

Análisis dinámico de un manipulador robótico industrial en base a la formulación de las ecuaciones de Lagrange. Un enfoque basado en los trabajos virtuales y las fuerzas generalizadas.

Alejandro Armando Hossian¹, Roberto Carabajal², Emanuel Maximiliano Alveal³, Hernán Merlino⁴

¹Grupo de investigación en robótica, Facultad Regional Neuquén, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. Email: alejandrohossian@yahoo.com.ar

²Grupo de investigación en robótica, Facultad Regional Neuquén, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. Email: rcarabaj@gmail.com

³Grupo de investigación en robótica, Facultad Regional Neuquén, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina. Email: maximilianoalveal@hotmail.com

⁴Grupo de investigación en robótica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina. Email: hmerlino@gmail.com

Resumen

El problema que se trata en este trabajo de investigación se focaliza en el análisis dinámico de un robot manipulador con carga en su extremo. Para este fin, la metodología empleada debido a la inclusión de fuerzas no conservativas (no derivadas de un potencial) se basa en el empleo de la expresión más extendida de las ecuaciones de Lagrange. El concepto de fuerza generalizada asociado al de trabajo virtual son de vital importancia para la obtención de las ecuaciones de movimiento. Se obtienen diferentes resultados en función del modelo dinámico obtenido; tales como monitorear valores de la fuerza aplicada en el efector terminal para diferentes trayectorias articulares, así como también analizar la respuesta temporal de los pares de torsión en las articulaciones del manipulador. Los resultados obtenidos constituyen referencias sustanciales en el análisis del control de posición y de la estabilidad asintótica global para el diseño del sistema de control.

Palabras clave: fuerza generalizada; modelo dinámico; pares de torsión; trayectorias articulares, trabajo virtual.

Abstract

The problem dealt with in this research work focuses on the dynamic analysis of a manipulator robot with a load at its end. For this purpose, the methodology used due to the inclusion of non-conservative forces (not derived from a potential) is based on the use of the most extended expression of the Lagrange equations. The concept of generalized force associated with virtual work is of vital importance for obtaining the equations of motion. Different results are obtained depending on the dynamic model obtained; such as monitoring values of the force applied in the end effector for different joint trajectories, as well as analyzing the temporal response of the torques in the manipulator's joints. The results obtained constitute substantial references in the analysis of position control and global asymptotic stability for the design of the control system.

Keywords: generalized strength; dynamic model; torques; joint trajectories, virtual work.

1. Introducción

En el contexto de la mecánica analítica, la dinámica constituye una extensa área dedicada al estudio de la vinculación entre las causas (fuerzas o pares) que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. Dentro del campo de la robótica la dinámica estudia la relación existente entre el movimiento que se produce en el sistema – robot y los pares o fuerzas que ejercen los actuadores de las articulaciones. En líneas generales, los manipuladores robóticos están

conformados por articulaciones de un grado de libertad; rotacionales o prismáticas. Cuando se hace referencia a una articulación de tipo rotacional, los actuadores producen pares de fuerzas entre los eslabones que están conectados por medio de la articulación. En forma análoga, cuando la articulación es prismática, los actuadores producen fuerzas entre dichos eslabones. La consecuencia real es que mediante las relaciones dinámicas es factible controlar los actuadores de las articulaciones; y por consiguiente el movimiento de todos los eslabones del manipulador,

de forma tal que el órgano terminal del mismo lleve a cabo una determinada trayectoria [1]. En esta línea de análisis, las relaciones entre los pares o fuerzas que se aplican en los actuadores de las articulaciones; y las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares que tienen lugar en las mismas, se obtienen por medio del modelo dinámico del robot manipulador. Por medio de las ecuaciones de movimiento que conforman dicho modelo, es posible calcular las funciones de momento de torsión del actuador, a los fines de controlar al manipulador para que siga una ruta deseada [2].

1.1. Marco Teórico

En el contexto del presente artículo se emplean tópicos fundamentales de la Mecánica Analítica, los cuáles actúan a modo de soporte para realizar el desarrollo del trabajo y explorar el alcance de la investigación. En este sentido, conceptos tales como coordenadas generalizadas, desplazamientos virtuales, principio de los trabajos virtuales y fuerzas generalizadas son fundamentales para la formulación de las ecuaciones de Lagrange en su forma más extendida [3]. Esta última afirmación refiere a la consideración de la parte no conservativa de las fuerzas no conservativas que intervienen en el dispositivo robótico.

1.1.1. Coordenadas generalizadas y ligaduras

Cuando se aborda el estudio de la dinámica de un sistema de partículas; cabe distinguir entre sistemas sin vínculos (como el sistema solar) y sistemas vinculados. En el primer caso se considera que las partículas son completamente libres y las trayectorias que describen depende de las fuerzas que actúan sobre y dentro del sistema. En el segundo caso las partículas no son libres, y las trayectorias dependen de la naturaleza de los vínculos. En la figura 1 se ilustra un péndulo simple de masa m y longitud fija l como un sistema vinculado.

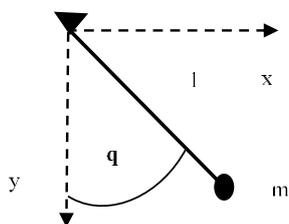


Figura 1. Péndulo simple de longitud l y masa m

La coordenada q define de manera unívoca la posición de la masa m , dado que este sistema posee un solo grado de libertad. En caso de hacer uso de las coordenadas rectangulares x e y para posicionar la masa m , se requiere incluir la ecuación de ligadura (1).

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (1)$$

Las coordenadas x e y no son independientes, dado que están relacionadas a través de la ecuación de ligadura.

Al definir la configuración de los sistemas vinculados es conveniente seleccionar determinadas cantidades que son independientes entre sí; las cuales se denominan coordenadas generalizadas, y en el caso del péndulo simple es el ángulo q . La cantidad de coordenadas rectangulares menos el número de ecuaciones de ligadura coincide con los grados de libertad del sistema; por consiguiente, con la cantidad de coordenadas generalizadas. Esto es así en los llamados sistemas holónomos [4], donde las ecuaciones de restricción es posible expresarlas en función solo de las coordenadas, o de las coordenadas y el tiempo t . De esta forma, cada una de las coordenadas rectangulares de un punto i de un sistema de N puntos es posible expresarlas en función de las coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n ; y en forma general también del tiempo, tal como se muestra en la ecuación (2) para un sistema de N puntos en \mathbb{R}^3 .

