5000	55’000	47’5000	+3’7500	-7’5000
2	p_2 = 26’2500	47’500	58’7500	-5’6250	+11’2500
3	p_3 = 20’6250	58’750	41’8750	+8’4375	-16’8750
4	p_4 = 29’0625	41’875	67’1875	…	+25’3125
…	…	…	…	…	…
- ∞	$p_{-\infty}$ = 24’0000	52’000	52’0000	0	0

El equilibrio teórico, pues, tendría lugar cuando p = 24’00 €/kg. (o sea, cuando t→ - ∞, lo que constituye una consideración puramente teórica).

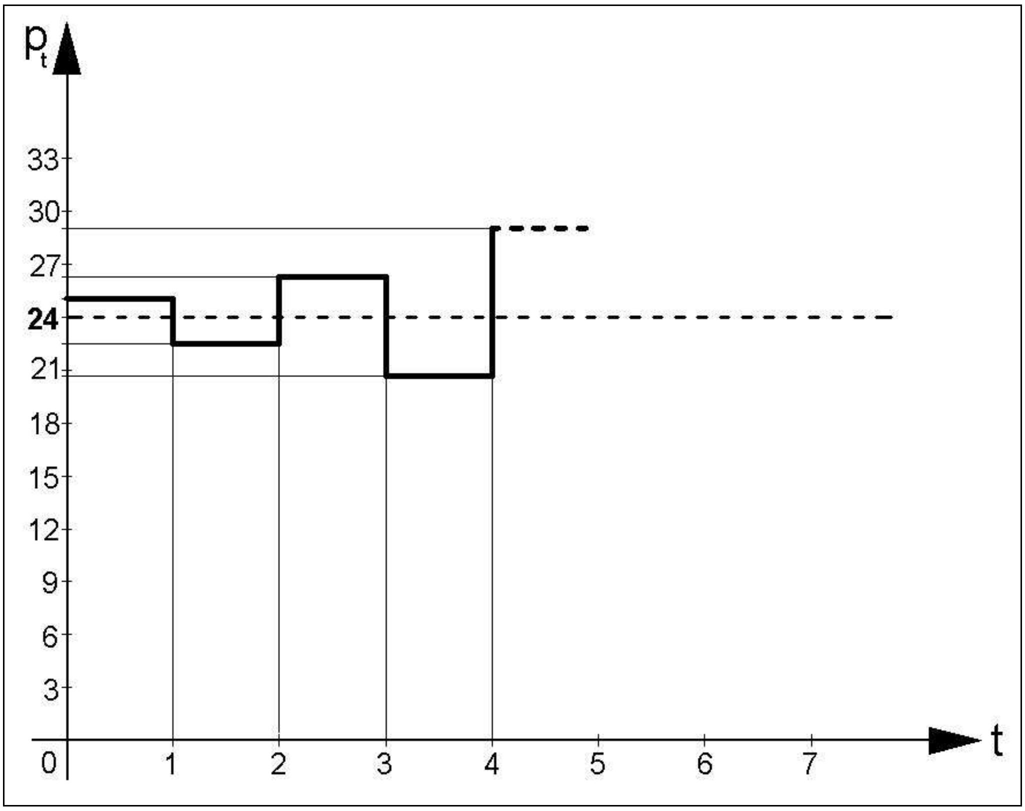


FIG. 11.23. Evolución temporal del precio (IX).

Se tiene que: $|r|$ = 3/2 = 1’5 > 1 y r < -1, con lo que las soluciones siempre divergen de forma oscilante mediante oscilaciones explosivas (salvo, evidentemente, la solución constantemente igual a 24’00 €/kg.). En particular, el punto de equilibrio no resulta estable y el modelo en cuestión solo tiene sentido para un período de tiempo limitado, precisamente el período o lapso a partir del cual comienzan a aparecer precios negativos que carecen de sentido económico (o sea, hasta que se cumple t = 9, puesto que p_9 = -14'4434 €/kg.).

Ejemplo 12

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+1} + 0'2P_t = 5$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con la condición inicial siguiente: P_0 = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Empezaremos por solucionar la ecuación homogénea incompleta, que es lineal y de primer orden, con lo que se tendrá la ecuación característica:

$$r + 0'2 = 0;\ r = -0'2,\ \text{y su solución será: } P_t^* = C(-0'2)^t.$$

Para hallar la solución particular se substituyen los valores de la condición dada en la ecuación general, de tal forma que ensayamos la constante: $P_p = a$, y entonces, substituyendo en la ecuación inicial:

$$a + 0'2\,a = 1'2\,a = 5;\ \text{de donde: } a = 5/1'2 = 4'17,$$

y la expresión de la solución general será: $P_t = P_t^* + P_p = C(-0'2)^t + 4'17$.

De hecho, el precio de equilibrio puede obtenerse directamente de la ecuación de partida, como ya se ha explicado en la teoría correspondiente, con solo hacer: $P_{t+1} = P_t = P_e$, es decir, buscando la solución constante que verifica: $P_e + 0'2P_e = 5 = 1'2P_e$, esto es: P_e = 5/1'2 = 4'17 €/ud.

Ahora debemos aplicar la condición inicial dada, con lo que:
$P_0 = C + 4'17 = 2$; $C = 2 - 4'17 = -2'17$, y la solución particular buscada será:

$$\boxed{P_t = -2'17\cdot(-0'2)^t + 4'17}\ .$$

b) A largo plazo sucederá que:

$\lim\limits_{t\to+\infty} P_t = -2'17 \cdot \lim\limits_{t\to+\infty} (-0'2)^t + 4'17 = 4'17€/ud.$, que será el precio de equilibrio estable al que convergerá la trayectoria temporal buscada. Como $|r| = 0'2 < 1$, todas las soluciones convergen a dicho punto, y además se cumple que: $-1 < (r = -0'2) < 0$, por lo que todas las soluciones son oscilantes.

c) La representación gráfica correspondiente será la siguiente:

t	P(t)
0	2
1	4,6
2	4,08
3	4,184
4	4,1632
5	4,16736
6	4,166528
7	4,166694
8	4,166661
9	4,166668
10	4,166666
11	4,166667
12	4,166667
13	4,166667
14	4,166667

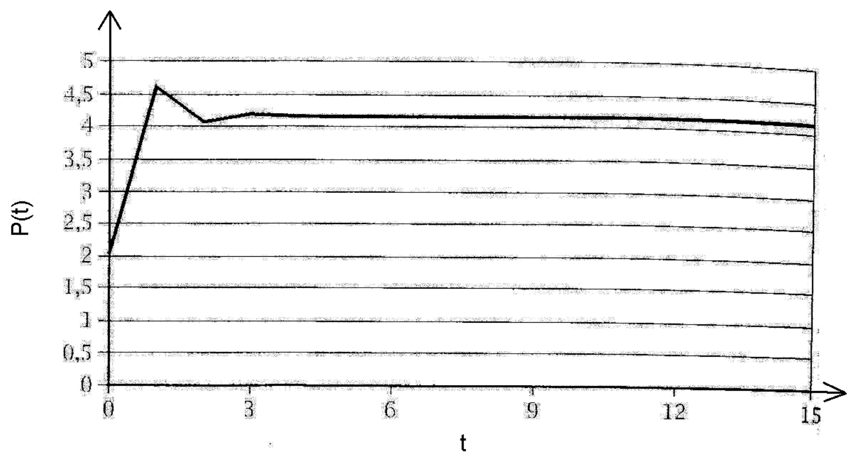


FIG. 11.24. Evolución temporal del precio (X).

Por tanto, la evolución temporal del precio presentará una trayectoria prácticamente constante a partir de t = 4, como puede comprobarse en la figura anterior.

Ejemplo 13

Si en el t-ésimo período, con $t \in T \subset \mathbf{N}$, la demanda, D_t, de un determinado bien X está relacionada con su precio de venta, P_t, en este mismo período a través de la ecuación:

$$D_t = a - b \cdot P_t, \quad \text{con } a, b > 0,$$

y si la oferta de ese mismo bien X, S_t, está relacionada con el precio de venta en el período anterior a través de la ecuación:

$$S_t = -c + d \cdot P_{t-1}, \quad \text{con } c, d > 0,$$

a) Hállese el precio de equilibrio del mercado ($D_t = S_t$), asumiendo que se vende toda la producción (modelo de la telaraña).

b) Aplíquese el resultado del apartado anterior, al caso concreto de que:

$$\begin{cases} D_t = 18 - 3 \cdot P_t \\ S_t = -2 + P_{t-1} \\ P_0 = 10'00 \text{ €/ud.} \end{cases}$$

, con las cantidades expresadas en miles de unidades diarias, realizando las correspondientes representaciones gráficas del equilibrio del mercado y de la trayectoria temporal del precio.

Solución:

a) Si para determinar el precio de equilibrio imponemos, $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$ con $t \geq 1$, que $D_t = S_t$, entonces: $a - b \cdot P_t = -c + d \cdot P_{t-1}$, de donde,

$$P_t = -\frac{d}{b} \cdot P_{t-1} + \frac{a+c}{b} \text{, y, por tanto, } P_{t+1} = -\frac{d}{b} \cdot P_t + \frac{a+c}{b}.$$

En consecuencia, $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$, podemos escribir que:

$$\Delta P_t = P_{t+1} - P_t = \left(-\frac{d}{b} \cdot P_t + \frac{a+c}{b} \right) - P_t = -\left(1 + \frac{d}{b} \right) \cdot P_t + \frac{a+c}{b} = -\frac{b+d}{b} \cdot P_t + \frac{a+c}{b}.$$

Se trata de una ecuación en diferencias finitas lineal de primer orden, con coeficientes y término independiente constantes, donde

$$P = \frac{b+d}{b} \qquad \text{y} \qquad Q = \frac{a+c}{b}.$$

Por lo tanto, la solución general buscada P_t, es decir, la trayectoria temporal del precio del mercado para el período t, $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$, será la siguiente:

$$P_t = (1-P)^t \cdot \left(P_0 - Q \cdot \frac{1-(1-P)^{-t}}{P} \right) = \left(1 - \frac{b+d}{b} \right)^t \cdot \left[P_0 - \frac{a+c}{b} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{b+d}{b} \right)^{-t}}{\frac{b+d}{b}} \right] =$$

$$= \left(-\frac{d}{b} \right)^t \cdot \left[P_0 - \frac{a+c}{b} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{d}{b} \right)^{-t}}{\frac{b+d}{b}} \right] = \left(-\frac{d}{b} \right)^t \cdot \left[P_0 - \frac{a+c}{b+d} \cdot \left[1 - \left(-\frac{d}{b} \right)^{-t} \right] \right] =$$

$$= \left(-\frac{d}{b} \right)^t \cdot P_0 - \left(-\frac{d}{b} \right)^t \cdot \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+c}{b+d} = \left(-\frac{d}{b} \right)^t \cdot \left(P_0 - \frac{a+c}{b+d} \right) + \frac{a+c}{b+d},$$

que depende del parámetro P_0, es decir, del precio de venta inicial.

Por otra parte, considerando que $P_t = P_{t-1} = P_e$ para la búsqueda del precio de equilibrio del mercado, en la igualación de las funciones de oferta y de demanda, se tendría que:

$$a + c = b \cdot P_e + d \cdot P_e = (b + d) \cdot P_e\text{; de donde: } P_e = \frac{a+c}{b+d}.$$

Observemos que, si $d < b$, o bien $\frac{d}{b} < 1$, entonces también se cumple que: $\lim_{t\to+\infty} P_t = \frac{a+c}{b+d} = P_e$, y, por tanto, el precio de equilibrio tiende a estabilizarse con el paso del tiempo. En cambio, si $d > b$, o bien $\frac{d}{b} > 1$, no existe el límite anterior y el precio de equilibrio sufre oscilaciones importantes.

En el caso particular que $d = b$, resultará que:

$$P_t = (-1)^t \cdot \left(P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right) + \frac{a+c}{b+d} = \begin{cases} P_0, & \text{si } t \text{ es par} \\ -P_0 + 2 \cdot \frac{a+c}{b+d}, & \text{si } t \text{ es impar,} \end{cases}$$

y el precio de equilibrio toma dos valores constantes de forma alternativa.

b) Se trata de un caso particular del anterior, en el que los valores son:

$$a = 18, \quad b = 3, \quad c = 2, \quad \text{y} \quad d = 1.$$

En consecuencia, la trayectoria temporal del precio de mercado, esto es P_t, $\forall\, t \in T \subset \mathbf{N}$, será la siguiente:

$$P_t = \left(-\frac{1}{3}\right)^t \cdot \left(P_0 - \frac{18+2}{3+1}\right) + \frac{18+2}{3+1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^t \cdot (P_0 - 5) + 5 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^t + 5.$$

De hecho, de la igualdad o equilibrio: $D_t = S_t$ se deduce que:

$18 - 3P_t = P_{t-1} - 2$, y resulta la ecuación recurrente equivalente:

$3P_{t+1} + P_t = 20$, cuya ecuación equivalente de la homogénea es:

$3r + 1 = 0$, con $r = -1/3$. Con ello, al ser $|r| < 1$ todas las soluciones convergen a un punto de equilibrio estable, y como: $-1 < (r = -1/3) < 0$, dichas soluciones son oscilantes.

Ensayando una solución particular constante del tipo: $P_p = a$, se tendrá que: $3a + a = 4a = 20$, y $a = 5$, con lo que la solución general:

$$P_t = P_t^* + P_p = c(-1/3)^t + 5 = f(t),$$

y la condición inicial exige que: $P_0 = c + 5 = 10$ de donde: $c = 5$, y se tiene la solución particular buscada:

$$P_t = 5(-1/3)^t + 5, \text{ c.s.q.d.}$$

En este caso, a largo plazo, se tiene que el precio de equilibrio es:

$$\boxed{P_e = \lim_{t \to +\infty} P_t = 5'00 \text{ €}/\text{ud.}}, \text{ o bien: } P_e = \frac{a+c}{b+d} = \frac{18+2}{3+1} = 5'00 \text{ €}/\text{ud.}$$

De hecho, considerando que $P_t = P_{t-1} = P_e$ para la búsqueda del precio de equilibrio del mercado, en la igualación de las funciones de oferta y de demanda, se tendría que:

$18 – 3P_e = -2 + P_e$; $4P_e = 20$; de donde: $P_e = 5'00$ €/ud. y $q_e = 3$ (3.000 ud./día), c.s.q.d. Ello originará unos ingresos brutos anuales de los vendedores de (suponiendo un calendario laboral de 240 días/año):

$I = P_e \times q_e = 5'00$ €/ud. $\times$ 3.000 ud./día $\times$ 240 días/año = 3.600.000 €/año.

La representación gráfica del equilibrio del mercado, será:

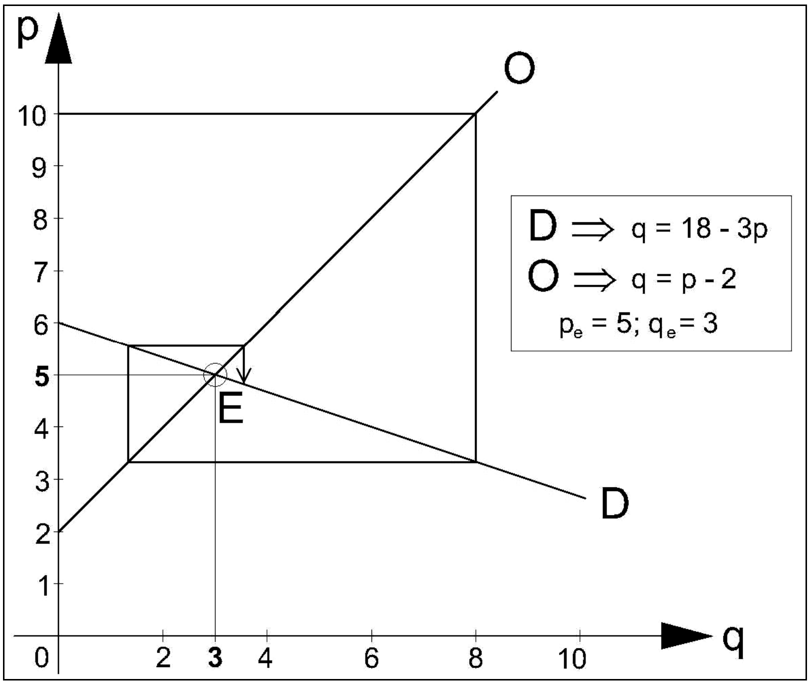


FIG. 11.25. Oferta, demanda y punto de equilibrio (IX).

Así mismo, la representación gráfica de la trayectoria temporal del precio, será:

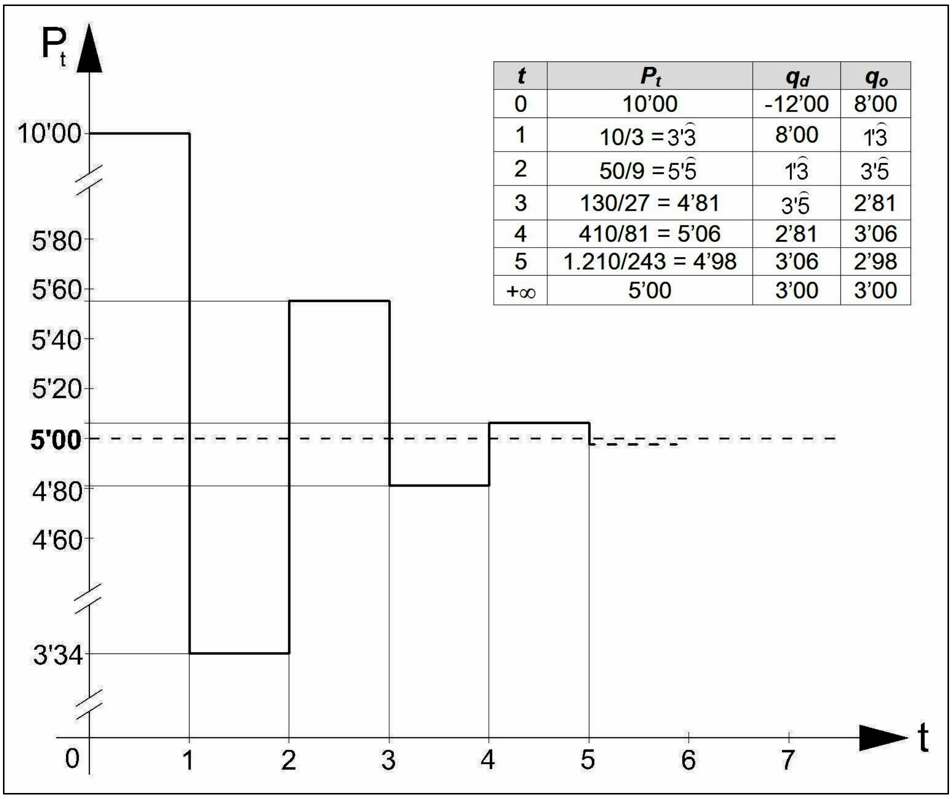


FIG. 11.26. Evolución temporal del precio (XI).

Ejemplo 14

Se sabe que la oferta de un producto en el año t depende de su precio en el año anterior según la relación: $q_t = 10 + \frac{1}{5} \cdot P_{t-1}$, donde q_t y P_t indican la oferta y el precio del producto en el año t, respectivamente. Si la demanda d_t, en función del precio, es $d_t = 20 - P_t$, encuéntrese el precio de equilibrio del mercado y la trayectoria temporal del precio, si el precio inicial es de 10 u.m./ud., viniendo las cantidades expresadas en miles de unidades y haciendo las correspondientes representaciones gráficas.

Solución:

El precio de equilibrio del mercado se alcanza cuando se igualan la oferta, q_t, y la demanda, d_t. En consecuencia, deberá cumplirse que:

$10 + \frac{1}{5} \cdot P_{t-1} = q_t = d_t = 20 - P_t$, de donde: $P_t = 10 - \frac{1}{5} \cdot P_{t-1}$. Por lo tanto,

$\Delta P_t = P_{t+1} - P_t = 10 - \frac{1}{5} \cdot P_t - P_t = 10 - \frac{6}{5} \cdot P_t$, de donde: $\Delta P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = 10$, o lo que es lo mismo: $5P_{t+1} + P_t = 50$, lo que implica un precio de equilibrio del mercado de ($P_{t+1} = P_t = P_e$): $6P_e = 50$, de donde: $P_e = (25/3)$ u.m./ud. y también: $q_e = 35/3 \approx 11.667$ ud., lo que supone unos ingresos brutos para el productor de: $I = P_e \times q_e = (25/3) \times 11.667 = 291.667$ u.m.

La representación gráfica correspondiente del equilibrio del mercado y la "telaraña" será la siguiente:

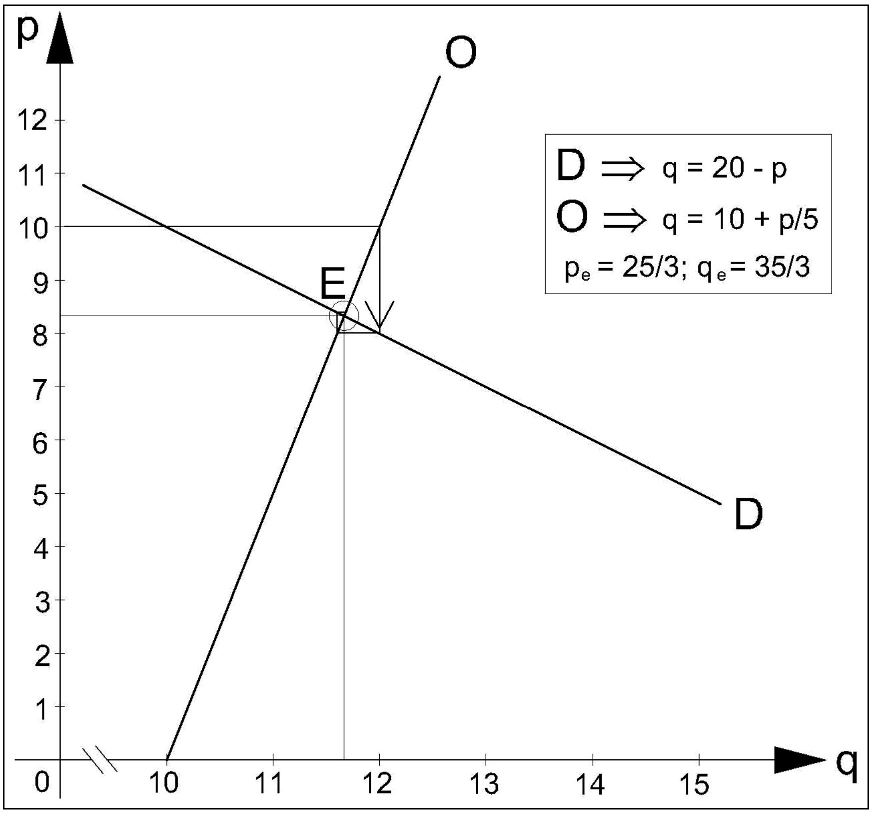


FIG. 11.27. Oferta, demanda y punto de equilibrio (X).

Se trata de una ecuación en diferencias finitas lineal de primer orden completa, con coeficientes y término independiente constantes, con:

$$P = \frac{6}{5} \qquad \text{y} \qquad Q = 10.$$

Calculemos, en primer lugar, la solución general de la ecuación en diferencias finitas lineal reducida asociada. En efecto, como sucede que, $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$, se tendrá:

$$0 = \Delta P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = P_{t+1} - P_t + \frac{6}{5} \cdot P_t = P_{t+1} + \frac{1}{5} \cdot P_t \text{, entonces: } P_{t+1} = -\frac{1}{5} \cdot P_t .$$

Dando valores concretos al subíndice t, tenemos que:

$$\begin{cases} \text{Para } t=0, \quad P_1 = -\frac{1}{5}\cdot P_0. \\ \text{Para } t=1, \quad P_2 = -\frac{1}{5}\cdot P_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot P_0. \\ \text{Para } t=2, \quad P_3 = -\frac{1}{5}\cdot P_2 = -\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot P_0. \\ \text{Para } t=3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

, y así sucesivamente. Por lo tanto, $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$, tenemos:

$$P_t = (-1)^t \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t \cdot P_0 = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot P_0,$$

siendo P_0 un parámetro que depende de las condiciones iniciales dadas del problema.

La solución general P_t de la ecuación en diferencias finitas lineales completa se obtiene introduciendo en su expresión el cambio de variable:

$$P_t = u_t \cdot v_t,$$

siendo u_t la solución general de la ecuación en diferencias finitas lineal reducida asociada. La ecuación en diferencias finitas que nos permite obtener la expresión de v_t es la siguiente:

$$\Delta v_t = \frac{q(t)}{u_{t+1}} = \frac{10}{(-1)^{t+1}\cdot 5^{-(t+1)} + u_t} = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^{t+1}\cdot 10 \cdot 5^{t+1}, \text{ de donde:}$$

$$v_{t+1} = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^{t+1}\cdot 10\cdot 5^{t+1} + v_t.$$

Dando valores concretos al subíndice t, tenemos que:

$$\begin{cases} \text{Para } t=0, \quad v_1 = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^1\cdot 10\cdot 5^1 + v_0. \\ \text{Para } t=1, \quad v_2 = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^2\cdot 10\cdot 5^2 + v_1 = \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^2 - \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^1 + v_0. \\ \text{Para } t=2, \quad v_3 = \frac{1}{u_0}\cdot(-1)^3\cdot 10\cdot 5^3 + v_2 = -\frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^3 + \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^2 - \frac{1}{u_0}\cdot 10\cdot 5^1 + v_0. \end{cases}$$

......................................, y así sucesivamente.

Por lo tanto, $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$ con $t \geq 1$, se tiene que:

$$v_t = v_0 + \sum_{s=1}^{t} \frac{1}{u_0} \cdot (-1)^s \cdot 10 \cdot 5^s = v_0 + \frac{10}{u_0} \cdot \sum_{s=1}^{t} (-1)^s \cdot 5^s =$$

{se trata de la suma de los *t* primeros términos de una progresión geométrica de razón -5 y de primer término -5}

$$= v_0 + \frac{10}{u_0} \cdot \left(\frac{-5-(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{1+5} \right) = v_0 - \frac{5}{u_0} \cdot \left(\frac{5+(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right).$$

En su consecuencia, la solución general P_t de la ecuación en diferencias finitas lineal completa de primer orden, $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$, es la siguiente:

$$P_t = u_t \cdot v_t = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot u_0 \cdot \left[v_0 - \frac{5}{u_0} \cdot \left(\frac{5+(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right) \right] =$$

$$= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \left[P_0 - 5 \cdot \left(\frac{5+(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right) \right]$$

, siendo P_0 un parámetro que depende directamente de las condiciones iniciales generalmente dadas en el enunciado del problema aquí planteado.

Finalmente, como que se sabe que: P_0 = 10 u.m./ud., considerando $\forall t \in T \subset \mathbf{N}$, podremos dibujar la pertinente trayectoria temporal del precio de mercado.

$$P_t = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \left[10 - 5 \cdot \left(\frac{5+(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right) \right] = (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[2 - \frac{5}{3} - \frac{(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right] =$$

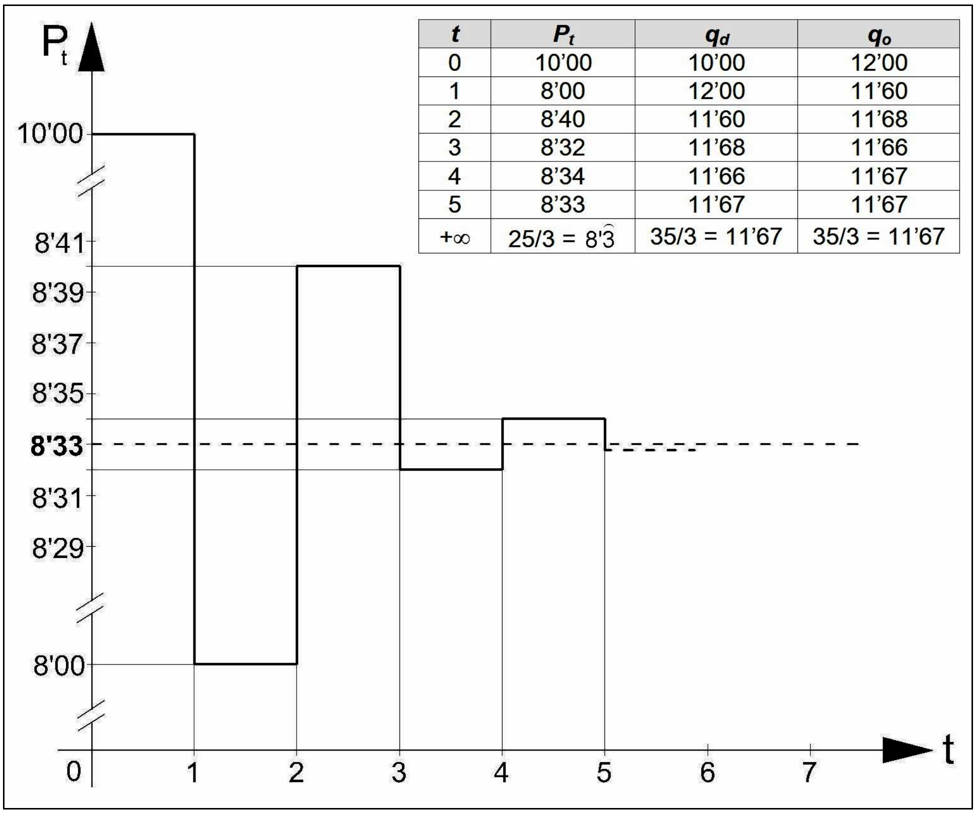
$$= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[2 - \frac{5}{3} \right] - (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot 5 \cdot \left[\frac{(-1)^{t+1} \cdot 5^{t+1}}{3} \right] =$$

$$= (-1)^t \cdot 5^{-t} \cdot \frac{5}{3} + \frac{25}{3} = \frac{5}{3} \cdot \left[5 + (-1)^t \cdot 5^{-t} \right] = \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{5} \right)^t + \frac{25}{3},$$

y el precio de equilibrio tenderá a:

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{5}{3} \left(-\frac{1}{5} \right)^t + \frac{25}{3} \right] = \frac{25}{3},$$

como se ha calculado con anterioridad, con la siguiente representación gráfica:



t	P_t	q_d	q_o
0	10’00	10’00	12’00
1	8’00	12’00	11’60
2	8’40	11’60	11’68
3	8’32	11’68	11’66
4	8’34	11’66	11’67
5	8’33	11’67	11’67
$+\infty$	$25/3 = 8'\overset{\frown}{3}$	35/3 = 11’67	35/3 = 11’67

FIG. 11.28. Evolución temporal del precio (XII).

Veamos que r = -1/5, por lo que: |r| < 1 y también se cumple que: -1 < (r = -1/5) < 0, por lo que todas las soluciones oscilantes convergen a un punto de equilibrio estable, puesto que se trata de una sucesión amortiguada.

En este caso, pues, a largo plazo, se tiene que el precio de equilibrio es:

$$\boxed{P_e = \lim_{t \to +\infty} P_t = \frac{25}{3} = 8'33 \text{ u.m./ud.}}$$

De hecho, considerando como siempre que: $P_t = P_{t-1} = P_e$ para la búsqueda del precio de equilibrio del mercado, en la igualación de las funciones de oferta y de demanda, se tendría efectivamente que:

$5P_e = 50 – P_e$, de donde: $P_e = (25/3)$ u.m./ud.,

al que corresponde, como ya hemos visto, una cantidad de:

$q_e = 35/3 \approx 11.667$ ud.

3. ECUACIONES RECURRENTES DE ORDEN SUPERIOR

3.1. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Ejemplo 1

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+2} - 3P_{t+1} - 4P_t = 0$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 1'00 €/ud. y P_1 = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Obsérvese que, en este caso, se trata de un célebre modelo dinámico de oferta-demanda, denominado de "la telaraña", con la particularidad de que, en este modelo, la decisión de producir debe ser tomada con antelación de dos períodos a la venta. De este modo, al final de cada período los productores deciden, en base a los precios obtenidos en los dos últimos períodos, la cantidad de bien o servicio a ofertar en el presente. Esta hipótesis de comportamiento se ha revelado especialmente útil, por ejemplo, para ciertos productos agrícolas perecederos o bien de producción relevante bianual, en los que la decisión de cultivo en cada cosecha se basa en los precios obtenidos en las dos últimas cosechas. En este sentido, el estudio de la evolución temporal del precio para que el sistema se encuentre en equilibrio en cada período se resuelve mediante ecuaciones en diferencias finitas de orden superior, como también veremos en otros ejercicios de esta misma sección de nuestro libro.

Desde luego, la ecuación característica es:

$r^2 - 3r - 4 = 0$; $r = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \right.$; y la solución general es:

$P_t = C_1 \cdot 4^t + C_2(-1)^t$; pero las condiciones dadas exigen que:

$$P_0 = C_1 + C_2 = 1\ ;\quad P_1 = 4C_1 - C_2 = 2\ ;$$

$$5C_1 = 3\ ;\ C_1 = \frac{3}{5};\quad C_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5};\quad \text{con lo que:}$$

$$\boxed{P_t = \frac{3}{5} \times 4^t + \frac{2}{5} \times (-1)^t = f(t)}.$$

b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t \to +\infty} P_t = \frac{3}{5} \cdot \lim_{t \to +\infty} 4^t + \frac{2}{5} \cdot \lim_{t \to +\infty} (-1)^t .$$

Debe tenerse en cuenta que el primer límite es infinito y el segundo es un número complejo, por lo que dicha expresión no existe en el campo de los números reales y, en su consecuencia, carece de significado económico, con un supuesto precio de equilibrio: $P_e = 0$ € .

c) La representación gráfica correspondiente será:

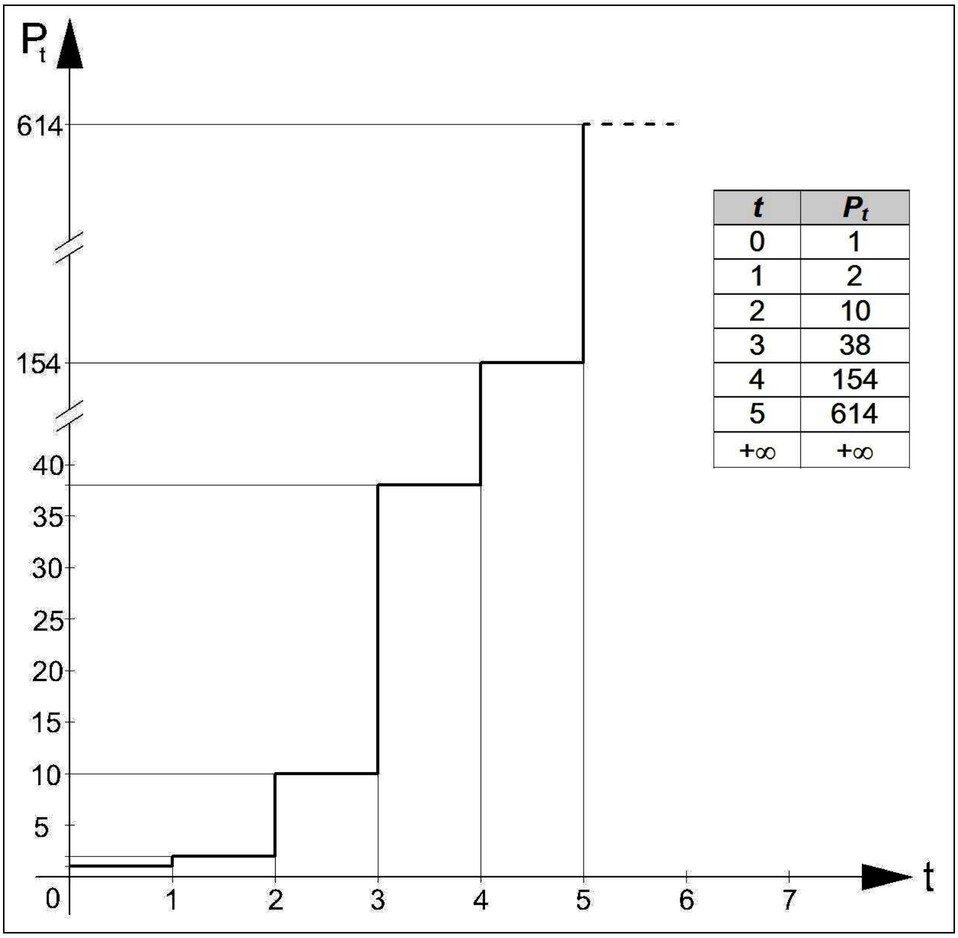


FIG. 11.29. Evolución temporal del precio (XIII).

En el presente ejemplo, el precio del bien tendería a incrementarse en el tiempo de un modo extraordinario, por lo que el modelo en cuestión parece poco creíble o realista.

Ejemplo 2

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+3} - 6P_{t+2} + 11P_{t+1} - 6P_t = 0, \ \forall \ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 7'00 €/ud., P_1 = 11'00 €/ud. y P_2 = 21'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La ecuación característica correspondiente: $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$, que tiene por soluciones las tres raíces reales y distintas: 1, 2 y 3, luego la solución general es:

$$P_t = C_1 + C_2 \cdot 2^t + C_3 \cdot 3^t.$$

Ahora, por ejemplo, la solución simple: $P_t = 1 + 2 \cdot 3^t$, es una solución particular, puesto que siendo solución de la ecuación, se obtiene de la solución general haciendo: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ y $C_3 = 2$. Otra solución particular de esta ecuación vendría dada, v. gr., por las condiciones de contorno expresadas en el enunciado del problema, a saber:

$P_0 = 7$; $P_1 = 11$; $P_2 = 21$, lo que generaría el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + C_2 + C_3 = 7 \\ P_1 = C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 11 \\ P_2 = C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 21 \end{cases}$$

, que es un sistema no homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, compatible y determinado, resoluble por aplicación de la conocida regla de Cramer[7] (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan) del siguiente modo:

[7] La *regla de Cramer* es un conocido teorema del álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704 - 1752), quien publicó la regla en su *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de 1750, aunque Colin Maclaurin también publicó el método en su *Treatise of Geometry* de 1748 (y probablemente sabía del método desde 1729). La regla de Cramer es de singular importancia teórica porque ofrece una expresión explícita para la solución del sistema. Sin embargo, para sistemas de ecuaciones lineales de más de tres ecuaciones su aplicación para la resolución del mismo resulta excesivamente costosa: computacionalmente, es ineficiente para grandes matrices y por ello no es usada en aplicaciones prácticas que pueden implicar muchas ecuaciones. Sin embargo, como no es necesario pivotar matrices, es más eficiente que la eliminación gaussiana para matrices pequeñas, particularmente cuando son usadas operaciones SIMD.

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 3 \\ 21 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & 3 \\ 1 & 21 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2;$$

$$C_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & 4 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1,$$

y entonces la solución particular correspondiente vendría dada por la expresión:

$$\boxed{P_t = 3^t + 2^{t+1} + 4 = f(t)}.$$

b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t\to+\infty} P_t = \lim_{t\to+\infty} 3^t + \lim_{t\to+\infty} 2^{t+1} + 4 = +\infty \text{, y al mismo tiempo:}$$

$$\lim_{t\to-\infty} P_t = \lim_{t\to-\infty} 3^t + \lim_{t\to-\infty} 2^{t+1} + 4 = 4 \,.$$

c) La representación gráfica correspondiente, que señala incrementos substanciales con el tiempo del precio del bien en cuestión que permiten calificar el modelo objeto de nuestro estudio como poco realista, será la siguiente:

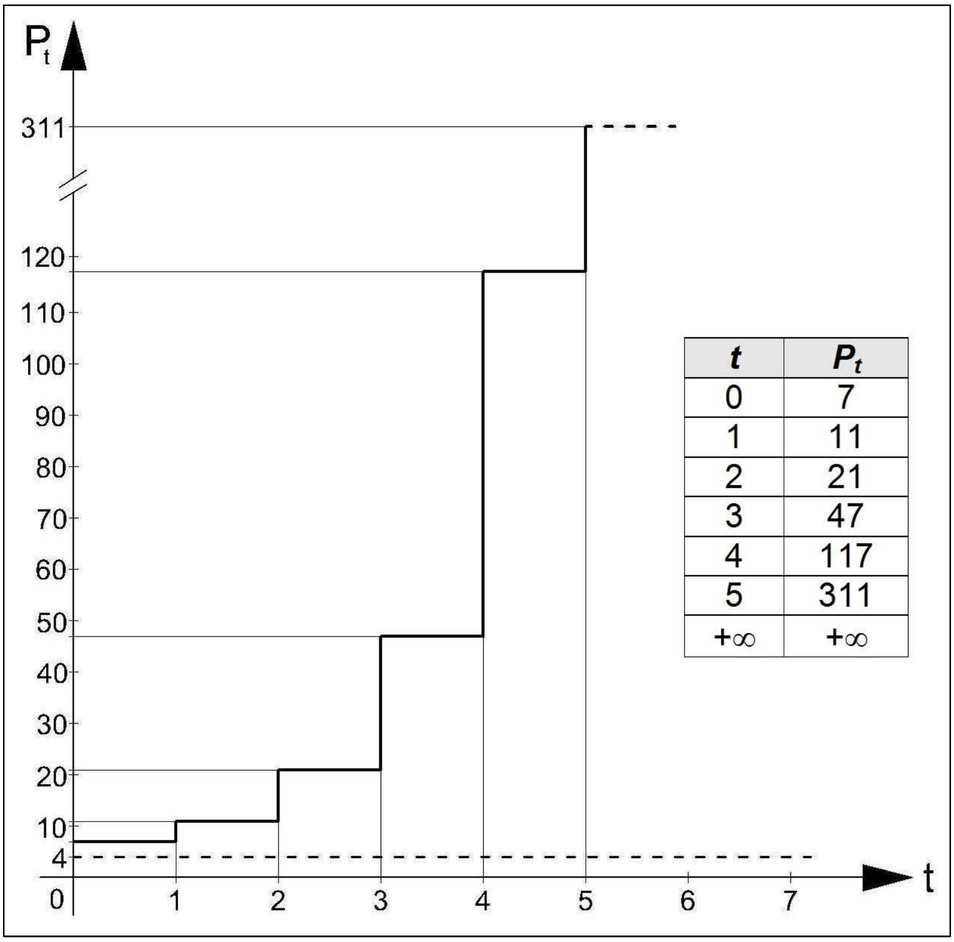


FIG. 11.30. Evolución temporal del precio (XIV).

