

Diseño de filtros modales considerando el posicionamiento óptimo de los acelerómetros

Federico R. Masch¹, Rogelio L. Hecker^{1,2}

¹Facultad de Ingeniería, UNLPam, Argentina. Email: maschfederico@ing.unlpam.edu.ar

²CONICET, Argentina. Email: hecker@ing.unlpam.edu.ar

Resumen

Los filtros modales discretos se constituyen a partir de una suma ponderada de las señales de salida de sensores instalados sobre una estructura flexible. Las posiciones de los sensores resultan preponderantes en el desempeño del filtro, en especial cuando la cantidad de sensores utilizados es menor a la cantidad de componentes modales que se desean manipular. En este trabajo se presenta una nueva metodología de diseño de filtros modales discretos que optimiza las posiciones de los sensores para mejorar el desempeño de dichos filtros, aplicados a estructuras flexibles sometidas a múltiples fuerzas de excitación.

Primero, la metodología propuesta determina las posiciones de un número determinado de acelerómetros y sus ganancias para que el filtro pueda aislar lo mejor posible los modos de vibración en cada una de sus salidas. Para ello se implementa un criterio de mínimo error, utilizando la norma L_2 , entre la señal de salida del sistema nominal y la una salida deseada, para cada una de las posibles configuraciones de los acelerómetros. Después de esto, se implementa un índice de desempeño que permite comparar la efectividad del filtro para diferente número de acelerómetros. Dicha metodología se implementó y se evaluó mediante simulaciones en el diseño de un filtro modal discreto sobre una viga esbelta flexible en una configuración de extremos empotrado-libre. Se presentan los resultados con 1, 3 y 5 acelerómetros ubicados de una manera óptima sobre la estructura flexible. Los resultados evidencian que es posible diseñar un filtro modal con menos cantidad de acelerómetros que la cantidad de modos de vibración considerados en el modelo.

Palabras clave: filtro modal; ubicación de acelerómetros

Abstract

Discrete modal filters are built as a weighted summation of signals from sensors installed on a flexible structure. The positions of the sensors are relevant for the filter performance, particularly when the number of sensors is lower than the numbers of the considered system modes. In this work, a new methodology to design discrete modal filters is presented that optimize the position of the sensors to improve the performance when multiple input forces are considered.

First, the proposed methodology determines the positions of a given number of accelerometers and their gains so that the filter can best isolate the vibration modes in each of its outputs. For this, a minimum error criterion is implemented, using the L_2 norm, between the nominal system output signal and the desired output, for each of the possible accelerometer configurations. After this, a performance index is implemented that allows comparing the effectiveness of the filter for different numbers of accelerometers. This methodology was implemented and evaluated through simulations in the design of a discrete modal filter on a slender flexible beam in a free-embedded end configuration. The results are presented with 1, 3 and 5 accelerometers optimally located on the flexible structure. The results show that it is possible to design a modal filter with fewer accelerometers than the number of vibration modes considered in the model.

Keywords: modal filter; accelerometer locations

1. Introducción

Las señales de salida de un filtro modal discreto se conforman a partir de una suma ponderada de las señales de un conjunto de sensores instalados sobre una estructura flexible, de manera tal de obtener una determinada composición modal en las salidas del filtro Meirovitch and Baruh [1]. En este sentido, con un filtro modal discreto se pueden manipular de manera independiente las componentes modales de un conjunto finito de modos de vibración en sus señales de salida.

En los años posteriores a la introducción del filtro modal discreto, se han presentado diversas metodologías de diseño e implementaciones en campos diversos como: control activo de vibraciones, identificación de parámetros modales, monitoreo de vibraciones, detección de daño estructural y detección de cargas. Por un lado, Shelley [2] brindó una metodología con la cual determinar las ganancias de estos filtros en base a las respuestas en frecuencia de la estructura flexible obtenidas de manera experimental. Preumont et al. [3], propuso también una metodología similar basada en respuestas en frecuencia experimentales y teóricas, estableciendo que el número de sensores debe ser al menos igual a la cantidad de componentes modales que se desean manipular de manera independiente por parte del filtro. En tanto Gawronski [4] y Friswell [5], propusieron metodologías basadas a partir de la utilización de modelos en variables de estado de la dinámica de la estructura flexible. La determinación de las ganancias del filtro en estas metodologías es abordada en base al concepto de señal error nula, es decir una diferencia nula entre las señales de salida deseadas y las señales de salida reales del filtro. En todas estas metodologías, las posiciones de los sensores no son consideradas variables de diseño. Esto se debe, a la premisa de disponer de una cantidad de sensores igual o mayor a la cantidad de modos cuyas componentes modales se desean manipular, la cual le otorga al filtro la invarianza en su desempeño con respecto a las posiciones adoptadas para los sensores.