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\} i=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Cabe señalar, que las coordenadas generalizadas pueden ser ángulos o longitudes, o cualquier otro conjunto de cantidades independientes que, en combinación con las restricciones, permiten especificar de manera unívoca la configuración de un sistema de n grados de libertad [5].

1.1.2. Desplazamiento virtual y fuerza generalizada

Se llama desplazamiento virtual a todo desplazamiento arbitrario, pudiendo ser este angular o lineal, que separe al sistema de su posición real o natural. Cuando se refiere a sistemas vinculados, estos desplazamientos deben ser compatibles con las restricciones o ligaduras del sistema [6]. Si se tiene por caso, un extremo de una barra que está articulado por medio de un pasador fijo, el desplazamiento virtual del otro extremo tiene que ser perpendicular a la recta que conecta a ambos extremos. En otras palabras y sin pérdida de generalidad, el caso anterior expresa que estos requisitos de compatibilidad de los desplazamientos con las ligaduras del sistema son de carácter cinemático y están en relación con la geometría de los movimientos posibles; a la vez que suministran las denominadas ecuaciones de restricción o de ligadura. Si estas ecuaciones no dependen del tiempo, los desplazamientos reales coinciden con los virtuales [7]. Considerando un sistema de N partículas, el vector posición asociado a la partícula i -ésima se puede expresar en función del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} y del tiempo t de la forma: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$ $i = 1, 2, \dots, N$. Suponiendo que la partícula experimenta un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_i$, este se relaciona con los desplazamientos virtuales de cada coordenada generalizada δq_k mediante la ecuación (3). Al

considerar un sistema holónomo, si este posee n grados de libertad, esta cantidad coincide con la cantidad de coordenadas generalizadas. De ahí que el subíndice k varíe desde 1 hasta n .

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (3)$$

En caso de que la posición de la partícula no dependa explícitamente del tiempo, la relación de desplazamiento está dada por la ecuación (4).

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad i=1,2,\dots,N \quad (4)$$

El trabajo que desarrollan las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema cuando el mismo sufre un desplazamiento virtual, se llama trabajo virtual del sistema. Si en un sistema de N partículas actúa una fuerza exterior resultante sobre cada una de estas F_i , el trabajo virtual total que desarrolla el sistema cuando cada partícula experimenta un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$ está dado por la ecuación (5).

$$\delta W = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (5)$$

Si el sistema de partículas presenta n coordenadas generalizadas o grados de libertad; en función de la expresión (4) que vincula el desplazamiento virtual de una partícula $\delta \vec{r}_i$ con los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas δq_k se obtiene la expresión (6) para el trabajo virtual del sistema.

$$\delta W = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (6)$$

Como se puede observar de la expresión (6) el escalar Q_k está dado por la expresión (7) y representa la fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q_k .

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad k=1,2,\dots,n \quad (7)$$

La fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q_k es aquella cantidad por la cual se debe multiplicar el desplazamiento virtual δq_k de dicha coordenada generalizada, de manera de obtener el mismo trabajo que desarrollan las fuerzas reales que actúan sobre el sistema durante los desplazamientos correspondientes a la variación de la coordenada q_k [8]. Cabe señalar, que una fuerza generalizada no

necesariamente debe tener dimensiones de fuerza, pudiendo tener dimensiones de momento si la coordenada generalizada correspondiente fuese un ángulo. No obstante, el producto $Q_k \delta q_k$ debe tener dimensiones de trabajo.

1.1.3. Ecuaciones de movimiento de Lagrange

En esta sección se desarrollan las ecuaciones de movimiento de Lagrange de un punto material de masa m que se encuentra sujeto a una fuerza exterior resultante \mathbf{F} (F_x, F_y, F_z), luego se puede extender este desarrollo para el caso de un sistema de puntos materiales. El objetivo central consiste en mostrar la importancia de la fuerza generalizada asociada al correspondiente desplazamiento virtual y como se aplica el principio del trabajo virtual en el desarrollo; si bien no se realiza la deducción completa de las ecuaciones de Lagrange. Desarrollando la ecuación (5) del trabajo virtual para el punto material de masa m en función de sus componentes se obtiene la ecuación (8).

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = m \left(\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z \right) \quad (8)$$

Las relaciones funcionales que vinculan las coordenadas cartesianas x, y, z del vector posición de m y las coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_k del sistema están dadas por la expresión (8), considerando que x, y, z no dependen explícitamente del tiempo; sin solo de las coordenadas generalizadas.

$$\begin{aligned} x &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ z &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \end{aligned} \quad (9)$$

Las variaciones de x, y, z en función de las coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_k se ven en la ecuación (9).

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k \end{aligned} \quad (10)$$

Aquí las δ refiere a variaciones virtuales de orden infinitesimal de las coordenadas generalizadas. Y dado que las q_k son independientes, es posible explorar el movimiento para el efecto de la variación de cada una de las q_k , manteniendo constante las otras coordenadas. De esta forma, tomando $\delta q_1 \neq 0$ y $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_k = 0$, se tendría la expresión (10) para $\delta x, \delta y$ y δz .