Ejemplo 3

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+2} - P_{t+1} - 2P_t = 0$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_1 = 0'00 €/ud. y P_2 = 5'00 €/ud.. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Se trata de una ecuación recurrente homogénea de segundo orden. La ecuación característica correspondiente, a saber: $r^2 - r - 2 = 0$, admite las soluciones: 2 y –1, luego la solución general de la ecuación en diferencias expuesta será de la forma: $P_t = C_1(-1)^t + C_2 \cdot 2^t$.

Por otra parte, se tendrá que: $P_1 = -C_1 + 2C_2 = 0$; $P_2 = C_1 + 4C_2 = 5$; de donde se deduce que: $C_1 = 5/3$ y $C_2 = 5/6$, por lo que se obtiene la siguiente solución particular:

$$\boxed{P_t = \frac{5}{3}[(-1)^t + 2^{t-1}] = f(t)}$$

b) A largo plazo sucederá que:

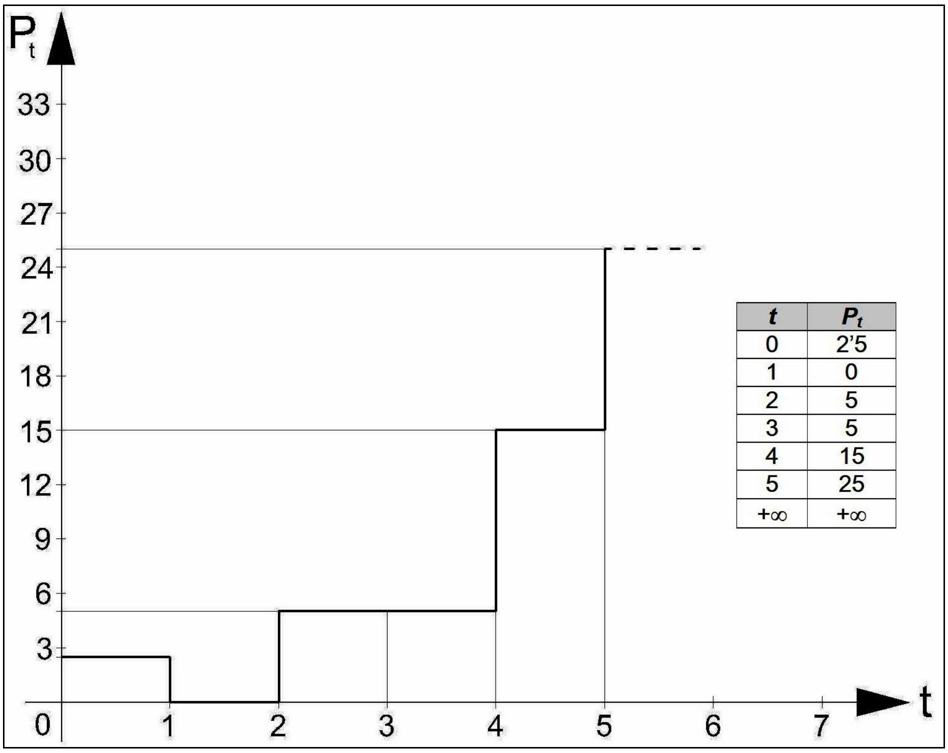
$$\lim_{t \to +\infty} P_t = \frac{5}{3} \lim_{t \to +\infty} (-1)^t + \frac{5}{3} \lim_{t \to +\infty} 2^{t-1}.$$

Debe tenerse en cuenta, al respecto, que el segundo límite de la expresión anterior es infinito y el primero es un número complejo, por lo que dicha expresión no existe en el campo de los números reales y, en su consecuencia, carece de significado económico.

Existe un supuesto precio de equilibrio de: $P_e = 0$ €/ud., resultante de considerar: $P_{t+2} = P_{t+1} = P_t = P_e$, con lo que se obtendría, substituyendo estos valores en la ecuación inicial, que:

$$P_e - P_e - 2P_e = 0 \Rightarrow P_e = 0.$$

c) La representación gráfica correspondiente, hasta t = 5, será la siguiente:



t	P_t
0	2'5
1	0
2	5
3	5
4	15
5	25
+∞	+∞

FIG. 11.31. Evolución temporal del precio (XV).

Ejemplo 4

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $6P_{t+2} - 5P_{t+1} + P_t = 0$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 5'00 €/ud. y P_1 = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Su ecuación característica es: $6r^2 - 5r + 1 = 0$, que ofrece las soluciones: $r_1 = ½$ y $r_2 = 1/3$, con lo que se tendrá la solución general:

$$P_t = c_1 \cdot (1/2)^t + c_2 \cdot (1/3)^t = f(t)$$

Por otra parte, las condiciones particulares dadas exigen que:

$P_0 = c_1 + c_2 = 5$; $P_1 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} = 2$, lo que ofrece: $c_1 = 2$ y $c_2 = 3$, por lo que la solución particular pedida será:

$$P_t = 2 \cdot (1/2)^t + 3 \cdot (1/3)^t = \boxed{\frac{1}{2^{t-1}} + \frac{1}{3^{t-1}} = f(t)}$$

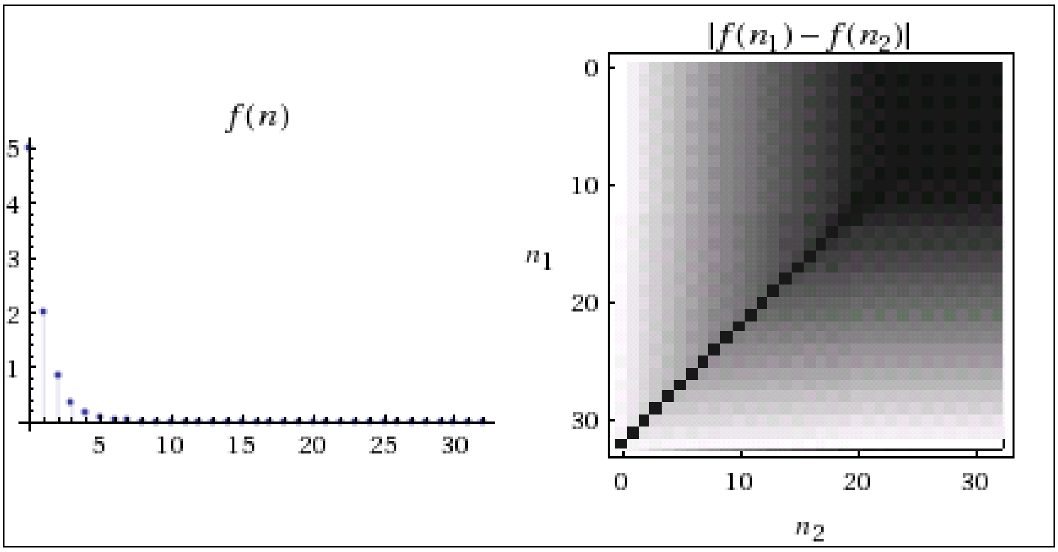
b) A largo plazo sucederá que:

$\lim\limits_{t \to +\infty} P_t = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{2^{t-1}} + \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{3^{t-1}} = 0 + 0 = 0$, luego el precio tiende a 0'00 €/ud. A esta misma conclusión llegaríamos considerando el precio de equilibrio:

$$6P_e - 5P_e + P_e = 0, \text{ de donde: } P_e = 0.$$

c) La representación gráfica correspondiente, con los valores de la tabla y recurrencia, será la siguiente:

n	0	1	2	3	4
$f(n)$	5	2	0.833333	0.361111	0.162037



Ejemplo 5

En un mercado supuesto de competencia perfecta[8], la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+2} - 5P_{t+1} + 6P_t = 0,\ \forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 1'00 €/ud. y P_1 = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Primero resolvemos la ecuación como en los ejercicios anteriores para calcular la ecuación general; la ecuación característica es: $r^2 - 5r + 6 = 0$, y sus raíces $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$, y, por tanto, la solución general será:

$$P_t = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot 3^t = f(t).$$

[8] En la teoría económica, la *competencia perfecta* describe los mercados de tal manera que los participantes no son lo suficientemente grandes como para tener el poder suficiente de mercado para fijar el precio de un producto homogéneo. Debido a que las condiciones de *competencia perfecta* son estrictas, hay muy pocos mercados que resulten perfectamente competitivos. Sin embargo, los compradores y vendedores, en algunos mercados tipo subasta, por ejemplo para las materias primas o algunos activos financieros, pueden aproximarse al concepto de tal suerte expresado. La *competencia perfecta* sirve como punto de referencia para medir la vida real y los mercados de *competencia imperfecta*. Por lo general, un mercado de *competencia perfecta* existe cuando todos los participantes constituyen un "tomador de precios", y ninguno de los participantes influye en el precio del producto que compra o que vende. En términos generales, la *competencia perfecta* es un tipo de competencia que caracteriza a un mercado, por lo que también es considerada (por diversos economistas y mercadólogos) como un tipo de mercado o modelo de mercado. Desde la perspectiva de la teoría económica, la *competencia perfecta* es la situación de mercado más conveniente, pues es la única en la que se consigue una asignación eficiente de los recursos de la sociedad (porque se produce la cantidad en que el precio iguala al coste marginal).

Para hallar la solución particular que corresponde a las condiciones dadas en el enunciado del problema planteado, se hace que se cumplan dichas condiciones, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot 3^0 = 1 \\ P_1 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot 3^1 = 2 \end{array}\right\}$$

De este sencillo sistema de ecuaciones despejamos las constantes c_1 y c_2, de donde $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, y, por tanto, la solución particular buscada será:

$$P_t = 1 \cdot 2^t + 0 \cdot 3^t = \boxed{2^t}.$$

b) A largo plazo sucederá que:

$\lim\limits_{t \to +\infty} P_t = \lim\limits_{t \to +\infty} 2^t = +\infty$. Si tenemos en cuenta que:

$\lim\limits_{t \to -\infty} P_t = \lim\limits_{t \to -\infty} 2^t = 0$, que sería el precio teórico de equilibrio.

c) La representación gráfica correspondiente de la trayectoria temporal del precio será la siguiente:

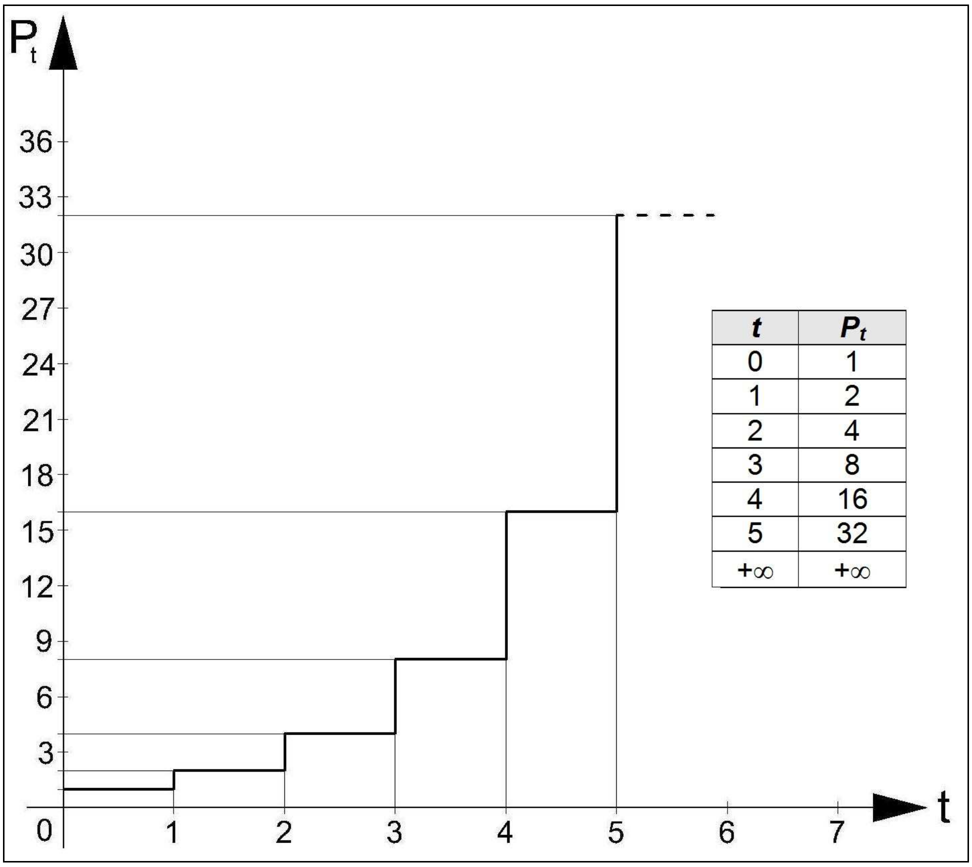


FIG. 11.32. Evolución temporal del precio (XVI).

Ejemplo 6

La demanda en el mercado de un bien sigue una relación de la forma:
$D(t+2) = \frac{3}{2}D(t+1) - \frac{1}{2}D(t)$. Estúdiese bajo qué condiciones iniciales la demanda D(t) se estabiliza a largo plazo.

Solución:

La ecuación en diferencias finitas es: $D(t+2) - \frac{3}{2}D(t+1) + \frac{1}{2}D(t) = 0$; que expresada en notación de subíndices es: $2D_{t+2} - 3D_{t+1} + D_t = 0$, y tiene por ecuación característica la siguiente:

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0\,;\quad 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0, \text{con las raíces :}$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \end{matrix} \right.$$

De este modo, la solución general de la ecuación anterior es:

$$D(t) = c_1 + c_2\left(\frac{1}{2}\right)^t = c_1 + \frac{c_2}{2^t}, \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

A largo plazo, se tiene que:

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} D(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[c_1 + \frac{c_2}{2^t}\right] = c_1},$$

lo que quiere decir que la demanda siempre se estabiliza a largo plazo alrededor de c_1.

Ejemplo 7

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+2} - 2P_{t+1} + P_t = 0$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 1'00 €/ud. y P_1 = 1'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La ecuación característica, que tiene una raíz doble, es:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \; ; \quad r = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right. \text{ ; y la solución general es:}$$

$P_t = C_1 \cdot 1^t + t \cdot C_2 \cdot 1^t = C_1 + t \cdot C_2 = f(t)$; con las condiciones dadas:

$P_0 = C_1 = 1$; $P_1 = C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 0$, con lo que resultará:

$\boxed{P_t = 1}$ (sucesión constante).

b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t \to +\infty} P_t = \lim_{t \to +\infty} 1 = 1\text{'}00 \text{ € (precio de equilibrio).}$$

c) La representación gráfica correspondiente será siempre la de una recta paralela al eje de abscisas, por lo que obviaremos aquí el dibujo resultante.

Ejemplo 8

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+3} - 5P_{t+2} + 3P_{t+1} + 9P_t = 0$, $\forall$ $t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: $P_0 = 3\text{'}00$ €/ud., $P_1 = 5\text{'}00$ €/ud. y $P_2 = 19\text{'}00$ €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La ecuación característica: $r^3 - 5r^2 + 3r + 9 = 0$ tiene por soluciones –1 y 3 (doble), luego la solución general de esta ecuación recurrente es:

$$P_t = c_1(-1)^t + c_2 \cdot 3^t + +c_3 \cdot t \cdot 3^t = f(t).$$

Haciendo ahora respectivamente: t = 0, t = 1 y t = 2, se tendrá el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas no homogéneo, compatible y determinado, que resolveremos por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan). O sea:

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_2 \\ 5 = -c_1 + 3c_2 + 3c_3 \\ 19 = c_1 + 9c_2 + 18\ c_3 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 19 & 9 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{48}{48} = 1;\quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 19 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{96}{48} = 2;$$

Y también: $$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{0}{48} = 0,$$

de donde se obtienen los valores: $c_1 = 1$; $c_2 = 2$ y $c_3 = 0$, por lo que la solución particular buscada de la trayectoria temporal del precio será:

$$\boxed{P_t = (-1)^t + 2 \cdot 3^t = f(t)}.$$

b) A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t \to +\infty} P_t = 2 \cdot \lim_{t \to +\infty} 3^t + \lim_{t \to +\infty} (-1)^t .$$

Debe tenerse en cuenta que el primer límite es infinito y el segundo es un número complejo, por lo que dicha expresión no existe en el campo de los números reales y, en su consecuencia, carece de significado económico, con un supuesto precio de equilibrio: $P_e = 0$ €/ud., puesto que de la expresión dada se deduce que (con $P_{t+3} = P_{t+2} = P_{t+1} = P_t = P_e$) también: $8P_e = 0 \Rightarrow P_e = 0$.

c) La representación gráfica correspondiente será:

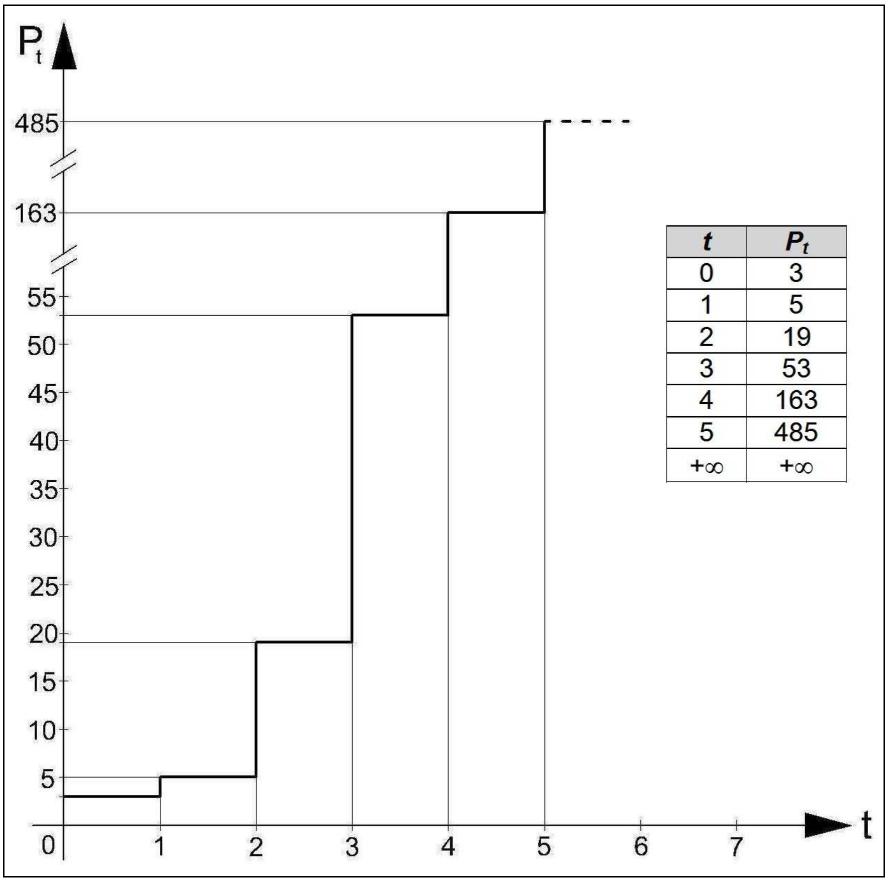


FIG. 11.33. Evolución temporal del precio (XVII).

Ejemplo 9

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio del mercado supone que el precio de un determinado producto, a partir del segundo periodo P_2, es la semisuma de los precios de los dos períodos anteriores. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.

Solución:

a) Haremos $P_0 = a$ y $P_1 = b$. Se tiene que: $P_{t+2} = \frac{P_{t+1} + P_t}{2}$, o bien: $2P_{t+2} - P_{t+1} - P_t = 0$, cuya solución general es:

$$\boxed{P_t = c_1 + c_2 \cdot (-1/2)^t = f(t)} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \Re\,.$$

La solución que buscamos se obtiene para:

$$c_1 = \frac{1}{3}(a + 2b) \text{ y } c_2 = \frac{2}{3}(a - b), \text{ esto es:}$$

$$\boxed{P_t = \frac{1}{3}(a+2b) \ + \ \frac{2}{3}(a-b)\cdot(\text{-}1/2)^t = f(t)} \ .$$

b) Por lo que se refiere a la tendencia del precio a largo plazo, sucederá que el límite pedido será:

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \frac{a+2b}{3} \ + \ \frac{2}{3}(a-b)\cdot \lim_{t\to\infty}(\text{-}1/2)^t.$$

Por aplicación de la fórmula de Euler para el cálculo de límites de sucesiones, se tiene que:

$$\lim_{t\to\infty} K^t = e^{\lim_{t\to\infty} t\cdot(K-1)} \ ; \ \text{ para } K = -\frac{1}{2}, \text{con lo que}:$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^t = e^{\lim_{t\to\infty} t\left(-\frac{3}{2}\right)} = e^{-\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{2}} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \text{, por lo que resultará:}$$

$\boxed{\lim_{t\to\infty} P_t = \frac{a+2b}{3}}$, y el precio de equilibrio correspondiente tenderá a:

$$\boxed{P_e = \frac{a+2b}{3}}.$$

Ejemplo 10

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+2} - P_{t+1} - 2P_t = 0, \ \forall \ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 0’00 €/ud. y P_1 = 2’00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) El polinomio característico es: $r^2 - r - 2$, que posee las dos raíces reales y distintas -1 y 2, luego la solución general de la ecuación homogénea planteada es la siguiente:

$$P_t = c_1(-1)^t + c_2\cdot 2^t, \ \forall \ c_1, c_2 \in \Re.$$

Pues bien, para hallar la solución particular que corresponde a las condiciones dadas en el enunciado del problema planteado, se hace que se cumplan dichas condiciones, esto es:

$$\begin{cases} P_0 = c_1 + c_2 = 0 \\ P_1 = -c_1 + 2c_2 = 2 \end{cases}$$, de donde: $c_1 = -\frac{2}{3}$; $c_2 = \frac{2}{3}$, y por tanto, la solución particular buscada será:

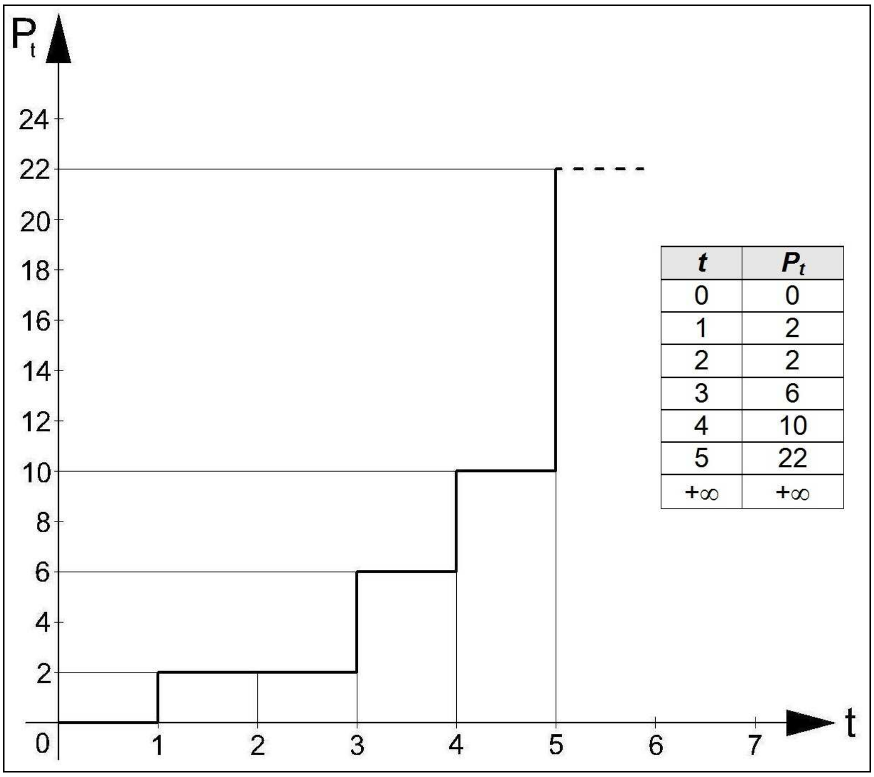
$$\boxed{P_t = -\frac{2}{3}(-1)^t + \frac{2}{3}\cdot 2^t = \frac{2}{3}[2^t - (-1)^t] = f(t)}$$

b) A largo plazo sucederá que el límite pedido será:

$$\lim_{t\to+\infty} P_t = \frac{2}{3}[\lim_{t\to+\infty}(2)^t \text{ - } \lim_{t\to+\infty}(-1)^t].$$

Debe tenerse en cuenta que el primer límite que aparece en el interior del corchete de la expresión anterior es infinito y el segundo es un número complejo, por lo que dicha expresión no existe en el campo de los números reales y, en su consecuencia, carece de significado económico.

c) La representación gráfica correspondiente será:



t	P_t
0	0
1	2
2	2
3	6
4	10
5	22
+∞	+∞

FIG. 11.34. Evolución temporal del precio (XVIII).

3.2. ECUACIONES INHOMOGÉNEAS O COMPLETAS

Ejemplo 1

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+2} + 4P_{t+1} + 4P_t = 7, \ \forall \ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 1'00 €/ud. y P_1 = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La ecuación característica de la homogénea, que tiene una raíz real doble, es la siguiente:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \ ; \quad r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix} \right. \ ; \text{ y la solución es:}$$

$$P_t^* = C_1 \cdot (-2)^t + t \cdot C_2 \cdot (-2)^t = f(t).$$

Ensayaremos ahora una solución particular de la completa o inhomogénea, del tipo constante: $P_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$a + 4a + 4a = 9a = 7; \ a = 7/9 \ ;$$

y la solución general del problema planteado será:

$$P_t = P_t^* + P_p = C_1 \cdot (-2)^t + t \cdot C_2 \cdot (-2)^t + 7/9.$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + 7/9 = 1 \\ P_1 = -2C_1 - 2C_2 + 7/9 = 2 \end{cases}$$

De ello se deduce que el valor de las constantes viene dado por: $C_1 = 2/9$ y $C_2 = -(5/6)$, con lo que la expresión particular buscada de la trayectoria temporal del precio será:

$$\boxed{P_t = (2/9) \cdot (-2)^t - t \cdot (5/6) \cdot (-2)^t + 7/9 = (-2)^t \left(\frac{2}{9} - \frac{5t}{6}\right) + \frac{7}{9} = f(t)}.$$

b) A largo plazo sucederá que:

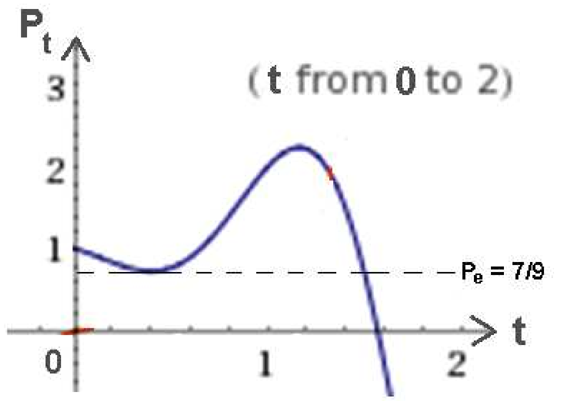
$$\lim_{t\to+\infty} P_t = \lim_{t\to+\infty} (-2)^t \cdot \left(\frac{2}{9} - \lim_{t\to+\infty} \frac{5t}{6}\right) + \frac{7}{9}.$$

Debe tenerse en cuenta que el segundo límite de la expresión anterior es infinito y el primero ofrece una solución compleja infinita, por lo que dicha expresión no existe en el campo de los números reales y, en su consecuencia, carece de significación real.

En cualquier caso, a partir de t = 2 (con $P_t = -5$) se obtienen algunos precios negativos, lo que carece de significado económico.

Desde luego, se tendría un supuesto precio de equilibrio de:
$P_{t+2} = P_{t+1} = P_t = P_e$; $9P_e = 7$, de donde: $P_e = 7/9$ €/ud.

c) La representación gráfica correspondiente será (considerando la *t* como variable continua), así como la tabla con números naturales:



t	P_t
0	1
1	2
2	-5
3	19
4	-49
5	127
--	--

Ejemplo 2

Hallar la evolución temporal del precio de un bien determinado en un modelo donde la oferta y la demanda vienen dadas por:

$$\begin{cases} D_t = 2 - 3P_t \\ O_t = -3 + 2P_{t-1} \end{cases}$$

y el ajuste del precio se efectúa de dos maneras diferentes: a) no precisamente a través del equilibrio del mercado sino mediante la siguiente ecuación: $P_{t+1} = P_t - 2(O_t - D_t)$, en que se relacionan los precios con la variación en el nivel de inventario, y b) con equilibrio del mercado, suponiendo un $P_0 = 1'50$ €/ud. y viniendo las cantidades expresadas en miles de unidades diarias.

Solución:

a) En este primer caso, pues, se cumplirá que:

$P_{t+1} – P_t = -2(-3 + 2P_{t-1} – 2 + 3P_t) = 6 – 4P_{t-1} + 4 – 6P_t$; o también:

$P_{t+1} – P_t + 4P_{t-1} + 6P_t = 10$, o bien su ecuación equivalente:

$P_{t+2} + 5P_{t+1} + 4P_t = 10$, que es una ecuación inhomogénea de segundo orden, cuya ecuación característica de la homogénea viene dada por la ecuación:

$$r^2 + 5r + 4 = 0;\ r = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2};$$

de donde: $r_1 = -1$ y $r_2 = -4$, y su solución será: $P_t^* = c_1 \cdot (-1)^t + c_2 \cdot (-4)^t$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la ecuación completa del tipo constante: $P_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se tendrá que: a + 5a + 4a = 10a = 10, de donde: a = 1, con lo que se tiene la solución general buscada:

$$\boxed{P_t = P_t^* + P_p = c_1 \cdot (-1)^t + c_2 \cdot (-4)^t + 1}\ .$$

A largo plazo sucederá que:

$$\lim_{t \to +\infty} P_t = c_1 \cdot \lim_{t \to +\infty} (-1)^t + c_2 \cdot \lim_{t \to +\infty} (-4)^t + 1.$$

Este límite no existe, ya que nos hallamos en presencia de una sucesión oscilante[9]. Ello puede comprobarse calculando por separado los límites:

- $\lim_{t\to\infty}\left(c_1(-1)^t\right) = c_1 \sin\infty + ic_1 \sin\infty$, que es un número complejo.
- $\lim_{t\to\infty}\left(c_2(-4)^t\right) = unit\_circle \cdot \infty$, donde $unit\_circle$ representa un punto arbitrario de la circunferencia unidad del plano complejo (p.e. 1, -1, i, -i), es decir, que se trata de una solución compleja infinita.

Per lo tanto, llegamos a la conclusión de que el límite mencionado no existe en el conjunto de los números reales y, en su consecuencia, este caso carece de significado económico.

[9] Recordemos que las sucesiones *oscilantes*, como la que nos ocupa, no son convergentes ni divergentes, o sea, que no tienen límite. Sus términos alternan de mayor a menor o viceversa.

b) En este segundo caso, se cumplirá, igualando la oferta y la demanda, que ($P_e = P_t = P_{t-1}$):

$$2 - 3P_t = 2P_{t-1} - 3, \text{ y resulta la ecuación equivalente:}$$

$$3P_{t+1} + 2P_t = 5;\ 5P_e = 5\ ;\ P_e = 1'00 \text{ €/ud., con } q_e = -1,$$

que es una ecuación inhomogénea en diferencias finitas, lineal y de primer orden, cuya ecuación característica de la homogénea viene dada por la expresión: $3r + 2 = 0$, de donde: $r = -\frac{2}{3}$.

La representación gráfica del equilibrio del mercado, será la siguiente:

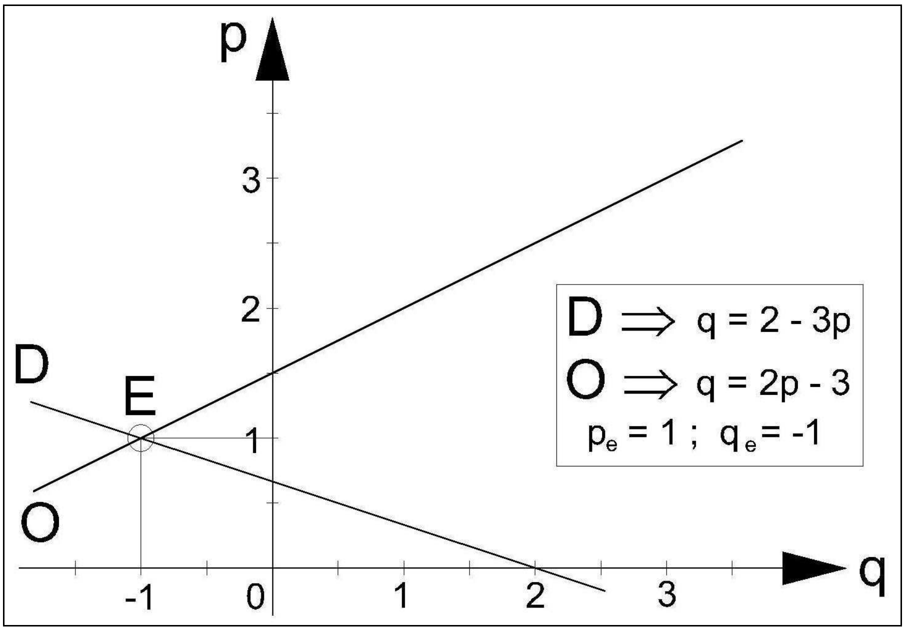


FIG. 11.35. Oferta, demanda y punto de equilibrio (XI).

Al ser: $0 < |r| < 1$, y $-1 < r < 0$, la solución converge de forma oscilante a un punto de equilibrio estable. Es decir, los precios tienden al precio de equilibrio.

La solución de la ecuación homogénea es, pues: $P_t^* = k(-\frac{2}{3})^t$, siendo k una constante arbitraria. Como solución particular de la ecuación completa ensayemos: $P_p = k'$, y substituyendo en la ecuación inicial, se tiene que:

$$3k' + 2k' = 5, \text{ de donde: } k' = 1,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea o completa será:

$$\boxed{P_t = P_t^* + P_p = k\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 1}\ , \ \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

Puesto que nos dicen que P_0 = 1’50 €/ud., se tendrá que:

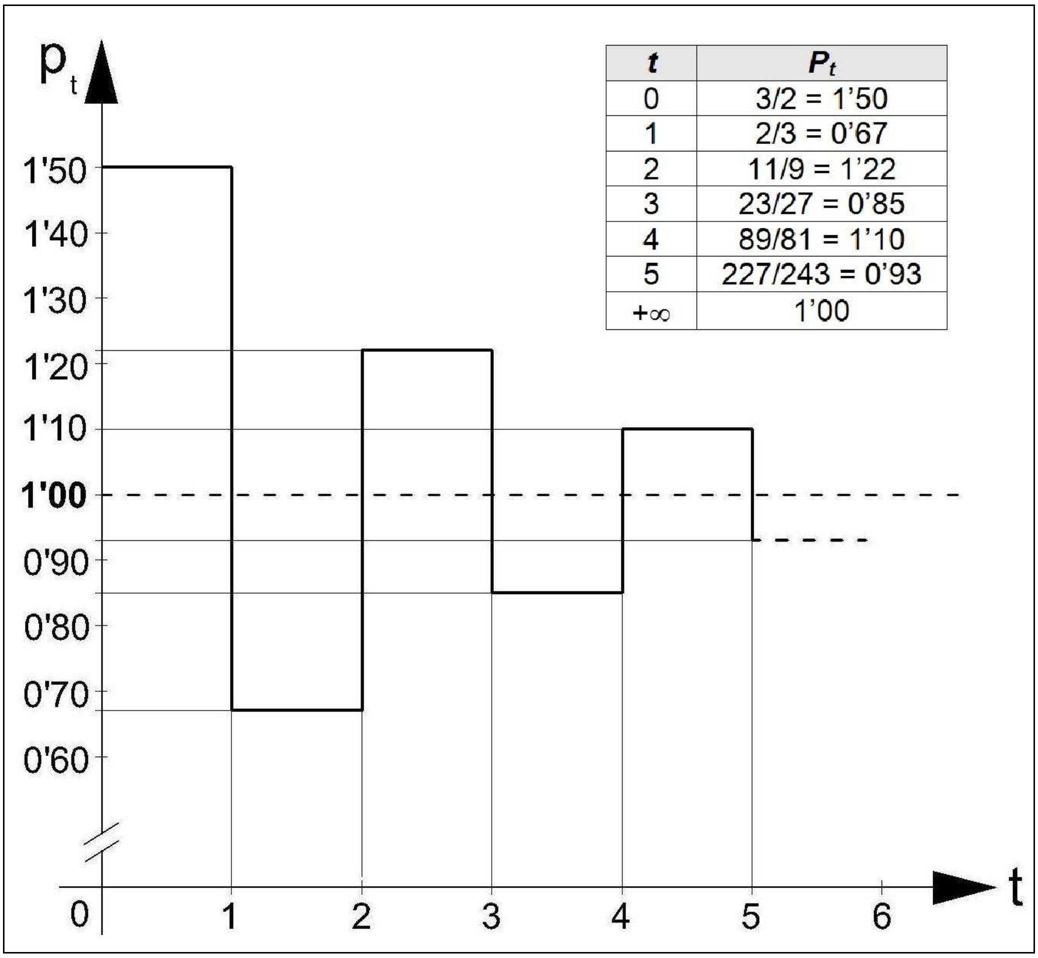
P_0 = k + 1 = 1’50, por lo que: k = 0’50, luego la solución particular es:

$$\boxed{P_t = 0'5\left(-\frac{2}{3}\right)^t + 1},\ \forall\ t \in \mathbf{N},$$

y, a largo plazo, sucederá que: $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} P_t = 1 + 0'5 \cdot \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^t} = 1,$

es decir, que el precio de equilibrio se estabilizará en 1’00 €/ud.

Por último, la representación gráfica de la trayectoria temporal del precio de mercado será la siguiente:



t	P_t
0	3/2 = 1’50
1	2/3 = 0’67
2	11/9 = 1’22
3	23/27 = 0’85
4	89/81 = 1’10
5	227/243 = 0’93
+∞	1’00

FIG. 11.36. Evolución temporal del precio (XIX).