Posteriormente, Pagani Jr y Trindade [6] demostraron que mediante una adecuada selección de la posición de los sensores, es posible establecer una composición modal deseada en las señales de salida del filtro, con una cantidad de sensores menor a la cantidad de componentes modales manipuladas por el filtro. Su metodología utiliza un enfoque similar a Preumont et al. [3], en tanto al abordaje del diseño a partir de la discretización del dominio frecuencial de respuestas teóricas. En un trabajo posterior, Trindade y Pagani Jr. [7] presentan resultados numéricos y experimentales del impacto de las incertidumbres en la posición de los sensores y las ganancias del filtro en el desempeño de este último. Continuando con esta línea de trabajo,

Shigueoka and Trindade [8], aborda la determinación de la configuración adecuada de posiciones de los sensores a partir de un dominio continuo de posiciones candidatas. Tanto el trabajo de Pagani Jr y Trindade [6] como el trabajo de Shigueoka and Trindade [8], abordan el caso de diseño donde la estructura flexible se encuentra sometida a una única fuerza de excitación externa.

En este trabajo se presenta una nueva metodología de diseño para filtros modales discretos, en la cual las posiciones de los sensores son consideradas variables de diseño. La metodología se apoya en la utilización de un modelo en variables de estado para describir la dinámica de la estructura flexible. Esta adopción permite por un lado lidiar con el diseño de filtros en casos de estructuras flexibles sometidas a múltiples fuerzas de excitación. Por otro lado, el diseño del filtro propuesto en el dominio temporal, elimina la problemática en la sensibilidad del diseño con respecto a la discretización del dominio frecuencial, como puede pasar en las metodologías mencionadas.

La metodología propuesta determina las ganancias del filtro y las posiciones de los sensores a partir del criterio de minimización de la diferencia entre las señales de las salidas deseadas del filtro y las señales de las salidas teóricas del filtro, usando el concepto de la norma L_2 . La metodología se valida de forma numérica y para el caso del diseño de un filtro modal cuyo objetivo es aislar las componentes modales de aceleración del primer y segundo modo de vibración de una viga flexible de sección rectangular constante, en una configuración de extremos empotrada-libre, sujeta a dos fuerzas externas.

2. Dinámica nominal

La dinámica nominal que describe las vibraciones de un cuerpo flexible sujeto a fuerzas externas se puede representar en variables de estado mediante la siguiente expresión

$$\dot{x} = Ax + B_k u \quad (1.1)$$

donde el vector x reúne los estados asociados a n modos de vibración, el cual está dado por $x = [\omega_1 q_1 \dot{q}_1 \omega_2 q_2 \dot{q}_2 \cdots \omega_n q_n \dot{q}_n]$. Donde la variable q_j el estado del j -modo de vibración de la estructura flexible, el cual tiene una frecuencia ω_j de resonancia, un factor de amortiguamiento ζ_j y una forma de modo ϕ_j asociado.

Las matrices A y B se definen como

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) \quad (1.2)$$

$$B = [B_1, B_2, B_3, \dots, B_n]^T \quad (1.3)$$

Donde

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & -2\omega_j\zeta_j \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$B_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_j(p_1) & \phi_j(p_2) & \dots & \phi_j(p_{n_u}) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Donde cada p_j denota la ubicación de las fuerzas externas.