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 \quad (10)$$

Reemplazando en (8) se obtiene la expresión (11) del trabajo virtual en función de la coordenada generalizada q_1 y del desplazamiento virtual δq_1 .

$$\left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \quad (11)$$

El primer miembro de esta expresión hace referencia al trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} durante el desplazamiento virtual δq_1 ; a la vez que representa el producto punto de los vectores en la ecuación (7), desarrollado en función de sus componentes. Continuando esta línea de análisis, a la cantidad:

$$Q_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)$$

Se la llama fuerza generalizada correspondiente al desplazamiento virtual δq_1 , explicada anteriormente. De igual forma que como se procedió para la coordenada generalizada q_1 se obtienen las demás fuerzas generalizadas Q_1, Q_2, \dots, Q_k , asociadas a los otros desplazamiento virtuales $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$. Desarrollando en forma analítica el segundo miembro de la ecuación (11), y teniendo en cuenta que el primer miembro se corresponde con $Q_1 \delta q_1$, se llega a la siguiente nueva expresión (12).

$$Q_1 \cdot \delta q_1 = m \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) \right] \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) \end{array} \right\} \delta q_1 \quad (12)$$

Siendo el factor entre paréntesis de la expresión (12):

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right)$$

La energía cinética del punto material de masa m . Sustituyendo en (12) y eliminando el factor δq_1 se llega una primera expresión (13) de la ecuación de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_1} = Q_1 \quad (13)$$

Para los demás desplazamientos virtuales ($\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$) se desarrollan ecuaciones análogas tomando cada una por separado, tal como se ve en la ecuación (14).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k \quad k=1,2,\dots,n \quad (14)$$

Se procede a descomponer cada fuerza generalizada Q_k en su parte conservativa que deriva de una función de

energía potencial (Q_{kc}) y no conservativa que no deriva de una función de energía potencial (Q_{knc}). La parte conservativa Q_{kc} se expresa según la ecuación (15).

$$Q_{kc} = - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} \quad k=1,2,\dots,n \quad (15)$$

Con base en la ecuación (15), definiendo la función Lagrangiana $L = E_c - E_p$ y siendo la fuerza generalizada $Q_k = Q_{kc} + Q_{knc}$; se sustituyen estas expresiones en la expresión (14) y se deduce la forma extendida de las ecuaciones de Lagrange para cada grado de libertad o coordenada generalizada (cantidades que coinciden asumiendo que se trabaja con sistemas holónomos). La ecuación (16) suministra la forma extendida de las ecuaciones de movimiento de Lagrange [9].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (L + E_p)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \\ \frac{\partial (L + E_p)}{\partial q_k} = Q_{kc} + Q_{knc} &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_k} \right) - \\ - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} &= - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} + Q_{knc} \\ \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_k} = 0 &\left(\text{la energía cinética no depende de } \dot{q}_k \right); \\ \text{se cancelan los términos} & - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} \text{ en ambos} \\ \text{miembros, llegando a la forma extendida de la} & \text{ecuación de Lagrange para cada grado de libertad :} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= Q_{knc} \quad k=1,2,\dots,n \quad (16) \end{aligned}$$

Cabe señalar que la parte no conservativa de las fuerzas generalizadas (Q_{knc}) asociadas a cada coordenada generalizada o grado de libertad, se calculan en base a la expresión (7) tal como se realiza en el caso de estudio del manipulador robótico del presente trabajo.

1.2. Propuesta y alcance de la investigación

En esta sección se presenta una breve síntesis acerca del marco en el que se encuentra el tópico de este artículo. En este sentido, el modelo de proceso que se está llevando a cabo se soporta en el desarrollo de tres fases que procuran optimizar el diseño de un manipulador robótico industrial; a saber: una primera fase corresponde a la Cinemática del Robot; una segunda fase se corresponde con la Dinámica del Robot, y una tercera fase vinculada a los aspectos que hacen al Control del robot, cuyos algoritmos permiten mejorar las características de velocidad y precisión [10]. Las cuestiones que se abordan en este trabajo se sustentan en el marco teórico analizado y se encuadran

dentro del estudio de la dinámica del robot. En la figura 2 se ilustra un pequeño bosquejo del proceso que desarrolla el grupo de investigación en este sentido.

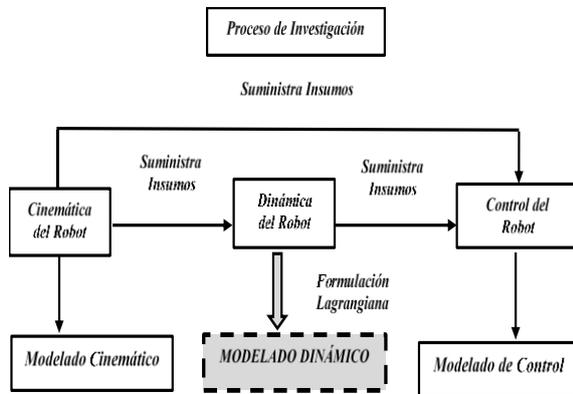


Figura 2. Modelo del proceso de investigación

Desde un punto de vista más específico, el objetivo central del presente artículo se basa en observar la respuesta del dispositivo cuando este debe sostener una carga en su extremo, haciendo uso de las ecuaciones de movimiento de Lagrange en su versión extendida.

2. Metodología

En esta sección se presenta el proceso metodológico que se emplea para el análisis dinámico de un robot manipulador, y los resultados que se obtienen aplicados a un caso de estudio de manipulador robótico industrial con carga en el extremo de su efector terminal.

2.1. Proceso metodológico

El proceso metodológico que se propone en el presente trabajo posee como “insumos de entrada” los parámetros dinámicos (masas, longitudes y momentos de inercia de eslabones) y las coordenadas generalizadas definidas por el diseñador. Asimismo, este proceso provee como “producto de salida” los pares de torsión que se deben aplicar en cada articulación ajustados a las trayectorias articulares que se proponen; debiendo señalar, que dichos pares pueden o no satisfacer los requisitos de diseño ajustados a las prestaciones que debe realizar el robot. El núcleo de este proceso se conforma de tres fases que se desarrollan en forma interconectada. La **primera fase** se focaliza en realizar la “Formulación Lagrangiana” mediante cinco procedimientos: cálculo de la energía cinética, cálculo de la energía potencial, cálculo del Lagrangiano, obtención de las fuerzas generalizadas no conservativas y formulación de las ecuaciones de movimiento de Lagrange. La **segunda fase** se basa en el cálculo de los pares de torsión que se aplican en las articulaciones conforme a las trayectorias articulares propuestas. Cabe señalar, que otras posibilidades se ofrecen en este punto del