Ejemplo 3

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+1} + P_t + (P_{t-1})/4 = 9/2$, $\forall$ $t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 3'00 €/ud. y P_1 = 4'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Teniendo en cuenta la ecuación equivalente:

$4P_{t+2} + 4P_{t+1} + P_t = 18$, se tendrá la ecuación característica de la homogénea siguiente:

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \; ; \quad r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \left\langle \begin{matrix} -1/2 = r_1 \\ -1/2 = r_2 \end{matrix} \right. \; ; \text{ y la solución es:}$$

$$P_t^* = C_1 \cdot (-1/2)^t + t \cdot C_2 \cdot (-1/2)^t = f(t).$$

Ensayaremos ahora una solución particular de la completa o inhomogénea, del tipo constante: $P_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$4a + 4a + a = 9a = 18; \; a = 2 \; ; \text{ y la solución general será:}$$

$$P_t = P_t^* + P_p = C_1 \cdot (-1/2)^t + t \cdot C_2 \cdot (-1/2)^t + 2.$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + 2 = 3 \\ P_1 = -\dfrac{C_1}{2} - \dfrac{C_2}{2} + 2 = 4 \end{cases}$$

De ello se deduce que: $C_1 = 1$ y $C_2 = -5$, con lo que la expresión particular buscada de la trayectoria temporal del precio será:

$$\boxed{P_t = (-1/2)^t - 5t \cdot (-1/2)^t + 2 = f(t)}.$$

b) El lím. P_t cuando $t \to +\infty$ es 2, o sea, que tiende al precio de equilibrio del mercado. En efecto, se tendría un precio de equilibrio de ($P_{t+1} = P_t = P_{t-1} = P_e$):

$$9P_e = 18, \text{ de donde se deduce que: } P_e = 2'00 \text{ €/ud.}$$

Para ver la tendencia o trayectoria temporal del precio a largo plazo convendría elaborar la siguiente tabla:

t	*P_t (€ /ud.)*
0	3’00
1	4’00
2	-1/4 = -0’25
3	15/4 = 3’75
4	13/16 = 0’81
5	11/4 = 2’75
6	99/64 = 1’55
7	145/64 = 2’27
8	473/256 = 1’85
9	267/128 = 2’09
10	1.999/1.024 = 1’95
…	…
+∞	2’00

c) La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio es la siguiente:

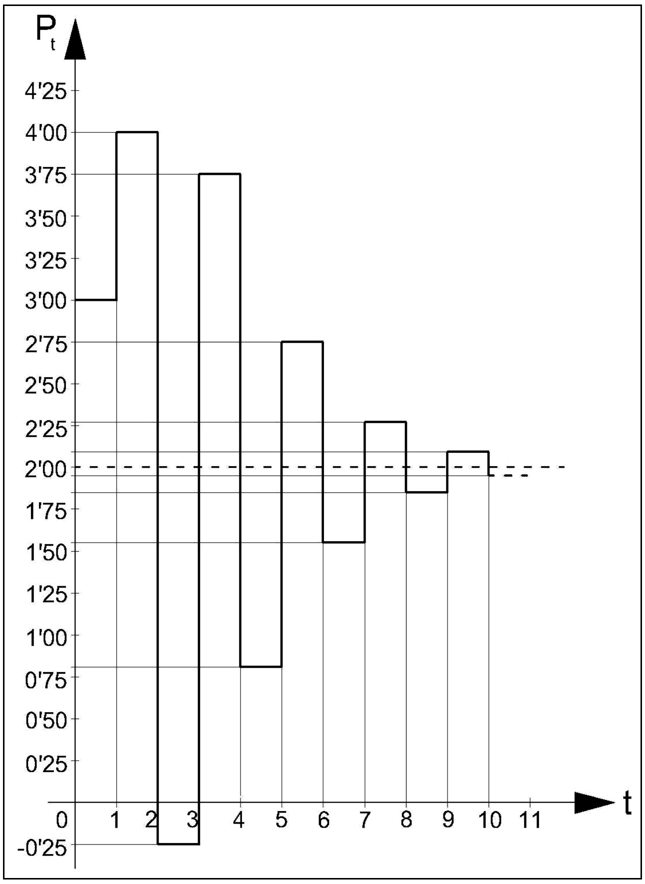


FIG. 11.37. Evolución temporal del precio (XX).

Nótese que para $t = 2 \Rightarrow P_t = -0'25$ €/ud., lo que carece evidentemente de significado económico.

Ejemplo 4

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+1} - P_t + (P_{t-1})/4 = 2$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: $P_0 = 9'00$ €/ud. y $P_1 = 10'00$ €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Teniendo en cuenta la ecuación equivalente:

$$4P_{t+2} - 4P_{t+1} + P_t = 8,$$

se tendrá la ecuación característica de la homogénea siguiente:

$4r^2 - 4r + 1 = 0$; $r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \begin{cases} 1/2 = r_1 \\ 1/2 = r_2 \end{cases}$; y la solución es:

$$P_t^* = C_1 \cdot (1/2)^t + t \cdot C_2 \cdot (1/2)^t = f(t).$$

Ensayaremos ahora una solución particular de la completa o inhomogénea, del tipo constante: $P_p = a$, puesto que también es constante el segundo miembro de la ecuación buscada, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$4a - 4a + a = a = 8; \text{ y la solución general será:}$$

$$P_t = P_t^* + P_p = C_1 \cdot (1/2)^t + t \cdot C_2 \cdot (1/2)^t + 8 = f(t).$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + 8 = 9 \\ P_1 = \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{2} + 8 = 10 \end{cases}$$

De ello se deduce que los valores de las constantes son los siguientes: $C_1 = 9 - 8 = 1$ y $C_2 = 2(10 - 8 - ½) = 20 - 16 - 1 = 3$, con lo que la expresión particular buscada de la trayectoria temporal del precio del bien en cuestión será:

$$\boxed{P_t = (1/2)^t + 3t\cdot(1/2)^t + 8 = f(t)},$$

y existe una asíntota horizontal en $P_t = 8$ €/ud. como podrá comprobarse en la figura siguiente, en que el máximo global de la curva, como puede comprobar el amable lector/a, se alcanzará en el punto de abscisa (condición de primer grado o necesaria):

$$P'_t = 0'5^t\cdot \ln 0'5 + 3\cdot 0'5^t + 3t(0'5^t\cdot \ln 0'5) = -\,0'5^t\cdot \ln 2 + 3\cdot 0'5^t - 3t\cdot 0'5^t\cdot \ln 2 =$$

$=0'5t(-\ln 2 + 3 - 3t\cdot \ln 2)$; o sea: $-\ln 2 + 3 - t\cdot \ln 8 = 0$, de donde se deduce que:

$$t = \frac{3-\ln 2}{\ln 8} = \frac{2'3068528}{2'0794415} = 1'1093617 \cong 1'11,$$ que corresponde a un precio:

$$P = 10'0061 \approx 10 \text{ €/ud.}$$

La correspondiente representación gráfica, considerando a la variable *t* como continua (puesto que se trata de la variable "tiempo"), será la siguiente:

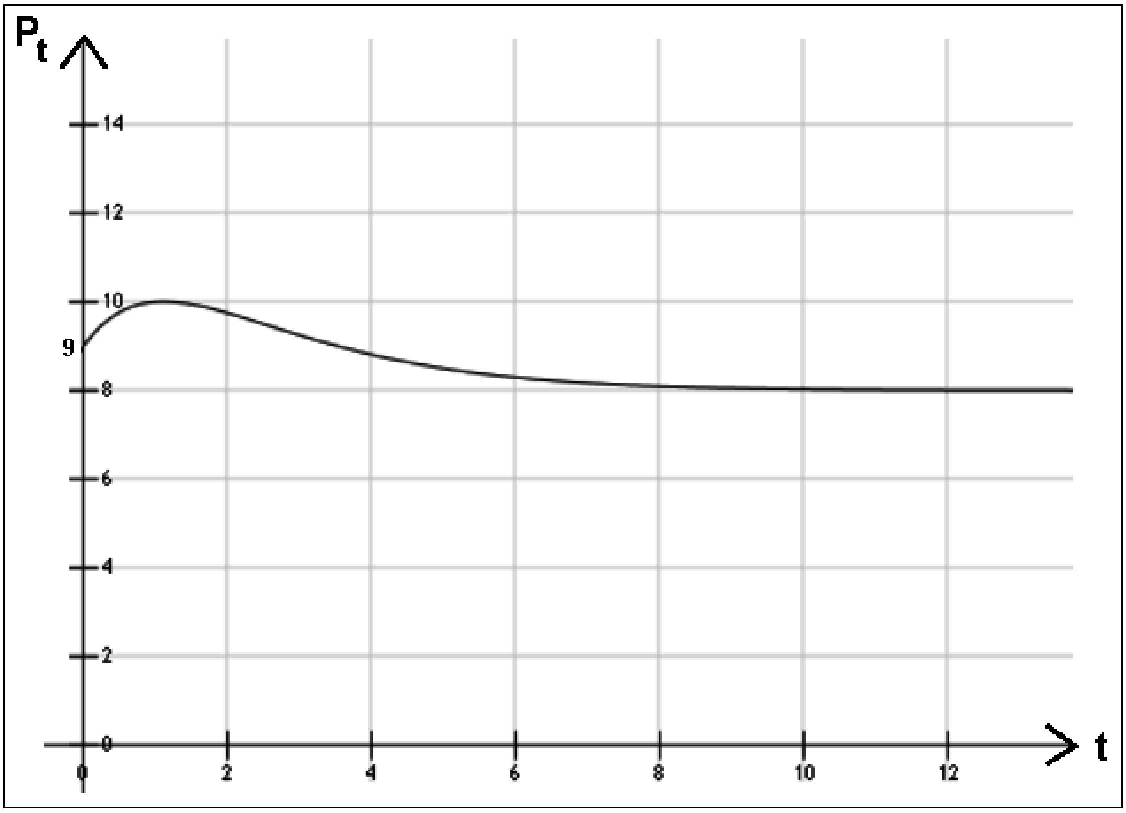


FIG. 11.38. Evolución temporal del precio (XXI).

b) El lím. P_t cuando $t \rightarrow +\infty$ es 8, o sea, que tiende al precio de equilibrio del mercado. En efecto, se tendría un precio de equilibrio de ($P_{t+1} = P_t = P_{t-1} = P_e$): P_e = 8’00 €/ud.

Para ver la tendencia o trayectoria temporal del precio a largo plazo convendría elaborar la siguiente tabla:

t	***P**$_t$* **(€ /ud.)**
0	9’00
1	10’00
2	39/4 = 9’75
3	37/4 = 9’25
4	141/16 = 8’81
5	17/2 = 8’50
6	531/64 = 8’30
7	523/64 = 8’17
8	2.073/256 = 8’10
9	1.031/128 = 8’05
10	8.223/1.024 = 8’03
…	…
+∞	8’00

c) La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio, considerando ahora sí a la variable *t* como discreta, es la siguiente:

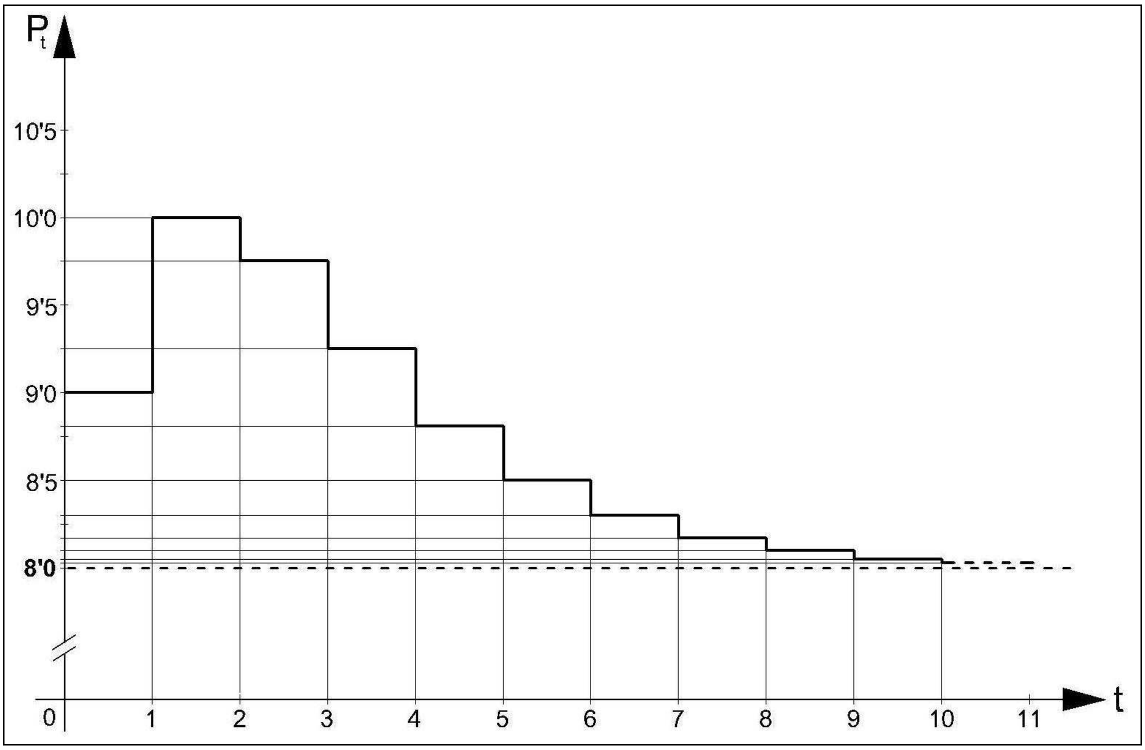


FIG. 11.39. Evolución temporal del precio (XXII).

Ejemplo 5

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $P_{t+1} - 0'7P_t + 0'1P_{t-1} = 1$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: P_0 = 2'00 €/ud. y P_1 = 3'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) Teniendo en cuenta la ecuación equivalente:

$10P_{t+2} - 7P_{t+1} + P_t = 10$, se tendrá la ecuación característica de la homogénea siguiente:

$$10r^2 - 7r + 1 = 0 \ ; \quad r = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{20} = \left\langle \begin{matrix} 1/2 = r_1 \\ 1/5 = r_2 \end{matrix} \right. \ ; \text{ y la solución es:}$$

$$P_t^* = C_1 \cdot (1/2)^t + C_2 \cdot (1/5)^t = f(t).$$

Ensayaremos ahora una solución particular de la completa o inhomogénea, del tipo constante: $P_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$10a - 7a + a = 4a = 10$; $a = 5/2 = 2'5$, y la solución general será:

$$P_t = P_t^* + P_p = C_1 \cdot (1/2)^t + C_2 \cdot (1/5)^t + 5/2.$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + C_2 + 5/2 = 2 \\ P_1 = \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{5} + \dfrac{5}{2} = 3 \end{cases}$$

De ello se deduce que: $C_1 = 2$ y $C_2 = -2'5$, con lo que la expresión particular buscada de la trayectoria temporal del precio será:

$$\boxed{P_t = 2 \cdot (1/2)^t - 2'5 \cdot (1/5)^t + 5/2 = f(t)}.$$

b) El lím. P_t cuando $t \to +\infty$ es 5/2 = 2'5, o sea, que tiende al precio de equilibrio del mercado. En efecto, se tendría un precio de equilibrio de ($P_{t+1} = P_t = P_{t-1} = P_e$):

$$10P_e - 7P_e + P_e = 4P_e = 10, \text{ de donde: } P_e = 2'50 \text{ €/ud.}$$

Para ver la tendencia o trayectoria temporal del precio a largo plazo convendría elaborar la siguiente tabla:

t	***P_t (€ /ud.)***
0	2’00
1	3’00
2	29/10 = 2’90
3	273/100 = 2’73
4	2.621/1.000 = 2’62
5	25.617/10.000 = 2’56
6	253.109/100.000 = 2’53
7	2’52
8	2’51
9	2’50
10	2’50
…	…
+∞	2’50

c) La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio es la siguiente:

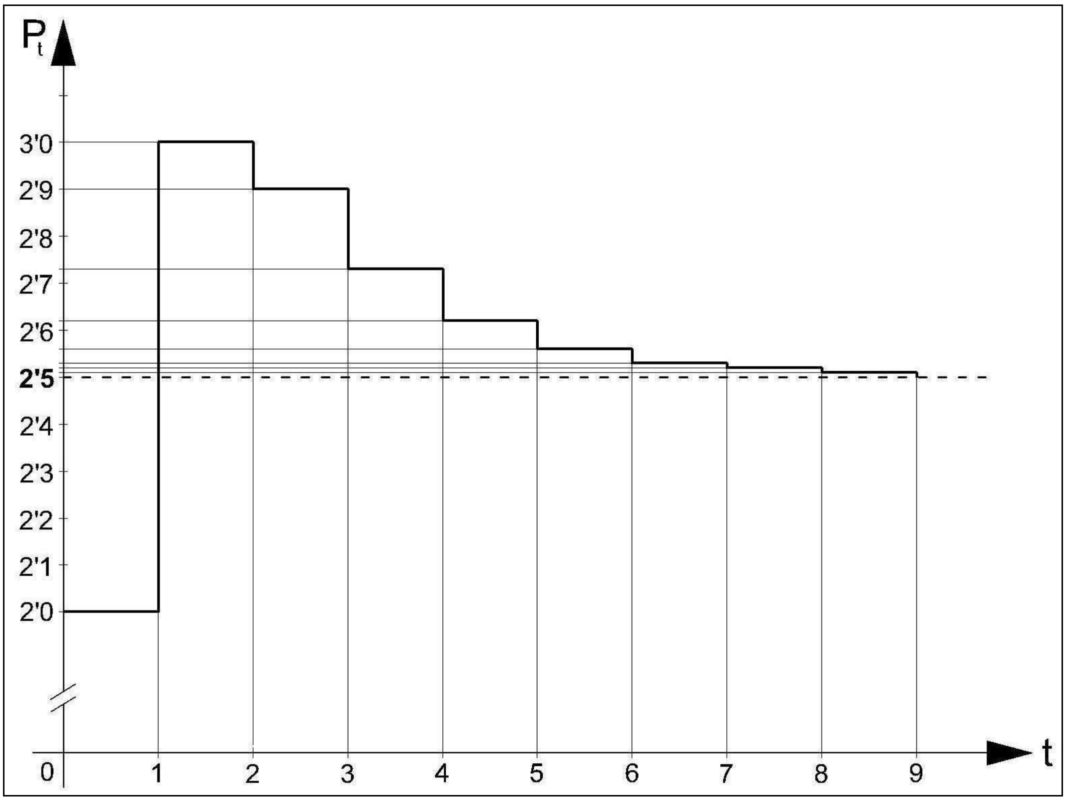


FIG. 11.40. Evolución temporal del precio (XXIII).

Ejemplo 6

En un mercado supuesto de competencia perfecta, en que la oferta depende además de los precios de las dos últimas campañas del siguiente modo:

$$\begin{cases} O_t \rightarrow q = P_t + P_{t-1} + P_{t-2} \\ D_t \rightarrow q = 2P_t - t^2 + 2t - 4 \end{cases}$$

, con las condiciones iniciales: P_0 = 1'00 €/ud. y P_1 = 2'00 €/ud. Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La condición de equilibrio de mercado $O_t = D_t$, supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio del bien en cuestión:

$P_t - P_{t-1} - P_{t-2} = t^2 - 2t + 4 = (t - 2)^2$, o bien la ecuación equivalente:

$$P_{t+2} - P_{t+1} - P_t = t^2,\ \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

Procediendo como en el ejercicio anterior, la homogénea será: $P_{t+2} - P_{t+1} - P_t = 0$, de ecuación característica: $r^2 - r - 1 = 0$, cuyas raíces reales son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, la solución de la homogénea será:

$$P_t{}^* = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Para calcular una solución particular de la completa se prueba con un polinomio genérico de 2º grado de la forma $P_p = at^2 + bt + c$. Substituyendo en la ecuación completa, quedará así:

$$a(t + 2)^2 + b(t + 2) + c - [a(t + 1) + b(t + 1) + c] - (at^2 + bt + c) = t^2.$$

Simplificando e identificando coeficientes indeterminados, resulta que:

$-at^2 + 2at + 3a + bt + 3b + c = t^2$; de donde: $a = -1$; $b = 2$; $c = -3$;

por lo tanto, la solución general buscada de la ecuación completa será:

$$\boxed{P_t = P_t{*} + P_p = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t - t^2 + 2t - 3 = f(t)}, \ \forall\ c_1, c_2 \in \Re.$$

Aplicando, ahora, las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = 1'00\ €/ud. \\ P_1 = 2'00\ €/ud. \end{array}\right\}$$ según las condiciones dadas en el enunciado.

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + C_2 - 3 = 1 \\ P_1 = \dfrac{C_1 + C_1\sqrt{5}}{2} + \dfrac{C_2 - C_2\sqrt{5}}{2} - 1 + 2 - 3 = 2 \end{cases}$$

$C_1 + C_1\sqrt{5} + C_2 - C_2\sqrt{5} - 2 + 4 - 6 = 4$; $-C_1\left(1+\sqrt{5}\right) - C_2\left(1-\sqrt{5}\right) = -8$;

$C_1\left(1+\sqrt{5}\right) + C_2\left(1+\sqrt{5}\right) - 3\left(1+\sqrt{5}\right) = 1+\sqrt{5}$; o también:
$C_2 + C_2\sqrt{5} - C_2 + C_2\sqrt{5} - 3 - 3\sqrt{5} = -7+\sqrt{5}$; $2C_2\sqrt{5} = -4 + 4\sqrt{5}$, de donde:

$c_2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 2$, y resultan los siguientes valores:
$C_2 = \dfrac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}$; $C_1 = 4 - C_2 = \dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \dfrac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}$,

y se tendrá una solución particular de la ecuación en diferencias finitas anterior del tipo:

$$\boxed{P_t = \frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t - t^2 + 2t - 3 = f(t)}$$

, que representa la trayectoria temporal del precio del bien en cuestión.

b) El lím. P_t cuando $t \to +\infty$ es también $+\infty$, por lo que el precio tiende a incrementarse indefinidamente en el tiempo. Ello se pone claramente de manifiesto si consideramos el precio de equilibrio con:

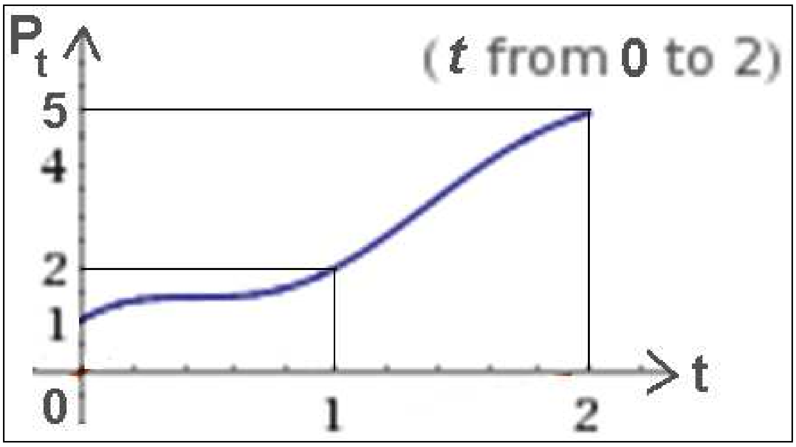
$$P_{t+2} = P_{t+1} = P_t = P_e \ ; \ P_e - P_e - P_e = t^2 \Rightarrow P_e = -\ t^2 = f(t),$$

y el precio de equilibrio se halla en función del tiempo.

Para ver la tendencia o trayectoria temporal del precio a largo plazo convendría elaborar la siguiente tabla:

t	***P**ₜ* (€ /ud.)
0	1’00
1	2’00
2	5’00
3	6’00
4	9’00
5	14’00
6	25’00
…	…
+∞	+∞

d) La representación gráfica inicial de la trayectoria temporal del precio, tomando a la variable *t* (tiempo) como continua, es la siguiente:



Ejemplo 7

En un mercado de un producto agrario, supuesto en régimen de competencia perfecta, en que tanto la oferta como la demanda del mismo dependen además de los precios de las dos últimas campañas del siguiente modo:

$$\begin{cases} O_t \rightarrow q = 4'5P_t - 3'5P_{t-1} + P_{t-2} \\ D_t \rightarrow q = \dfrac{P_t - P_{t-1} + P_{t-2} + 0'9^{t-2}}{2} \end{cases}$$

, con las condiciones iniciales: P_0 = 4’00 €/ud. y P_1 = 3’50 €/ud., se desea saber:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La condición de equilibrio del mercado exige que: $O_t = D_t$, o sea:

$$9P_t - 7P_{t-1} + 2P_{t-2} = P_t - P_{t-1} + P_{t-2} + 0'9^{t-2}, \text{ o sea:}$$
$$8P_t - 6\, P_{t-1} + P_{t-2} = 0'9^{t-2}, \text{ o bien la ecuación equivalente:}$$

$$8P_{t+2} - 6\, P_{t+1} + P_t = 0'9^t.$$

La ecuación homogénea será: $8P_{t+2} - 6P_{t+1} + P_t = 0$, cuya ecuación característica es: $8r^2 - 6r + 1 = 0$, y cuyas raíces son: $r_1 = ½$ y $r_2 = ¼$,y por tanto, la solución de la homogénea será:

$$P_t^* = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^t.$$

Para calcular una solución particular de la completa probamos con una función exponencial genérica del mismo tipo que el término independiente, por ejemplo, $P_p = a \cdot 0'9^t + b$. Substituyendo en la ecuación completa resultará que:

$$8(a\cdot 0'9^{t+2} + b) - 6(a\cdot 0'9^{t+1} + b) + a\cdot 0'9^t + b = 0'9^t.$$

Simplificando se obtiene que:

$6'48a\cdot 0'9^t + 3b - 5'4a\cdot 0'9^t + a\cdot 0'9^t = 0'9^t$, e identificando coeficientes se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{l} 2'08a = 1 \\ 3b = 0 \end{array}\right\}$$

de donde: $a = \dfrac{1}{2'08}$ y b = 0, y hallamos que la solución general buscada de la ecuación completa será:

$$\boxed{P_t = P_t^* + P_p = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^t + \frac{0'9^t}{2'08} = f(t)}, \ \forall\ c_1, c_2 \in \Re.$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas, se tendrá que:

$$\begin{cases} P_0 = c_1 + c_2 + \dfrac{1}{2'08} = 4 \\ P_1 = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{4} + \dfrac{0'9}{2'08} = 3'5 \end{cases}$$

de donde se deduce: $c_1 = 12'27 - 3'52 = 8'75$ y $c_2 = 3'52 - 8'75 = -5'23$, y se tiene la siguiente expresión de la trayectoria temporal del precio:

$$\boxed{P_t = 8'75 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t - 5'23 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^t + \frac{0'9^t}{2'08}}.$$

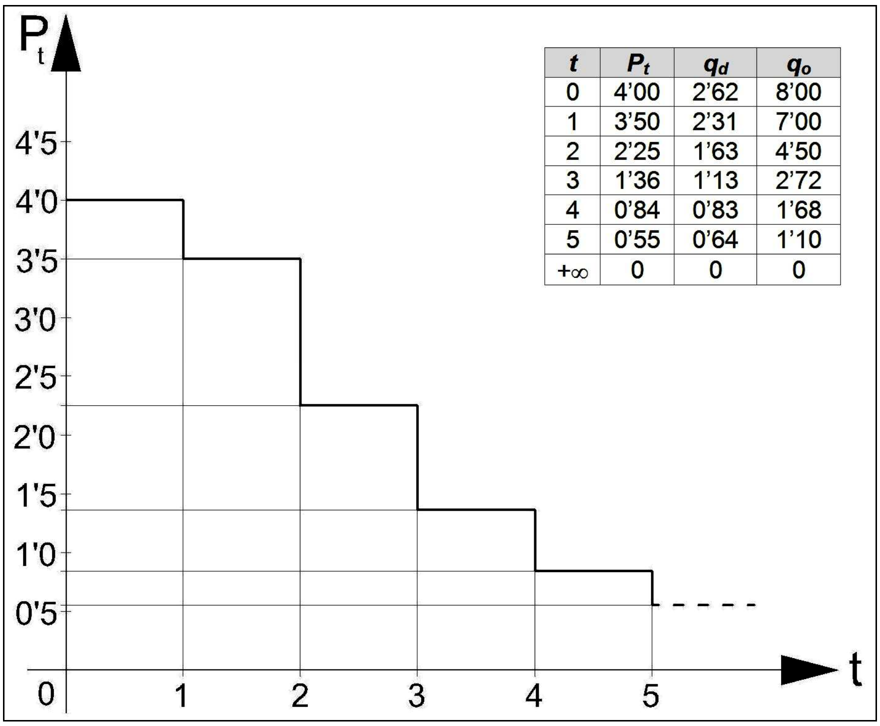
b) El lím. P_t cuando $t \to +\infty$ es 0, lo que constituye el precio de equilibrio como podrá comprobarse en la figura siguiente. En cualquier caso, si en la ecuación equivalente anteriormente reseñada hacemos:

$P_{t+2} = P_{t+1} = P_t = P_e$, resultará que: $3P_e = 0'9^t \Rightarrow P_e = 0'9^t/3$,

con lo que el precio de equilibrio resultante es variable en función del tiempo, de modo que los diferentes valores del par ordenado (P_e,t) son:

$t = 0 \to (1/3, 0)$
$t = 1 \to (0'3, 1)$
$t = 2 \to (0'27, 2)$
$t = 3 \to (0'243, 3)$
$t = 4 \to (0'2187, 4)$
$t = 5 \to (0'19683, 5)$
$t = 6 \to (0'177147, 6)$
……………………………..
$t = +\infty \to (0, +\infty)$

c) La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio es:



t	P_t	q_d	q_o
0	4’00	2’62	8’00
1	3’50	2’31	7’00
2	2’25	1’63	4’50
3	1’36	1’13	2’72
4	0’84	0’83	1’68
5	0’55	0’64	1’10
+∞	0	0	0

FIG. 11.41. Evolución temporal del precio (XXIV).

Ejemplo 8

En un mercado supuesto de competencia perfecta, la condición de equilibrio supone la ecuación recurrente siguiente respecto al precio de un bien determinado: $40P_t - 38P_{t-1} + 11P_{t-2} - P_{t-3} = 120$, $\forall\ t \in \mathbf{N}$, con las condiciones iniciales: $P_0 = 5'00$ €/ud., $P_1 = 7'00$ €/ud. y $P_2 = 8'00$ €/ud.

Pues bien, con esos datos obténgase:

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La ecuación equivalente es: $40P_{t+3} - 38P_{t+2} + 11P_{t+1} - P_t = 120$, o bien: $P_{t+3} - 0'95 \cdot P_{t+2} + 0'275 \cdot P_{t+1} - 0'025 \cdot P_t = 3$.

Resolveremos, como siempre y en primer lugar, la ecuación característica de la homogénea con la pertinente descomposición factorial, con lo que:

$$r^3 - 0'95r^2 + 0'275r - 0'025 = 0 = (r-0'5)\cdot(r-0'25)\cdot(r-0'20),$$

puesto que se han obtenido las tres raíces reales: $r_1 = 0'5$, $r_2 = 0'25$ y por último: $r_3 = 0'20$. De ello resulta la solución:

$$P_t{}^* = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^t + C_3\left(\frac{1}{5}\right)^t.$$

Ensayamos ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo constante: $P_p = a$, con lo que substituyendo en la ecuación inicial se obtiene que:

$$a - 0'95a + 0'275a - 0'025a = 0'3a = 3, \text{ o sea: } a = 3/0'3 = 10.$$

Entonces, la solución general de la ecuación completa o inhomogénea, será:

$$P_t = P_t{}^* + P_p = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{4}\right)^t + C_3\left(\frac{1}{5}\right)^t + 10.$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= C_1 + C_2 + C_3 + 10 = 5 \\ P_1 &= \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{4} + \frac{C_3}{5} + 10 = 7 \\ P_2 &= \frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{16} + \frac{C_3}{25} + 10 = 8 \end{aligned}\right\}$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = -5,$$

$$\left(\frac{10C_1}{20} + \frac{5C_2}{20} + \frac{4C_3}{20} + \frac{200}{20} = \frac{140}{20}\right)$$

$$10C_1 + 5C_2 + 4C_3 = -60,$$

$$\left(\frac{100C_1}{400} + \frac{25C_2}{400} + \frac{16C_3}{400} + \frac{4.000}{400} = \frac{3.200}{400}\right)$$

$$100C_1 + 25C_2 + 16C_3 = -800,$$

de lo cual resulta el siguiente sistema no homogéneo, compatible y determinado:

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= -5 \\ C_1 + 0'5C_2 + 0'4C_3 &= -6 \\ C_1 + 0'25C_2 + 0'16C_3 &= -8 \end{aligned}\right\} \text{ esto es:}$$

$0'5C_2 + 0'6C_3 = 1$; $0'25C_2 + 0'24C_3 = 2$; $0'5C_2 + 0'48C_3 = 4$; $0'12C_3 = -3$.

Y entonces: $C_3 = -\frac{3}{0'12} = -25$. También se tendrá que:

$C_2 + 1'2C_3 = 2$; $C_2 = 2 + 1'2 \times 25 = 32$; $C_1 = -5 - 32 + 25 = -12$, y la trayectoria temporal buscada del precio será la siguiente:

$$\boxed{P_t = -12 \times 0'5^t + 32 \times 0'25^t - 25 \times 0'2^t + 10}$$

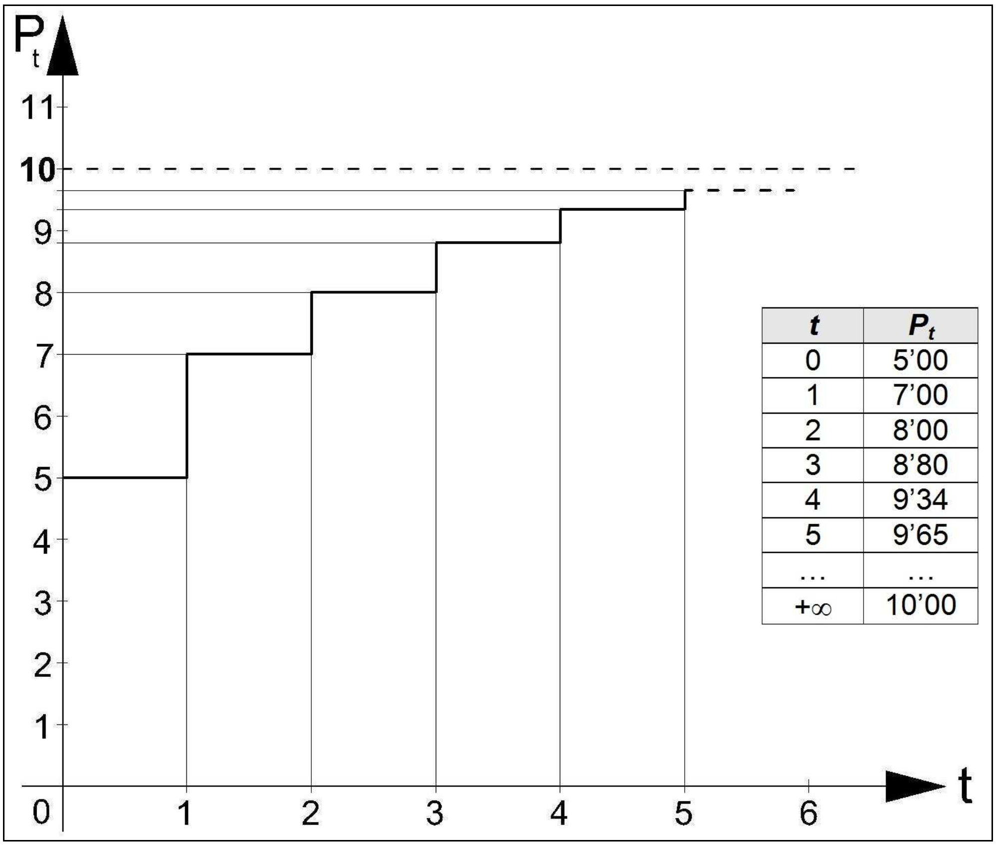
b) El lím. P_t cuando $t \to +\infty$ es 10, que es el precio de equilibrio resultante a largo plazo. En efecto, haciendo en la ecuación inicial:

$P_{t+3} = P_{t+2} = P_{t+1} = P_t = P_e$, se tiene que :

$40P_e - 38P_e + 11P_e - P_e = 12\,P_e = 120$; de donde se obtiene :

$P_e = 120/12 = 10'00$ €/ud., c.s.q.d.

c) La representación gráfica de la trayectoria temporal del precio es la siguiente:



t	P_t
0	5’00
1	7’00
2	8’00
3	8’80
4	9’34
5	9’65
…	…
$+\infty$	10’00

FIG. 11.42. Evolución temporal del precio (XXV).

4. ECUACIONES RECURRENTES NO LINEALES

Ejemplo 1

Se trata de resolver la ecuación recurrente: $I_{t+1}^2 = 3I_t^2$, con la condición inicial: $I_0 = 3$, $\forall t \geq 0$, siendo I el volumen de ingresos mensuales que obtiene un comercio determinado, expresados en miles de euros, con la trayectoria temporal y la correspondiente representación gráfica.

Solución:

Llevando a cabo la substitución $b_t = I_t^2$, se tendrá la nueva ecuación:

$$b_{t+1} = 3b_t, \text{ con: } b_0 = 9, \forall t \geq 0,$$

o sea: $b_{t+1} - 3b_t = 0$, cuya solución es: $b_t = c \cdot 3^t$.

A su vez, la condición inicial dada exige que:

$$b_0 = I_0^2 = 9 = c \cdot 3^0, \text{ con lo que: } c = 9.$$

Una vez hecho esto, procedemos a resolverla como una relación de recurrencia lineal, para este ejemplo corresponde a de primer orden, homogénea y con coeficientes constantes. Después de resolverla, sacamos la raíz cuadrada a cada número obtenido en la solución general para obtener la solución general de la relación de recurrencia no lineal. Así:

$$b_t = 9(3)^t,\ b_0 = 9,\ \forall t \geq 0,\ \boxed{I_t = 3(\sqrt{3})^t},\ I_0 = 3,\ \forall t \geq 0.$$

Si consideramos, a la búsqueda del ingreso de equilibrio, que: $I_{t+1} = I_t = I_e$, resultaría que: $I_e^2 = 3 \cdot I_e^2$, lo que constituye un absurdo, por lo que no existe tal ingreso de equilibrio.

También podríamos resolver el problema planteado considerando que: $I_{t+1} = \sqrt{3} I_t$; $I_{t+1} - \sqrt{3} I_t = 0$, y la ecuación característica será:

$r - \sqrt{3} = 0$; $r = \sqrt{3}$; $I_t = c \cdot (\sqrt{3})^t$; y teniendo en cuenta ahora la condición inicial dada se sigue que:

$I_0 = c = 3$; y la expresión de la trayectoria temporal del ingreso mensual será:

$I_t = 3(\sqrt{3})^t = 3 \cdot 3^{t/2} = 3^{(2+t)/2}$, viéndose que: $\lim_{t \to +\infty} I_t = +\infty$ generándose, como consecuencia, la siguiente tabla:

***t* (mes)**	***I_t* (10^3 €)**
0	3’00
1	5’20
2	9’00
3	15’59
4	27’00
5	46’77
6	81’00
7	140’30
8	243’00
9	420’89
10	729’00
11	1.262’66
12	2.187’00
…	…
+ ∞	+ ∞

, con la correspondiente representación gráfica de la evolución temporal de los ingresos del comercio en cuestión:

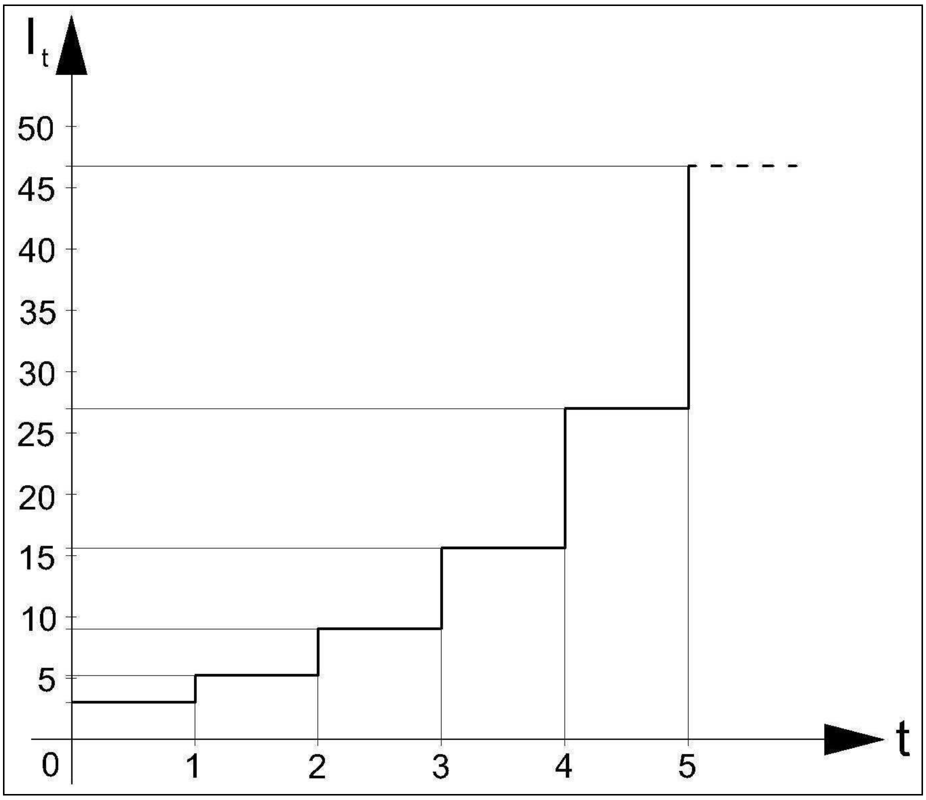


FIG. 11.43. Evolución temporal de los ingresos.

Ejemplo 2

En un mercado de un bien agrario supuesto de competencia perfecta[10], en que la oferta depende además del precio de la última campaña y de la variable tiempo del siguiente modo:

$$\begin{cases} O_t \rightarrow q = P_t \cdot P_{t-1} + t^2 - t \\ D_t \rightarrow q = (2t - 2)P_t \end{cases}$$

, con la condición inicial: $P_1 = 0'50$ €/kg., se desea saber:

[10] A lo largo del presente manual nos hemos referido, en numerosos ejemplos, al concepto o régimen de “competencia perfecta”. En la teoría económica, la *competencia perfecta* describe los mercados de tal manera que los participantes no son lo suficientemente grandes como para tener el poder de mercado para fijar el precio de un producto homogéneo. Debido a que las condiciones de competencia perfecta son estrictas, hay muy pocos mercados perfectamente competitivos. Sin embargo, los compradores y vendedores en algunos mercados tipo subasta, por ejemplo para las materias primas o algunos activos financieros, pueden aproximarse el concepto expresado. La competencia perfecta sirve como punto de referencia para medir la vida real y los mercados de competencia imperfecta. Por lo general, un mercado de competencia perfecta existe cuando todos los participantes son un "tomador de precios" y ninguno de los participantes influye en el precio del producto que compra o que vende. La esencia de la competencia mercancial perfecta no está referida tanto en la rivalidad como en la dispersión de la capacidad del control que los agentes económicos pueden ejercer sobre la marcha del mercado. Esto se debe a que, cuanto más repartido esté el poder de influencia en las condiciones del mercado, tanto menos eficaces serán las acciones discrecionales dirigidas a manipular la cantidad disponible de productos y los precios del bien en cuestión.

a) La trayectoria temporal del precio del bien.
b) La tendencia del precio a largo plazo.
c) La representación gráfica correspondiente, en su caso.