Por otro lado, la salida de los acelerómetros en función de las variables de estado y de las entradas de excitación, se puede describir como

$$s_k = C_k x + D_k u \quad (2.1)$$

Por lo tanto, el vector s_k reúne la salida de n_s acelerómetros. Tanto en (1.1) como en (2.1), el subíndice k se usa para distinguir diferentes combinaciones de las posiciones de n_u entradas, expresadas en el vector u , con posibles posiciones de los n_s acelerómetros. Por conveniencia las siguientes matrices se expresan como:

$$\begin{aligned} C_k &= P_k R \\ D_k &= P_k V_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donde la matriz P_k reúne la contribución en magnitud de cada forma de modo, ϕ_j , en la ubicación r_i de cada uno de los acelerómetros. Por lo tanto, cada elemento queda definido como

$$P_{k(ij)} = \phi_j(r_i) \quad i = 1, 2, \dots, n_s \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Por otro lado, R y V_k , para el caso de usar acelerómetros quedan definidas como:

$$\begin{aligned} R &= \Delta A \\ V_k &= \Delta B_k \end{aligned} \quad (2.4)$$

Donde $\Delta_{(ij)} = \delta_{i(j-1)}$ es la delta de kronecker. En la práctica se puede tener el caso de que los acelerómetros presenten un determinado ancho de banda o que se quiera filtrar la salida de los mismos para no tener influencia del ruido de las señales. En estos casos, se puede asumir la aplicación de un filtro de primer orden, que incorporado a la dinámica del sistema nominal (1.1) y (2.1) y reordenando se puede expresar como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_k u \\ \dot{x}_f &= -\alpha I x_f + Rx + V_k u \\ s_{kf} &= P_k x_f \end{aligned} \quad (3)$$

donde x_f es una variable intermedia para poder introducir la dinámica del filtro. La frecuencia de corte de este filtro de primer orden queda representada por $f_c = \alpha / 2\pi$. Como se puede observar, el vector s_{kf} reúne las salidas filtradas de cada uno de los acelerómetros.

3. Propuesta de filtro e índice de evaluación

3.1 Diseño del filtro modal

En un filtro modal, la salida de los acelerómetros s_{kf} se pueden combinar linealmente para obtener un vector de salida y_{kf} , de la siguiente manera

$$y_{kf} = \Omega s_{kf} \quad (4)$$

Por lo tanto, los elementos de la matriz Ω representan la ponderación de cada acelerómetro para poder obtener cada una de las salidas del filtro modal. Lo que se pretende es seleccionar estos elementos de tal manera que en cada salida de este filtro se obtenga la presencia de un solo modo de vibración. Por ejemplo, que el primer elemento del vector y_{kf} presente solamente la dinámica del modo 1 y así sucesivamente para todos los modos que se pretendan incluir.

Para encontrar los valores de la matriz Ω que cumpla con este objetivo, se parte de que la salida del filtro modal para el sistema nominal, y_k , tiene que ser igual o lo más próximo posible a la salida homóloga para una dinámica deseado, y_d . En base a esto se establece como sistema deseado a

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= Ax_d + B_k u \\ \dot{x}_{df} &= -\alpha I x_{df} + Rx_d + V_k u \\ y_{df} &= P_d x_{df} \end{aligned} \quad (5)$$

Como se puede observar, este sistema tiene la misma dinámica que el sistema nominal pero la construcción del filtro se hace con la matriz P_d , la cual se puede especificar fácilmente para establecer una correlación directa entre los modos de vibración y la salida deseada del filtro modal, como se verá luego en la implementación.

Combinando los sistemas (3) y (5) se puede construir un único sistema, definiendo además al error entre la salida de ambos sistemas $e_{kf} = y_{kf} - y_{df}$, resultando en

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \\ \dot{x}_f \\ \dot{x}_{df} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ R & 0 & -\alpha I & 0 \\ 0 & R & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \\ x_f \\ x_{df} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_k \\ B_k \\ V_k \\ V_k \end{bmatrix} u \quad (6)$$

$$e_{kf} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega P_k & -P_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \\ x_f \\ x_{df} \end{bmatrix}$$

Que de manera simplificada se puede escribir como $\dot{z} = A_e z + B_e u$ y $e_{kf} = C_e z$. Ahora se pretende encontrar los valores de Ω de tal manera de minimizar el error e_{kf} para lo cual se usará la norma L_2 . La interpretación de la norma L_2 en este caso se da a través de su definición:

$$\|e_{kf}\|_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j \|e_{kf(ij)}\|_2^2} \quad (7)$$

$$\|e_{kf(ij)}\|_2^2 = \int_0^\infty e_{kf(ij)}^2(t) dt \quad (8)$$

Donde claramente, en (7) se puede observar la contribución al error de las combinaciones posibles entre todas las n_u entradas las n_y salidas del filtro. En (8) se observa la contribución temporal de cada uno de los mencionados errores.