proceso, tal como la obtención de las evoluciones temporales de las trayectorias articulares para ciertas evoluciones de los pares de torsión. En el extremo del proceso se tiene la **tercera fase**, cuyo soporte principal consiste en una sentencia de decisión acerca de si se cumplen determinados requisitos de usuario. Esta pregunta hace referencia a que, para las trayectorias articulares requeridas por el usuario, los pares en las articulaciones estén dentro de valores admisibles de diseño. Una alternativa que se propone en caso de que no se satisfaga esta condición, consiste en reformular los parámetros dinámicos (por ejemplo, con técnicas de identificación paramétrica), y plantear nuevas ecuaciones dinámicas de movimiento. En caso de que se satisfagan estas condiciones (por ejemplo, pares de torsión que estén dentro de valores admisibles, o valores máximos aceleración articular dentro de valores tolerados de fabricación para ciertas evoluciones temporales de los pares de torsión), entonces el proceso envía estas referencias al módulo de control. En este sentido, es importante que se diseñen estrategias de control con acciones acotadas dentro de los límites físicos del servomotor, y sintonizar adecuadamente las ganancias de control a efectos de no saturar al servoamplificador [11]. Esta tercera fase se encuentra en desarrollo, probando diferentes parámetros dinámicos y modelos de control. En figura 3 se ve el esquema del proceso metodológico.

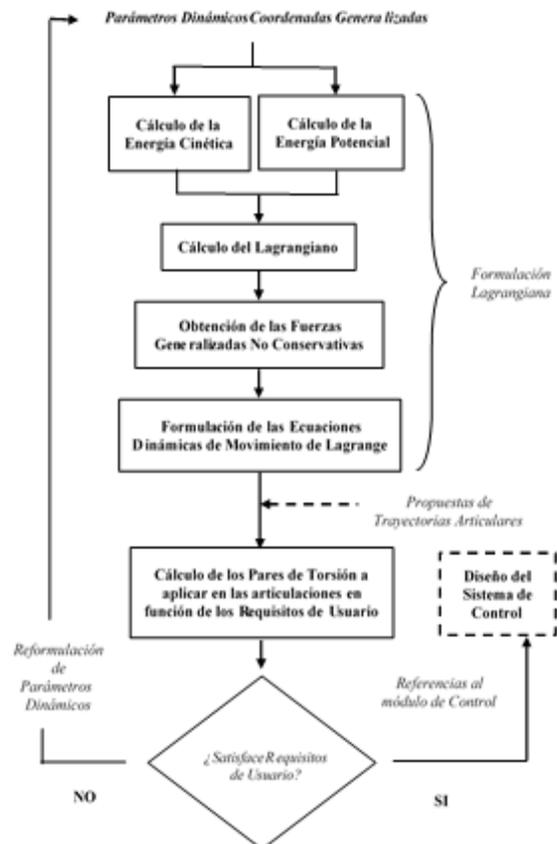


Figura 3. Proceso metodológico para el análisis dinámico de robots manipuladores en base a la formulación Lagrangiana

2.2. Caso de estudio

En esta sección se aborda un caso de estudio de un robot planar de dos grados de libertad con dos articulaciones rotacionales y dos eslabones rígidos. Tal como lo muestra la figura 3, los insumos de entrada se corresponden con los parámetros dinámicos del robot y las coordenadas generalizadas respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot. Sus parámetros dinámicos son: longitudes de eslabones (L_1 y L_2), masas de eslabones (m_1 y m_2). La posición del centro de masa del eslabón 1 es: $R_{cm1} = (X_{cm1}, Y_{cm1}) = ((L_1/2) C_1, (L_1/2) S_1)$ y para el centro de masa del eslabón 2 es: $R_{cm2} = (X_{cm2}, Y_{cm2}) = (L_1 C_1 + (L_2/2) C_2, (L_1 S_1 + (L_2/2) S_2))$. Se asume que $C_1 = \cos q_1$ y $S_1 = \sin q_1$. Cada eslabón se asume como barras con momento de inercia con respecto a su centro de masa de $I_{cm1} = 1/12m_1(L_1)^2$ e $I_{cm2} = 1/12m_2(L_2)^2$. En la figura 4 se ilustra el esquema del dispositivo; en el cual se observa la fuerza F aplicada en el extremo, así como el vector posición R_{ext} que localiza el punto de aplicación de F respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot. Estos dos elementos son fundamentales para obtener las fuerzas generalizadas no conservativas asociadas a cada coordenada generalizada q_1 y q_2 .

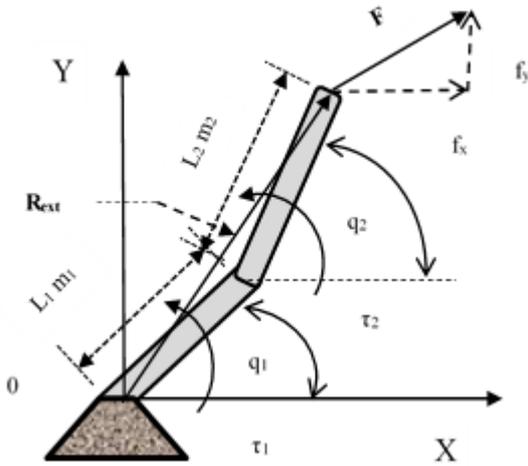


Figura 4. Robot manipulador de dos grados de libertad con dos articulaciones rotatorias y carga exterior aplicada en su extremo terminal.