Solución:

a) La condición de equilibrio del mercado exige que: $O_t = D_t$, o sea:

$$P_t \cdot P_{t-1} + t^2 - t = (2t-2)P_t \text{ , o sea:}$$

$P_t = \dfrac{t^2 - t}{2t - 2 - P_{t-1}} = \dfrac{t(t-1)}{2(t-1) - P_{t-1}}$, o bien la ecuación equivalente:

$$P_{t+1} = \frac{t(t+1)}{2t - P_t}.$$

Para la búsqueda del punto de equilibrio del mercado estableceremos, como siempre, la condición: $P_{t+1} = P_t = P_e$, con lo que:

$P_e = \dfrac{t(t+1)}{2t - P_e}$; $2t\cdot P_e - P_e^2 = t^2 + t$; $P_e^2 - 2t\cdot P_e + t^2 + t = 0$, de donde:

$P_e = \dfrac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 4t^2 - 4t}}{2} = t \pm i\sqrt{t}$, y ambas raíces son complejas conjugadas, luego no existe un P_e en el campo o cuerpo de los números reales, y el aquí obtenido carece de significado económico.

A continuación, realizaremos el cambio de variable: $P_t = t\cdot v_t$, con lo que se obtiene la expresión:

$(t+1)v_{t+1} = \dfrac{t(t+1)}{2t - t\cdot v_t}$, de donde: $v_{t+1} = \dfrac{1}{2 - v_t}$. Como: $P_1 = v_1 = ½$, se tendrá que:

$v_2 = \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$; $v_3 = -\dfrac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \dfrac{3}{4}$; $v_4 = \dfrac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \dfrac{4}{5}$;…; y así sucesivamente,

y en general se cumple que: $v_t = \dfrac{1}{2 - \frac{t-1}{t}} = \dfrac{t}{t+1}$, y como $P_t = t\cdot v_t$, se obtiene la solución particular buscada, a saber: $\boxed{P_t = \dfrac{t^2}{t+1} = f(t)}$, que ofrece la trayectoria temporal del precio del bien en cuestión.

b) Por otra parte, sucede que: $\lim_{t \to +\infty} P_t = +\infty$ generándose la siguiente tabla:

t	***P_t(€ /kg.)***
0	0/1 = 0'00
1	½ = 0'50
2	4/3 = 1'33
3	9/4 = 2'25
4	16/5 = 3'20
5	25/6 = 4'17
6	36/7 = 5'14
7	49/8 = 6'12
8	64/9 = 7'11
9	81/10 = 8'10
…	…
+ ∞	+ ∞

c) La representación gráfica conexa de la evolución temporal del precio del bien será la siguiente:

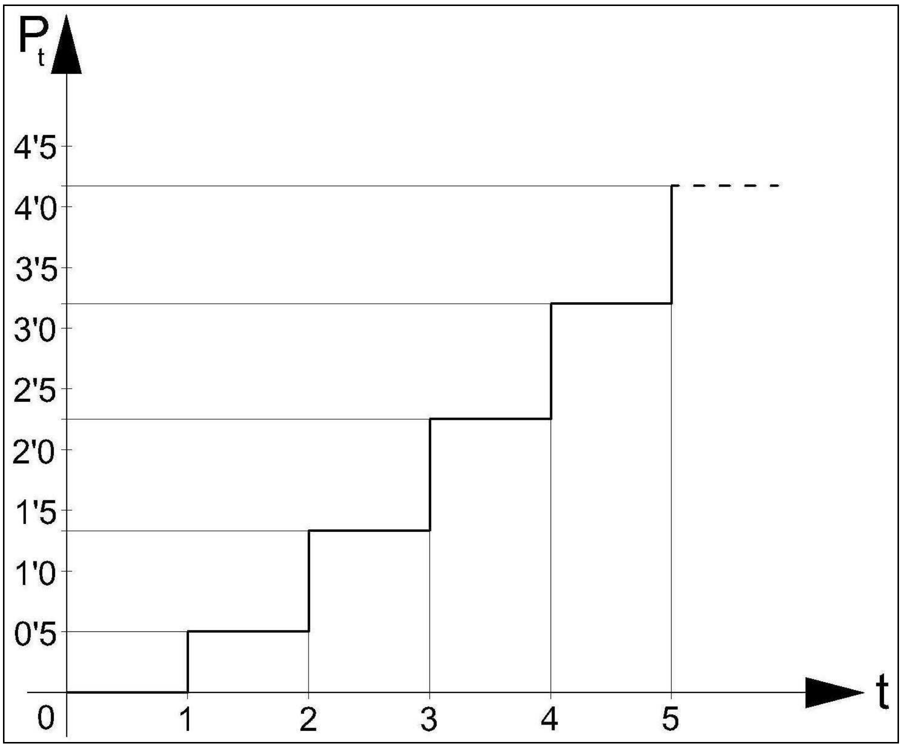


FIG. 11.44. Evolución temporal del precio (XXVI).

Ejemplo 3

Una sucesión a_n, $\forall n \geq 1$ de los beneficios brutos de una empresa constructora, expresados en miles de euros, se define mediante la relación de recurrencia siguiente:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}, \text{ para } n \geq 3$$

, siendo *n* los períodos o ejercicios económicos considerados. Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para calcular los beneficios netos de dicha empresa, considerando una fiscalidad del 25%.

Solución:

Observando los primeros términos de la sucesión de los beneficios brutos (1, 5, 29, 169, …) vemos que cada uno es aproximadamente igual a seis veces el anterior. Concretamente, la fórmula parece ser la siguiente: $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$. En efecto, podemos reescribir la condición dada del problema como:

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 4.$$

Del mismo modo podemos hacer lo mismo para (n+1), de tal modo que queda: $a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2 + 4$. Restando y agrupando términos, tenemos que:

$$a_n(a_{n-2} + a_n) = a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n+1}).$$

Y ahora dividiendo encontramos que:

$$\frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n}$$

Vemos ahora que en el numerador de ambas fracciones tenemos la suma del término anterior y posterior al denominador, con lo cual esta expresión es constante para todo *n*, y basta con evaluarla en n = 1 para encontrar su valor, que es 6. Entonces, se obtiene la recurrencia antedicha:

$$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} \text{ ,}$$

y se resuelve como todas las recurrencias lineales que hemos efectuado hasta ahora.

Y así, la ecuación algebraica asociada o ecuación característica es: $r^2 - 6r + 1 = 0$, cuyas dos soluciones reales son: $r = 3 \pm \sqrt{8}$, de manera que tenemos como solución general de la ecuación anterior:

$$a_n = A\left(3 + \sqrt{8}\right)^n + B\left(3 - \sqrt{8}\right)^n.$$

Aplicando a los casos particulares $a_1 = 1$ y $a_2 = 5$, obtenemos la solución particular de los beneficios antes de impuestos π siguiente:

$$a_n = \frac{1+\sqrt{8}}{2}\left(3+\sqrt{8}\right)^{n-1} + \frac{1-\sqrt{8}}{2}\left(3-\sqrt{8}\right)^{n-1}$$

que resulta aplicable para $n \geq 3$.

Igualando es posible comprobar que la ecuación de recurrencia se cumple (por ejemplo, mediante Matlab[11]), lo que significa que la expresión se corresponde, efectivamente, con la sucesión dada.

Los beneficios netos, a su vez, vendrán dados por: 3·π/4, teniendo en cuenta la fiscalidad dada, esto es:

$$B = \frac{3(1+\sqrt{8})}{8}(3+\sqrt{8})^{n-1} + \frac{3(1-\sqrt{8})}{8}(3-\sqrt{8})^{n-1},\ \forall\ n \geq 3.$$

De este modo, la sucesión de los beneficios netos obtenidos por la empresa en cuestión será la siguiente:

0'75, 3'75, 21'75, 126'75, 738'75, …, o sea, expresado en unidades monetarias se tendrá que:

a_1 = 750 €
a_2 = 3.750 €
a_3 = 21.750 €
a_4 = 126.750 €
a_5 = 738.750 €
…………………

Finalmente, el hecho de que también se corresponda con la sucesión de la conjetura inicialmente realizada, a saber:

$$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2},$$

demuestra que todos los elementos son números enteros.

Llegados a este punto, sería interesante saber por qué esas dos relaciones de recurrencia son equivalentes, en general:

[11] MATLAB® es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación. Mediante MATLAB, es posible analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos o aplicaciones. El lenguaje, las herramientas y las funciones matemáticas incorporadas permiten explorar diversos enfoques y llegar a una solución antes que con hojas de cálculo o bien con los lenguajes de programación tradicionales. Se puede utilizar en una gran variedad de aplicaciones, tales como procesamiento de señales y comunicaciones, procesamiento de imagen y vídeo, sistemas de control, pruebas y medidas, finanzas computacionales y biología computacional.

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = a_2, \quad a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + (a_2 - 1)}{a_{n-2}}, \text{ para } n \geq 3 \\ a_1 = 1, \quad a_2 = a_2, \quad a_n = (a_2 + 1)a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3 \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3 \end{cases}$$

Además a_n cumple con la relación siguiente: $2a_n^2 - 1 = x^2$, $\forall\, x \in \mathbf{N}$, cuando $a_2 = 5$, o sea, corresponde a la secuencia de números *n* tales que $(2n^2 - 1)$ es un cuadrado perfecto[12]. Por ejemplo:

$$a_4 = 169;\ a_3 = 29\ ;\ a_5 = \frac{169^2 + 4}{29} = \frac{28.565}{29} = 985, \text{ o también:}$$

$$a_5 = 6 \cdot a_4 - a_3 = (6 \times 169) - 29 = 985, \text{ con lo que:}$$

$$2a_5^2 - 1 = 1.940.449;\ \sqrt{1.940.449} = 1.393, \text{ y así sucesivamente, c.s.q.d.}$$

[12] Un número **cuadrado perfecto**, o un **número cuadrado**, es un número entero que es el cuadrado de algún otro; dicho de otro modo, es un número cuya raíz cuadrada es un número entero. Un número es un cuadrado perfecto si se puede «ordenar» en una figura cuadrada. La fórmula más general para el *n*-ésimo número cuadrado es n^2. Este resultado es también igual a la suma de los primeros *n* números impares. El teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange establece que cualquier número entero positivo puede ser escrito como la suma de cuatro perfectos cuadrados. Tres cuadrados no son suficientes para ser representados como números de la forma $4^k(8m + 7)$. Un número positivo puede ser representado como una suma de dos cuadrados precisamente si la factorización en números primos no contiene potencias impares de la forma $4k + 3$. Esta es una generalización del problema de Waring.

CAPÍTULO 12

OTRAS APLICACIONES ECONÓMICAS DE LAS ECUACIONES RECURRENTES

1. TEORÍA MACROECONÓMICA

Ejemplo 1

Se considera el siguiente modelo de Harrod-Domar-Hicks[1] esquematizado en una economía determinada:

$$\begin{cases} Y = G \\ G = C + I \\ C = c \cdot Y \\ I = v \cdot \Delta Y \\ s = 1 - c \end{cases}$$

donde: Y = Renta Nacional; G = Gasto total; C = Consumo; I = Inversión; c = propensión marginal al consumo; s = propensión marginal al ahorro; v = relación capital-producto o acelerador de la inversión = K/Y > 0.

Existen rendimientos de escala constantes y no hay progreso técnico. Los valores de los parámetros v y c no varían. Se pide:

a) Calcular el tipo o ritmo de crecimiento cuando la economía en cuestión se mantiene en equilibrio de crecimiento, si v = 4 y el ahorro es igual al 20% de la renta total.

b) Se considera ahora un modelo análogo, en el que la inversión en el período t es igual a: $I_t = v \cdot \Delta Y = v(Y_{t+1} - Y_t)$.

[1] The Harrod–Domar model is an early postkeynesian model of economic growth. It is used in development economics to explain an economy's growth rate in terms of the level of saving and productivity of capital. It suggests that there is no natural reason for an economy to have balanced growth. The model was developed independently by Sir Roy F. Harrod in 1939 and Evsey Domar in 1946. The Harrod–Domar model was the precursor to the exogenous growth model. The shortcomings of the Harrod–Domar model have been discussed in the late 1950s by Neoclassical economists, which eventually led to the development of the Solow–Swan model. According to the Harrod–Domar model there are three kinds of growth viz. warranted growth, actual growth and natural rate of growth. Warranted Growth rate is the rate of growth at which the economy does not expand indefinitely or go into recession. (FRANQUET, 2013).

c) El mismo modelo anterior, pero ahora la inversión viene dada de la siguiente manera: $I_t = v\cdot\Delta Y = v(Y_t - Y_{t-1})$.

Solución:

a) En equilibrio de crecimiento o "crecimiento garantizado", todas las magnitudes económicas implicadas crecen al mismo ritmo g, esto es:

$\Delta Y/Y = g$; $Y = C + I = c\cdot Y + I = c\cdot Y + v\cdot\Delta Y$; de donde:

$\frac{\Delta Y\cdot v}{Y} = 1 - c$; g = $\boxed{\frac{1-c}{v} = \frac{s}{v} = \frac{0'2}{4} = 0'05}$, luego el ritmo de crecimiento es del 5%.

b) En este caso, que también se corresponde al modelo macroeconómico inicial auténtico de Harrod-Domar, se tendrá que:

$Y_t = c\cdot Y_t + v(Y_{t+1} - Y_t) = c\cdot Y_t + v\cdot Y_{t+1} - v\cdot Y_t =$
$= Y_t(c - v) + v\cdot Y_{t+1}$; $v\cdot Y_{t+1} = Y_t - Y_t(c - v) = Y_t(1 - c + v)$; entonces:
$Y_{t+1} = Y_t(\frac{1}{v} - \frac{c}{v} + 1) = Y_t(1 + \frac{s}{v})$, y se tendrá la siguiente ecuación en diferencias finitas: $Y_{t+1} - (1 + \frac{s}{v})\cdot Y_t = 0$, cuya ecuación característica es:
$r - (1 + \frac{s}{v}) = 0$, y la solución general de la ecuación buscada es:

$$Y_t = c\cdot(1 + \frac{s}{v})^t .$$

La renta inicial será: $Y_0 = c$, o sea: $Y_t = Y_0\cdot(1 + \frac{s}{v})^t$, que es la fórmula del interés compuesto, luego el ritmo de crecimiento es de:

$$g = \boxed{\frac{s}{v} = \frac{0'2}{4} = 0'05}\text{, o sea, del 5\%.}$$

c) En este caso, que constituye una variación del modelo de Harrod-Domar, se tiene que:

$Y_t = c\cdot Y_t + v(Y_t - Y_{t-1}) = c\cdot Y_t + v\cdot Y_t - v\cdot Y_{t-1} =$
$= Y_t(c + v) - v\cdot Y_{t-1}$; $v\cdot Y_{t-1} = Y_t(c + v) - Y_t = Y_t(c + v - 1) = Y_t(v - s)$;
$Y_{t-1} = Y_t(1 - \frac{s}{v})$, y se tendrá la siguiente ecuación en diferencias finitas:
$(1 - \frac{s}{v})\cdot Y_t - Y_{t-1} = 0$, cuya ecuación característica es la siguiente:

$(1 - \frac{s}{v}) \cdot r - 1 = 0$, y la solución general de la ecuación buscada es:

$$Y_t = c \cdot \left(\frac{v}{v - s}\right)^t .$$

La renta inicial será: $Y_0 = c$, o sea: $Y_t = Y_0 \cdot \left(\frac{v}{v - s}\right)^t = Y_0 \cdot \left(1 + \frac{s}{v - s}\right)^t$, que es la fórmula del interés compuesto, luego el ritmo de crecimiento es aquí de:

$$g = \boxed{\frac{s}{v - s} = \frac{0'2}{4 - 0'2} = 0'053}, \text{ o sea, del } 5'3\%,$$

que resulta ligeramente superior que en los dos casos anteriores.

El equilibrio macroeconómico en esta economía cerrada y sin sector público viene dado por la igualdad, en cada período, entre la cantidad que se desea ahorrar y la que se desea invertir.

Veamos, en fin, que según los diferentes modelos de Harrod-Domar, solamente puede existir un crecimiento económico equilibrado a partir de unas condiciones determinadas. Podríamos considerar diversas tesis que conducirían al equilibrio, a saber: aumento del desempleo, reacción maltusiana de la población, propensión marginal al ahorro variable (modelo de Robinson[2]), o bien la relación capital/producto variable (supuesto neoclásico).

Ejemplo 2

El modelo del multiplicador u oscilador de Samuelson[3] simplificado, con inversión gubernamental nula (G = 0), que viene dado por la expresión: $R_t = C_t + I_t$, $\forall\ t \in$ **N,** (R_t = renta nacional; C_t = demanda de

---

[2] Joan Violet Robinson (1903-1983) fue una economista inglesa, participante del "Circus" de John Maynard Keynes en la década de los treinta y cuarenta del pasado siglo. En las décadas siguientes, tras la muerte de Keynes, Robinson formó parte de la denominada escuela postkeynesiana de Cambridge, Inglaterra. Constituye un paradigma de economista heterodoxa, ya que sus teorizaciones reunieron elementos de las más diversas escuelas oponiéndose generalmente a las distintas ortodoxias dominantes en la economía a medida que transcurría el siglo XX. Quizá sus aportaciones más reconocidas vinieron de su trabajo en la teoría del capital y del crecimiento económico en las décadas de los años cincuenta y sesenta. No aceptó la teoría neoclásica del capital, la cual había sido adoptada por los economistas de la Síntesis Clásico-Keynesiana, con Robert Solow y Paul Samuelson a la cabeza. Protagonizó con dichos economistas la llamada *Controversia entre las dos Cambridges* en relación a la teoría del capital y sus implicancias para la teoría del crecimiento.

[3] Paul Anthony Samuelson (1915 - 2009) fue un economista estadounidense de la escuela neoclásica. Es especialmente conocido por el planteamiento general del método de las estáticas comparativas que hizo en su libro *Foundations of Economic Analysis* de 1947. Samuelson fue premiado en 1947 con la Medalla John Bates Clark. En 1970 obtuvo el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones a la teoría económica estática y dinámica, además de convertirse en el primer ganador individual de un Premio Nobel de Economía.

consumo; I_t = demanda de inversión), ofrece los siguientes datos: γ(propensión marginal media al consumo) = 0'25 y β(coeficiente de aceleración) = 5. Se pide calcular R_t.

Solución:

Sabemos que: $\begin{cases} C_t = \gamma \cdot R_{t-1},\ \forall\ \gamma\ /\ 0 < \gamma < 1, \\ I_t = \beta \cdot (R_{t-1} - R_{t-2}) \end{cases}$

, de donde se deduce que:

$R_t = C_t + I_t = \gamma \cdot R_{t-1} + \beta \cdot R_{t-1} - \beta \cdot R_{t-2}$, o bien su ecuación equivalente de segundo orden:

$$R_{t+2} - (\gamma + \beta) \cdot R_{t+1} + \beta \cdot R_t = 0,$$

que nos relaciona la renta nacional en un cierto período de tiempo con la renta en los dos períodos anteriores. En este caso, substituyendo los valores dados, se trata de resolver la ecuación recurrente homogénea:

$R_{t+2} - 5'25 \cdot R_{t+1} + 5 \cdot R_t = 0$, cuya ecuación característica es:

$r^2 - 5'25 \cdot r + 5 = 0$, que ofrece las raíces reales simples:

$r = \frac{5'25 \pm \sqrt{27'5625 - 20}}{2} = \frac{5'25 \pm 2'75}{2} = (r_1 = 4; r_2 = 1'25)$, y la solución general buscada, que representa la trayectoria temporal de la renta nacional, es, pues:

$$\boxed{R_t = c_1 \cdot 4^t + c_2 \cdot 1'25^t},\ \forall\ t \in \mathbf{N}.$$

Ejemplo 3

En un país europeo determinado, el modelo del multiplicador u oscilador de Samuelson, que viene dado por la expresión: $R_t = C_t + I_t$, + G, en que G (inversión pública) se considera constante, $\forall\ t \in$ **N**, (siendo: R_t = renta nacional; C_t = demanda de consumo; I_t = demanda de inversión), y ofrece los siguientes datos: γ(propensión marginal media al consumo) = 0'8, G = 200 y h(acelerador) = 3. Se pide: a) Estudiar el comportamiento de las soluciones, y b) si $R_0 = R_1 = 100$, calcular R_{20} (es decir, una vez transcurridos 20 años) y juzgar la prudencia de esta determinación efectuada a largo plazo. Las cantidades monetarias vienen expresadas en miles de millones de euros.

Solución:

a) Sabemos que:

$$\begin{cases} C_t = \gamma\cdot R_{t-1},\ \forall\ \gamma\ /\ 0 < \gamma < 1, \\ I_t = h\cdot(C_t - C_{t-1})\ \ ,\forall\ h > 0, \end{cases}$$

de donde se deduce que:

$$R_t = C_t + I_t + G\ = \gamma\cdot R_{t-1} + h\cdot C_t - h\cdot C_{t-1} + G = \gamma\cdot R_{t-1} + h\cdot\gamma\cdot R_{t-1} - h\cdot\gamma\cdot R_{t-2} + G;$$

$R_t = \gamma(1 + h)\cdot R_{t-1} - h\cdot\gamma\cdot R_{t-2} + G$; o bien su ecuación equivalente:

$$R_{t+2} = \gamma(1 + h)\cdot R_{t+1} - h\cdot\gamma\cdot R_t + G.$$

En el problema planteado, se trataría de resolver la ecuación en diferencias finitas no homogénea siguiente:

$R_{t+2} - 0'8(1 + 3)\cdot R_{t+1} + 3\cdot 0'8\cdot R_t = 200$, cuya ecuación característica de la homogénea asociada es: $r^2 - 3'2\cdot r + 2'4 = 0$, con las raíces simples reales:

$r = \dfrac{3'2 \pm \sqrt{10'24 - 9'60}}{2} = \dfrac{3'2 \pm 0'8}{2} = (r_1 = 2; r_2 = 1'2)$, y la solución de la homogénea es: $R^* = c_1\cdot 2^t + c_2\cdot 1'2^t$.

Ensayaremos, ahora, una solución particular de la completa del tipo: $R_p = a$, y substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$a - 3'2\cdot a + 2'4\cdot a = 200 = 0'2\cdot a$; de donde: $a = 1.000$, y la solución general será:

$$\boxed{R_t = R^* + R_p = c_1\cdot 2^t + c_2\cdot 1'2^t + 1.000},\ \forall\ t \in \mathbf{N}$$

Como: $\gamma\cdot h = 0'8 \times 3 = 2'4 > 1$, entonces las soluciones divergen monótonamente, pues hay soluciones monótonas que no convergen al equilibrio. Por otra parte, la ecuación tiene el siguiente punto de equilibrio:

$$R = \frac{G}{1-\gamma} = \frac{200}{1-0'8} = 1.000 \times 10^6\ €\ .$$

, que también puede deducirse de:

$$R_e - 3'2R_e + 2'4R_e = 0'2\ R_e = 200;\ R_e = 200/0'2 = 1.000.$$

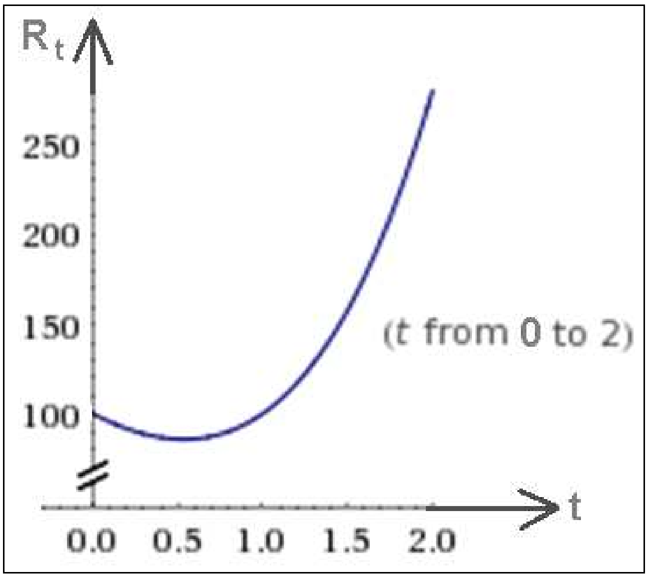
b) Substituyendo los valores dados en el enunciado del problema, se tiene que:

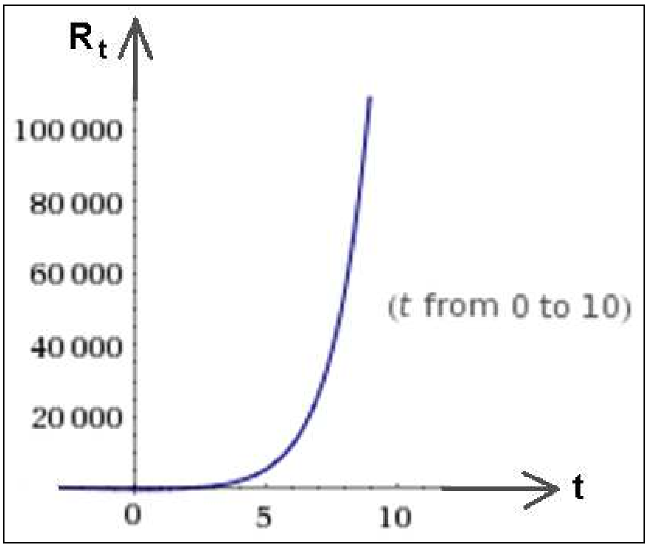
$$\begin{cases} R_0 = 100 = c_1 + c_2 + 1.000 \\ R_1 = 100 = 2c_1 + 1'2c_2 + 1.000 \end{cases}$$

, de donde se deduce que: $c_1 = -900 + 1.125 = 225$; $c_2 = -\frac{900}{0'8} = -1.125$, luego la solución particular correspondiente vendrá dada por la expresión, $\forall\ t \in$ **N**:

$$\boxed{R_t = 225 \cdot 2^t - 1.125 \cdot 1'2^t + 1.000} \ .$$

La representación gráfica de esta solución particular es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):





, que como puede calcularse, posee un mínimo relativo o local de valor R = 85’7469 para t = 0’536323 años ≈ 196 días.

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $R_t \to \infty$. Esto es:

$m = \lim_{t \to +\infty} \frac{R_t}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{225 \cdot 2^t - 1.125 \cdot 1'2^t + 1.000}{t} = +\infty$, luego existe efectivamente una rama parabólica según el eje OR (vertical, hacia arriba).

Para t = 20 años, se tendrá que:

$$\boxed{R_{20} = 225 \text{ x } 2^{20} - 1.125\text{x}1'2^{20} + 1.000 = 235.887.470'2 \times 10^6 \text{ € .}}$$

En este caso, también tendría sentido considerar valores de *t* en el campo de los números reales positivos, habida cuenta de que la variable tiempo resulta, evidentemente, continua. De cualquier modo, a la vista de los resultados obtenidos, no parece prudente extender la prospectiva más de 2 ó 3 años.

Ejemplo 4

Se supone ahora, en el modelo del multiplicador de la renta, que el consumo en el período *t* depende de la renta en el período *t-1*, esto es:

$$C_t = a + b\cdot Y_{t-1} \text{ ,}$$

donde $a = C_0 \geq 0$ es el denominado *consumo autónomo* y $b \in (0, 1)$ es la *propensión marginal al consumo.* La condición de equilibrio del modelo simplificado es: $Y_t = C_t + I_t$, donde la inversión varía en forma autónoma en un período determinado, manteniéndose constante en los restantes. Esto es, supuesta una inversión de cuantía I_0, en un período determinado se produce un incremento en la misma ΔI, de tal forma que: $I_t = I = I_0 + \Delta I$, en los siguientes períodos.

Se pide hallar la trayectoria temporal de la renta, con la representación gráfica correspondiente, para los siguientes datos:

$a = 300$; $b = 0'7$; $I_0 = 150$; $\Delta I = 100$ e $Y_0 = 1.500$, con las cifras económicas expresadas en millones de euros.

Solución:

Substituyendo y teniendo en cuenta lo indicado anteriormente para la inversión, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$Y_t - b\cdot Y_{t-1} = a + I,$$

que desplazada un período puede escribirse equivalentemente como:

$Y_{t+1} - b\cdot Y_t = a + I$, cuya solución general es:

$$Y_t = k(b)^t + \frac{a+I}{1-b} \text{ , siendo } k : \text{parámetro.}$$

Para una renta inicial Y_0 (condición inicial) podemos determinar el valor de k y por tanto una solución particular de la misma.

En nuestro caso, tendremos que:

$$\begin{cases} C_t = 300 + 0'7Y_{t-1} \\ Y_t = C_t + I_t \end{cases}$$

, con: $I_t = I = 150 + 100 = 250$. La ecuación inhomogénea en diferencias, lineal y de primer orden, a resolver es, pues:

$$Y_{t+1} - 0'7Y_t = 550.$$

La ecuación característica de la homogénea es:

$$r - 0'7 = 0 \ ; \quad r = 0'7, \text{ luego: } Y^*_t = k \cdot 0'7^t \ .$$

Ensayando una solución particular de la completa, se tiene que: $Y_p = a$; luego substituyendo en la ecuación anterior: $a - 0'7a = 0'3a = 550$; de donde:

$$a = \frac{550}{0'3} = 1.833'33 \, ,$$

cuya solución general es:

$$Y_t = Y^*_t + Y_p = k(0'7)^t + \frac{550}{1-0'7} \ ; \quad \left(\frac{550}{1\text{-}0'7} = 1.833'33 \right),$$

y la solución particular para $Y_0 = 1.500$ es (substituyendo en la solución general):

$$1.500 = k + [550/(1 - 0'7)],$$

de donde k = -(100/0'3) = $-333'\hat{3}$. El "multiplicador de la renta" será la suma de la serie geométrica de razón común: r = 0'7 siguiente: $\sum_{t=0}^{\infty} 0'7^t = 1 + 0'7 + 0'49 + 0'343 + \ldots$, que es igual a: $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-0'7} = 3'\hat{3}$. Y resultará, en definitiva, la expresión buscada:

$$\boxed{Y_t = -\frac{100}{0'3}(0'7)^t + \frac{550}{0'3} = -333'33 \cdot (0'7)^t + 1.833'33}$$

, que es el término general de la sucesión infinita[4] siguiente:

[1.500, 1.600, 1.670, 1.719, 1.753’30, 1.777’31, …],

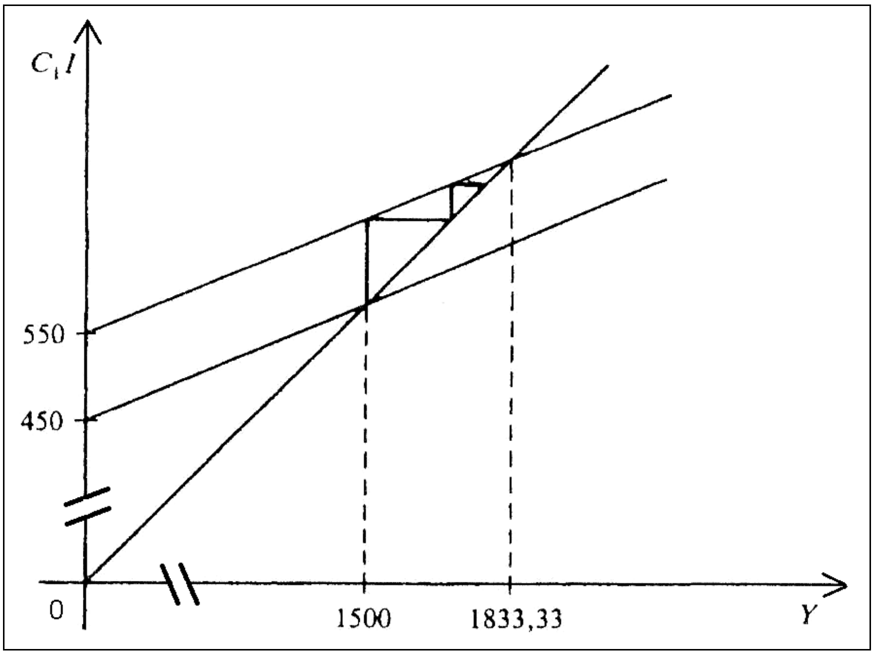
respectivamente para los valores $t \in (0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$, y así sucesivamente, que representa la trayectoria temporal de la renta.

Para t suficientemente grande (a largo plazo), la renta tiende al nuevo equilibrio: 550/0’3 = 1.833’33. Para ello, basta considerar el límite:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{100}{0'3}(0'7)^t+\frac{550}{0'3}\right)=\frac{550}{0'3}= 1.833'33 \text{ millones de € , ya que } (0'7)^t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

por ser 0’7 < 1. De otro modo, basta con tener en cuenta que como sucede que: $Y_{t+1} = Y_t = Y_e$: $Y_e - 0'7Y_e = 550$, de donde: $Y_e = 550/0'3 = 1.833'33 \times 10^6$ € . Este sería, en definitiva, un modelo dinámico caracterizado, como ya se ha indicado, por la ubicación de las variables económicas en el tiempo. Destaquemos, finalmente, cómo una serie nos representa un proceso indefinido de acumulación de cantidades discretas de una determinada magnitud económica.

En las siguientes figuras se representa la evolución temporal de la renta entre los valores de equilibrio 1.500 y 1.833’33 millones de € .



[4] Una sucesión matemática es un conjunto ordenado de objetos matemáticos, generalmente números. Cada uno de ellos es denominado *término* (también *elemento* o *miembro*) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la *longitud* de la sucesión. No debe confundirse con una *serie* matemática, que es precisamente la suma de los términos de una sucesión. A diferencia de un conjunto, el orden en que aparecen los términos sí es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición. De manera formal, una sucesión puede definirse como una función sobre el conjunto de los números naturales (o un subconjunto del mismo) y es, por lo tanto, una función discreta.

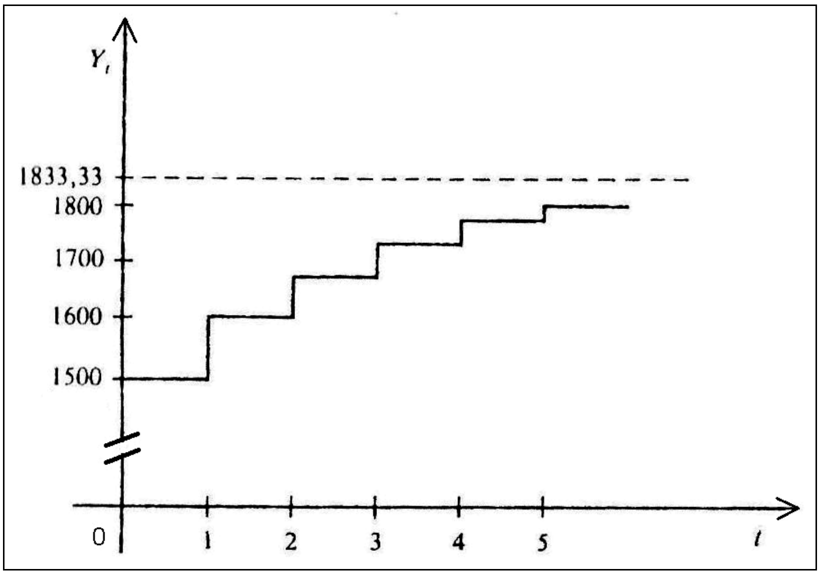


FIG. 12.1. Evolución temporal de la renta.

Ejemplo 5

Supongamos, en el modelo del multiplicador de la renta, que el consumo, en el período *t*, depende de la renta en el período *t-1*, esto es: $C_t = C_0 + c \cdot Y_{t-1}$, donde $C_0 = 300 \geq 0$ es el denominado *consumo autónomo* y $c \in (0, 1)$ es la *propensión marginal al consumo.* La condición de equilibrio del modelo es que:

$$Y_t = C_t + I_0 + G_0 \ ,$$

siendo $I_0 = 500$ la inversión autónoma, c = 0'3 y $G_0 = 100$ el gasto público. Se trata de estudiar la trayectoria temporal de la renta así como la convergencia de la renta a largo plazo, con las cifras económicas expresadas en millones de euros.

Solución:

Substituyendo los valores y expresiones anteriores, obtenemos la siguiente ecuación en diferencias finitas no homogénea y de primer orden:

$$Y_t – 0'3 \cdot Y_{t-1} – 900 = 0,$$

que desplazada un período de tiempo puede escribirse por su ecuación equivalente como:

$$Y_{t+1} – 0'3 \cdot Y_t = 900,$$

cuya solución general viene dada por la formulación:

$$Y_t = \frac{b}{1-a} + (Y_0 - \frac{b}{1-a}) \cdot a^t = \boxed{\frac{900}{1-0'3} + (Y_0 - \frac{900}{1-0'3}) \cdot 0'3^t} .$$

A largo plazo sucederá que la renta será del orden de:

$\lim_{t \to +\infty} Y_t = \frac{900}{1-0'3} = 1.285'71$ millones de € , y converge hacia la renta de equilibrio. La ecuación recurrente anterior puede resolverse también del siguiente modo, teniendo en cuenta que la ecuación característica de la homogénea es:

$$r - 0'3 = 0 ; \quad r = 0'3, \text{ luego: } Y^*_t = k \cdot 0'3^t .$$

Ensayando una solución particular de la completa, se tiene que: $Y_p = A$; luego substituyendo en la ecuación anterior: A – 0’3A = 0’7A = 900; de donde:

$$A = \frac{900}{0'7} = 1.285'71,\ Y_0 = C_0 + I_0 + G_0 = 300 + 500 + 100 = 900,$$

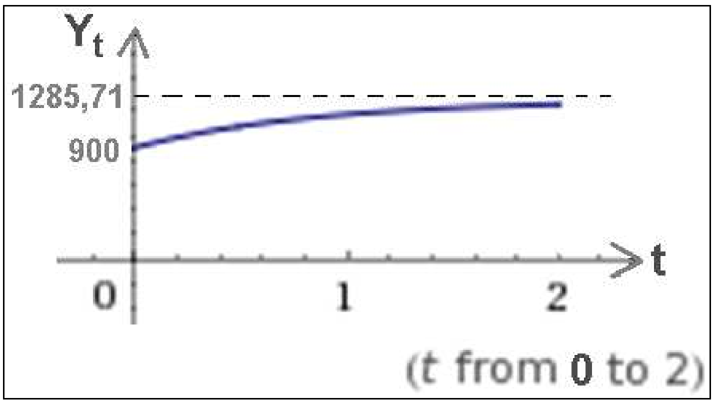
cuya solución general es: $Y_t = Y^*_t + Y_p = k(0'3)^t + \frac{900}{0'7}$, siendo:

$k = Y_0 - \frac{900}{0'7} =$ 900 – 1.285’71 = -385’71 $\times 10^6$ € , por lo que la expresión buscada será la siguiente:

$$\boxed{Y_t = -385'71 \cdot 0'3^t + 1.285'71}$$

, y el “multiplicador de la renta” será: $\frac{1}{1-0'3} = 1'429.$

La representación gráfica correspondiente, considerando el tiempo como una variable continua, sería la siguiente:



, y evidentemente existe una asíntota horizontal: $Y_t = 1.285'71 \times 10^6$ € .

Ejemplo 6

Dado el siguiente modelo del multiplicador de la renta: $Y_t = C_t + I_t$, con los siguientes valores: $C_t = 200 + 0'9\cdot Y_{t-1}$, $I_t = 100$, e $Y_0 = 4.500$, con las cifras económicas que vienen expresadas en millones de euros. Resolver el modelo en cuestión para Y_t, indicando su comportamiento a largo plazo.

Solución:

En este caso, a = 200 (consumo autónomo) y b = 0'9 (0 < b < 1), que constituye la propensión marginal al consumo.

Se tendrá que: $Y_t = C_t + I_t = 200 + 0'9\cdot Y_{t-1} + 100 = 0'9\cdot Y_{t-1} + 300$, y de este modo se forma la ecuación recurrente: $Y_t - 0'9\cdot Y_{t-1} - 300 = 0$, o bien su ecuación equivalente: $Y_{t+1} - 0'9\cdot Y_t = 300$.

La ecuación característica de la homogénea es: $r - 0'9 = 0$, de donde: $r = 0'9$, y su solución será: $Y_t^* = C\cdot 0'9^t$.