Para el cálculo de esta norma se usa la siguiente expresión

$$\|e_{kf}\|_2 = \left(\text{tr}(C_e W C_e^T) \right)^{1/2} \quad (9)$$

Donde W es una matriz simétrica semidefinida positiva denominada Graminiano de controlabilidad, la cual es solución de la siguiente ecuación de Lyapunov

$$W A_e + A_e^T W + B_e B_e^T = 0 \quad (10)$$

La solución a este problema, o sea el valor de Ω que minimiza la norma L_2 , se calcula como

$$\Omega^* = Y^T X^{-1} \quad (11.a)$$

donde

$$Y = P_k Q_{11} P_k^T \quad (11.b)$$

$$X = P_k Q_{12} P_d^T$$

$$W_{22} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (11.c)$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \quad (11.d)$$

Donde como referencia a las particiones de las matrices se especifica que $W \in R^{6n \times 6n}$, $W_{22} \in R^{2n \times 2n}$, $Q_{11} \in R^{n \times n}$ y $Q_{12} \in R^{n \times n}$.

La ecuación (11.a) representa una solución genérica al problema planteado, donde la cantidad de sensores puede ser menor a la cantidad de modos que se pretenden manipular con el filtro modal. En el caso particular que se tenga la misma cantidad de sensores que la cantidad de modos a manipular, esta solución converge a la ya conocida expresión de

$$\Omega^{**} = P_d P_k^{-1} \quad (12)$$

Lo que se conoce como filtro perfecto ya que en teoría la norma L_2 del error es igual a cero. Sin embargo, en este trabajo se aborda el problema general de cuando se poseen menos sensores que los modos a estudiar.

3.2 Índice de evaluación

En la sección anterior se encontró el filtro modal óptimo para una dada configuración de fuerzas externas y de acelerómetros sobre el cuerpo flexible. La pregunta que surge es si existe una configuración de acelerómetros que sea la mejor para el desempeño del filtro modal dado un cuerpo flexible con una configuración determinada de fuerzas externas. También surge la pregunta de cuántos acelerómetros son necesarios para obtener una respuesta aceptable del filtro modal.

Por lo tanto, se propone evaluar diferentes configuraciones y cantidad de los acelerómetros en base al siguiente índice de desempeño

$$I_k = \frac{\|e_{kf}(\Omega^*)\|_2}{\|y_{df}\|_2} \quad (13)$$

Como se puede observar, este índice evalúa la norma L_2 del error mínimo que se obtuvo para una configuración dada de acelerómetros dividido por la norma L_2 de la salida deseada del filtro modal. Esta última medida se calcula de manera estándar como

$$\|y_{df}\|_2 = \sqrt{\text{tr}(P_d W_d P_d^T)} \quad (14)$$

Donde W_d

$$A_d W_d + W_d A_d^T + B_d B_d^T = 0 \quad (14.a)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} A & 0 \\ R & -\alpha I \end{bmatrix} \quad (14.b)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} B_k \\ V_k \end{bmatrix} \quad (14.c)$$

Por lo tanto, el procedimiento completo es proponer una cantidad y configuraciones posibles de acelerómetros, calcular el filtro modal óptimo para cada configuración y elegir la configuración con el menor valor del índice de desempeño.

4. Implementación y resultados

4.1 Sistema a estudiar y especificaciones del filtro

Para la implementación de la técnica descrita se realizaron simulaciones a partir de la dinámica de una viga empotrada-libre. La viga posee una longitud de 2000 mm y una sección rectangular dada por su alto de 51.4 mm por un ancho de 5.1 mm. La viga es de acero con una densidad de 7850 kg/m³ y módulo elástico de 200 GPa.

A partir de la teoría Euler-Bernoulli para vigas esbeltas se dispone de una solución analítica que determina las frecuencias naturales de dicha viga, de las cuales en este caso se consideró evaluar solamente las 6 primeras, como se observa en la Tabla 1. También de forma analítica se determinan las formas de los modos de vibración en función de la longitud de la barra.