En el marco de la implementación del proceso de figura 3, se desarrollan los cinco procedimientos asociados a la formulación Lagrangiana. Para los cálculos que se desarrollan a continuación, se toma $m_1 = m_2 = m$ y $L_1 = L_2 = L$, a efectos de simplificar la exposición. Se muestra el cálculo de las velocidades de los centros de masas de cada eslabón para obtener la energía cinética total del robot, ecuación (17). Luego se calcula la energía potencial gravitatoria total, ecuación (18). Con estas dos ecuaciones, se calcula el Lagrangiano del dispositivo, ecuación (19). Luego se obtienen las fuerzas generalizadas no conservativas para cada coordenada generalizada. Se formulan las ecuaciones

dinámicas de movimiento de Lagrange; completando la formulación Lagrangiana. Las velocidades de los centros de masas de cada eslabón son:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{cm1} = V_{cm1} &= \begin{pmatrix} \dot{X}_{cm1} \\ \dot{Y}_{cm1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{L_1}{2} S_1 \dot{q}_1 \\ \frac{L_1}{2} C_1 \dot{q}_1 \end{pmatrix} \\ \dot{R}_{cm2} = V_{cm2} &= \begin{pmatrix} \dot{X}_{cm2} \\ \dot{Y}_{cm2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -L_1 S_1 \dot{q}_1 - \frac{L_2}{2} S_2 \dot{q}_2 \\ L_1 C_1 \dot{q}_1 + \frac{L_2}{2} C_2 \dot{q}_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las energías cinéticas para cada eslabón están conformadas por la energía cinética de traslación más la energía cinética de rotación:

$$\begin{aligned} E_{c1}(q(t), \dot{q}(t)) &= \frac{1}{2} m_1 (V_{cm1} V_{cm1}) + \frac{1}{2} I_{cm1} \dot{q}_1^2 \\ E_{c2}(q(t), \dot{q}(t)) &= \frac{1}{2} m_2 (V_{cm2} V_{cm2}) + \frac{1}{2} I_{cm2} \dot{q}_2^2 \end{aligned}$$

La energía cinética total es la suma de ambas energías cinéticas: $E_{ct} = E_{c1} + E_{c2}$; y tomando $m_1 = m_2 = m$, $L_1 = L_2 = L$ e $I_{cm1} = I_{cm2} = I_{cm}$, se llega a la ecuación (17).

$$\begin{aligned} E_{ct}(q(t), \dot{q}(t)) &= E_{c1} + E_{c2} = \\ &= \frac{1}{6} mL^2 \left(4 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

La energía potencial gravitatoria total está conformada por la energía potencial gravitatoria para cada eslabón: $E_{pgt} = E_{pgt1} + E_{pgt2}$; tomando $m_1 = m_2 = m$, $L_1 = L_2 = L$ y operando algebraicamente, se llega a la ecuación (18).

$$\begin{aligned} E_{pgt}(q(t)) &= E_{pgt1} + E_{pgt2} = mg \frac{L}{2} S_1 + mg L S_1 \\ &+ mg \frac{L}{2} S_2 \Rightarrow E_{pgt}(q(t)) = \frac{3}{2} mg L S_1 + \\ &\frac{1}{2} mg L S_2 \Rightarrow E_{pgt}(q(t)) = \frac{1}{2} mg L (3S_1 + S_2) \end{aligned} \quad (18)$$

Se calcula el Lagrangiano con la ecuación (19).

$$\begin{aligned} L(q(t), \dot{q}(t)) &= E_{ct} - E_{pgt} \Rightarrow L(q(t), \dot{q}(t)) = \\ &= \frac{1}{6} mL^2 \left(4 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right) \\ &- \frac{1}{2} mg L (3S_1 + S_2) \end{aligned} \quad (19)$$

Se obtienen las fuerzas generalizadas no conservativas Q_{1NC} y Q_{2NC} asociadas a cada coordenada generalizada q_1 y q_2 . Para ello se obtienen las fuerzas generalizadas debido a la fuerza F asociadas a cada coordenada generalizada. Luego se obtienen las fuerzas generalizadas debido a los pares τ_1 y τ_2 aplicados en cada articulación, que son estos mismos. Considerando que el $R_{ext} = L ((C_1 + C_2), (S_1 + S_2))$, se obtiene la

siguiente ecuación (20). Luego se suma cada contribución para obtener Q_{1NC} y Q_{2NC} , ecuación (21).

$$\begin{aligned} \vec{F} * \frac{\partial \vec{R}_{ext}}{\partial q_1} &= (f_x, f_y) * L(-S_1, C_1) = \\ L(-f_x S_1 + f_y C_1) \\ \vec{F} * \frac{\partial \vec{R}_{ext}}{\partial q_2} &= \\ (f_x, f_y) * L(-S_2, C_2) &= L(-f_x S_2 + f_y C_2) \end{aligned} \quad (20)$$

Y la ecuación (21) proporciona las fuerzas generalizadas no conservativas para cada coordenada generalizada, en el marco de este caso de estudio.

$$\begin{aligned} Q_{1NC} &= \tau_1 + L(-f_x S_1 + f_y C_1) \\ Q_{2NC} &= \tau_2 + L(-f_x S_2 + f_y C_2) \end{aligned} \quad (21)$$

Operando sobre la ecuación (19) del Lagrangiano, se obtienen los términos para la formulación de las ecuaciones dinámicas de movimiento de Lagrange. Ecuaciones (22), (23), (24) y (25).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= \left[\frac{4}{3} m L^2 \right] \dot{q}_1 + \left[\frac{1}{2} m L^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_2 \\ -\frac{3}{2} m g L C_1; \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] &= \left[\frac{4}{3} m L^2 \right] \ddot{q}_1 + \\ \frac{1}{2} m L^2 \left[\ddot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) - \dot{q}_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \sin(q_1 - q_2) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} m L^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1 - q_2) - \frac{3}{2} m g L C_1 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \left[\frac{1}{2} m L^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_1 + \left[\frac{1}{3} m L^2 \right] \dot{q}_2 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] &= \left[\frac{1}{3} m L^2 \right] \ddot{q}_2 + \left[\frac{1}{2} m L^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \ddot{q}_1 \\ - \left[\frac{1}{2} m L^2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \sin(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1 - q_2) - \frac{1}{2} m g L C_2 \quad (25)$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas de movimiento de Lagrange en su versión extendida, se debe aplicar la ecuación (16) para cada grado de libertad del robot.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{knc} \quad k=1,2,\dots,n \quad (16)$$

Aplicando esta expresión más extendida de las ecuaciones de Lagrange para cada coordenada generalizada q_1 y q_2 del presente caso de estudio se

obtienen las ecuaciones (26) y (27). Para q_1 se restan las (22) – (23) = primera de las (21); para q_2 se restan las (24) – (25) = segunda de las (21).