Ensayaremos ahora una solución particular constante de la ecuación inhomogénea o completa del tipo: $Y_p = A$. Substituyendo en la ecuación inicial, se obtiene que:

$A - 0'9\cdot A = 300 = 0'1\cdot A$, de donde: $A = 3.000$, y la solución general será:

$$Y_t = Y_t^* + Y_p = C\cdot 0'9^t + 3.000.$$

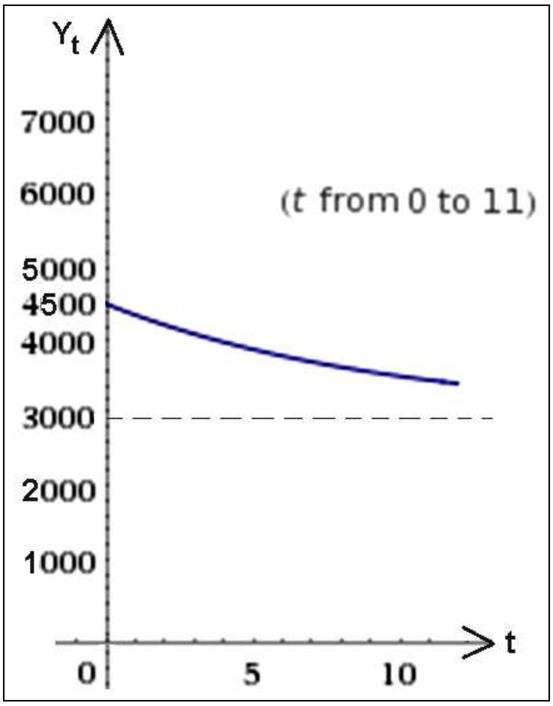
Por otra parte, de las condiciones dadas en el enunciado del problema, resulta que: $Y_0 = C + 3.000 = 4.500 \times 10^6$ € , con lo que: C = 1.500, y podemos formar la expresión buscada, que constituye una solución particular del problema planteado, esto es:

$$\boxed{Y_t = 1.500\cdot 0'9^t + 3.000}$$

Entonces: $\lim_{t\to+\infty} Y_t = 3.000$, e Y_t converge, en el largo plazo, a la renta de equilibrio (3.000 millones de euros), siendo dinámicamente estable. Ello viene también corroborado haciendo, en la expresión de la ecuación recurrente correspondiente, la substitución: $Y_{t+1} = Y_t = Y_e$, esto es:

$$Y_e - 0'9\cdot Y_e = 300 = 0'1\cdot Y_e, \text{ de donde: } Y_e = 300/0'1 = 3.000 \times 10^6 \text{ € .}$$

La representación gráfica correspondiente, considerando el tiempo como una variable continua, sería la siguiente:



, y evidentemente existe una asíntota horizontal: $Y_t = 3.000 \times 10^6$ € .

Ejemplo 7

En el siguiente problema se trata de encontrar el nivel de renta Y_t de una región determinada, sabiendo que: $I_t = 2'66(Y_t - Y_{t-1})$, $S_t = 0'16 \cdot Y_t$, e $Y_0 = 9.000$. La condición de equilibrio viene dada por: $I_t = S_t$, con las cifras económicas expresadas en millones de euros. ¿Cuál será su nivel de renta al cabo de 10 años?

Solución:

Se tendrá que: $2'66(Y_t - Y_{t-1}) = 0'16 \cdot Y_t = 2'66 \cdot Y_t - 2'66 \cdot Y_{t-1}$, y se forma la ecuación en diferencias finitas homogénea, lineal y de primer orden siguiente:

$2'50 \cdot Y_{t+1} - 2'66 \cdot Y_t = 0$, con su ecuación característica: $2'50 \cdot r - 2'66 = 0$,

de donde: $r = 2'66/2'50 = 1'064$, y la solución general será: $Y_t = C \cdot 1'064^t$.

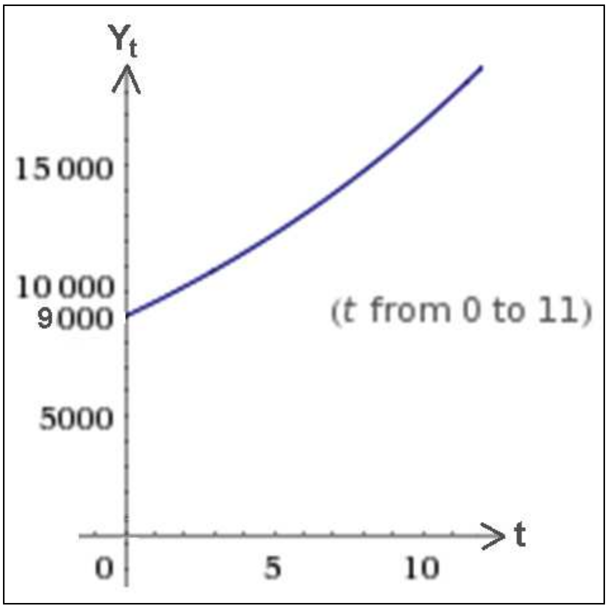
La condición inicial exige que: $Y_0 = C = 9.000 \times 10^6$ € , por lo que la solución particular buscada es:

$$\boxed{Y_t = 9.000 \cdot 1'064^t}$$

Se trata, de hecho, de un crecimiento a interés compuesto del 6'4% anual, por lo que transcurridos 10 años su nivel de renta será:

$$Y_{10} = 9.000 \times 1'064^{10} = 16.736'274 \times 10^{6} \text{ €} .$$

La representación gráfica correspondiente, considerando el tiempo como una variable continua, sería la siguiente:



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $Y_t \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{Y_t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{9.000 \cdot 1'064^t}{t} = +\infty$, luego existe efectivamente una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

2. FINANZAS

Ejemplo 1

Suponga que alguien invierte 100 € el último día del mes a una tasa anual de 6%, compuesto mensualmente. Si invierte 50 € adicionales el último día de cada mes subsiguiente, ¿cuánto dinero tendría después de cinco años?

Solución:

Modelaremos esta situación usando una ecuación en diferencias finitas. Aquí y_n representa la cantidad total de dinero (€) al fin del mes *n*. Por lo tanto, y_0 = 100 € . Dado que el 6% de interés se compone mensualmente, la cantidad de dinero existente al final del primer mes es igual a la suma de y_0 y la cantidad generada durante el primer mes, que es de: 100(0'06/12) = 0'50 € (dividimos por 12 porque estamos componiendo mensualmente).

De aquí se deduce que: $y_1 = (100 + 0'50 + 50)$ € , pues agregamos 50 € al final de cada mes. Vemos que:

$$y_1 = y_0 + 0'005y_0 + 50 = 1'005 \cdot y_0 + 50.$$

Trabajando sobre la ecuación anterior, vemos que: $y_2 = 1'005 \cdot y_1 + 50$. Y así sucesivamente, por lo que, en general, nuestra ecuación en diferencias finitas se convierte en: $y_{n+1} - 1'005 \cdot y_n = 50$, con la condición inicial $y_0 = 100$.

La ecuación característica de la homogénea es: $r - 1'005 = 0$, con lo que se deduce la raíz real: $r = 1'005$, y nos queda la solución siguiente: $y_n^* = k \cdot 1'005^n$.

Ahora tantearemos la solución particular de la completa del tipo: $y_p = C$. Substituyendo en la ecuación anterior resulta que:

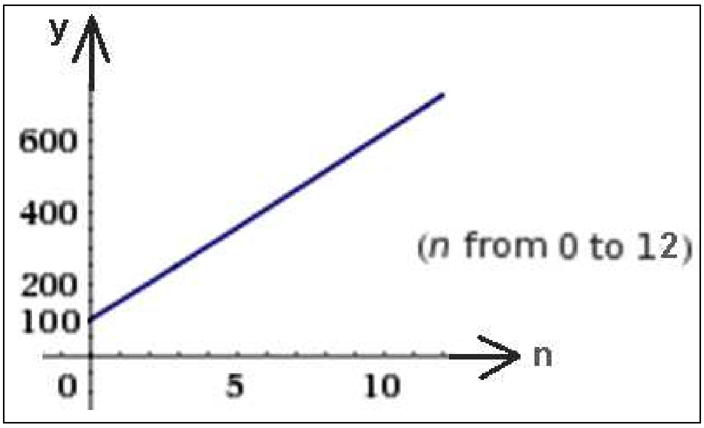
$$C - 1'005 \cdot C = 50 = C(1 - 1'005) = -0'005 \cdot C \; ; \;\; C = -50/0'005 = -10.000,$$

o sea, se tendrá la solución general: $y_n = y_n^* + y_p = k \cdot 1'005^n - 10.000$.

Pero la condición inicial dada exige que: $y_0 = k - 10.000 = 100$, con lo que $k = 10.100$, y se tendrá, en definitiva, la solución particular:

$$\boxed{y_n = 10.100 \cdot 1'005^n - 10.000},$$

ecuación que nos ofrece la cantidad de dinero acumulada al cabo de *n* meses, y cuya representación gráfica hasta los 10 primeros meses es la siguiente (con detalle suficiente en el entorno del origen de coordenadas y con sentido económico en el primer cuadrante del círculo):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $n \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es:

$m = \lim_{n\to+\infty} \frac{y}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10.100 \cdot 1'005^n - 10.000}{n} = +\infty$, luego existe efectivamente una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Por último, al cabo de 5 años ($5 \times 12 = 60$ meses), se tendrá que:

$$\boxed{y_{60} = 10.100 \cdot 1'005^{60} - 10.000 = 3.623'39 \text{ €}.}$$

Al igual que en los ejercicios anterior y posterior, en este caso también tendría sentido considerar valores de *n* en todo el campo de los números reales positivos, habida cuenta de que la variable tiempo resulta, evidentemente, continua.

Ejemplo 2

Una persona, una vez acabada la carrera y después de ganar la correspondiente oposición, se incorpora a la edad de 27 años a una empresa pública y cobra inicialmente un sueldo bruto de S_0 = 40.000 euros anuales (incluso pagas extraordinarias, complementos y demás) que se ve incrementado, cada año, según el correspondiente Convenio, de la siguiente manera:

- Se le aplica una subida igual al IPC que publica periódicamente, con carácter oficial, el INE, que notaremos por $i \neq 0$, y supondremos fijo a lo largo de los años (estimación media de i = 2'5%).
- Se le aplica un incremento lineal de C = 2.000 € .

Si se le supone una vida laboral de 40 años (jubilación a los 67 años), se desea saber: a) ¿cuál será el sueldo de este trabajador en el momento de su bien ganada jubilación?, y b) ¿cuál será la trayectoria temporal de dicho sueldo a lo largo de su vida laboral?.

Solución:

a) Llamaremos S_n al sueldo anual que percibe transcurridos n años. Dicho sueldo anual será igual al sueldo percibido el año anterior más los incrementos correspondientes, es decir:

$$S_{n+1} = S_n + i \cdot S_n + C, \ \forall\, n \in \mathbf{N},$$

que es una ecuación recurrente de orden uno que produce dependencia únicamente respecto del término anual exactamente anterior (y del rango temporal n). Se trata, pues, de una ecuación lineal con b_n = C, que se puede expresar así:

$$S_{n+1} - (1 + i)S_n = C.$$

La ecuación característica de la homogénea es: $r - 1 - i = 0$, cuya solución es: $r = 1 + i$, y la solución de la homogénea es: $S^* = \alpha\cdot(1 + i)^n$.

Para la búsqueda de la solución particular de la ecuación completa ensayaremos: $S_p = A$, y substituyendo en la ecuación inicial quedará:

$A - (1+i)\cdot A = C$, de donde: $A = -\frac{C}{i}$, por lo que la solución general será:

$S_n = S^* + S_p = \alpha\cdot(1 + i)^n - \frac{C}{i}$; así mismo, $S_0 = \alpha - \frac{C}{i}$, por lo que también la ecuación general a aplicar será la siguiente: $S_n = (S_0 + \frac{C}{i})\cdot(1 + i)^n - \frac{C}{i}$.

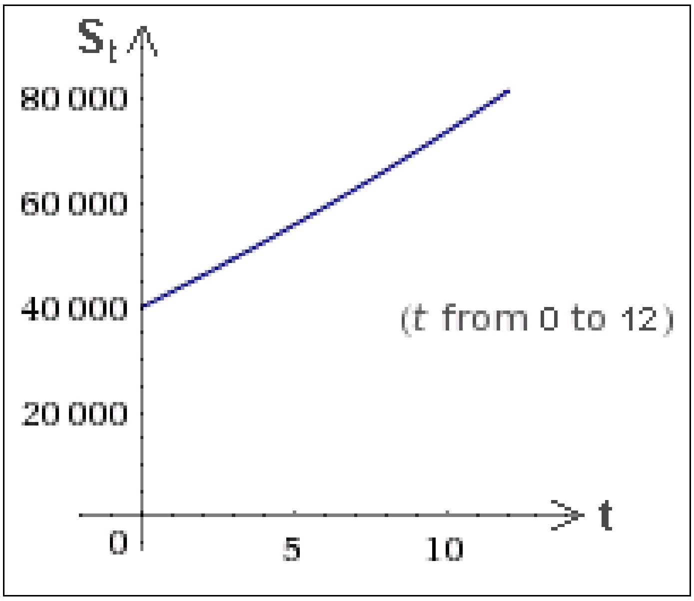
Así pues, con los datos del problema planteado, se obtiene un último sueldo bruto anual, en el instante de la jubilación, por un importe de:

$$\boxed{S_{40} = (40.000 + \frac{2.000}{0'025}) \times 1'025^{40} - \frac{2.000}{0'025} = 242.207'66 \text{ €}.}$$

b) Si a la solución general anteriormente obtenida le aplicamos los valores correspondientes, resultará la expresión buscada:

$$S_t = 120.000 \times 1'025^t - 80.000 = 80.000(1'5 \times 1'025^t - 1) =$$
$$= 40.000(3 \times 1'025^t - 2),$$

con la representación gráfica siguiente (considerando a la variable *t* como continua):



Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $S_t \to \infty$. Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{S_t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{40.000(3 \cdot 1'025^t - 2)}{t} = +\infty$, luego existe efectivamente una rama parabólica según el eje OS (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 3

Una plaza de parking se comienza alquilando por 100 €/mes, constando en el pertinente contrato de arrendamiento urbano su revisión anual de acuerdo con el IPC que publica periódicamente, con carácter oficial, el INE u organismo que le substituya. Si se estima una inflación media del 3% y unos gastos del propietario, por todos los conceptos (incluso impuestos y tasas), del 40% del importe del arriendo, ¿cuál será la renta anual neta del mismo al cabo de 10 años?

Solución:

Evidentemente, la “tasa de inflación” o de “variación del nivel de precios” vendrá representada por la expresión:

$$i = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = 0'03, \text{ con: } P_0 = 12 \text{ x } 100 = 1.200 \text{ €/año.}$$

De este modo, se obtiene la siguiente ecuación homogénea en diferencias finitas, lineal y de primer orden:

$$P_{t+1} - P_t = 0'03 \cdot P_t; \text{ o sea: } P_{t+1} - 1'03 \cdot P_t = 0.$$

Su ecuación característica es: $r - 1'03 = 0$, de donde: $r = 1'03$, y su solución general vendrá dada por: $P_t = c(1'03)^t$. Ahora bien, teniendo en cuenta que: $P_0 = c = 1.200$, se tendrá la trayectoria temporal del arriendo siguiente:

$$P_t = 1.200 \times 1'03^t.$$

Obsérvese que a la misma conclusión llegaríamos por aplicación de la conocida fórmula del interés compuesto, esto es:

$$P_t = P_0(1 + i)^t = 1.200(1 + 0'03)^t.$$

Por otra parte, el punto de equilibrio vendría dado por:

$(P_{t+1} = P_t = P_e)$, $P_e - 1'03 \cdot P_e = 0$, de donde se deduce que: $P_e = 0$ €/año.

Así pues, la renta neta anual vendría dada por la expresión:

$$\boxed{R_t = 0'60 \times P_t = 0'60 \times 1.200 \times 1'03^t = 720 \times 1'03^t},$$

con la representación gráfica siguiente (considerando a la variable *t* como continua):

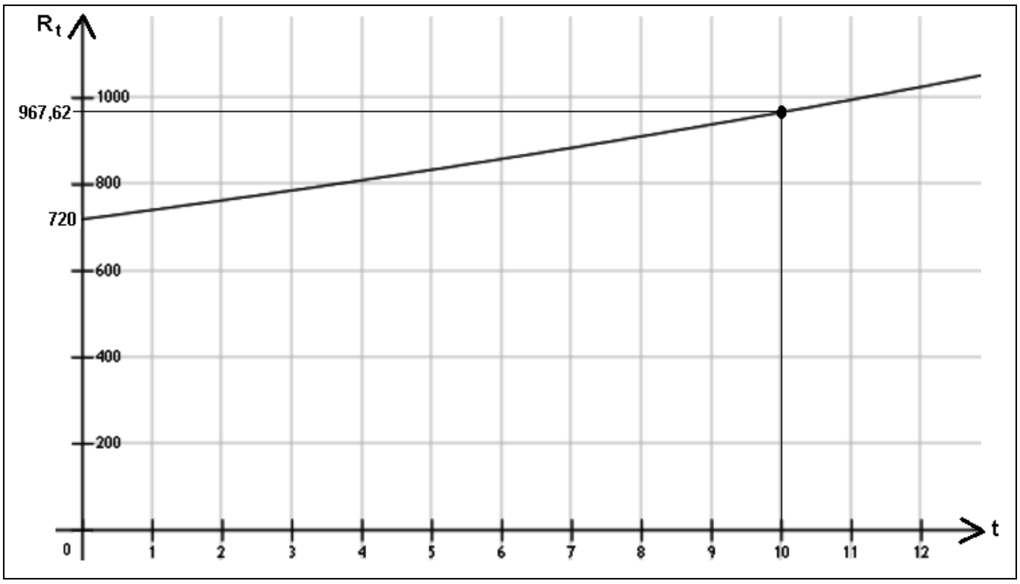


FIG. 12.2. Evolución temporal de la renta neta anual.

Por otra parte, se presume también en este caso la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $R_t \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{R_t}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{720 \cdot 1'03^t}{t} = +\infty$, luego existe efectivamente una rama parabólica según el eje OR (vertical, hacia arriba).

Al cabo de 10 años, la renta neta anual de dicha plaza de parking será:

$$R_{10} = 720 \times 1'03^{10} = 967'62 \text{ €/año} = 80'63 \text{ €/mes}.$$

3. DIFERENCIAS EN LAS VARIABLES ECONÓMICAS

3.1. CONCEPTO

La resolución de las ecuaciones recurrentes se presenta con gran frecuencia en las aplicaciones económicas. Los valores de la mayoría de las magnitudes económicas son medibles en intervalos de tiempo uniformemente espaciados (meses, trimestres, años, décadas, …). Las interrelaciones existentes entre las variables quedan así determinadas en distintos períodos del tiempo $t \in (1, 2, 3, \ldots)$ que suele ser, en tales problemas, la variable independiente. Pues bien, en el examen de los datos económicos pueden surgir dos casos diferentes, a saber:

a) Que los argumentos estén tabulados a intervalo constante *h*.
b) Que no lo estén.

Por ahora nos ocuparemos sólo del primer caso que es más corriente, y que significa que la variable económica *x* está medida a intervalos constantes de tiempo. Esto resulta corriente hacerlo con los datos económicos.

Con las parejas de valores se hace lo siguiente (ver la tabla):

1. Se ordenan en orden algebraico creciente de *x* y se tabulan como se indica más abajo en la primera columna, donde el valor del subíndice *k* indica el orden de colocación. Los valores de *y* no tienen por qué seguir la misma variación creciente de *x*.

2. en la segunda columna se inserta la diferencia entre los dos valores de *y* inmediatamente a la izquierda; para ello se resta del valor del mayor subíndice (más abajo en la tabla) el valor de menor subíndice (el que está situado inmediatamente encima del anterior). Para no olvidarse de esto puede hacerse el cálculo comenzando por la parte inferior de la tabla. El valor resultante de la diferencia se inserta en el renglón intermedio entre los dos en los que están los dos valores iniciales. Se denomina *diferencias de primer orden* a los valores de esta columna. Para distinguirlas, además del símbolo Δ, se pone el subíndice menor de los de los dos valores que se han restado.

Y así, se conforma la siguiente tabla:

k x_k y_k	$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$	$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$	$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k$
0 x_0 y_0			
	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
1 x_1 y_1		$\Delta^2 y_o = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
2 x_2 y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		....
3 x_3 y_3		....	
	....		....
....		....	
	....		....
....		....	
	....		....
$n-3$ x_{n-3} y_{n-3}		....	
	$\Delta y_{n-3} = y_{n-2} - y_{n-3}$		....
$n-2$ x_{n-2} y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-3} = \Delta y_{n-2} - \Delta y_{n-3}$	
	$\Delta y_{n-2} = y_{n-1} - y_{n-2}$		$\Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$
$n-1$ x_{n-1} y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$	
	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$		
n x_n y_n			

FIG. 12.3. Esquema de una tabla de diferencias finitas.

3. El proceso descrito se repite sucesivamente con los valores de la columna segunda para obtener la tercera, con estos valores se obtiene la columna cuarta, etc. Así se continúa hasta que en la última columna, la de las diferencias de orden *n*, se encuentre un único valor. No siempre es necesario calcular todas las columnas. Cuando todos los valores de una columna sean iguales no se prosigue haciendo diferencias, ya que si $\Delta^m y_k$ = cte., $\Delta^{m+1} y_k = 0$.

En el examen de esta tabla de diferencias se observará lo siguiente:

a) La fórmula general para obtener un valor cualquier de la tabla anterior es:

$$\Delta \cdot {}^m y_k = \Delta \cdot {}^{m-1} y_{k+1} - \Delta \cdot {}^{m-1} y_k \, .$$

b) Si se desarrolla esta expresión en función de otras diferencias, se llega a una relación entre valores de la tabla y valores de las ordenadas. Así, por ejemplo, las diferencias de la diagonal superior valen, respectivamente:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y, así, por inducción se llega a que, en general:

$$\Delta^k y_0 = y_k - \binom{k}{1} y_{k-1} + \binom{k}{2} y_{k-2} - \ldots + (-1)^k y_0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} y_{k-i} \, ,$$

lo que constituye la suma de (k + 1) sumandos, de signos alternados.

c) En la columna *k* de la tabla de diferencias hay (n + 1 – k) valores, cuya suma vale lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^{n+1-k} \Delta^k y_i = \Delta^k y_0 + \ldots + \Delta^k y_{n-k} = \left(\Delta^{k-1} y_1 + \Delta^{k-1} y_0\right) + \ldots + \left(\Delta^{k-1} y_{n+1-k} - \Delta^{k-1} y_{n-k}\right) =$$
$$= \Delta^{k-1} y_{n+1-k} - \Delta^{k-1} y_0 \, ,$$

es decir, que se cumple que *la suma de los valores de una columna es igual a la diferencia entre los valores últimos y primero de la columna anterior*. Esta propiedad, sin duda, va a ser muy útil para detectar equivocaciones en el cálculo de las diferencias en las variables económicas.

3.2. EJEMPLOS

Ejemplo 1

Resolver la ecuación en diferencias finitas: $(x+1)\cdot\Delta f(x) + f(x) = 0$, siendo *x* una variable económica.

Solución:

Se trata de una ecuación lineal de primer orden y homogénea, que se puede escribir también de la forma:

$\Delta f(x) + \frac{f(x)}{x+1} = 0$, y como: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, se tendrá que:

$$f(x+1) = f(x) - \frac{f(x)}{x+1} = f(x)\cdot[1 - \frac{1}{x+1}] = f(x)\cdot\frac{x}{x+1}.$$

Dando valores $\forall x \in (1, 2, 3, \ldots, x-1)$, se tendrá que:

$$f(2) = f(1)\cdot\frac{1}{2};\ f(3) = f(2)\cdot\frac{2}{3};\ f(4) = f(3)\cdot\frac{3}{4};\ \ldots;\ f(x) = f(x-1)\cdot\frac{x-1}{x}.$$

Multiplicando miembro a miembro y simplificando, se obtiene que:

$$\boxed{f(x) = f(1)\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(x-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot x} = \frac{c}{x}}$$

, volviendo a simplificar y haciendo: $f(1) = c$. Se trataría de una hipérbola, con una asíntota horizontal en el eje OX, puesto que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{c}{x} = 0.$$

Ejemplo 2

Escríbase en notación de subíndices y resolver la siguiente ecuación recurrente de variable económica:

$$\Delta^2 f(x) - 3\cdot\Delta f(x) = 0.$$

Solución:

Se tiene que: $\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$; así mismo: $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = u_{n+1} - u_n$. Substituyendo queda:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n - 3(u_{n+1} - u_n) = 0 \leftrightarrow u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 0,$$

que trataremos de resolver a continuación tratándose de una ecuación recurrente homogénea. En efecto, la ecuación característica correspondiente es: $r^2 - 5r + 4 = 0$; de donde se deduce que sus raíces son: $r = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$; de donde: $r_1 = 4$ y $r_2 = 1$, con lo que se tendrá la solución general siguiente:

$$\boxed{u_n = c_1 + c_2 \cdot 4^n = f(n)}\ ,\ \forall\ c_1, c_2 \in \Re.$$

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación recurrente de variable económica:

$$\Delta^3 f(x) + \Delta^2 f(x) - \Delta f(x) - f(x) = 0.$$

Solución:

Teniendo en cuenta los valores correspondientes, se puede escribir:

$$[f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)] + [f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)] -$$
$$- [f(x+1) - f(x)] - f(x) = 0, \text{ o bien simplificando: } f(x+3) - 2f(x+2) = 0,$$

que, mediante una translación, se puede escribir la ecuación equivalente:

$f(x+1) - 2f(x) = 0$, o bien expresada en notación de subíndices:

$u_{n+1} - 2u_n = 0$, cuya ecuación característica tiene una única solución real: $r_1 = 2$, por lo que la solución general de la ecuación en diferencias finitas propuesta será simplemente: $\boxed{u_n = c \cdot 2^n}$, $\forall c \in \Re$.

4. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA Z

La desarrollaremos a continuación mediante un ejemplo que juzgamos suficientemente representativo. A saber:

Ejemplo 1

La producción *y* en el tiempo de un bien en una fábrica de electrodomésticos viene dada por la expresión:

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0, \text{ tal que: } y_0 = 1 \text{ e } y_1 = 3,$$

donde dicha producción se expresa en miles de unidades anuales. ¿Cuál será la producción media diaria en el quinto año de su actividad económica, considerando un calendario laboral de 252 días? y ¿cuál será la cifra de negocios del ejercicio anterior si el precio de salida de fábrica del bien es de 850 €/ud.?

Solución:

Transformando la ecuación dada mediante T = Z, se tiene que:

$T\{y_{t+2}\} = \frac{1}{z^2}f(z) - \frac{1}{z^2}(y_0 + y_1 z) = \frac{1}{z^2}[f(z) - 1 - 3z]$, donde $f(z) = T\{y_t\} = X(z)$.

Análogamente, se tiene que: $T\{y_{t+1}\} = \frac{1}{z}f(z) - \frac{1}{z}y_0 = \frac{1}{z}[f(z) - 1]$, y substituyendo en la ecuación propuesta, resultará:

$$\frac{1}{z^2}[f(z) - 1 - 3z] - \frac{3}{z}[f(z) - 1] + 2f(z) = 0\text{, o también:}$$

$f(z) - 1 - 3z \cdot f(z) + 2z^2 \cdot f(z) = 0$; $f(z)[1 - 3z + 2z^2] = 1$, de donde:

$$f(z) = \frac{1}{1 - 3z + 2z^2}.$$

Procede, a continuación, realizar la descomposición de esta fracción en suma de fracciones simples, por lo que debemos resolver la ecuación del denominador, así:

$2z^2 - 3z + 1 = 0$; $z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$; $z_1 = 1$; $z_2 = ½$, y entonces se forma:

$$f(z) = \frac{1}{2(z-1)(z-1/2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{2z-1}\text{, o sea:}$$

$$\frac{1}{(z-1)(2z-1)} = \frac{A(2z-1)}{(z-1)(2z-1)} + \frac{B(z-1)}{(z-1)(2z-1)}\text{, de lo que se deduce que:}$$

$2Az - A + Bz - B = 1$, y entonces: $2A + B = 0$; $- A - B = 1$; $A = 1$ y $B = -2$.

De aquí resulta la expresión:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{2z-1} = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z},$$

y entonces tomando transformadas Z inversas en ambos miembros de esta igualdad, resultará la función generatriz siguiente:

$$y_t = T^{-1}[f(z)] = -T^{-1}\left(\frac{1}{1-z}\right) + 2T^{-1}\left(\frac{1}{1-2z}\right) = -1^t + 2 \cdot 2^t = 2^{t+1} - 1 = f(t),$$

que constituye la solución particular buscada para la trayectoria temporal de la producción del bien en cuestión, cuya representación gráfica puede verse a continuación considerando a la variable “tiempo” como continua:

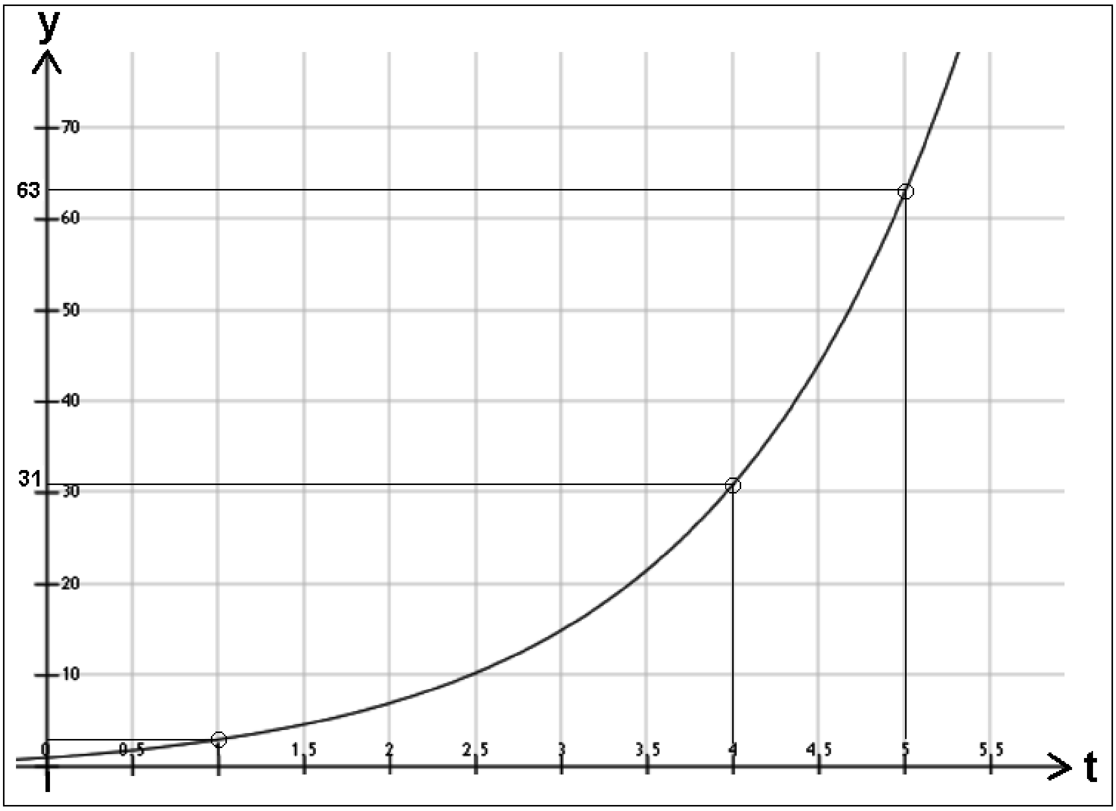


FIG. 12.4. Evolución temporal de la trayectoria de la producción.

Este resultado puede comprobarse alternativamente mediante el procedimiento resolutorio tradicional, por lo que la ecuación característica de aquella ecuación homogénea dada, lineal y de coeficientes constantes, será:

$r^2 - 3r + 2 = 0$; $r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$; $r_1 = 2$; $r_2 = 1$; y se tendrá la solución general: $y_t = c_1 \cdot 2^t + c_2$, que con las condiciones dadas, ofrece:

$$\begin{cases} y_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ y_1 = 2c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

, de donde: $c_1 = 2$; $c_2 = 1 - 2 = -1$, y se tiene la solución particular buscada siguiente:

$$y_t = 2 \cdot 2^t - 1 = 2^{t+1} - 1 = f(t) \ ,$$

que coincide exactamente con el resultado obtenido por aplicación del método de las transformadas Z, c.s.q.d.

De este modo, en el 5º año de actividad de la fábrica, la producción en cuestión será de: $y_5 = 2^6 - 1 = 63 \Rightarrow$ 63.000 ud./año de producto, lo que supone una media de:

$$\frac{63.000}{252} = 250 \text{ ud./día.}$$

Por otra parte, en el 4º ejercicio la producción ha sido de:

$$y_4 = 2^5 - 1 = 31 \Rightarrow 31.000 \text{ ud./año de producto,}$$

lo que supone una cifra de negocios de:

$$31.000 \text{ ud.} \times 850 \text{ €/ud.} = 26.350.000\text{'}00 \text{ € .}$$

De hecho, en el presente ejemplo resulta de mayor complejidad operativa la resolución del ejercicio por aplicación del método de las transformadas Z que por el procedimiento tradicional, pero ello no sucederá así necesariamente en todos los casos.

CAPÍTULO 13

SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

1.1. GENERALIDADES

Como sabemos, las ecuaciones de diferencias finitas aparecen en Economía, por ejemplo, cuando se analizan fenómenos económicos dinámicos y discretos. Si en estos fenómenos el número de variables estudiadas es mayor que uno, podemos llegar a los sistemas de ecuaciones de diferencias finitas que son objeto de estudio en el presente capítulo de nuestro libro.

Los sistemas de ecuaciones en diferencias intentan simular un fenómeno en forma discreta; en otras palabras, es como verlo a intervalos iguales de tiempo. Esto resulta coherente con la realidad, ya que normalmente se toman una serie de medidas espaciadas en el tiempo, una vez al día, o por semana, o al mes, por ejemplo, y siempre a la misma hora si confiamos en que nos sirva para detectar un patrón. Son, en definitiva, sistemas de ecuaciones recurrentes que se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= a \cdot x_n + b \cdot y_n \\ y_{n+1} &= c \cdot x_n + d \cdot y_n \end{aligned}\right\}$$

Así pues, dadas dos o más ecuaciones simultáneas que contengan varias funciones desconocidas, así como un cierto número de sus diferencias, se dice que forman un sistema de ecuaciones en diferencias finitas. Al igual que sucede con las ecuaciones diremos que son lineales si son de primer grado en cada función y en sus diferencias; si además los coeficientes no son variables, se dice que son de “coeficientes constantes”.

Ahora bien, ¿cómo se relaciona esta sucesión de valores?. Podría servirnos, al respecto, un modelo lineal como el que se expone a continuación.

Sea A una matriz cuadrada de orden p y sea: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, una sucesión de vectores en $\Re^p$ definidos de manera recurrente por:

$$u_n = A \cdot u_{n-1}, \quad \forall\ n = 1, 2, \ldots,$$

a partir de un cierto vector inicial $u_0 \in \Re^p$. Una relación de recurrencia de esta forma se llama *sistema de ecuaciones en diferencias lineal y homogéneo.*

Si $u_n = A \cdot u_{n-1}$ es un sistema de ecuaciones simultáneas en diferencias finitas, se tiene, razonando por inducción, que: $u_n = A^n u_0$. Con esta expresión podemos hallar u_n para cualquier valor de *n*. Sin embargo, vamos a dar una expresión más simple para u_n que nos permitirá ahorrar tiempo de cálculo y también estudiar el comportamiento a largo plazo de la sucesión u_n (es decir, cuando n es grande): será la forma de Jordan o de diagonalización, ya que las matrices de paso P y su inversa P^{-1} permitirán simplificaciones ciertamente notables en el cálculo de las potencias de A (ver capítulo 9 de "Complementos" de nuestro anterior libro "Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas", citado en la bibliografía).

Concretamente se tiene el siguiente resultado: sea A una matriz cuadrada de orden *p*, y $u_0 \in \Re^p$. Entonces, la solución del sistema de ecuaciones en diferencias: $u_n = A \cdot u_{n-1}$ con vector inicial u_0, es el siguiente:

$$u_n = P \cdot J^n \cdot P^{-1} \cdot u_0 \quad \forall\ n = 1, 2, \ldots ,$$

siendo: $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$ la forma canónica de Jordan de A[1].

Se precisa, a continuación, cómo evaluar J^n. En realidad, ello no resulta complicado, por la forma que tiene, tanto si es diagonal como si no.

Hay, como mínimo, tres métodos diferentes para resolver los sistemas de ecuaciones recurrentes que aquí se contemplan. En el primer método el problema se reduce a resolver una ecuación en diferencias de segundo grado. En el segundo método se utiliza la diagonalización de matrices para hallar la potencia enésima de la matriz del sistema, esto es, partiendo del sistema siguiente:

---

[1] En álgebra lineal, la *forma canónica de Jordan* es la forma de la matriz de un endomorfismo de un espacio vectorial en cierta base asociada a la descomposición en suma directa de subespacios invariantes bajo dicho endomorfismo. Dicha forma canónica consistirá en que la matriz estará formada por "bloques de Jordan" en la diagonal y bloques de ceros fuera de ella. En los números complejos (y también en los reales cuando se descomponga totalmente el polinomio característico) aunque no siempre es posible diagonalizar, sí que es posible siempre una "casi diagonalización". Esto es a lo que denominamos, en definitiva, la *forma canónica de Jordan*.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = a \cdot x_n + b \cdot y_n \\ y_{n+1} = c \cdot x_n + d \cdot y_n \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Llamando: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} \right] = A^2 \cdot \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots\cdots = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego: } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Ahora sólo resulta necesario calcular A^n para tener la solución del sistema, que dependerá de las condiciones iniciales x_0 e y_0. Por último, un tercer método de resolución emplearía el operador simbólico E, cuyo homónimo D ha sido usado también en la resolución de las EDO, como hemos tenido ocasión de comprobar.

En cualquier caso, el método que resulta más cómodo, en general, para la resolución de un sistema de *k* ecuaciones en diferencias finitas con *k* funciones desconocidas, consiste en la eliminación de (k–1) funciones, obteniéndose una única ecuación lineal y de coeficientes constantes cuya resolución proporciona la del sistema planteado.

Debe tenerse en cuenta que *x* será una variable entera, y notaremos por $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ una familia de *n* sucesiones dependientes de *x*.

Un sistema de primer orden de ecuaciones en diferencias será una expresión de la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(y_1(x+1), \ldots, y_n(x+1), y_1(x), \ldots, y_n(x), x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(y_1(x+1), \ldots, y_n(x+1), y_1(x), \ldots, y_n(x), x) = 0 \end{array}\right\}$$

donde *m* es el número de ecuaciones y *n* el de variables. Cuando aparezcan desplazamientos de *x* superiores a x + 1, estaremos ante un sistema de orden mayor que uno. Realizando un cambio de variable análogo al que hemos utilizado para la ecuación de orden *n*, veamos que cualquier sistema se puede reducir a otro equivalente de primer orden, de forma que no constituye ninguna limitación el hecho de profundizar sólo en el orden uno.

Dentro de los sistemas de ecuaciones recurrentes, los más fáciles de resolver son, sin duda, los lineales, y son éstos, fundamentalmente, los que nosotros vamos a estudiar.

1.2. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Un sistema lineal homogéneo de primer orden con *n* ecuaciones e incógnitas es el que tiene la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = a_{11}(x)\cdot y_1(x) + a_{12}(x)\cdot y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)\cdot y_n(x) \\ y_2(x+1) = a_{21}(x)\cdot y_1(x) + a_{22}(x)\cdot y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)\cdot y_n(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x+1) = a_{n1}(x)\cdot y_1(x) + a_{n2}(x)\cdot y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)\cdot y_n(x) \end{array}\right\}$$

donde las $a_{ij}(x)$ son sucesiones que consideramos datos del problema. Un ejemplo concreto de ello puede ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = 3y_1(x) + 5y_2(x) \\ y_2(x+1) = y_1(x) + 7y_2(x) \end{array}\right\}$$

Observaciones. El ejemplo anterior es claramente un sistema homogéneo de primer orden con dos ecuaciones y dos incógnitas. En dicho ejemplo, las sucesiones $a_{ij}(x)$ son, respectivamente:

$$a_{11}(x) = 3, \quad a_{12}(x) = 5, \quad a_{21}(x) = 1, \quad a_{22}(x) = 7,$$

y, por consiguiente, son constantes que no dependen de la variable *x*. Cuando esto sucede, se dice que se trata de un sistema con coeficientes constantes, y son los que fundamentalmente vamos a estudiar aquí. De otro modo, un ejemplo en el que los coeficientes son variables puede ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = x\cdot y_1(x) + y_2(x) \\ y_2(x+1) = (3x+1)\cdot y_1(x) + x^2 y_2(x) \end{array}\right\}$$

Si ahora llamamos:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x),\ldots,a_{1n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x),\ldots,a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

el sistema en cuestión admite la expresión matricial:

$Y(x + 1) = A(x)\cdot Y(x)$, con coeficientes variables, y escribiremos:

$Y(x + 1) = A\cdot Y(x)$, si el sistema es de coeficientes constantes.

Desde luego, un sistema práctico de resolución de este tipo de problemas consiste en la utilización del operador simbólico E.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos representativos que se van a resolver por diferentes procedimientos.

Ejemplo 1

Sean dos bienes interrelacionados en un mercado cuyos precios conforman en el tiempo el sistema recurrente siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t+1) = 3y_1(t) + 5y_2(t) \\ y_2(t+1) = y_1(t) + 7y_2(t) \end{array}\right\}$$

Se trata de resolver este sistema por dos procedimientos diferentes:

a) Utilizando el operador E.
b) Por el método matricial.
c) Representar o tabular ambas trayectorias temporales a partir de las condiciones iniciales: $y_1(0) = 1'00$ €/ud.; $y_2(0) = 2'00$ €/ud.