$$\begin{aligned} \left[\frac{4}{3} m L^2 \right] \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m L^2 [\cos(q_1 - q_2)] \ddot{q}_2 + \\ \left[\frac{1}{2} m L^2 \sin(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_2^2 + \frac{3}{2} m g L C_1 = \\ \tau_1 + L(-f_x S_1 + f_y C_1) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} m L^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \ddot{q}_1 + \left[\frac{1}{3} m L^2 \right] \ddot{q}_2 - \\ \left[\frac{1}{2} m L^2 \sin(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m g L C_2 = \\ \tau_2 + L(-f_x S_2 + f_y C_2) \end{aligned} \quad (27)$$

Para la implementación de la segunda fase del proceso se proponen trayectorias articulares, pudiendo ser que se soliciten otras prestaciones, tal como se explicitó en la sección 2.1. Se desarrolla la segunda fase en la próxima sección con valores numéricos para los parámetros dinámicos. Se obtienen distintos resultados para los pares aplicados en cada una de las articulaciones para diferentes trayectorias articulares.

3. Resultados

En el contexto de este caso de estudio, se asume que la carga exterior F que se aplica en el extremo del efector terminal del manipulador es un peso vertical. Los valores son: $m = 10\text{kg}$, $L = 1\text{m}$, $F = 100\text{N}$ y $g = 10\text{m}/\text{seg}^2$. La situación física se ilustra en la figura 5. La fuerza $F = (0, -f_y)$ ($f_x = 0$) y las ecuaciones (26) y (27) se transforman en las ecuaciones (28) y (29).

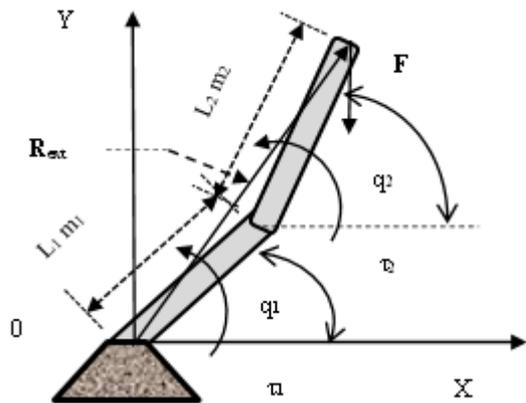


Figura 5. Robot manipulador con carga exterior aplicada hacia abajo en el extremo de su efector extremo terminal.

$$\begin{aligned} \left[\frac{4}{3} m L^2 \right] \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m L^2 [\cos(q_1 - q_2)] \ddot{q}_2 + \\ \left[\frac{1}{2} m L^2 \sin(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_2^2 + \frac{3}{2} m g L C_1 = \tau_1 - f_y L C_1 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}mL^2 \cos(q_1 - q_2) \\ \frac{1}{2}mL^2 \sin(q_1 - q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}mL^2 \\ \frac{1}{2}mgLC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \tau_2 - f_y LC_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Con base en las expresiones (28) y (29), se desean analizar las siguientes situaciones: 1) conocer los pares τ_1 y τ_2 para el vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 60^\circ)$ en situación de equilibrio ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$). 2) para esta misma posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 60^\circ)$ y misma situación de equilibrio de equilibrio ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$), se quita el peso vertical con los pares de torsión obtenidos en 1); entonces se desean conocer las aceleraciones articulares que adquieren cada uno de los eslabones en ese instante. 3) situación similar a la 1) para el vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$. 4) situación similar a la 2) con $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$. 5) situación similar a la 1) con vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 345^\circ)$. 6) situación similar a la 2) con $\mathbf{q} = (45^\circ, 345^\circ)$.

Situación 1: se plantean las ecuaciones (28) y (29) obteniéndose τ_1 y τ_2 por la expresión (30).

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}10kg \cdot 10 \frac{m}{seg^2} \cdot 1m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \tau_1 - 100N \cdot 1m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ \tau_1 &= 75\sqrt{2} + 50\sqrt{2} \Rightarrow \tau_1 = 176,77Nm \\ \frac{1}{2}10kg \cdot 10 \frac{m}{seg^2} \cdot 1m \cdot \frac{1}{2} &= \tau_2 - 100N \cdot 1m \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \tau_2 &= 25 + 50 \Rightarrow \tau_2 = 75Nm \end{aligned} \quad (30)$$

Ambos pares τ_1 y τ_2 son de sentido antihorario tal como se han supuesto, y se analizan en la subsección 3.1.

Situación 2: se plantean las (28) y (29) con el mismo vector de posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 60^\circ)$, velocidades articulares nulas ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$), con los pares de torsión obtenidos en 1) $\tau_1 = 176,77Nm$, $\tau_2 = 75Nm$ y $\mathbf{F} = \mathbf{0}N$. Se obtiene así la expresión (31).

$$\begin{aligned} \left[\frac{4}{3}10kg(1m)^2 \right] \ddot{q}_1 + \frac{1}{2}10kg(1m)^2 [\cos(45^\circ - 60^\circ)] \ddot{q}_2 \\ + \frac{3}{2}10kg \cdot 10 \frac{m}{seg^2} \cdot 1m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= 176,77Nm \\ \frac{1}{2}10kg(1m)^2 [\cos(45^\circ - 60^\circ)] \ddot{q}_1 + \left[\frac{1}{3}10kg(1m)^2 \right] \ddot{q}_2 \\ + \frac{1}{2}10kg \cdot 10 \frac{m}{seg^2} \cdot 1m \cdot \frac{1}{2} &= 75Nm \end{aligned} \quad (31)$$

De las relaciones en la expresión (31) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en las aceleraciones articulares, prescindiendo de las unidades.

$$\begin{aligned} 13,333\ddot{q}_1 + 4,829\ddot{q}_2 &= 70,7039 \\ 4,829\ddot{q}_1 + 3,333\ddot{q}_2 &= 50 \end{aligned}$$

Se obtienen las aceleraciones articulares que se muestran en la expresión (32).