Solución:

a) El sistema en cuestión se puede escribir en la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_{t+1} = 3y_t + 5z_t & , & y_{t+1} - 3y_t - 5z_t = 0 \\ z_{t+1} = y_t + 7z_t & , & z_{t+1} - y_t - 7z_t = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizando el operador **E** se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} (E-3)y_t - 5z_t = 0 \\ (E-7)z_t - y_t = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (E-3)y_t - 5z_t = 0 \\ (E-7)(E-3)z_t - (E-3)y_t = 0 \end{array}\right\}$$

$$(E-7)(E-3)z_t - 5z_t = 0 \;; \quad (E^2 - 3E - 7E + 21)z_t - 5z_t = 0 \;;$$

$$(E^2 - 10E + 16)z_t = 0 \;\Rightarrow\; z_{t+2} - 10z_{t+1} + 16z_t = 0 \;; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \;;$$

$$\lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \left\langle\begin{array}{l} 8 \\ 2 \end{array}\right. \text{, o sea: } \boxed{z_t = c_1 \cdot 8^t + c_2 \cdot 2^t}$$

$$y_t = z_{t+1} - 7z_t = c_1 \cdot 8^{t+1} + c_2 \cdot 2^{t+1} - 7c_1 \cdot 8^t - 7c_2 \cdot 2^t =$$

$$= 8c_1 \cdot 8^t + 2c_2 \cdot 2^t - 7c_1 \cdot 8^t - 7c_2 \cdot 2^t \text{ ; de donde:}$$

$$\boxed{y_t = c_1 \cdot 8^t - 5c_2 \cdot 2^t} \text{ ; o sea, también:}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1 \cdot 8^t - 5c_2 \cdot 2^t \\ y_2(t) = c_1 \cdot 8^t + c_2 \cdot 2^t \end{array}}$$

, con lo que se cumple: $y_1(t) - y_2(t) = -c_2 \cdot 2^t - 5c_2 \cdot 2^t = -6c_2 \cdot 2^t$.

b) La matriz A es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ y sus autovalores son las raíces de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0,$$

que son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$, como hemos visto antes. A es diagonalizable, porque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y: $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Los autovectores asociados a $\lambda_1 = 2$ son los vectores que verifican:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

es decir, la variedad lineal generada por (-5, 1). Análogamente, los autovectores del $\lambda_2 = 8$ salen de la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y están formados por la variedad lineal generada por (1, 1).

Tomando: $M = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos: $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$.

Como: $M^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, llegamos a que la solución general es:

$$Y(t) = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 8^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 \cdot 2^t - 8^t & 5(2^t - 8^t) \\ 2^t - 8^t & -2^t - 5 \cdot 8^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

siendo c_1 y c_2 , $y_1(0)$ e $y_2(0)$, respectivamente.

En casos como el anterior, en los que la matriz es diagonalizable en el cuerpo real, también hay otras expresiones más cómodas de la solución general del sistema planteado.

Desde luego, el resultado así obtenido coincide con el resultado hallado anteriormente por aplicación del método del operador E teniendo en cuenta la arbitrariedad de las constantes c_1 y c_2. En efecto:

$$-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5\cdot 2^t - 8^t & 5(2^t - 8^t) \\ 2^t - 8^t & -2^t - 5\cdot 8^t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5c_1\cdot 2^t - c_1\cdot 8^t + 5c_2(2^t - 8^t) \\ c_1\cdot 2^t - c_1\cdot 8^t - c_2\cdot 2^t - 5c_2\cdot 8^t \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (5c_2 - 5c_1)\cdot 2^t - (c_1 + 5c_2)8^t \\ (c_1 - c_2)\cdot 2^t - (c_1 + 5c_2)8^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1 + 5c_2}{6}\cdot 8^t - \frac{5c_2 - 5c_1}{6}\cdot 2^t \\ \frac{c_1 + 5c_2}{6}\cdot 8^t + \frac{c_2 - c_1}{6}\cdot 2^t \end{pmatrix},$$

que, comparando con la solución hallada por el procedimiento anterior, ofrece el mismo resultado como no podría ser de otra manera, dado que si hacemos:

$$\frac{c_1 + 5c_2}{6} = K_1 \quad \text{y} \quad \frac{c_2 - c_1}{6} = K_2$$, resultará la solución buscada:

$$\begin{cases} y_1(t) = K_1\cdot 8^t - 5K_2\cdot 2^t \\ y_2(t) = K_1\cdot 8^t + K_2\cdot 2^t \end{cases}$$, c.s.q.d.

c) Teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, se tendrá que:

$$\begin{cases} y_1(0) = c_1 - 5c_2 = 1 \\ y_2(0) = c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

, con lo que: $c_1 = 11/6$ y $c_2 = 1/6$, y se tendrá:

$$\begin{cases} y_1(t) = (11/6)\cdot 8^t - (5/6)\cdot 2^t \\ y_2(t) = (11/6)\cdot 8^t + (1/6)\cdot 2^t \end{cases}$$

, con la siguiente tabla de valores:

t	***y_1(€ /ud.)***	***y_2(€ /ud.)***
0	1	2
1	13	15
2	114	118
3	932	940
4	7.496	7.512
5	60.048	60.080
…	…	…
+ ∞	+ ∞	+ ∞

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que:

$$\begin{cases} y_{1e} = 3y_{1e} + 5y_{2e} \\ y_{2e} = y_{1e} + 7y_{2e} \end{cases}$$

, o también:

$$\begin{cases} 2y_{1e} + 5y_{2e} = 0 \\ y_{1e} + 6y_{2e} = 0 \end{cases}$$

, que constituye un sistema homogéneo, compatible y determinado[2], con la única solución trivial: $y_{1e} = y_{2e} = 0$ €/ud.

Ejemplo 2

Sean dos bienes sustitutivos, 1 y 2, en un mercado cuyos precios conforman el sistema recurrente siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t+1) = 2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2(t+1) = 2y_2(t) \end{array}\right\}$$

Se trata de resolver este sistema por dos procedimientos diferentes:

a) Utilizando el operador E.
b) Por el método matricial. Y además:
c) Representar gráficamente ambas trayectorias temporales a partir de las condiciones iniciales: $y_1(0) = 1'00$ €/ud.; $y_2(0) = 2'00$ €/ud., así como la trayectoria del sistema.
d) Calcular la elasticidad cruzada correspondiente de la demanda del bien 2 si en el período que va de t = 2 a t = 3 su demanda aumenta de 300 a 400 ud. diarias.

Solución:

a) El sistema en cuestión se puede escribir en la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_{t+1} = 2y_t + z_t & , & y_{t+1} - 2y_t - z_t = 0 \\ z_{t+1} = 2z_t & , & z_{t+1} - 2z_t = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizando el operador **E** se tendrá que:

[2] En álgebra lineal, el conocido **teorema de Rouché-Frobenius-Kronecker** permite calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en función del rango o característica de la matriz de los coeficientes de las incógnitas y del rango de la matriz ampliada, ambas asociadas al sistema. Lleva el nombre del matemático francés *Eugène Rouché* quien lo enunció, del matemático alemán *Ferdinand Georg Frobenius* quien fue uno de los muchos matemáticos que lo demostraron y del matemático alemán *Leopold Kronecker*. El teorema establece que para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es condición necesaria y suficiente que la matriz formada por los coeficientes junto con la ampliada u orlada por los términos independientes posean el mismo rango. Por lo demás, el sistema constituido será determinado si su rango coincide con el número de incógnitas ó será indeterminado si posee un valor menor a tal número.

$$\left.\begin{array}{l}(E-2)y_t - z_t = 0\\ (E-2)z_t = 0\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}(E-2)(E-2)y_t - (E-2)z_t = 0\\ (E-2)z_t = 0\end{array}\right\}$$

$$(E^2 - 4E + 4)y_t = 0 \;\Rightarrow\; y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0 \;;\quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \;;$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \left\langle\begin{array}{l}2\\2\end{array}\right. \text{, o sea: } \boxed{y_t = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t}$$

$$z_t = y_{t+1} - 2y_t = c_1 \cdot 2^{t+1} + c_2(t+1)\cdot 2^{t+1} - 2c_1 \cdot 2^t - 2c_2 \cdot t \cdot 2^t =$$

$$= 2c_1 \cdot 2^t + 2c_2(t+1)\cdot 2^t - 2c_1 \cdot 2^t - 2c_2 \cdot t \cdot 2^t =$$

$= c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t + c_2 \cdot 2^t - c_1 \cdot 2^t - -c_2 \cdot t \cdot 2^t = \boxed{c_2 \cdot 2^t}$; o sea, también se puede escribir así:

$$\boxed{\begin{array}{l}y_1(t) = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t = 2^t(c_1 + c_2 \cdot t)\\ y_2(t) = c_2 \cdot 2^t\end{array}}$$

b) Aquí, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y el amable lector/a podrá comprobar que la matriz A no es diagonalizable[3].

Por inducción se demuestra que:

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a^t & t \cdot a^{t-1} \\ 0 & a^t \end{bmatrix} \quad \forall\, t = 1,2,... \forall a \in \Re\,.$$

En efecto, pues las sucesivas potencias de la matriz A(t) conducen a (tomando los términos principales $a_{11} = a_{22} = a = 2$): A(t) = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de donde sucede que:

---

[3] Recordemos que en álgebra lineal, una matriz cuadrada "*A*" se dice que es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal. Es decir, si mediante un cambio de base puede reducirse a una forma diagonal. En este caso, la matriz en cuestión podrá descomponerse de la forma: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, en donde "*P*" es una matriz invertible cuyos vectores columna son vectores propios de *A*, y *D* es una matriz diagonal formada por los valores propios de *A*. Por otra parte, un endomorfismo de espacio vectorial (aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo) se dice *diagonalizable por similaridad* (o simplemente *diagonalizable*) si existe una base en la que su matriz asociada sea una matriz diagonal. Sin embargo la diagonalización no está asegurada, es decir no es posible decir que todo endomorfismo sea diagonalizable. La importancia de la diagonalización nos motiva a obtener una base en la que la matriz asociada a un endomorfismo no diagonalizable sea más simple aunque no diagonal. Para ello se seguirán las mismas técnicas que para la diagonalización, usando la conocida teoría sobre autovalores y autovectores (también llamados valores y vectores propios o en inglés *eigenvalues* y *eigenvectors*).

$$A^2(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^t(t) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a^t & t{\cdot}a^{t-1} \\ 0 & a^t \end{pmatrix}$$

, con lo que, en definitiva, en este caso: $A^t(t) = \begin{pmatrix} 2^t & t{\cdot}2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}$, luego la solución general del sistema recurrente planteado es la siguiente:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 2^t & t{\cdot}2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2^t \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t{\cdot}2^{t-1} \\ 2^t \end{bmatrix} \quad \forall\, t = 1,2,\ldots,$$

siendo $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ arbitrario. Se puede escribir también:

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^{t-1} = 2^t[c_1 + (c_2/2)\cdot t] \\ y_2(t) = c_2 \cdot 2^t \end{cases} \qquad \forall\ t = 1, 2, \ldots,$$

que coincide obviamente con el resultado anteriormente obtenido por aplicación del método del operador E teniendo en cuenta la arbitrariedad de las dos constantes del problema c_1 y c_2.

c) Teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema planteado, se tendrá que:

$$\begin{cases} y_1(0) = c_1 = 1 \\ y_2(0) = c_2 = 2 \end{cases}$$

, y consecuentemente:

$$\begin{cases} y_1(t) = 2^t + 2t \cdot 2^t = 2^t(1 + 2t) \\ y_2(t) = 2 \cdot 2^t = 2^{t+1} \end{cases}$$

con las siguientes representaciones gráficas para ambos bienes:

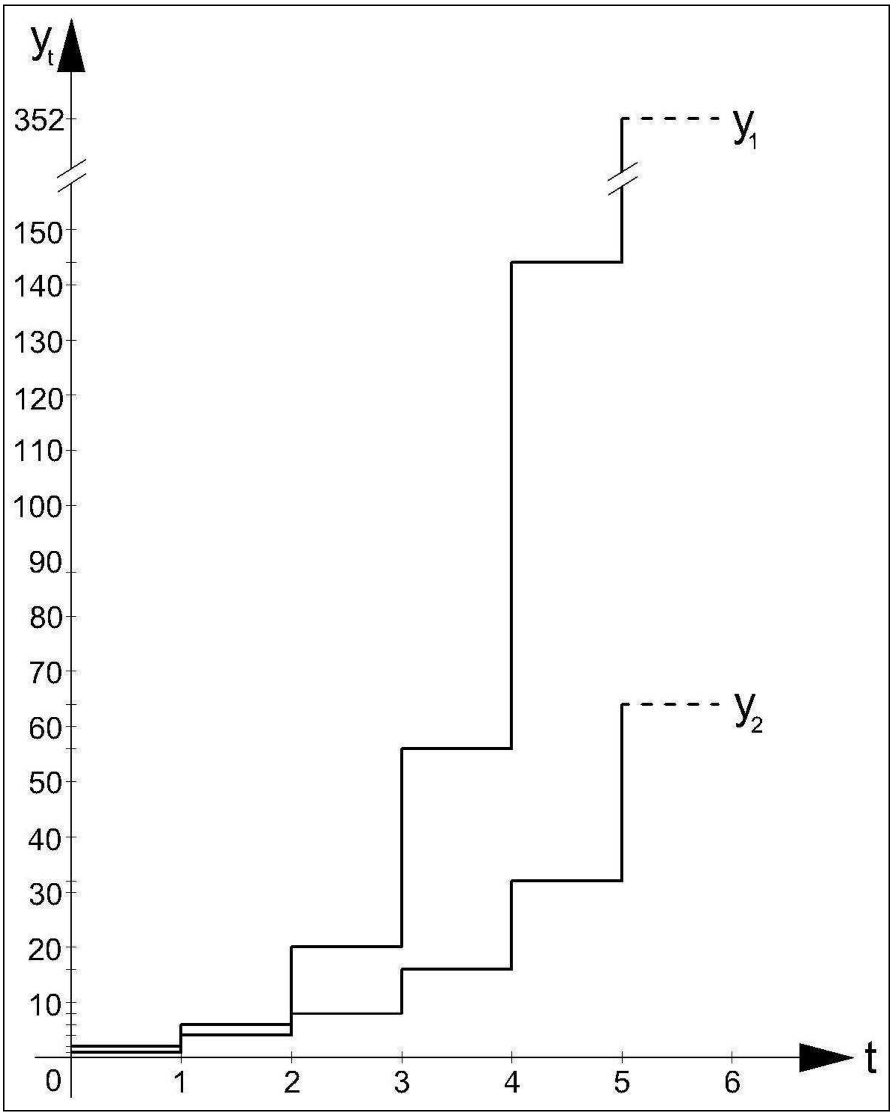


FIG. 13.1. Evolución temporal de los precios (I).

, que se corresponden, a su vez, con la siguiente tabla en función de los diferentes períodos de tiempo:

t	***y₁*** **(€ /ud.)**	***y₂*** **(€ /ud.)**
0	1	2
1	6	4
2	20	8
3	56	16
4	144	32
5	352	64
…	…	…
+ ∞	+ ∞	+ ∞

, con la correspondiente trayectoria temporal del sistema bidimensional planteado:

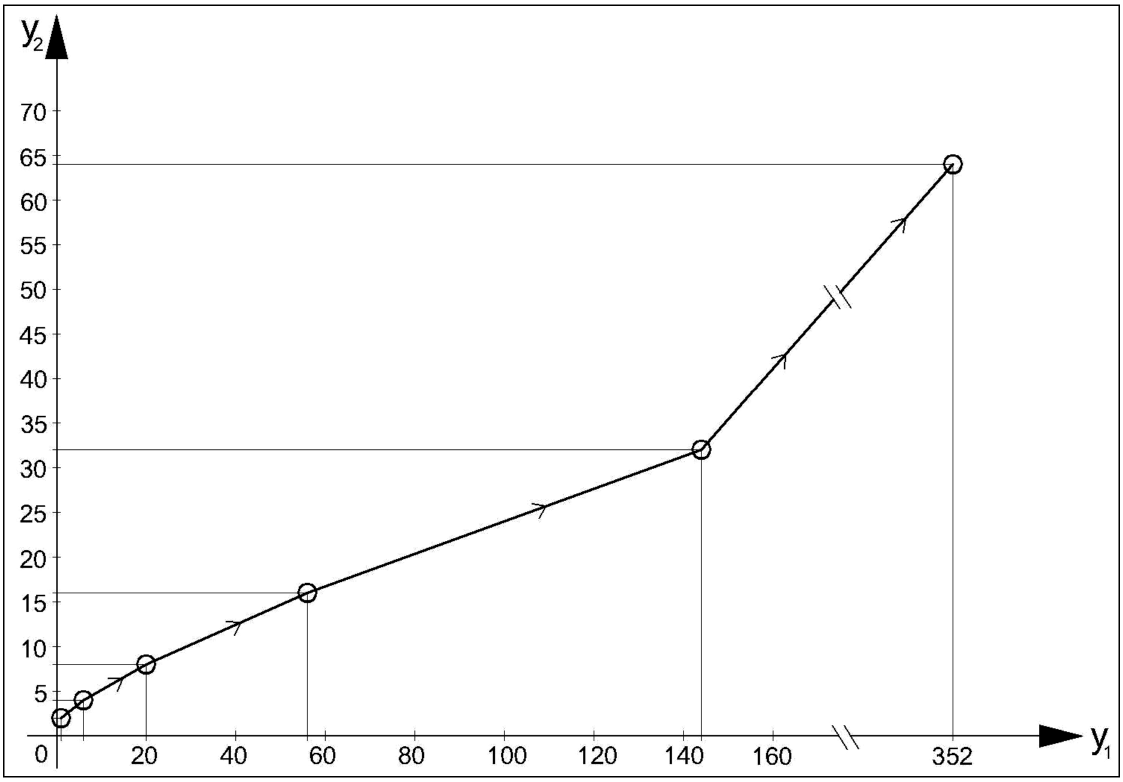


FIG. 13.2. Trayectoria temporal del sistema (I).

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que:

$$\begin{cases} y_{1e} = 2y_{1e} + y_{2e} \\ y_{2e} = 2y_{2e} \end{cases}$$

, y a simple vista ya se deduce la única solución trivial: $y_{1e} = y_{2e} = 0$ €/ud.

d) El proceso en cuestión se puede representar esquemáticamente del siguiente modo:

Bien 1 $\Rightarrow$ P: P_1 = 20 €/ud. $\rightarrow$ P_2 = 56 €/ud.
Bien 2 $\Rightarrow$ Q: Q_1 = 300 ud./día $\rightarrow$ Q_2 = 400 ud./día

La elasticidad cruzada de la demanda es una medida positiva (en este caso, por tratarse de bienes sustitutivos) de sensibilidad de la demanda de un cierto bien ante el cambio en el precio de un bien sustitutivo, *ceteris paribus*.

Se determina así:

$$E_c = \frac{(Q_2 - Q_1) \times (P_2 + P_1)}{(Q_2 + Q_1) \times (P_2 - P_1)} = \frac{(400 - 300) \times (56 + 20)}{(400 + 300) \times (56 - 20)} = \frac{7.600}{25.200} \approx 0'30.$$

Ejemplo 3

Los resultados contables *y* en el tiempo de tres empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$Y(t+1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot Y(t)\,.$$

Se pretende por la dirección dejar en activo solamente las dos más rentables. Teniendo en cuenta que los resultados iniciales, expresados en miles de euros/día, son: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = 3$, se trata de determinar cuál de ellas se cerrará, así como los resultados anuales de cada una de ellas a los tres años de su actividad económica.

Solución:

Este sistema, que resolveremos por la teoría matricial, también puede escribirse así:

$$\begin{cases} y_{t+1} = 3y_t + z_t + w_t \\ z_{t+1} = y_t + 3z_t + w_t \\ w_{t+1} = y_t + z_t + 3w_t \end{cases} \quad y \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente, la ecuación característica o secular es:

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, de la que se obtiene la ecuación:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0.$$

Los autovalores de A son las raíces: $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_3 = 5$ (simple). El subespacio de autovectores asociado a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ es:
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$, y está generado por los vectores:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como tiene dimensión dos, la matriz es diagonalizable. Análogamente, el subespacio de autovectores asociados a $\lambda_3 = 5$ está generado por el vector (1, 1, 1), luego los vectores:

$$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}2^t,\ \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}2^t,\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}5^t,$$

forman una base del espacio vectorial de soluciones, y la solución general es:

$$\boxed{Y(t) = c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}2^t + c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}2^t + c_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}5^t}\text{, es decir:}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = -c_1 2^t - c_2 2^t + c_3 5^t \\ y_2(t) = c_1 2^t + c_3 5^t \\ y_3(t) = c_2 2^t + c_3 5^t \end{array}\right\} \ \forall\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

con c_1, c_2, c_3 $\in$ $\Re$. Obsérvese que la misma solución se obtiene poniendo:

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2^t & 0 & 0\\0 & 2^t & 0\\0 & 0 & 5^t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},$$

que corresponde a la fórmula matricial: $Y(t) = M\cdot J^t\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$.

Aplicando las condiciones iniciales dadas en el enunciado, resultará que:

$$\left.\begin{array}{c} y_1(0) = -c_1 - c_2 + c_3 = 1 \\ y_2(0) = c_1 + c_3 = 2 \\ y_3(0) = c_2 + c_3 = 3 \end{array}\right\}$$

, sistema que resuelto proporciona los valores: $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$.

De este modo, resultará que:

$$\left.\begin{array}{c} y_1(t) = -2^t + 2\cdot 5^t \\ y_2(t) = 2\cdot 5^t \\ y_3(t) = 2^t + 2\cdot 5^t \end{array}\right\}$$

A la vista de las ecuaciones anteriores, en que siempre $t \geq 0$, resulta evidente que la opción menos rentable es la primera, que será la que se suprimirá pese a tener una rentabilidad notable, lo cual queda corroborado a la vista del gráfico de las trayectorias temporales siguiente, en que se ha considerado la variable tiempo como continua teniendo en cuenta que el resultado se expresa diariamente y en el eje de abscisas el tiempo viene expresado en decenas de años:

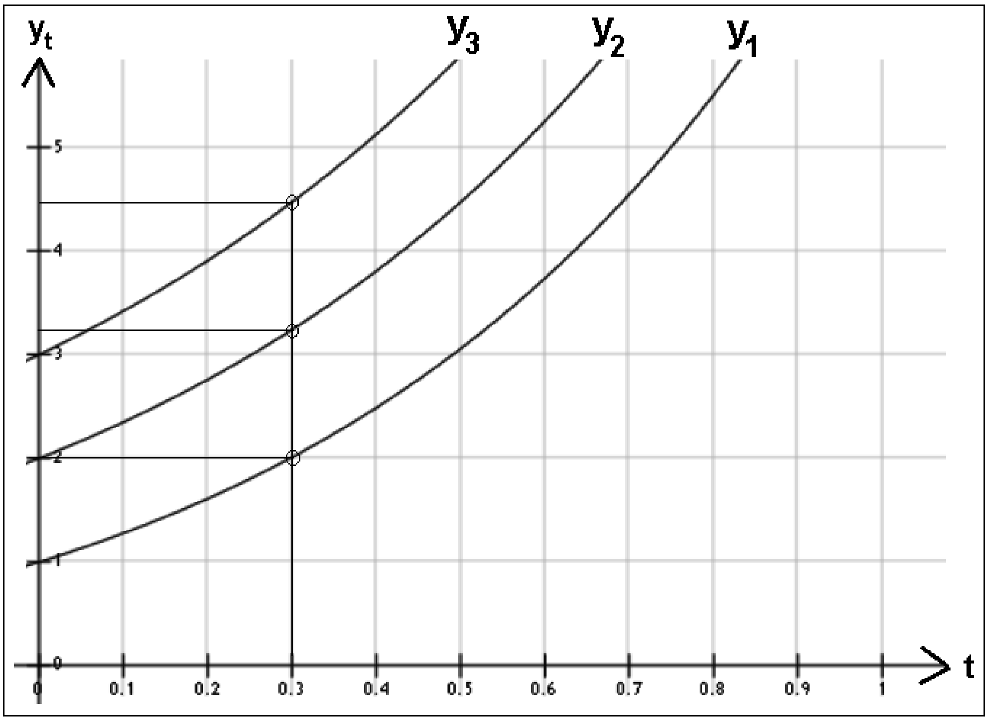


FIG. 13.3. Evolución temporal de los resultados contables (I).

A los tres años del inicio de la actividad empresarial, los resultados económicos anuales obtenidos por cada una de las tres empresas relacionadas, serán los siguientes:

$y_1(0'3) = 2'010 \cong 2.010$ €/día x 365 días/año = 733.650 €/año
$y_2(0'3) = 3'241 \cong 3.241$ €/día x 365 días/año = 1.182.965 €/año
$y_3(0'3) = 4'472 \cong 4.472$ €/día x 365 días/año = 1.632.280 €/año

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que:

$$\begin{cases} y_e = 3y_e + z_e + w_e \\ z_e = y_e + 3z_e + w_e \\ w_e = y_e + z_e + 3w_e \end{cases}$$

, o también:

$$\begin{cases} 2y_e + z_e + w_e = 0 \\ y_e + 2z_e + w_e = 0 \\ y_e + z_e + 2w_e = 0 \end{cases}$$

que constituye un sistema homogéneo, compatible y determinado, con la única solución trivial: $y_e = z_e = w_e = 0$.

Por otra parte, se presume también en los tres casos de las funciones de resultados y_1, y_2 e y_3 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si t → ∞ también y → ∞. Esto es: $m = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existe en todas ellas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

Ejemplo 4

Los resultados contables en el tiempo de sendas empresas interrelacionadas *u* y *v*, vienen dados por el sistema de ecuaciones recurrentes:

$$\left.\begin{array}{l} u_{t+1} - 6u_t - v_t = 0 \\ v_{t+1} + v_t + 12u_t = 0 \end{array}\right\},$$

con las condiciones iniciales: u(0) = v(0) = 1.000 € . Se pide averiguar en cuál de estas empresas resulta más seguro invertir.

Solución:

Para conseguir la eliminación, podemos proceder despejando v_t en la primera ecuación, con lo que: $v_t = u_{t+1} – 6u_t$, y también:

$v_{t+1} = u_{t+2} – 6u_{t+1}$, valores éstos que substituidos en la segunda ecuación ofrecen:

$$(u_{t+2} – 6u_{t+1}) + (u_{t+1} – 6u_t) + 12u_t = 0,$$

lo que permiten encontrar: $u_{t+2} – 5u_{t+1} + 6u_t = 0$, cuya ecuación característica es: $r_2 – 5r + 6 = 0$; de donde se obtienen las raíces: $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$, quedando configurada la solución general:

$$u_t = c_1 \cdot 3^t + c_2 \cdot 2^t,$$

y como $v_t = u_{t+1} – 6u_t$, se obtiene también que:

$$v_t = c_1 \cdot 3^{t+1} + c_2 \cdot 2^{t+1} – 6c_1 \cdot 3^t – 6c_2 \cdot 2^t = - c_1 \cdot 3^{t+1} – c_2 \cdot 2^{t+2}.$$

Se tiene, en definitiva, que:

$$\begin{cases} u_t = c_1 \cdot 3^t + c_2 \cdot 2^t \\ v_t = -c_1 \cdot 3^{t+1} - c_2 \cdot 2^{t+2} \end{cases}$$

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema planteado, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ v(0) = -3c_1 - 4c_2 = 1 \end{array}\right\} \text{ de donde se deduce que:}$$

$$3c_1 + 3c_2 = 3$$
$$-3c_1 - 4c_2 = 1$$

$$- c_2 = 4 \rightarrow \boxed{c_2 = - 4}$$

Y también: $c_1 = 1 + 4 = 5$, de lo que resulta el sistema:

$$\begin{cases} u_t = 5 \cdot 3^t - 4 \cdot 2^t \\ v_t = -5 \cdot 3^{t+1} + 4 \cdot 2^{t+2} = -5 \cdot 3 \cdot 3^t + 4 \cdot 2^2 \cdot 2^t = -15 \cdot 3^t + 16 \cdot 2^t \end{cases};$$

cantidades éstas que vendrán expresadas en miles de euros, y se ve que ya a partir del primer ejercicio económico, los resultados de la segunda empresa *v* son negativos, por lo que el inversor se decidirá preferentemente por la inversión en la primera empresa *u*, que siempre experimenta beneficios.

Obsérvese que para obtener las (h – 1) funciones eliminadas, no es necesario resolver nuevas ecuaciones, pues como se ha visto en el ejemplo, basta substituir la función obtenida al resolver la ecuación resultante.

NOTA: Es de advertir que la eliminación no se logra, en general, de forma tan sencilla como en la del ejemplo precedente. Por ese motivo, vamos a resolver la eliminación como sigue, haciendo uso del operador matricial E = I; entonces, el sistema del ejemplo anterior, se puede escribir así:

$$\begin{cases} (E - 6)u_t - v_t = 0 \\ 12u_t + (E + 1)\, v_t = 0 \end{cases}$$

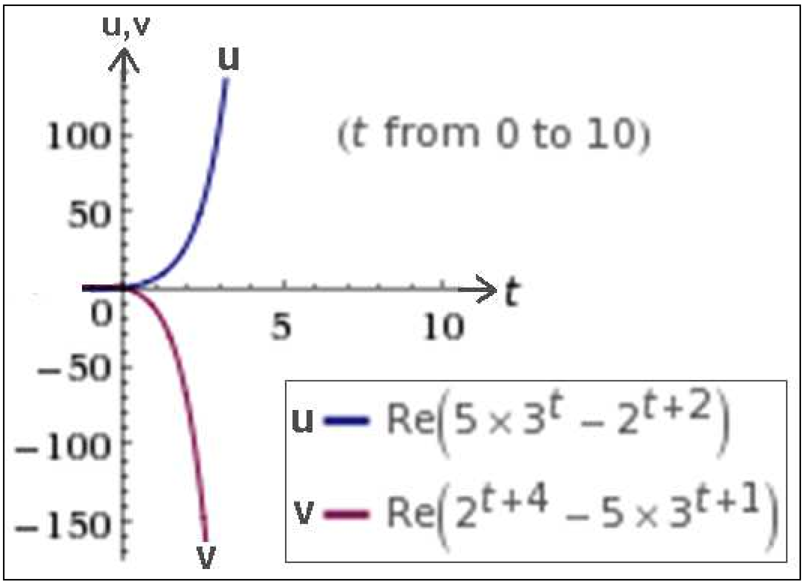
, o también:

$$\begin{cases} (E + 1)\,(E - 6)u_t - (E + 1)v_t = 0 \\ 12u_t + (E + 1)v_t = 0 \end{cases}$$

, de donde: $[(E + 1)\,(E - 6) + 12]u_t = 0$, o bien: $(E^2 - 5E + 6)u_t = 0$,

resultado éste que coincide con el anteriormente hallado y cuya aplicación es general a cualquier sistema lineal de coeficientes constantes.

La representación gráfica correspondiente será la siguiente:



A la vista de las ecuaciones anteriores, en que siempre t ≥ 0, resulta evidente que la opción más rentable es la primera, lo cual queda corroborado a la vista del gráfico de las trayectorias temporales anterior, en que se ha considerado la variable tiempo como continua[4] teniendo en cuenta que el resultado se expresa diariamente y en el eje de abscisas el tiempo viene expresado en decenas de años.

Para formar la trayectoria temporal del sistema, elaboraremos la siguiente tabla:

t	***u (€)***	***v (€)***
0	1	1
1	7	-13
2	29	-71
3	103	-277
…	…	…
+ ∞	+ ∞	- ∞

Entonces, la trayectoria temporal del sistema que nos ocupa, es la siguiente:

[4] Una *variable discreta* es una variable que sólo puede tomar valores dentro de un conjunto numerable, es decir, no acepta cualquier valor sino sólo aquellos que pertenecen al conjunto. En estas variables se dan, de modo inherente, separaciones entre valores observables sucesivos. Dicho ello con más rigor, se define una variable discreta como la variable que entre dos valores observables (potencialmente), hay por lo menos un valor no observable. Contrariamente, una *variable continua* puede tomar un valor cualquiera dentro de un intervalo predeterminado. Y siempre, entre dos valores observables, va a existir un tercer valor intermedio que también podría tomar la variable continua. Una variable continua toma valores a lo largo de un continuo, esto es, en todo un intervalo de valores. Un atributo esencial de una variable continua es que, a diferencia de una *variable discreta*, nunca puede ser medida con exactitud; el valor observado depende en gran medida de la precisión de los instrumentos de medición. Con una variable continua como el tiempo se produce, inevitablemente, un cierto error de medida.

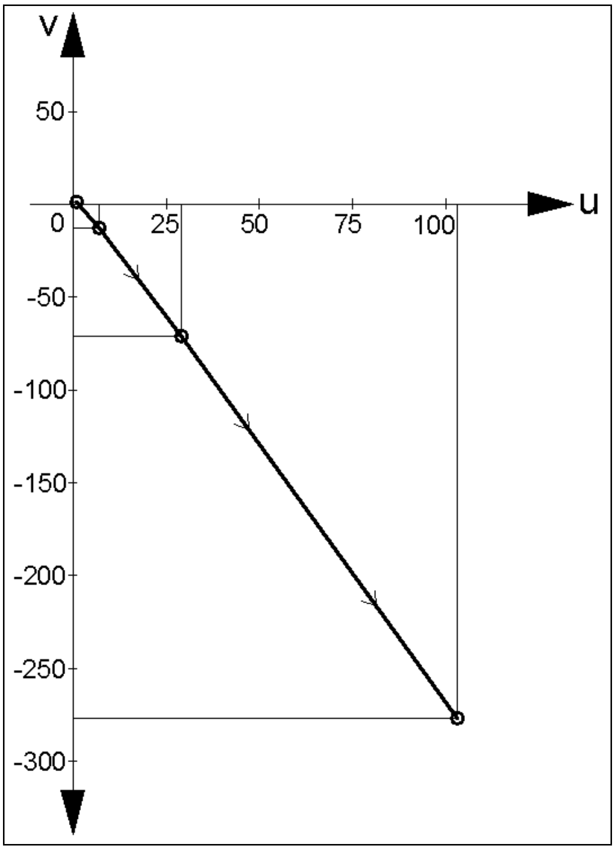


FIG. 13.4. Trayectoria temporal del sistema (II).

Ejemplo 5

Dos establecimientos comerciales de la misma empresa experimentan los resultados contables diarios medios que vienen dados por el sistema recurrente siguiente: $\begin{cases} 2u_{t+1} + v_{t+1} = u_t + 3v_t \\ u_{t+1} + v_{t+1} = u_t + v_t \end{cases}$. Se pretende:

a) averiguar el resultado contable anual neto del conjunto, si en el instante de su constitución los resultados brutos medios de ambas tiendas son de 1.000'00 €/día, considerando un calendario laboral de 240 días/año y una fiscalidad del 25%, y b) calcular la rentabilidad de la inversión si la creación de los establecimientos ha supuesto un montante de 1.500.000'00 € por cada uno de ellos.

Solución:

a) El sistema antedicho se puede escribir así, utilizando el operador simbólico E, del siguiente modo:

$$\begin{cases} (2E-1)u_t + (E-3)v_t = 0 \\ (E-1)u_t + (E-1)v_t = 0 \end{cases}$$

De donde: $[(E-1)(2E-1)-(E-3)(E-1)]u_t = 0$,

o bien: $(E-1)(E+2)u_t = 0 = (E^2 + E - 2)u_t$; o lo que es lo mismo:

$u_{t+2} + u_{t+1} - 2u_t = 0$; y la ecuación característica correspondiente será: $r^2 + r - 2 = 0$; de donde se deducen las raíces reales y distintas siguientes:

$$r_1 = 1;\ r_2 = -2.$$

Del mismo modo, restando la segunda ecuación de la primera en el sistema dado, se obtiene que:

$$u_{t+1} = 2v_t;\ v_t = \frac{u_{t+1}}{2};\ \text{esto es: } v_t = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{t+1}}{2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{6}(-2)^t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^t.$$

De aquí se concluye que:

$$\begin{cases} u_t = c_1 + c_2 \cdot (-2)^t \\ v_t = \frac{1}{2}c_1 - c_2(-2)^t \end{cases}; \text{ con las condiciones iniciales dadas: } \left. \begin{array}{l} u(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ v(0) = \frac{c_1}{2} - c_2 = 1 \end{array} \right\}$$

de donde se obtienen: $c_1 = \frac{4}{3}; c_2 = -\frac{1}{3}$; y entonces: $\begin{cases} u_t = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^t \\ v_t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^t \end{cases}$;

el resultado bruto del conjunto formado por ambos establecimientos comerciales será constantemente igual a:

$$\pi = u_t + v_t = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \text{ (2.000'00 €/día).}$$

La correspondiente tabla y representación gráfica de la trayectoria temporal del sistema serán las siguientes:

t	***u (€)***	***v (€)***	***u + v (€)***
0	1	1	2
1	2	0	2
2	0	2	2
3	4	-2	2
4	-4	6	2
5	12	-10	2
6	-20	22	2
…	…	…	2

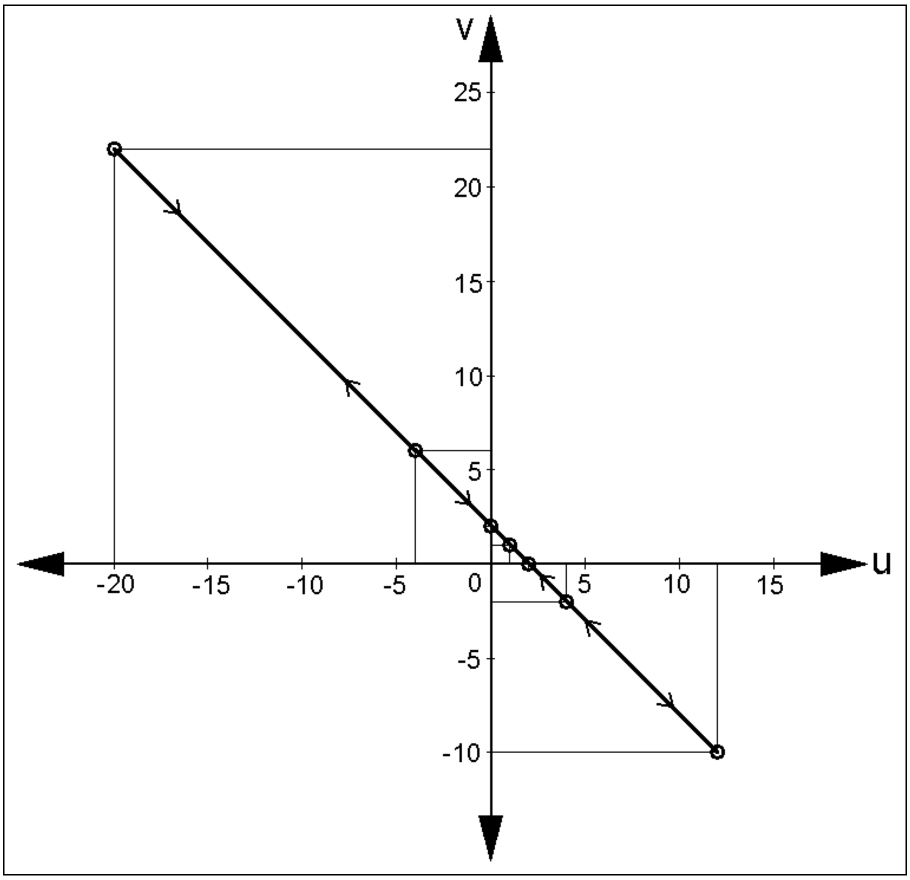


FIG. 13.5. Trayectoria temporal del sistema (III).

El resultado neto anual será, pues, de:

$$B = 0'75 \times \pi = 0'75 \times (2.000'00 \text{ €/día} \times 240 \text{ días/año}) = 360.000'00 \text{ €/año.}$$

b) Para calcular la relación beneficio/coste, procederemos así:

$$R = \frac{B}{I} = \frac{360.000}{2 \times 1.500.000} = 0'12 \equiv 12\% .$$

1.3. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

Un sistema lineal no homogéneo (o completo) de primer orden es el que tiene la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x+1) = a_{11}(x)\cdot y_1(x) + \ldots + a_{1n}(x)\cdot y_n(x) + b_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x+1) = a_{n1}(x)\cdot y_1(x) + \ldots + a_{nn}(x)\cdot y_n(x) + b_n(x) \end{array}\right\}$$

donde las funciones $b_1(x)$, …, $b_n(x)$ son sucesiones arbitrarias en la variable x. Con las mismas notaciones que para el caso homogéneo, y llamando b(x) a la sucesión vectorial siguiente:

$\begin{bmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}$, el sistema admite la representación matricial:

$$Y(x + 1) = A(x) \cdot Y(x) + b(x).$$

Dado el sistema anterior, llamaremos "sistema homogéneo asociado" al $Y(x+1) = A(x) \cdot Y(x)$, y, si la matriz $A(x)$ es constante (A), diremos que el sistema (homogéneo y no homogéneo) es de coeficientes constantes, independientemente de que el vector $b(x)$ sea o no constante.

Las propiedades que relacionan un sistema no homogéneo con el sistema homogéneo asociado son similares a las que ya hemos estudiado para las ecuaciones diferenciales, de tal forma que el camino que se sigue en la resolución de un sistema completo es paralelo al estudiado entonces.

Veamos lo anteriormente expuesto mediante la resolución de algunos ejercicios que juzgamos suficientemente representativos:

Ejemplo 1

Los resultados contables *y* en el tiempo de dos empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$\begin{cases} y_1(t + 1) = 2y_1(t) + y_2(t) + 3 \\ y_2(t + 1) = 2y_2(t) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que los resultados iniciales son nulos (no hay pérdidas ni ganancias), expresados en millones de euros, se trata de determinar los resultados de cada una de ellas en el cuarto año de su actividad económica.

Solución:

El sistema homogéneo asociado es el resuelto en un ejemplo anterior, tanto por el método del operador E como por el matricial, y la matriz fundamental correspondiente es la siguiente:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2^t & t \cdot 2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \quad \forall\, t = 0,1,2,3,\ldots$$

Busquemos ahora una solución particular $U(t)$ del sistema completo. En base al procedimiento de variación de las constantes, basta con tomar:

$$U(0) = 0; \; U(t) = A^t \sum_{k=0}^{t-1} (A^{-1})^{k+1} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obviamente: $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, y se demuestra sin dificultad (por inducción) que:

$$\begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a^t & -t{\cdot}a^{t-1} \\ 0 & a^t \end{bmatrix}$$, de donde se deduce que:

$$(A^{-1})^{k+1} = \frac{1}{4^{k+1}}\begin{bmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, también:

$$U(t) = A^t \sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} & -\frac{k+1}{4}\cdot\frac{1}{2^k} \\ 0 & \frac{1}{2^{k+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = A^t \sum_{k=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{2^{k+1}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que, por la fórmula general de la suma de los términos de una progresión geométrica, sabemos que:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^s = \frac{r^{s+1} - 1}{r - 1} \quad \text{si} \quad r \neq 1,$$ y se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{t-1} \frac{3}{2^{k+1}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^t} = \frac{\frac{3}{2^t}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -(\frac{3}{2^t} - 3) = 3\left[1 - \frac{1}{2^t}\right].$$ Luego:

$$U(t) = 3\begin{bmatrix} 2^t & x{\cdot}2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2^t} \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para t = 0, la expresión anterior da U(0) = 0, y, por tanto, es válida para cualquier t. Finalmente, la solución general buscada del sistema completo es:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 2^t & t{\cdot}2^{t-1} \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$ es decir:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 2^t + c_2 t \cdot 2^{t-1} + 3(2^t - 1) \\ y_2(t) &= c_2 2^t \end{aligned}\right\} \qquad \forall \; t = 0, 1, 2, \ldots$$

Puesto que inicialmente los resultados de ambas empresas son nulos, sucederá que:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(0) = c_1 = 0 \\ y_2(0) = c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

, y se tendrá la solución particular siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} y_1(t) = 3(2^t - 1) \\ y_2(t) = 0 \end{array}\right\}$$

En el cuarto año de la actividad económica, los resultados contables respectivos serán:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_1(0'4) = 3(2^{0'4} - 1) = 0'959 \text{ (958.524 €/año)} \\ y_2(0'4) = 0 \text{ €/año} \end{array}}$$

Al ser la $y_2(t)$ nula en todos los casos, es evidente que su trayectoria temporal se superpone con el eje de abscisas en sentido creciente, por lo que obviaremos su representación. Por otra parte, por lo que se refiere a $y_1(t)$ se presume la existencia de ramas parabólicas puesto que si $t \to \infty$ también $y \to \infty$.

Esto es: $m = \lim_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3(2^t - 1)}{t} = +\infty$, luego existe una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

A la vista de las ecuaciones anteriores, resulta que esta segunda empresa no obtiene, a lo largo de su trayectoria temporal (que se confunde o superpone con el eje de abscisas), ni beneficios ni pérdidas, lo cual queda corroborado a la vista del gráfico de las trayectorias temporales siguiente, en que se ha considerado la variable tiempo como continua teniendo en cuenta que el resultado se expresa en millones de euros y en el eje de abscisas el tiempo viene expresado en decenas de años:

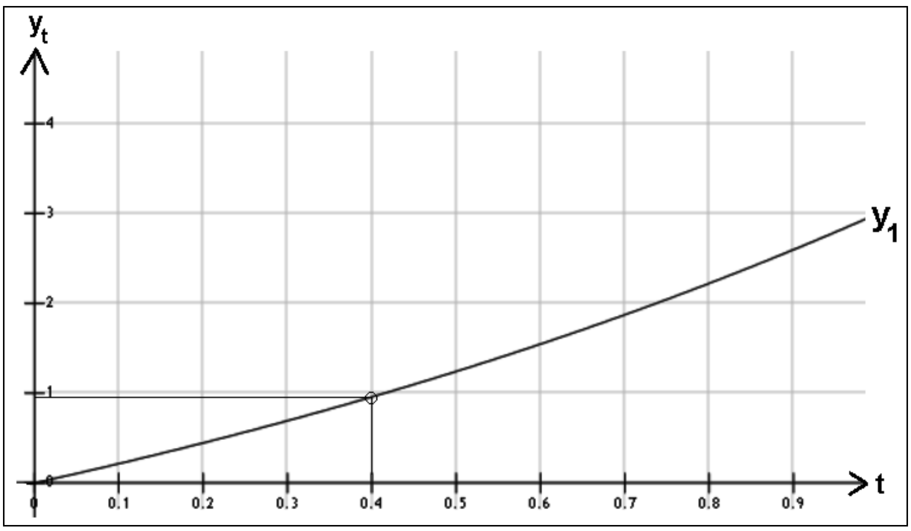


FIG. 13.6. Evolución temporal de los resultados contables (II).

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que:

$$\begin{cases} y_{1e} = 2y_{1e} + y_{2e} + 3 \\ y_{2e} = 2y_{2e} \end{cases}$$

y se deduce que: $y_{1e} = -3$, $y_{2e} = 0$.

Observaciones. Cuando la sucesión b(x) es constante (tal y como pasa en el ejemplo presente) se puede intentar ensayar una solución particular también constante del tipo:

$$U(x) = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2

Los resultados contables *y* en el tiempo de dos empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t + 1) = y_1(t) + 2y_2(t) + 1 \\ y_2(t + 1) = 2y_1(t) + y_2(t) - 1 \end{aligned}\right\}$$

Teniendo en cuenta que los resultados iniciales son nulos (no hay pérdidas ni ganancias), expresados en millones de euros, se trata de determinar los resultados comparativos de cada una de ellas en los cinco primeros años de su actividad económica.

Solución:

La matriz A es, en este caso: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, siendo -1 y 3 sus autovalores.

El subespacio de autovectores asociados al autovalor -1 es la variedad lineal generada por (1, -1), y el subespacio de autovectores asociados al autovalor 3 es la variedad lineal[5] generada por (1, 1). Por consiguiente, la solución general del sistema homogéneo asociado es:

[5] En Geometría y Álgebra lineal, una *variedad lineal* es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Geométricamente, es la generalización a cualquier número de dimensiones de las rectas y los planos. También es el concepto análogo al de subespacio vectorial en el ámbito de la Geometría Afín (es decir, una variedad lineal es la denominación correcta de lo que intuitivamente denominaríamos como "subespacio afín"). Por otra parte, el conjunto de soluciones de un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas tiene una interpretación geométrica, ya que se puede considerar como una variedad lineal del espacio. La dimensión de la variedad lineal coincide con el número de grados de libertad del conjunto de soluciones. El sistema de ecuaciones lineales se dice que es una ecuación cartesiana de la variedad lineal formada por el conjunto de sus soluciones. Así, por ejemplo, un sistema de una ecuación lineal con tres incógnitas, cuyo conjunto de soluciones tenga dos grados de libertad, sería la ecuación cartesiana de una variedad lineal de dimensión dos (es decir, un plano) del espacio de dimensión tres. De modo análogo, un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, cuyo conjunto de soluciones tenga un grado de libertad será la ecuación cartesiana de una variedad lineal

$c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(-1)^t + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}3^t$. Puesto que $b(t)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ es constante, busquemos también una solución particular del tipo: $U(t)=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}$. Deberá verificarse, entonces, que:

$$\left.\begin{array}{l}k_1 = k_1 + 2k_2 + 1\\ k_2 = 2k_1 + k_2 - 1\end{array}\right\}$$

, de donde: $U(t)=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$ es, efectivamente, una solución particular. La solución general del sistema no homogéneo planteado es la siguiente:

$$Y(t)=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}(-1)^t\\(-1)^{t+1}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3^t\\3^t\end{bmatrix}.$$

Es decir, que la solución general del sistema recurrente inhomogéneo buscada, vendrá dada por:

$$\left\{\begin{array}{l}y_1(t) = ½ + c_1\cdot(-1)^t + c_2\cdot 3^t\\ y_2(t) = -½ + c_1\cdot(-1)^{t+1} + c_2\cdot 3^t = -½ - c_1\cdot(-1)^t + c_2\cdot 3^t\ ;\end{array}\right.$$

de este modo, también se cumple que: $y_1(t) + y_2(t) = 2c_2\cdot 3^t$.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l}y_1(0) = (1/2) + c_1 + c_2 = 0\\ y_2(0) = -(1/2) - c_1 + c_2 = 0\end{array}\right\}$$

Del anterior sistema de ecuaciones dedúcense los valores:

$c_1 = -(1/2)$; $c_2 = 0$, y las trayectorias temporales de los resultados contables de ambas empresas serán las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}y_1(t) = ½ - ½\cdot(-1)^t\\ y_2(t) = -½ + ½\cdot(-1)^t\end{array}\right\}$$

De este modo, podemos elaborar sin mayores problemas la siguiente tabla:

de dimensión uno (es decir, una recta) del espacio. Cuando un sistema con *n* incógnitas es compatible determinado, se puede interpretar como la ecuación cartesiana de un punto (el que tiene por coordenadas los números correspondientes a la solución única), que podría entenderse, por tanto, como una variedad lineal de dimensión 0, ya que posee cero grados de libertad, puesto que en su expresión no interviene ningún parámetro.

t	y_1 (10^6 €)	y_2 (10^6 €)
0	0	0
1	1	-1
2	0	0
3	1	-1
4	0	0
5	1	-1

, de la que se observa que los resultados son oscilantes alrededor del eje de abscisas, aunque la primera empresa obtiene resultados más favorables que la segunda, que los obtiene nulos o bien con pérdidas.

Para hallar los puntos de equilibrio, por otra parte, obsérvese que:

$$\begin{cases} y_{1e} = y_{1e} + 2y_{2e} + 1 \\ y_{2e} = 2y_{1e} + y_{2e} - 1 \end{cases}$$

, de donde dedúcese que: $y_{1e} = ½$ (500.000 €); $y_{2e} = -1/2$ (-500.000 €).

La representación gráfica correspondiente será la siguiente:

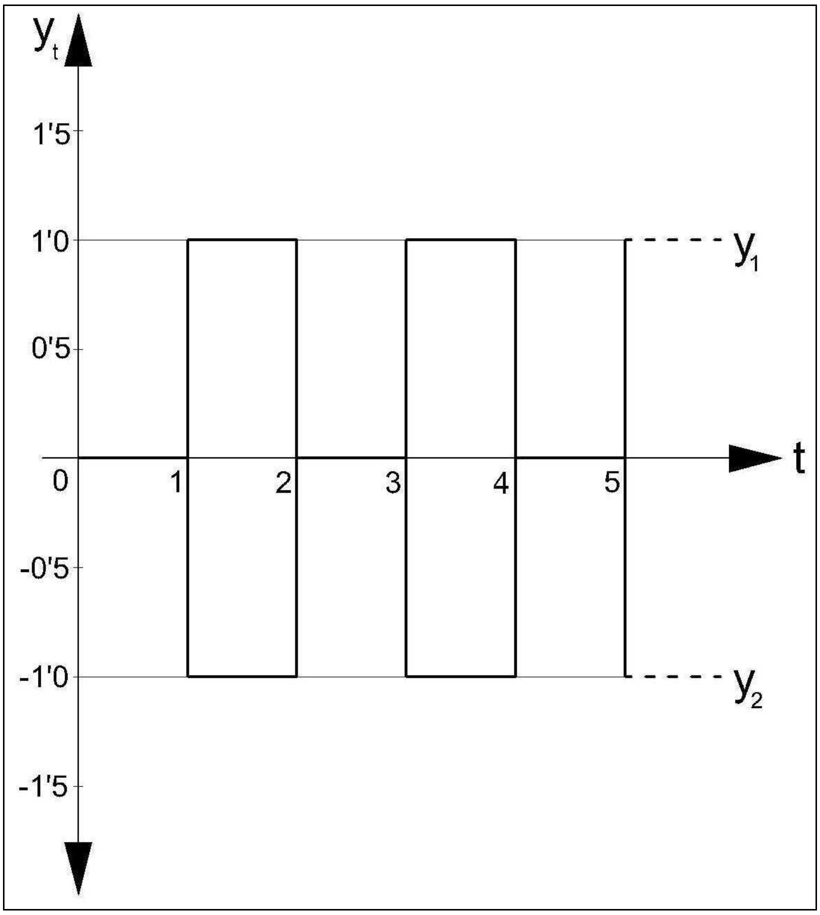


FIG. 13.7. Evolución temporal de los resultados contables (III).

Ejemplo 3

Sean dos bienes complementarios[6], 1 y 2, en un mercado cuyos precios *y* conforman el sistema recurrente siguiente:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t+1) &= 0'4\, y_1(t) + 0'6\, y_2(t) + 6 \\ y_2(t+1) &= 0'1\, y_1(t) + 0'3\, y_2(t) + 5 \end{aligned}\right\}, \text{con las condiciones iniciales}: \left.\begin{aligned} y_1(0) &= 14 \\ y_2(0) &= 23 \end{aligned}\right\}$$

o sea, debe entenderse que inicialmente sucede que: $y_1(0)$ = 14'00 €/ud. e $y_2(0)$ = 23'00 €/ud. Se trata: a) de resolver este sistema de ecuaciones en diferencias finitas representando gráficamente las trayectorias temporales correspondientes y la del sistema, y b) de calcular la elasticidad cruzada correspondiente de la demanda del bien 2 si en el período que va de t = 3 a t = 9 su demanda aumenta de 400 a 500 ud. diarias.

Solución:

a) El sistema dado, expresado en forma matricial, ofrece la siguiente configuración:

$$Y_{t+1} = \begin{pmatrix} 0'4 & 0'6 \\ 0'1 & 0'3 \end{pmatrix} Y_t + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'4 & 0'6 \\ 0'1 & 0'3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'4\, y_1(t) + 0'6\, y_2(t) \\ 0'1\, y_1(t) + 0'3\, y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix},$$

con los valores iniciales: $Y_0 = \begin{pmatrix} 14 \\ 23 \end{pmatrix}$.

[6] En mercadotecnia y microeconomía, un *bien complementario* es un bien que depende de otro y éste, a su vez, depende del primero. Debido a esta relación, cuando sube el precio de uno de los bienes, disminuye la demanda del otro. Entre los factores que determinan la demanda de un producto se encuentra el precio de los otros productos. Según como sea esta influencia, se distinguen *bienes complementarios* y *bienes sustitutivos*. Dos bienes son complementarios perfectos cuando ambos tienen que ser usados o consumidos de manera simultánea; el ejemplo más típico que se suele presentar es el de los zapatos del pie izquierdo y los zapatos del pie derecho: de ambos bienes se dice que son complementarios perfectos en tanto en cuanto no se utiliza un zapato derecho sin, a la vez, usar también un zapato del pie izquierdo. La característica más importante de estos bienes es que el usuario prefiere consumirlos en proporciones fijas. Técnicamente los bienes complementarios perfectos se reconocen por sus curvas de indiferencia que tienen forma de "L" o, lo que es lo mismo, forman un ángulo recto. En el mundo real, casi ningún bien es complementario perfecto de otro. Lo más normal es que las curvas de indiferencia están combadas hacia dentro, pero no tanto como para constituir auténticos ángulos rectos. El grado de complementariedad entre dos bienes no tiene por qué ser mutuo o comportarse para los bienes por igual en ambos sentidos. En el caso, por ejemplo, de los videojuegos, un juego específico es un bien complementario para un determinado tipo de videoconsola (bien base), pero no funciona en sentido contrario, porque la videoconsola no tiene por qué ser usada con ese juego específico y concreto.

Para hallar los puntos de equilibrio se procede así:

$$\left.\begin{array}{l} y_{1e} = 0'4y_{1e} + 0'6y_{2e} + 6 \ ;\ 0'6y_{1e} = 0'6y_{2e} + 6 \\ y_{2e} = 0'1y_{1e} + 0'3y_{2e} + 5 \ ;\ 0'7y_{2e} = 0'1y_{1e} + 5 \end{array}\right\}$$

$6y_{1e} = 6y_{2e} + 60$; $7y_{2e} = y_{1e} + 50$; $y_{1e} = 7y_{2e} – 50$; $42y_{2e} – 300 = 6y_{2e} + 60$;

$36y_{2e} = 360$; $y_{2e} = 10$ €/ud. ; $y_{1e} = 70 – 50 = 20$ €/ud.,

lo que determina ambos puntos de equilibrio.

La ecuación característica de la matriz del sistema está dada por: $\lambda^2 – 0'7\lambda + 0'06 = 0$, de lo que resulta que:

$\lambda = \dfrac{0'7 \pm \sqrt{0'49 - 0'25}}{2} = \dfrac{0'7 \pm 0'5}{2}$, que tiene dos raíces reales, a saber: $\lambda_1 = 0'6$ y $\lambda_2 = 0'1$, con los vectores propios asociados:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema homogéneo es, pues:

$$Y_t^h = C_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}0'6^t + C_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}0'1^t.$$

Por otro lado, la solución particular Y_t^p ha de responder al patrón $Y^p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Para calcular los valores a y b, sustituimos en el sistema propuesto en el enunciado del problema planteado, de tal manera que:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'4 & 0'6 \\ 0'1 & 0'3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Haciendo el producto matricial e igualando componentes, resultará que:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 0'4a + 0'6b + 6 \\ b = 0'1a + 0'3b + 5 \end{array}\right.$$

, de donde se obtiene que: a = 20 y b = 10.

La solución general del sistema completo propuesto es, entonces, la siguiente:

$$Y_t = Y^h{}_t + Y^p{}_t = C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}0'6^t + C_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}0'1^t + \begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}.$$

Utilizando, ahora, los valores iniciales dados en el enunciado del problema planteado: $Y_0 = \begin{pmatrix}14\\23\end{pmatrix}$ para hallar el valor de las constantes C_1 y C_2, se tiene que la solución general del sistema, para el momento t = 0, se reduce a la expresión:

$$\begin{pmatrix}14\\23\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}0'6^0 + C_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}0'1^0 + \begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}.$$

Es decir: $\begin{cases}14 = 3C_1 - 2C_2 + 20\\ 23 = C_1 + C_2 + 10\end{cases}.$

Resolviendo simultáneamente sucede que: $C_1 = 4$ y $C_2 = 9$.

Finalmente, se obtiene que: $\begin{cases}y_{1t} = 12(0'6)^t - 18(0'1)^t + 20\\ y_{2t} = 4(0'6)^t + 9(0'1)^t + 10\end{cases}$

A continuación se muestra la representación gráfica de los precios y_{1t} e y_{2t}, así como la trayectoria temporal del sistema y la tabla de valores correspondiente. Esto es:

t	***y₁ (€ /ud.)***	***y₂ (€ /ud.)***
0	14’00	23’00
1	25’40	13’30
2	24’14	11’53
3	22’57	10’87
4	21’55	10’52
5	20’93	10’31
6	20’56	10’19
7	20’34	10’11
8	20’20	10’07
9	20’12	10’04
10	20’07	10’02
…	…	…
+ ∞	20’00	10’00

Nótese que al ser el valor de ambas raíces positivo y también menor que uno, las trayectorias serán convergentes hacia el respectivo punto de equilibrio y carentes de oscilaciones, tal como puede comprobarse en las gráficas adjuntas:

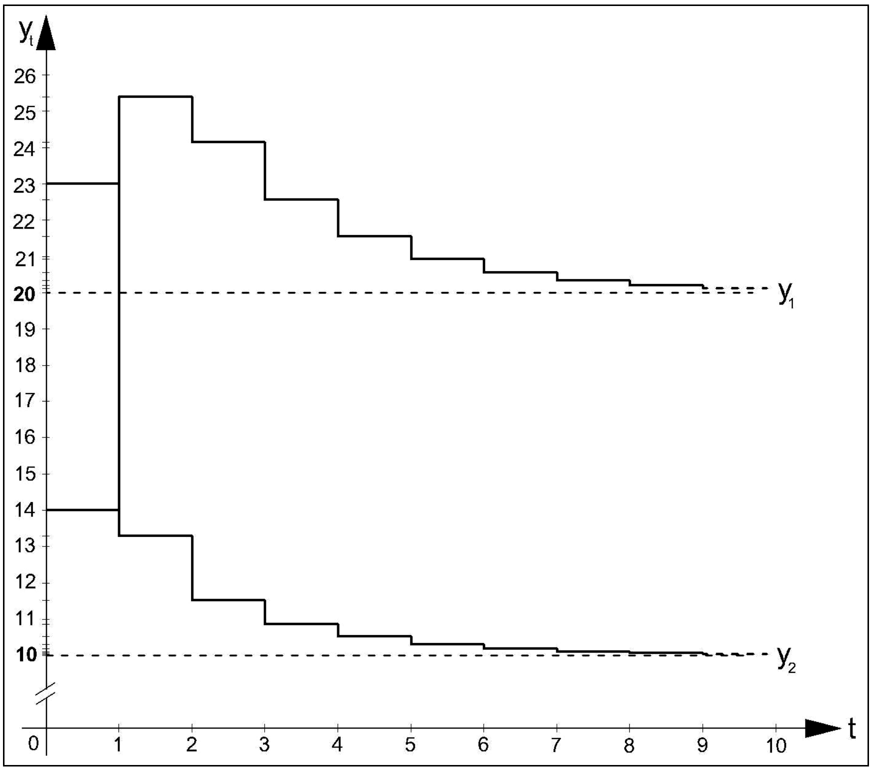


FIG. 13.8. Evolución temporal de los precios (II).

Por otra parte, la trayectoria temporal del sistema planteado será la siguiente:

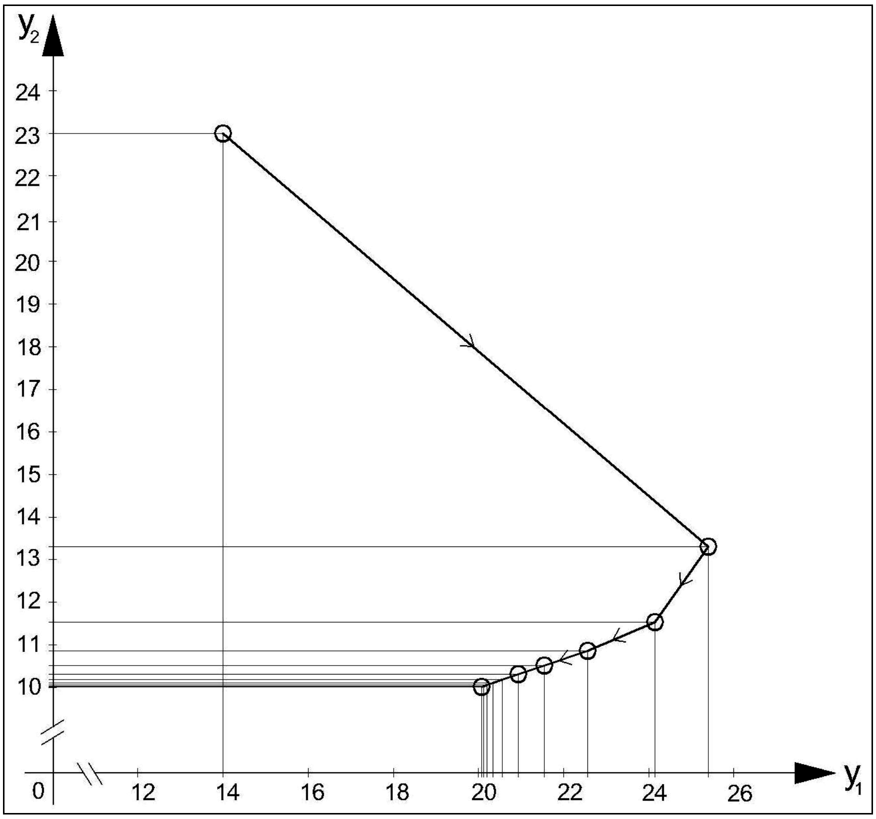


FIG. 13.9. Trayectoria temporal del sistema (IV).

b) El proceso en cuestión se puede representar esquemáticamente del siguiente modo:

Bien 1 $\Rightarrow$ P: P_1 = 22'57 €/ud. $\rightarrow$ P_2 = 20'12 €/ud.
Bien 2 $\Rightarrow$ Q: Q_1 = 400 ud./día $\rightarrow$ Q_2 = 500 ud./día

La elasticidad cruzada de la demanda es una medida negativa (en este caso, por tratarse de bienes complementarios, en contraposición con los bienes sustitutivos en que dicha elasticidad resulta positiva) de sensibilidad de la demanda de un cierto bien ante el cambio en el precio de un bien complementario, *ceteris paribus*[7].

Se determina así:

$$E_c = \frac{(Q_2 - Q_1)\times(P_2 + P_1)}{(Q_2 + Q_1)\times(P_2 - P_1)} = \frac{(500-400)\times(20'12+22'57)}{(500+400)\times(20'12-22'57)} = -\frac{4.269}{2.205} \approx -1'94,$$

con lo que queda resuelto el problema planteado.

Ejemplo 4

Los resultados contables anuales en el tiempo de dos empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$\left.\begin{array}{l} x_{t+1} = 3x_t - y_t + 1 \\ y_{t+1} = -x_t + 2y_t + 3 \end{array}\right\}$$

, mientras que una tercera empresa del mismo *holding* tiene los resultados: $z_t = 5^t + 80$. Teniendo en cuenta que los resultados iniciales de las dos primeras son: $x_0 = 150$ e $y_0 = 325$, expresados en miles de euros, se trata de determinar los resultados comparativos de cada una de ellas en los dos primeros años de su actividad económica, así como del conjunto del *holding*, con las representaciones gráficas pertinentes referidas al primer quinquenio.

[7] Expresión latina que significa "todo lo demás constante o igual". En economía, *ceteris paribus* constituye un recurso metodológico que se utiliza para aislar la influencia que alguna variable en particular ejerce sobre un fenómeno que esté condicionado por muchos factores. Suponiendo que todos estos factores no cambian, es posible analizar por separado la acción de la variable en cuestión sobre el fenómeno estudiado. Por ejemplo, la demanda de televisores depende del precio de los mismos, de la renta disponible de las personas, del precio de otros bienes, de los gustos del consumidor, etc., variables todas ellas que determinan en forma simultánea la demanda de dicho bien. Para conocer el efecto sobre la demanda de televisores de un cambio en el precio, se supone que todas las demás variables permanecen constantes o *ceteris paribus*, consiguiendo de este modo aislar analíticamente la influencia de la variable precio sobre la cantidad demandada de televisores. Sin embargo, hay que hacer notar que esto no es más que un instrumento metodológico, y no una descripción de la realidad. En definitiva, se trata de un supuesto económico desarrollado por Alfred Marshall, el cual implica que en un análisis económico todas las variables que puedan afectar el fenómeno estudiado permanecen constantes.

Solución:

Para encontrar el valor x_t e y_t procedemos de la manera siguiente: en la primera de las ecuaciones reseñadas, esto es:

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - y_{t+1} + 1,$$

substituimos la segunda de las ecuaciones en la expresión anterior, o sea:

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} - (- x_t + 2y_t + 3) + 1 = 3x_{t+1} + x_t - 2y_t - 2,$$

que sigue dependiendo de y_t, pero podemos despejarlo de la primera de las ecuaciones y substituir este valor en la ecuación anterior, obteniéndose:

$$x_{t+2} = 3x_{t+1} + x_t - 2(-x_{t+1} + 3x_t + 1) - 2 = 5x_{t+1} - 5x_t - 4,$$

que es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes, que también puede ser escrita así:

$$\boxed{x_{t+2} - 5x_{t+1} + 5x_t = -4}. \qquad (1)$$

Es fácil ver que las raíces de la ecuación característica de su ecuación homogénea son:

$$r^2 - 5r + 5r = 0;\ r = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ donde: } r_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea:

$$x_t^* = k_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + k_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t.$$

Para encontrar ahora una solución particular de la solución completa, al ser el término independiente una constante, ensayamos con $x_p = a$. Substituyendo en la ecuación recurrente (1) obtendremos que:

$$a - 5a + 5a = -4 \Rightarrow a = -4,$$

y la solución general de la ecuación completa será, como siempre, la siguiente:

$$\boxed{x_t = x_t^* + x_p = k_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + k_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 4}.$$

Ahora, tendremos que substituir en la primera de las ecuaciones del sistema, esto es:

$$y_t = -x_{t+1} + 3x_t + 1 = -k_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - k_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} + 4 + 3k_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{t} +$$

$$+3k_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{t} - 12 + 1.$$

Y simplificando, resulta que:

$$y_t = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)k_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{t} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)k_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{t} - 7\,.$$

Para encontrar los valores de las constantes k_1 y k_2, imponemos las condiciones iniciales dadas en el enunciado del problema, con lo que:

$$\begin{cases} 150 = k_1 + k_2 - 4 \\ 325 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot k_1 + \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot k_2 - 7, \end{cases}$$

o también:

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 154 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)k_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)k_2 &= 332 \end{aligned}\right\}$$, que es un sistema de ecuaciones lineales heterogéneo, compatible y determinado, que puede resolverse por aplicación de la regla de Cramer (aunque también por el método de la inversión de la matriz o el de triangularización de Gauss-Jordan), con lo que:

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 154 & 1 \\ 332 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix}} = \frac{77 + 77\sqrt{5} - 332}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = 77 - \frac{255}{\sqrt{5}} = 77 - 51\sqrt{5}\,,$$

Y del mismo modo, se tendrá que:

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 154 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 332 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix}} = \frac{332 - 77 + 77\sqrt{5}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = 77 + \frac{255}{\sqrt{5}} = 77 + 51\sqrt{5}\ .$$

Y las soluciones obtenidas son: $k_1 = 77 - 51\sqrt{5}$ y $k_2 = 77 + 51\sqrt{5}$. En consecuencia, la solución particular para estas condiciones iniciales es, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(77-51\sqrt{5}\right)}{2} = \frac{77 - 51\sqrt{5} - 77\sqrt{5} + 255}{2} = \frac{332 - 128\sqrt{5}}{2} = 166 - 64\sqrt{5}\text{ , y:}$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(77+51\sqrt{5}\right)}{2} = \frac{77 + 51\sqrt{5} + 77\sqrt{5} + 255}{2} = \frac{332 + 128\sqrt{5}}{2} = 166 + 64\sqrt{5}\text{ ,}$$

, la siguiente:

$$x_t = \left(77 - 51\sqrt{5}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(77 + 51\sqrt{5}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 4;$$

$$y_t = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(77 - 51\sqrt{5}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(77 + 51\sqrt{5}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7 =$$

$$= \left(166 - 64\sqrt{5}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^t + \left(166 + 64\sqrt{5}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^t - 7.$$

Resultan, en definitiva, las siguientes expresiones operativas:

$$\begin{cases} x_t = -37'04 \times 3'618^t + 191'04 \times 1'382^t - 4 \\ y_t = 22'89 \times 3'618^t + 309'11 \times 1'382^t - 7 \\ x_t + y_t = -\,14'15 \times 3'618^t + 500'15 \times 1'382^t - 11 \\ S_t = x_t + y_t + z_t = -\,14'15 \times 3'618^t + 500'15 \times 1'382^t + 5^t + 69 \end{cases}$$

En el cuadro siguiente se muestran los resultados contables anuales y del bienio analizado de las tres empresas, habiendo añadido también los resultados extraordinarios correspondientes al inicio de su actividad económica. De aquí se deduce el mejor comportamiento de la empresa *y* y el peor de la empresa *x*, que en el 2º ejercicio experimenta pérdidas, pues ya anula sus resultados contables a partir del instante en que t = 1'692 años.

	t = años			Bienio acumulado
€	**0**	**1**	**2**	
x_t	150.000	126.007	- 123.979	152.028
y_t	325.000	503.006	883.005	1.711.011
z_t	81.000	85.000	105.000	271.000
S_t	556.000	714.013	864.026	2.134.039

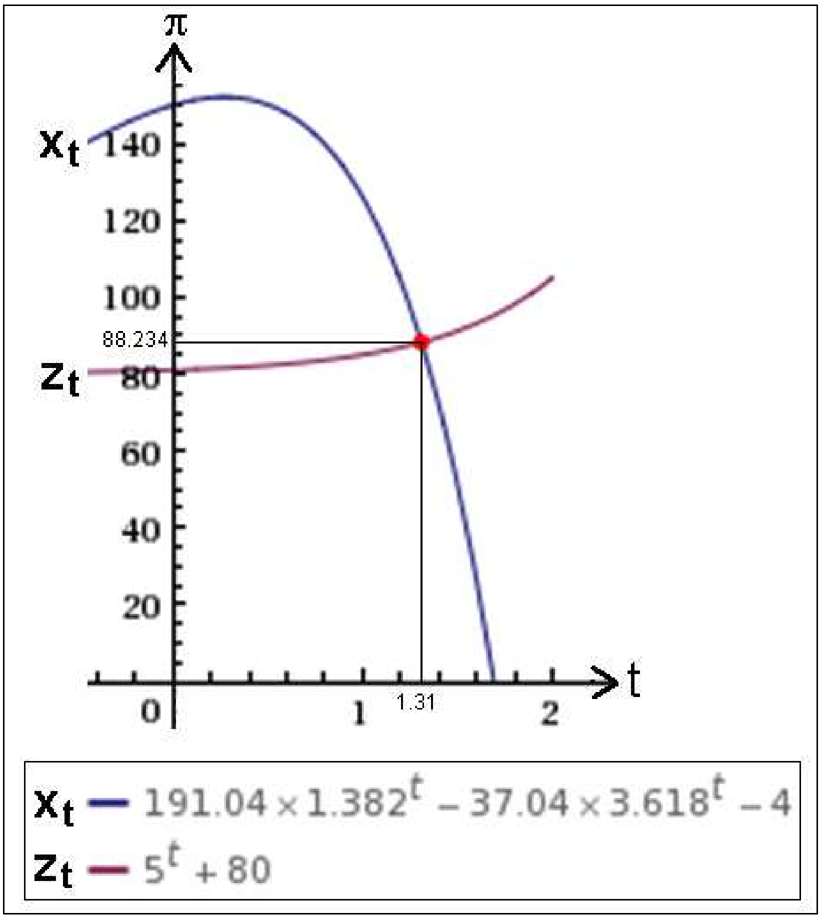
También es curioso constatar que en el año t = 1'30993, las empresas *x* y *z* alcanzan los mismos resultados contables por importe de 88.234 € , puesto que igualando sus respectivas ecuaciones:

$$-37'04 \times 3'618^t + 191'04 \times 1'382^t - 4 = 5^t + 80;$$

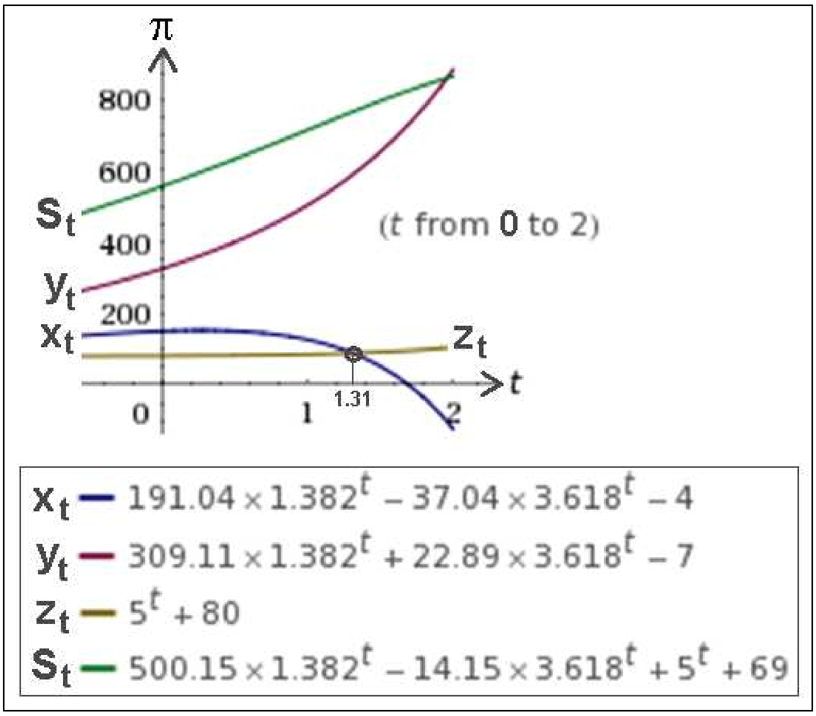
que ofrece la raíz positiva t = 1'30993, lo que supone unos resultados contables de:

$$\pi = 5^{1'30993} + 80 = 88'234 \approx 88.234 \text{ €} ,$$

según puede verse detalladamente también en la siguiente gráfica:



Por último, las correspondientes representaciones gráficas referidas al primer bienio son:



Para hallar los puntos de equilibrio en el caso de las dos primeras empresas, habrá que resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_e = 3x_e - y_e + 1 \\ y_e = -x_e + 2y_e + 3 \end{cases}$$

, de donde se deduce que: $y_e = 2x_e + 1 = -x_e + 4x_e + 2 + 3 = 3x_e + 5$,

con lo que: $x_e = -4$ (4.000 € de pérdidas) e $y_e = -7$ (7.000 € de pérdidas).

Resulta, en definitiva, la siguiente tabla de valores en el tiempo para el primer quinquenio de la actividad económica del terceto empresarial que nos ocupa:

t	***x_t* (€)**	***y_t* (€)**	***z_t* (€)**	***S_t* (€)**
0	150'000	325'000	81'000	556'000
1	126'007	503'006	85'000	714'013
2	-123'979	883'005	105'000	864'026
3	-1.253'94	1.892'96	205'000	844'020
4	-5.653'78	5.042'69	705'000	93'910
5	-22.003'1	15.741'5	3.205'000	-3.056'60

, a la que corresponde la siguiente representación gráfica:

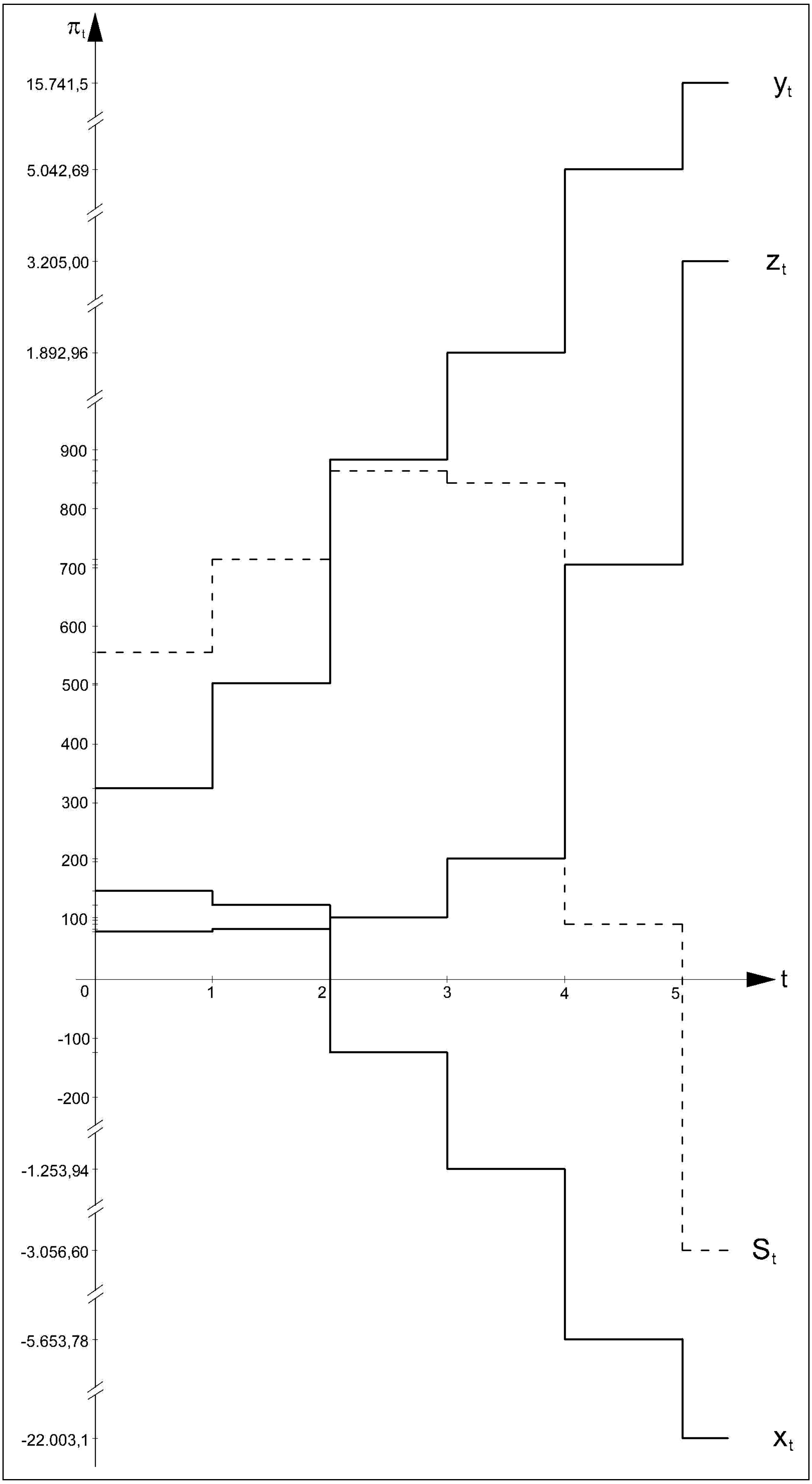


FIG. 13.10. Evolución temporal de los resultados contables (IV).