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -0,2743 \frac{rad}{seg^2} \quad (horaria) \\ \ddot{q}_2 &= 15,3989 \frac{rad}{seg^2} \quad (antihoraria) \end{aligned} \quad (32)$$

Situación 3: planteando las ecuaciones (28) y (29) de manera similar a la situación 1, se obtienen los pares de articulación: $\tau_1 = 176,77Nm$ y $\tau_2 = 150Nm$. Los pares τ_1 y τ_2 son de sentido antihorario como se supusieron.

Situación 4: se plantean las ecuaciones (28) y (29) de manera similar a la situación 2 con el mismo vector posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$, velocidades articulares nulas ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$), con los pares de torsión obtenidos en 3) $\tau_1 = 176,77Nm$, $\tau_2 = 150Nm$ y $\mathbf{F} = \mathbf{0}N$. Y de forma similar se llega al siguiente sistema de ecuaciones en las aceleraciones articulares, prescindiendo de las unidades.

$$\begin{aligned} 13,333\ddot{q}_1 + 3,5355\ddot{q}_2 &= 70,7039 \\ 3,5355\ddot{q}_1 + 3,333\ddot{q}_2 &= 100 \end{aligned}$$

Se obtienen las aceleraciones articulares que se muestran en la expresión (33).

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -3,6912 \frac{rad}{seg^2} \quad (horaria) \\ \ddot{q}_2 &= 33,9194 \frac{rad}{seg^2} \quad (antihoraria) \end{aligned} \quad (33)$$

Situaciones 5) y 6): aplicando el mismo procedimiento con el vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 345^\circ)$, se obtienen los siguientes valores para los pares y las aceleraciones articulares, dados por la expresión (34).

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 176,77Nm \quad \& \quad \tau_1 = 144,88Nm \quad (antihorarios) \\ \ddot{q}_1 &= -3,6912 \frac{rad}{seg^2} \quad (horaria) \\ \ddot{q}_2 &= 33,9194 \frac{rad}{seg^2} \quad (antihoraria) \end{aligned} \quad (34)$$

Las situaciones físicas de equilibrio 1 – 2, 3 – 4 y 5 – 6, se ilustran en las figuras 6), 7) y 8) respectivamente.

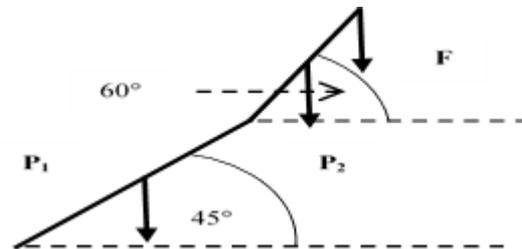


Figura 6. Situaciones físicas de equilibrio 1 – 2 en el equilibrio (en la situación 2 se quita la fuerza \mathbf{F})

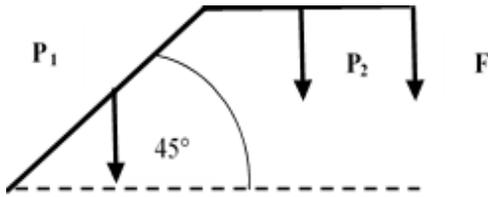


Figura 7. Situaciones físicas de equilibrio 3 – 4 en el equilibrio (en la situación 4 se quita la fuerza F)

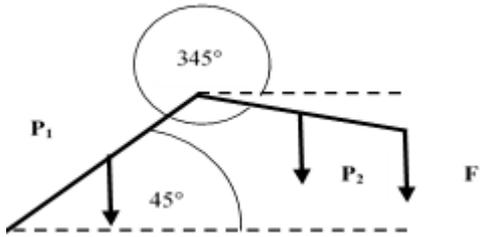


Figura 8. Situaciones físicas de equilibrio 5 – 6 en el equilibrio (en la situación 6 se quita la fuerza F)

3.1. Discusión de resultados

Se observa que el par $\tau_1 = 176,77\text{Nm}$ se mantiene en este valor para las distintas configuraciones de q_2 ; dado que en virtud de la expresión (28) y asumiendo equilibrio total ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$), se ve que el par τ_1 depende de la posición articular $q_1 = 45^\circ$, de la fuerza F , de m y de L (todos se mantienen constantes conforme varía q_2). El par τ_2 depende de las distintas configuraciones que adopta la posición articular q_2 mientras $q_1 = 45^\circ$; haciendo notar que este par crece en la medida que disminuye q_2 , llegando a su valor máximo ($\tau_2 = 150\text{Nm}$) para $q_2 = 0^\circ$ y $\cos(q_2) = 1$ (eslabón 2 horizontal de situación física de equilibrio 3 de figura 7). Tanto para los valores de $q_2 = 60^\circ$ y $q_2 = 345^\circ$ (situaciones físicas de equilibrio 1 y 5 de figura 6 y 8 respectivamente), el par articular τ_2 adopta valores menores que para $q_2 = 0^\circ$ ($\tau_2 = 75\text{Nm}$ para $q_2 = 60^\circ$ y $\tau_2 = 144,88\text{Nm}$ para $q_2 = 345^\circ$). Todos estos pares articulares son antihorarios en estas situaciones de equilibrio; habida cuenta de que deben contribuir a contrarrestar el efecto del peso colgante, así como del efecto gravitatorio de ambos eslabones.

Por su parte, las aceleraciones articulares se determinaron en cada situación quitando el peso colgante y bajo la acción de los pares articulares. En este sentido, se observa que \ddot{q}_1 se acelera en sentido horario y \ddot{q}_2 en sentido antihorario. Los valores mayores de aceleraciones articulares se registran para la situación física 4 ($q_2 = 0^\circ$ y $\tau_2 = 150\text{Nm}$); $\ddot{q}_1 = -3,6912 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ & $\ddot{q}_2 = 33,9194 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$.