Es evidente, por otra parte, que las pérdidas registradas por la empresa *x* arrastran a la obtención de resultados negativos para el conjunto del *holding* a partir del quinto año, por lo que procede efectuar la reconversión o cierre de aquella empresa.

Ejemplo 5

Sean dos comercios, 1 y 2, cuyos resultados contables brutos, expresados en miles de euros *y* conforman el sistema recurrente siguiente:

$y(t + 1) = A(t)\cdot y(t) + b(t)$, donde: $A(t)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$; $b(t)=\begin{pmatrix}6^t\\ 9\end{pmatrix}$; $y(0)=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

o sea, debe entenderse que inicialmente sucede que: $y_1(0)$ = 1.000 € e $y_2(0)$ = 1.000 € . Se trata de resolver este sistema de ecuaciones en diferencias finitas, válido hasta el cuarto ejercicio económico, representando gráficamente las trayectorias temporales correspondientes a los resultados contables netos (con una fiscalidad del 25%) y la del sistema.

Solución:

Como consecuencia tenemos el sistema no homogéneo siguiente expresado en forma matricial:

$\begin{pmatrix}y_1(t+1)\\ y_2(t+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6^t\\ 9\end{pmatrix}$, con $y_1(0) = y_2(0) = 1$; o sea:

$$\begin{cases} y_1(t+1)=3y_1(t)+y_2(t)+6^t \\ y_2(t+1)=3y_2(t)+9 \end{cases}.$$

Usando ahora el algoritmo de Putzer obtenemos que:

$$A^t=\begin{pmatrix}3^t & t\cdot 3^{t-1}\\ 0 & 3^t\end{pmatrix}.$$

Esto mismo también puede ser probado por el procedimiento clásico de inducción, pues las sucesivas potencias de la matriz A(t) implicarían el siguiente valor de la potencia t-ésima (tomando los términos $a_{11} = a_{22} = a = 3$):

$$A(t)=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \qquad \left.\begin{aligned} A^2(t)&=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \\ A^3(t)&=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \\ A^4(t)&=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A^t(t)&=\begin{pmatrix} a^t & t\cdot a^{t-1} \\ 0 & a^t \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

, con lo que para a = 3: $A^t(t)=\begin{pmatrix} 3^t & t\cdot 3^{t-1} \\ 0 & 3^t \end{pmatrix}$, c. s. q. d., para todo $t \in \mathbb{N}$, luego tenemos que la solución particular y(t) viene dada, por el método de variación de parámetros, del siguiente modo:

$$y(t)=\begin{pmatrix} 3^t & t3^{t-1} \\ 0 & 3^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\sum_{i=0}^{t-1}\begin{pmatrix} 3^{t-i-1} & (t-i-1)3^{t-i-2} \\ 0 & e^{t-r-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6^i \\ 9 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3^t+t3^{t-1} \\ 3^t \end{pmatrix}+\sum_{i=0}^{t-1}\begin{pmatrix} 3^{t-1}2^i+(t-i-1)3^{t-i} \\ 3^{t-i+1} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3^t+t3^{t-1} \\ 3^t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6^t/3-3^{t-1}+\left(21-3^{t+1}(7-2t)\right)/4 \\ \left(3^{t+2}-9\right)/2 \end{pmatrix}; \text{ o sea:}$$

$$\begin{cases} y_1(t)=3^t+t\cdot 3^{t-1}+\dfrac{6^t}{3}-3^{t-1}+\dfrac{21-3^{t+1}(7-2t)}{4} \\ y_2(t)=3^t+\dfrac{3^{t+2}-9}{2} \end{cases}$$

Para hallar los precios de equilibrio se procede así:

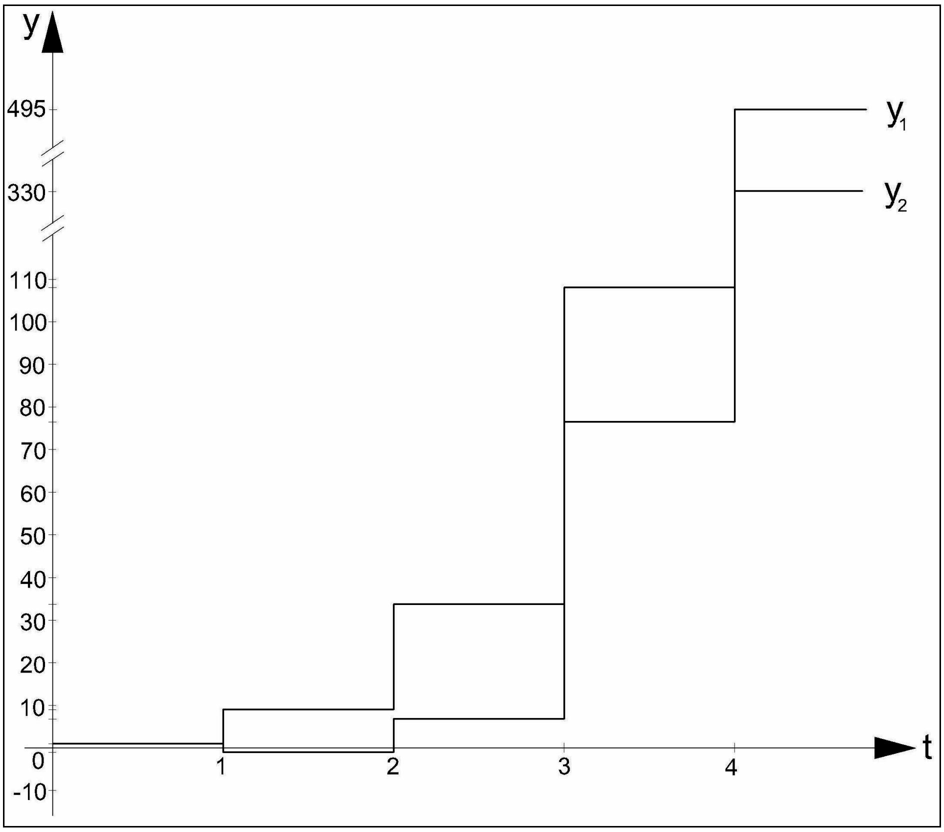
$$\begin{cases} y_{1e}=3y_{1e}+y_{2e}+6^t \\ y_{2e}=3y_{2e}+9 \end{cases}$$

, lo que ofrece como resultados: y_{1e} = $(\frac{9}{4}-\frac{6^t}{2})$ € , que está en función del instante temporal analizado, mientras que; y_{2e} = $-\frac{9}{2}$ ≡ - 4.500 € (pérdidas).

Resulta, en definitiva, la siguiente tabla de valores en el tiempo de los resultados contables de ambos comercios, para el primer cuatrienio de su actividad económica (como puede verse, el primer comercio experimenta pérdidas en el primer ejercicio):

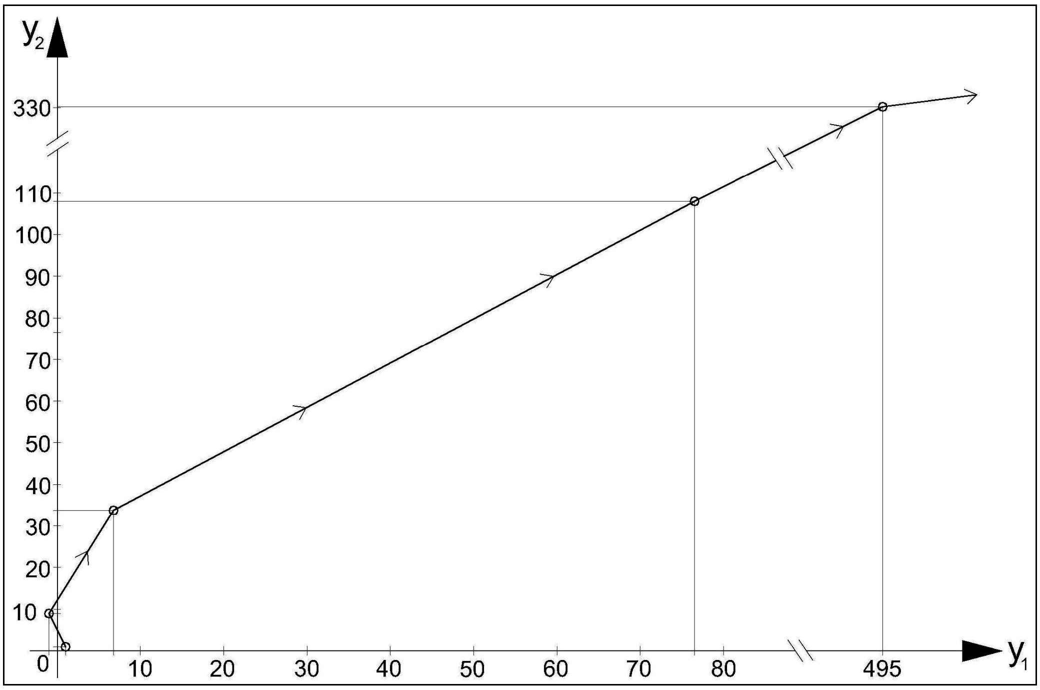
	RESULTADOS BRUTOS		RESULTADOS NETOS	
t	***y_1 (€)***	***y_2 (€)***	***y_1 (€)***	***y_2 (€)***
0	1.000	1.000	1.000	1.000
1	-1.000	12.000	-1.000	9.000
2	9.000	45.000	6.750	33.750
3	102.000	144.000	76.500	108.000
4	660.000	441.000	495.000	330.750

, a la que corresponde la siguiente gráfica de los resultados contables netos de ambos establecimientos comerciales[8]:



, con la siguiente trayectoria temporal del sistema:

[8] Nuestro legislador ha utilizado indistintamente los términos *casa de comercio* o *establecimiento comercial*, que se han entendido comprensivos de los establecimientos industriales. En ninguna de las disposiciones legales dictadas en nuestro país existe una definición del establecimiento comercial ni se establece la nómina de bienes que lo componen. Los codificadores y los legisladores partieron del supuesto de que era un término que tenía su significado en el mundo de los negocios y no sintieron la necesidad de definirlo. Si bien nuestro Derecho no define a la casa de comercio, reconoce su existencia como un bien diferente de los diversos bienes que lo componen. En efecto, en distintas leyes se le reconoce esa individualidad, puesto que existen normas relativas a la trasmisión de la casa de comercio, para imponer requisitos a los contratos relacionados con la enajenación de establecimientos, para establecer un especial régimen de publicidad o bien para aplicarle impuestos. En general, la doctrina reconoce que el establecimiento comercial tendría los caracteres siguientes: unidad funcional, heterogeneidad y mutabilidad.



Ejemplo 6

Se trata de resolver el siguiente sistema recurrente bidimensional de Volterra de funciones económicas que representan el resultado presupuestario anual de sendas administraciones locales a lo largo del tiempo, a saber:

$$y(t+1) = A \cdot y(t) + \sum_{i=0}^{t} K(t,i) \cdot y(i) + b(t), \text{ con } y(0) = 0,$$

donde: $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, K(t,i) = \begin{pmatrix} 4^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix}, \; b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$

Solución:

El sistema bidimensional dado también puede escribirse así:

$$y(t+1) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{t} \begin{pmatrix} 4^t & 0 \\ 0 & 2^t \end{pmatrix} \times y_i + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo: $A \cdot y(t) = \begin{pmatrix} -5y_1 \\ -3y_2 \end{pmatrix}$, y condicionado a: $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que es un sistema no homogéneo de coeficientes constantes, y la matriz fundamental correspondiente es la siguiente:

$$A^t = \begin{pmatrix} -5^t & 0 \\ 0 & -3^t \end{pmatrix}, \; \forall \; t = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Hallando la matriz resolvente $\Gamma(t)$ por aplicación de la teoría conducente, obtenemos que:

$$\Gamma(t)=\begin{pmatrix}\left(\sqrt{20}^{\,t-1}\right)\left[\left(-2+\sqrt{5}\right)+(-1)^t\left(2+\sqrt{5}\right)\right] & 0\\ 0 & \left(\sqrt{6}^{\,t-1}\right)\left[\frac{\sqrt{6}-2}{2}+(-1)^t\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right]\end{pmatrix}.$$

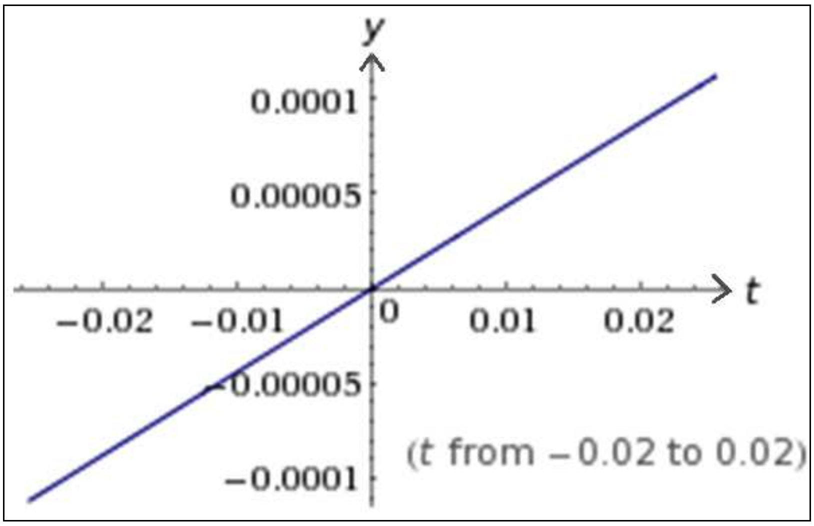
Luego, por la fórmula de variación de parámetros, la solución particular buscada viene dada por la expresión:

$$y(t,0,0)=\begin{pmatrix}\left(-2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{20}^{\,t}\right)\left[\dfrac{(t)\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^{t+1}}{\left(1-\sqrt{20}\right)^2}\right]\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix},$$

de lo que se deduce que:

$$y_1(t)=\left(\left(-2+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{20}^{\,t}\right)\left[\dfrac{(t)\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^{t+1}}{\left(1-\sqrt{20}\right)^2}\right]\right),\quad y_2(t)=0,$$

donde la representación gráfica de la función $y_1(t)$ viene dada por:



, mientras que la función $y_2(t)$ resulta coincidente con el eje de abscisas Ot y, en este segundo caso, el resultado presupuestario anual siempre será nulo. Se ha tomado el ejercicio actual como t = 0, con lo que los valores negativos de la variable *t* se refieren a ejercicios anteriores. En el caso de la representación anterior, el resultado presupuestario viene expresado en millones de € y el tiempo en centenares de años (siglos).

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES

Veámoslos mediante un sencillo ejemplo que resolveremos utilizando el operador E.

Ejemplo 1

Los resultados contables *y* en el tiempo de dos empresas del mismo *holding* se hallan relacionados entre sí mediante el siguiente sistema recurrente:

$$\begin{cases} y_1(t+1) = t \cdot y_1(t) \\ y_2(t+1) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que los resultados del primer año son de 500 € en ambos casos, se trata de determinar los resultados de cada una de ellas en el quinto año de su actividad económica.

Solución:

El sistema planteado se puede escribir también de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} y_{t+1} = t \cdot y_t \\ z_{t+1} = y_t + z_t \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y_{t+1} - t \cdot y_t = 0 \\ z_{t+1} - z_t - y_t = 0 \end{array}\right\}$$

Utilizando para su resolución el operador **E**, se tendrá que:

$$\left.\begin{array}{l} (E - t)y_t = 0 \\ (E - 1)z_t - y_t = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (E - t)y_t = 0 \\ (E - 1)(E - t)z_t - (E - t)y_t = 0 \end{array}\right\}$$

$$(E^2 - t \cdot E + t - E)z_t = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{t+2} - t \cdot z_{t+1} + t \cdot z_t - z_{t+1} = 0$$

$$z_{t+2} - (t+1)z_{t+1} + t \cdot z_t = 0 \ ; \quad \lambda^2 - (t+1)\lambda + t = 0 \ ;$$

$$\lambda = \frac{t + 1 \pm \sqrt{t^2 + 2t + 1 - 4t}}{2} = \frac{t + 1 \pm (t-1)}{2} = \left\langle \begin{array}{l} t \\ 1 \end{array} \right. \text{, o sea:}$$

$$\boxed{z_t = c_1 \cdot t^t + c_2 \cdot 1^t = c_2 + c_1 \cdot t^t}$$

$y_t = z_{t+1} - z_t = c_2 + c_1 \cdot (t+1)^{t+1} - c_2 - c_1 \cdot t^t$; $\boxed{y_t = c_1(t+1)^{t+1} - c_1 \cdot t^t}$; o también:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = c_1(t+1)^{t+1} - c_1 \cdot t^t \\ y_2(t) = c_2 + c_1 \cdot t^t \end{array}}$$

, con lo que también se cumple que: $y_1(t) + y_2(t) = c_1(t + 1)^{t+1} + c_2$.

Aplicando ahora las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se tendrá que:

$$\begin{cases} y_1(1) = c_1(2)^2 - c_1 = 3c_1 = 1/2 \\ y_2(1) = c_2 + c_1 = 1/2 \end{cases}$$

Del anterior sistema de ecuaciones dedúcense los siguientes valores: $c_1 = 1/6$; $c_2 = 1/3$, y, como consecuencia, las trayectorias temporales de los resultados contables de ambas empresas serán las siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{(t+1)^{t+1} - t^t}{6} \\ y_2(t) &= \frac{2+t^t}{6} \end{aligned}}$$

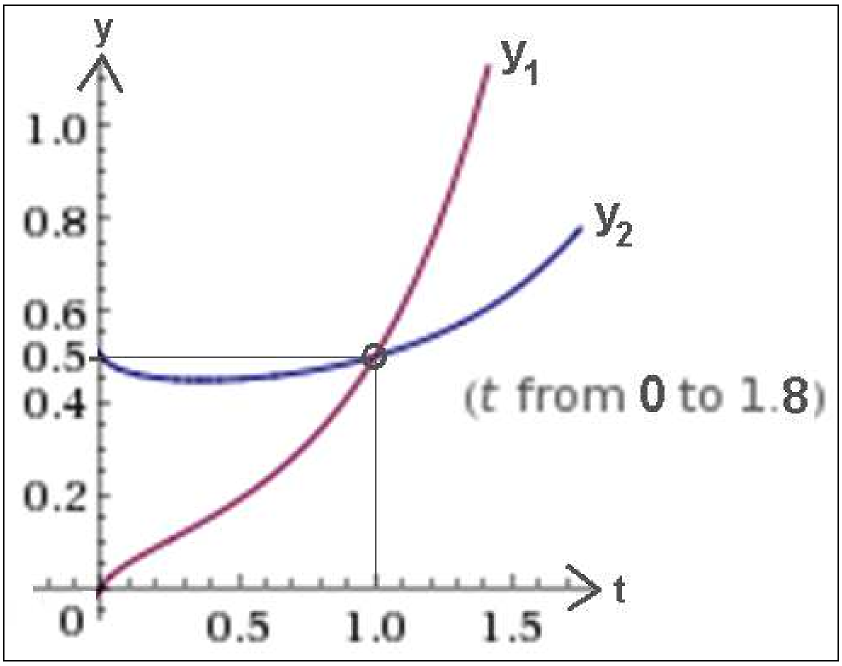
De este modo, a partir de dichas expresiones, podemos elaborar la siguiente tabla:

t	***y_1 (10^3 €)***	***y_2 (10^3 €)***
0	0’00	0’50
1	0’50	0’50
2	$3'8\hat{3}$	1’00
3	$38'1\hat{6}$	$4'8\hat{3}$
4	$478'1\hat{6}$	43’00
5	$7.255'1\hat{6}$	$521'1\hat{6}$
…	…	…
+ ∞	+ ∞	+ ∞

Y así, en el quinto año de actividad económica, los resultados contables de ambas empresas son de 7.255.167 € la primera y de 521.167 € la segunda.

Por otra parte, aunque las expresiones anteriores resultan indeterminadas para t = 0, se presume también en los dos casos de las funciones de resultados y_1 e y_2 la existencia de ramas parabólicas, puesto que si $t \to \infty$ también $y \to \infty$. Esto es: $m = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{y}{t} = +\infty$, luego existe en ambas una rama parabólica según el eje OY (vertical, hacia arriba).

A continuación, se adjuntan las gráficas correspondientes de las trayectorias temporales estudiadas de los resultados contables de ambas empresas, con indicación expresa del instante temporal de su coincidencia, a saber:



O bien con mayor detalle hasta los tres primeros años, se tiene que:

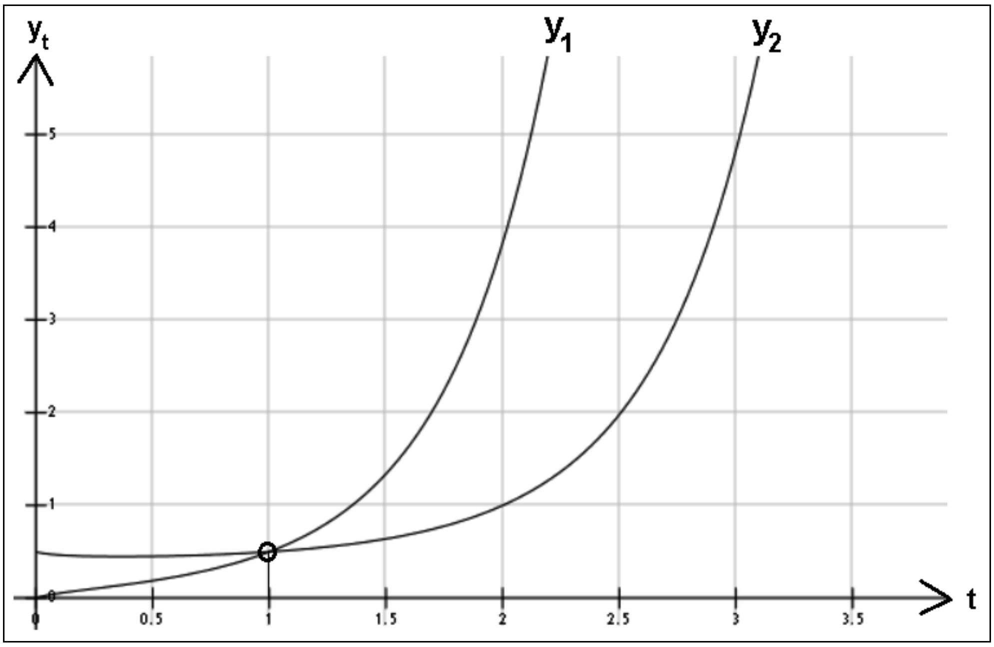


FIG. 13.11. Evolución temporal de los resultados contables (V).

A su vez, la trayectoria temporal del sistema planteado puede verse en la siguiente figura:

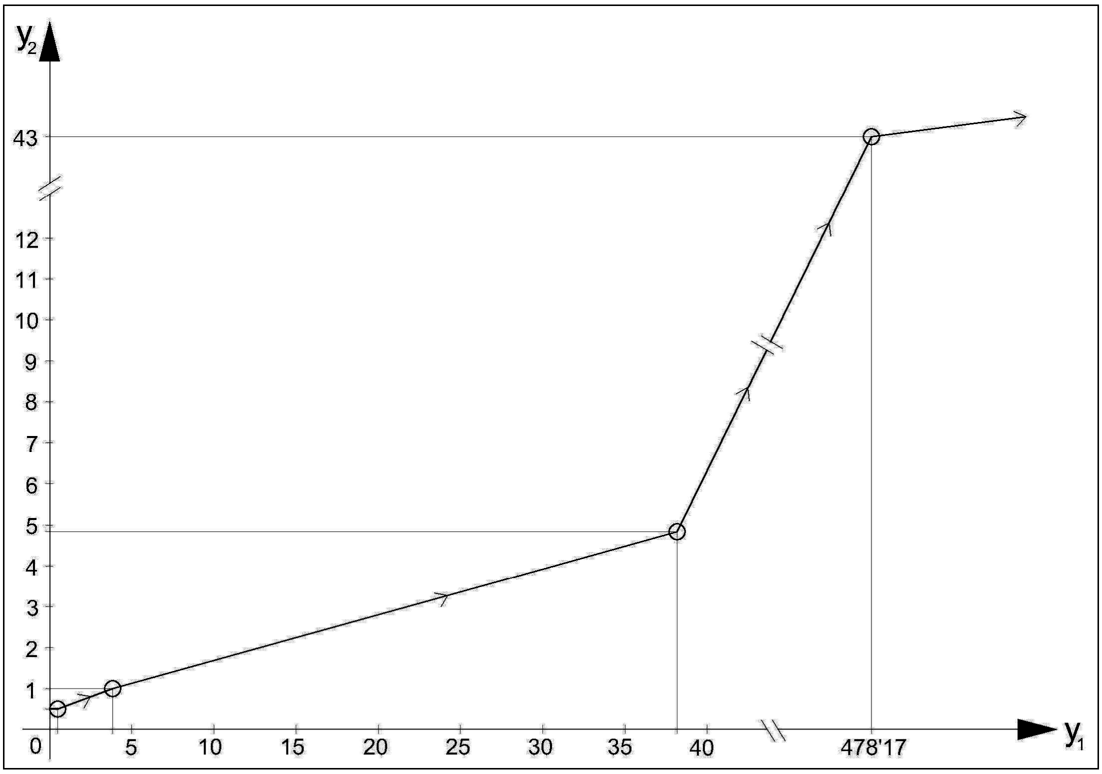


FIG. 13.12. Trayectoria temporal del sistema (V).

3. SISTEMA LINEAL EQUIVALENTE

Dada la ecuación lineal de diferencias finitas de orden *n*:

$$y(x + n) + a_1(x)\cdot y(x + n - 1) + \dots + a_n(x)\cdot y(x) = b(x),$$

si hacemos el cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y(x + 1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = y(x + n - 1) \end{array}\right\} \quad \forall\ x = 0, 1, 2, \dots$$

obtenemos el siguiente sistema lineal de primer orden (con *n* incógnitas):

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x + 1) = y_2(x) \\ y_2(x + 1) = y_3(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}(x + 1) = y_n(x) \\ y_n(x + 1) = -a_1(x)y_n(x) - a_2(x)y_{n-1}(x) - \dots - a_n(x)y_1(x) + b(x). \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema y observando que $y(x) = y_1(x)$ obtendremos también la solución general de la ecuación recurrente planteada de orden *n*. También: $y_n(x + 1) = y_{n+1}(x)$.

En concreto, el problema de determinar una solución particular de la ecuación no homogénea se puede resolver determinando una solución particular del sistema equivalente.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS NO LINEALES

Al igual que ocurría con las ecuaciones diferenciales o integrales, hay muchos sistemas de ecuaciones recurrentes que se presentan en la práctica que no son lineales. Un ejemplo cualquiera de ellos puede ser el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y_1(x + 1) = y_2(x)^3 \\ y_2(x + 1) = -3y_1(x) + 4y_2(x)^2 \end{array}\right\}$$

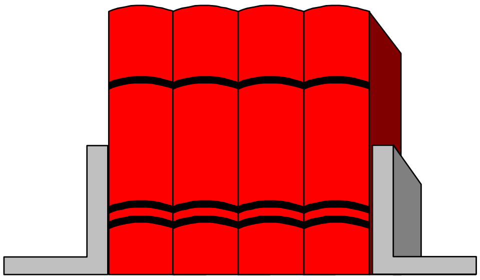
Algunos de ellos se pueden resolver de forma explícita mediante el empleo de diversas técnicas analíticas, pero la mayor parte no pueden ser tratados mediante estos procedimientos. En cualquier caso, fijados los valores iniciales $y_1(0)$, $y_2(0)$, …, $y_n(0)$, el propio sistema nos ofrece una ley recurrente para calcular los términos posteriores de éste. Los inconvenientes del método son los mismos que señalábamos anteriormente para las ecuaciones de diferencias finitas lineales.

ABREVIATURAS Y SIGLAS

%	Porcentaje (tanto por ciento)
...	Puntos suspensivos (etcétera)
€	Euros
arctg	arco tangente
Cap.	Capítulo
cos	Coseno
cosh	Coseno hiperbólico
c.s.q.d.	Como se quería demostrar
Dr.	Doctor
D-W	Durbin-Watson
E-C	Euler-Cauchy
Ed.	Editorial
ED	Ecuación Diferencial
EDF(ER)	Ecuación en Diferencias Finitas (Ecuación Recurrente)
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
EDP	Ecuación en Derivadas Parciales
EI	Ecuación Integral
EID	Ecuación Integro-Diferencial
et alt.	*Et altri*
etc.	Etcétera
Fig.	Figura
Ha.	Hectárea
HFR	Hartree-Fock-Roothaan
I.G. (IG)	Integral General
INE	Instituto Nacional de Estadística
I.P. (IP)	Integral Particular
IPC	Índice de Precios de Consumo
I.S. (IS)	Integral Singular
kg.	Kilogramo
ln o Ln	Logaritmo neperiano o natural
log	Logaritmo decimal o de Briggs
m.	Metro
máx	Máximo
nº	Número
pág.	Página
RMS	Relación Marginal de Substitución
RSB	Relación de Substitución de Bienes
sin o sen	Seno
sinh	Seno hiperbólico
SIMD	*Single Instruction Multiple Data*

tg o tan	Tangente
TL	Transformada de Laplace
Tm.	Tonelada métrica
ud.	unidad
u.m.	unidad monetaria
UNED	Universidad Nacional de Educación a Distancia
v.gr.	*Verbi gratia*

****



BIBLIOGRAFÍA Y FONDOS DOCUMENTALES

(*) Bibliografía local.
(**) Bibliografía general.
(***) Bibliografía recomendada.

1.-AHIJADO QUINTILLÁN, M. *Introducción a la microeconomía para administración y dirección de empresas. Curso teórico-práctico.* Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1997. 648 pág. (***).

2.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Estadística (Introducción). Unidades Didácticas (Núm. 6).Uned.* Ed. Gráficas Torroba. Madrid, 1974.(**).

3.-ALCAIDE INCHAUSTI, A.; INFANTE MACÍAS, R.; GARCÍA SESTAFE, J.V. *Matemáticas. Unidades Didácticas. Uned.* Ed. Gráficas Torroba. Madrid, 1974.(**).

4.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Matemáticas para economistas y matemáticas empresariales.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1981. 476 pág. (**).

5.-ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Ampliación de matemáticas aplicadas a la economía. Unidad Didàctica nº6.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1987. (**).

6.-ALCAIDE, A.; RODRÍGUEZ, J.; PRIETO, E; ÁLVAREZ, A.; MARTÍN, D. *Números complejos. Introducción a las ecuaciones recurrentes. Teoría y ejercicios.* Editorial San Julián, S.L. Madrid, 1993. 122 pág. (**).

7.-ALEGRE, P. ET ALT. *Ejercicios resueltos de Matemáticas empresariales 2.* Editorial AC. Madrid, 1993. 596 pág. (**).

8.-ALLEN, R.G.D. *Mathematical Analysis for Economists*. Macmillan, Londres, 1938. (**).

9.-ÁLVAREZ VALDÉS, L. *Memento de matemáticas*. Editorial Dossat. Madrid, 1921. 375 pág. (**).

10.-AYRES, FRANK, JR. *Theory and problems of Differential and Integral calculus*. Schaum Publishing Company. New York, 1950. 346 pág. (**).

11.-BALBÁS, A.; GIL J.A.; GUTIÉRREZ, S. *Análisis Matemático para la Economía II: Cálculo integral y sistemas dinámicos*. Ed. Thomson-Paraninfo-AC. Madrid, 2005. 372 pág. (**).

12.-BELLMAN, R. *Introducción al anàlisis matricial*. Ed. Reverté, o *Functional equations in the theory of dynamic programming-V* de Bellman, Proc. National Academic Sciences U.S.A., 1955. (**).

13.-BORT CANUTO, A. *Ejercicios de Teoría Económica, vol II.* Ed. CEURA, S.A. Madrid, 1989. 206 pág. (**).

14.-BRONSON, R.; COSTA, G. *Ecuaciones diferenciales*. Ed. McGraw-Hill Interamericana. Colección Schaum. México, 2008. 385 pág. (***).

15.-BROSS, I.D.J. *La decisión estadística*. Ed. Aguilar. Madrid, 1958. (***).

16.-CASTAÑEDA CHORNET, J. *Lecciones de Teoría Económica*. Editorial Aguilar. Madrid, 1968. 739 pág. (***).

17.-COUNRANT, R. *Differential and Integral Calculus*. Blackie. Londres, 1934. (**).

18.-ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional.* Editorial Mir. Moscú, 1969. 432 pág. (**).

19.-FERRER FIGUERAS, L. *La teoría de sistemas, instrumento básico en la evolución adaptativa de Ciencia, Estado y Sociedad, en el marco del ecosistema*. Escuela de Investigación Operativa. Universidad de Valencia. Valencia, 1972. (***).

20.-FINE, H.B. *Calculus*. Macmillan. New York, 1937. (***).

21.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Anàlisis territorial.* CADUP-Estudios. Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990-91. 574 pág. (**).

22.-FRANQUET BERNIS, J.M. *El estudio operativo de la psicología. Una aproximación matemática.* CADUP-Estudios. Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2008. 372 pág. (**).

23.-FRANQUET BERNIS, J.M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias finitas. Curso práctico.* Ed.: Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 2013. 752 pág. (**).

24.-GARCÍA CAMOYANO, P. *Formulario de Matemáticas Superiores*. Manuales Técnicos Koel. Editorial Tesoro. Madrid, 1967. 470 pág. (**).

25.-GARCÍA SESTAFE, J.V. *Matemáticas para economistas.* Confederación Española de Cajas de Ahorro. Libros de Ejercicios. Madrid, 1978. 270 pág. (**).

26.-GARCÍA SESTAFE, J.V.; RODRIGUEZ RUIZ, J. *Ciencias Económicas y Empresariales. Curso de matemáticas en forma de problemas.* Centro de Estudios Universitarios “Ramón Areces”. Editorial Ceura. Madrid, 1986. 604 pág. (**).

27.-GOLDBERG, S. *Introduction to Difference Equations.* New York, Wiley, 1958. (***). Existe traducción al castellano de Ed. Marcombo, S.A. Barcelona, 1964.

28.-GOURSAT, E. *A Course in Mathematical Analysis*, vol. I. Boston, Ginn, 1904. (***).

29.-HENDERSON, J.M.; QUANDT, R.E. *Teoría microeconómica.* Ediciones Ariel. Esplugues del Llobregat (Barcelona), 1962. 334 pág. (**).

30.-HERNÁNDEZ, H.; NÚÑEZ, L. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales.* Universidad de Los Andes, Mérida. On line: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/hector/prontuario/metodos2/S06_C18.pdf (**).

31.-KRASNOV, M.; KISELIOV, A.; MAKARENKO, G. *Ecuaciones integrales*. Editorial Mir. Moscú, 1977. 190 pág. (**).

32.-MARTÍNEZ LASHERAS, J.L. *Ejercicios de Teoría Económica I*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Cátedra de Economía y Política Agraria. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 1969. 182 pág. (**).

33.-MARTÍNEZ LASHERAS, J.L. *Ejercicios de Política Agraria*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 1970. 114 pág. (**).

34.-MILNE-THOMPSON, L.M. *The calculus of Finite Differences*. Macmillan. Londres, 1933. (***).

35.-NAVARRO ROJAS, F. *Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales.* Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Programa Cybertesis. Lima, 2011. 135 pág. On line: http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/294 (**).

36.-NIETO OSTOLAZA, M.C. *Matemáticas para economistas*. Confederación Española de Cajas de Ahorro. Libros de Lecturas. Madrid, 1976. 600 pág. (**).

37.-PRIETO, E; RODRÍGUEZ, J.; GARCÍA, C.; GUTIÉRREZ, P.; VELASCO, J.R. *Matemáticas 2. Economía y Empresa. Ejercicios resueltos.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid, 1991. 518 pág. (**).

38.-RICHARDSON, H. W. *Economía regional*. Ed. Vicens-Vives. Barcelona, 1973. (**).

39.-RODRIGO DEL MOLINO, F.; RODRIGO MUÑOZ, F. *Problemas de Matemáticas para científicos y técnicos.* Ed. Tébar. Sevilla, 1998. 418 pág. (**).

40.-RODRÍGUEZ CALDERÓN, C.; ALCAIDE INCHAUSTI, A. *Matemática superior. Unidad Didàctica nº1.* Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid, 1977. (**).

41.-RODRÍGUEZ RUIZ, J.; PRIETO SÁEZ, E.; HERNÁNDEZ MORALES, V.; GÓMEZ TOLEDANO, M.P. *Matemáticas 2. Economía y Empresa. Teoría.* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A. Madrid, 1991. 484 pág. (**).

42.-RODRÍGUEZ, J. et alt. *Elementos y cuestiones de microeconomía. Unidades Didácticas.* UNED. Madrid, 1999. 302 pág. (**).

43.-SAMUELSON, P. A. *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, 1947. (***).

44.-SAMUELSON, P. A. *Curso de Economía moderna.* Biblioteca de Ciencias Sociales. Ed. Aguilar. Madrid, 1973. 992 pág. (***).

45.-SÁNCHEZ SÁNCHEZ, M. *Matemáticas avanzadas para la Administración y Dirección de empresas.* Editorial Sanz y Torres, S.L. –UNED. Madrid, 2011. (**).

46.-SÁNCHEZ SÁNCHEZ, M. *Matemáticas avanzadas para la Economía.* Editorial Sanz y Torres, S.L. – UNED. Madrid, 2012. 142 pág. (**).

47.-VALDIVIA UREÑA, M. *Anàlisis matemático III, tomo II. Unidades didácticas (4)*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Madrid, 1991.(**).

48.-WOODS, F.S. *Advanced calculus*. Nueva edición, Boston, Ginn, 1934. (**).

ÍNDICE GENERAL

Pág.

Pág.

Parte II: Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Pág.

Pág.

Pág.

Pág.

(EN CD ANEXO, presentaciones en Microsoft PowerPoint):

ÍNDICE DE FIGURAS

Pág.

Capítulo 10.

Capítulo 11.

Pág.

Capítulo 12.

Capítulo 13.

* * * * * *

Este libro se terminó
de imprimir
el 23 de octubre de 2014,
en los talleres
de la Gràfica Dertosense, s.l.
de Tortosa

JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS (Tortosa, 1950), es Ingeniero Agrónomo (especialidad Economía agraria), por la Universidad Politécnica de Valencia, donde finalizó la carrera en el año 1974, realizando posteriormente, los estudios de Doctorado e Ingeniería Técnica Industrial.

Es Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales, por la Universidad de Barcelona (1995). Es, asimismo, Doctor por la Universidad Internacional de Cataluña (2007). También es poseedor del título de Ingeniero Técnico en Explotaciones Agropecuarias por la Universidad Politécnica de Cataluña (1997).

El profesor Franquet tiene en su haber otros títulos universitarios como son: Diplomado en Cooperación y Diplomado en Investigación Operativa por la Universidad de Valencia, Diplomado en Economía de la Empresa y Diplomado en Planificación de Empresas por la Universidad Politécnica de Madrid. Tiene, así mismo, el reconocimiento profesional de Doctor Ingeniero Superior, European Engineer-EUR ING (FEANI, París, 1993).

En 1974 inicia su carrera docente como profesor de la Escuela de Investigación Operativa de la Universidad de Valencia (Departamento de Matemática Aplicada). Es profesor-tutor del Centro Asociado de la UNED en Tortosa desde el año 1976 (Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa) y desde octubre de 2007 es el Director del mismo. También, desde diciembre de 2013, es Director del Campus Nordeste (Cataluña y Baleares). Ha sido Profesor Asociado de la Universidad Internacional de Cataluña (Departamento de Hidráulica y Proyectos). Posee las acreditaciones oficiales de profesor colaborador, ayudante doctor y contratado doctor. Autor de numerosos artículos técnicos así como de diversos libros y monografías en materia de agricultura, construcción, hidráulica, planificación territorial, climatología, piscicultura, folklore, narrativa, administración local, psicología, topografía, poesía, matemáticas y economía.

UNED TORTOSA

ISBN 978-84-938420-2-4

9 788493 842024