Si bien este fenómeno mecánico también tiene lugar en las otras situaciones cuando se quita la fuerza vertical F (situaciones 2 y 6); en esta situación 4 es cuando se registran los valores máximos de las aceleraciones articulares, y mayor cuidado se debe tener. El fenómeno que se ha observado en banco de prueba experimental es el siguiente: el eslabón 1 experimenta la mayor aceleración hacia la línea de base del robot en sentido horario, mientras que el eslabón 2 sufre el “sacudón” en sentido antihorario producto de una importante aceleración angular de casi 34rad/seg^2 . En esta línea de análisis, también se debe procurar que las aceleraciones articulares no pasen de los valores admisibles proporcionados por el fabricante; así como también que los pares articulares sean aceptables a criterio del diseñador. En caso de que no se satisfagan esta clase de requisitos, se propone reformular parámetros dinámicos hasta llegar a plantear nuevas ecuaciones dinámicas de movimiento. En caso de que se satisfagan estos requerimientos, se pasan estas referencias al módulo de control dinámico. Todo esto conforma la tercera fase del proceso metodológico, que se encuentra en fase de desarrollo.

Como un último caso de experimentación, se propone partir de la configuración de la situación 2 (vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$, y el eslabón 2 se mueve a una velocidad constante de $0,0523 \text{ rad/seg}$. La evolución temporal de la velocidad articular del eslabón 2 es

$$\dot{q}_2 = 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t$$

ecuaciones (28) y (29) con los mismos valores para los parámetros dinámicos, se obtienen las siguientes evoluciones temporales para los pares articulares $\tau_1(t)$ y $\tau_2(t)$, dados por las ecuaciones (35) y (36).

$$\tau_1 = 0,0137 \text{Nm} \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} t \right) + 125\sqrt{2} \quad (35)$$

$$\tau_2 = 150 \text{Nm} \cdot \cos \left(0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} t \right) \quad (36)$$

El primer término de la (35) es la contribución de la aceleración centrípeta. Al anular este término, se llega:

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} t' \right) = 0 \Rightarrow t' = 15 \text{seg}$$

que a los 15seg la contribución cambia de signo (de antihoraria a horaria). De todas formas, su contribución es despreciable frente a la contribución del par gravitatorio de $125\sqrt{2}\text{Nm}$. Asimismo, anulando el factor del coseno en la ecuación (36), se llega a que a los 30 seg el par τ_2 es nulo y el eslabón 2 adopta la configuración vertical ($q_2 = 90^\circ$) de la figura (9).

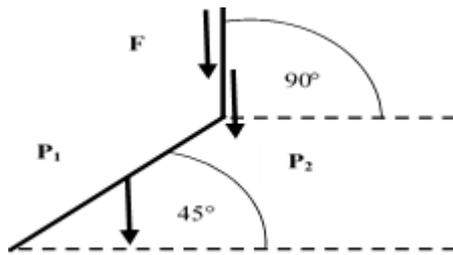


Figura 9. Configuración vertical para el eslabón 2

Cabe señalar desde el punto de vista mecánico; qué si bien el par τ_2 es nulo para esta configuración, se debe tener en cuenta que la fuerza \mathbf{F} y \mathbf{P}_2 se aplican en forma directa sobre la articulación 2. Por lo tanto, es necesario estudiar el efecto que producen ambas fuerzas en conjunto sobre dicha articulación.

4. Conclusiones

Se extraen las siguientes conclusiones: 1) el problema analizado en el modelo de proceso de investigación de la figura (2). 2) se emplean tópicos fundamentales de la Mecánica Analítica como las coordenadas generalizadas y el principio de los trabajos virtuales. 3) se propone la implementación de un proceso metodológico para el análisis dinámico de robots manipuladores en base a la formulación Lagrangiana. 4) se realiza un análisis de caso para un robot manipulador de dos grados de libertad en el marco del proceso metodológico propuesto. 5) se presenta una discusión de los resultados obtenidos en términos de pares y aceleraciones articulares teniendo como base distintas configuraciones del dispositivo; tanto en situación de equilibrio como de movimiento.

Como futuras líneas de investigación: 1) se continua con el desarrollo de la tercera fase del proceso metodológico; tanto en lo que se refiere a la reformulación de parámetros dinámicos, como en el diseño de los algoritmos de control. 2) en línea con el punto anterior, se está estudiando la determinación de los valores de parámetros dinámicos del robot (momentos de inercia, centros de masa y coeficientes de fricción) mediante técnicas de identificación paramétrica, tales como modelos de regresión. 3) se está trabajando en el diseño y evaluación de diversos algoritmos de control, haciendo uso de los pares de torsión obtenidos como entrada al sistema. 4) se continúan las pruebas del modelo analítico obtenido en banco experimental donde los eslabones, actuadores y sistemas de transmisión se construyen en el laboratorio de nuestra facultad. 5) se está trabajando en la introducción de fricciones viscosas en las articulaciones, y así medir la respuesta del sistema en condiciones similares a los casos experimentales estudiados en condiciones ideales.

5. Referencias

- [1] Saltaren, R., “Robótica Aplicada. Analisis y Diseño de Robots Paralelos y Seriales con Matlab”. Ed. Dextra, 2014.
- [2] Reyes Cortés, F., “Mecatrónica, Control y Automatización”. Ed. Alfaomega, México, 2013.
- [3] Sanmiguel Rojas, E. Hidalgo Martines, M. “Análisis de Mecanismos”. Ed. Paraninfo, España, 2014.
- [4] Meriam, J.L. “Mecánica para ingenieros, Dinámica. Ed. Reverte. Estados Unidos, 2020
- [5] Taylor, J., “Mecánica Clásica”. Ed. Reverte, España, 2018.
- [6] Miranda Colorado, R., “Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2016.
- [7] Chen, V. T., “Linear System Theory and Desing”, Oxford University Press, Estados Unidos, 4° Edicion, 2012.
- [8] Ray, S. and Shamanna, J. “On virtual displacement and virtual work in lagrangian dynamics”, European Journal of Physics, vol. 27, 2006.
- [9] Kelly, R., “Control de Robots Manipuladores”. Ed. Pearson Prentice Hall, España, 2003.
- [10] Reyes Cortés, F., “Robótica – Control de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2011
- [11] A Review of Fundamentals of Lyapunov Theory. Chutipon Pukdeboon. The Journal of Applied Science, [2011] Vol. 10 No. 2