Tabla 1: frecuencias naturales de la barra en estudio

Modos	1	2	3	4	5	6
f [Hz]	1.1	6.6	18.5	36.3	60.0	89.7

En base a estos parámetros, se obtienen las matrices A , B_k , C_k y D_k del modelo nominal. Para el cálculo de esta dinámica se consideró un modelo proporcional para el mecanismo de disipación, para lo cual se usó un valor del coeficiente de amortiguamiento de $\zeta_j = 0.005$ para todos los modos considerados. También se estableció que los acelerómetros poseen un filtro de primer orden con una frecuencia de corte $f_c=500$ Hz. Se consideró que existen dos fuerzas externas ubicadas a 1.30 m y 1.75 m medidos desde el extremo empotrado.

Se establece la siguiente matriz para el modelo deseado expresado en (7)

$$P_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Con lo cual queda claro que el filtro modal posee dos salidas deseadas, donde la primera contiene al primer modo y la segunda al segundo modo. Esto establece el objetivo del filtro modal que se va a diseñar.

En este caso se pretende estudiar cual sería la cantidad mínima y la ubicación de los acelerómetros para

obtener una respuesta aceptable del filtro modal en base al objetivo ya mencionado. Para ello se van a estudiar los casos de 1, 3 y 5 acelerómetros. Se establece que cada acelerómetro se puede instalar en 37 posibles posiciones equidistantes sobre la cara lateral de la viga. Por lo tanto, el primer paso de la metodología propuesta es calcular la matriz Ω para cada una de las combinaciones posibles de posiciones de los sensores. Esto es, para el caso de 1 acelerómetro se tiene que calcular la matriz Ω para las 37 combinaciones posibles, para 3 acelerómetros hay 7.770 combinaciones y para 5 acelerómetros hay 435.897 combinaciones. Luego se encuentra cual es la matriz Ω^* para cada caso, o sea para 1, 3 y 5 acelerómetros y se calcula el índice de desempeño para los tres casos, para de esta manera compararlos entre ellos. Todos estos cálculos se han implementado de manera numérica.

4.2 Análisis de la cantidad de acelerómetros

Como se ha mencionado, al implementarse la metodología propuesta, se encuentran las ganancias del filtro modal óptimo para cada caso. En la Tabla 2 se muestra la ubicación óptima de un único acelerómetro, las ganancias de los canales del filtro modal y el índice de evaluación para este único caso. Cabe aclarar que las ganancias de los canales son los elementos de la matriz Ω^* , donde se puede observar que dicha matriz será de 2x1 ya que el filtro tiene dos salidas y una entrada correspondiente al único acelerómetro.

Tabla 2. Datos del filtro con 1 acelerómetro

Sensor	1
Posición [m]	1.85
Ganancia canal 1	0.43
Ganancia canal 2	0.43
I_k	0.64

En la Tabla 3 se pueden observar los mismos parámetros pero para el caso de 3 acelerómetros, con lo cual aquí la matriz Ω^* es de dimensión 2x3.

Tabla 3. Datos del filtro con 3 acelerómetro

Sensor	1	2	3
Posición [m]	0.95	1.4	1.85
Ganancia canal 1	0.34	0.52	0.69
Ganancia canal 2	0.45	0.29	-0.45
I_k	0.098		

Por otro lado, en la Tabla 4 se presenta el caso para 5 acelerómetros donde la matriz Ω^* posee una dimensión de 2x5.

Tabla 4. Datos del filtro con 5 acelerómetro

Sensor	1	2	3	4	5
Posición [m]	0.6	1.15	1.2	1.4	1.85
Ganancia canal 1	0.14	1.76	-1.77	0.84	0.63
Ganancia canal 2	0.51	2.65	-2.35	0.50	-0.47
I_k	$1.64 \cdot 10^{-6}$				

Claramente se puede observar que a medida que se aumenta la cantidad de acelerómetros el índice de desempeño mejora considerablemente. En otras palabras, las salidas del filtro modal implementado tienen mayor semejanza con el comportamiento del modelo deseado. Para poder visualizar esta situación, se presentan a continuación la respuesta en frecuencia de las dos salidas del filtro modal para las dos entradas consideradas y para cada uno de los casos.

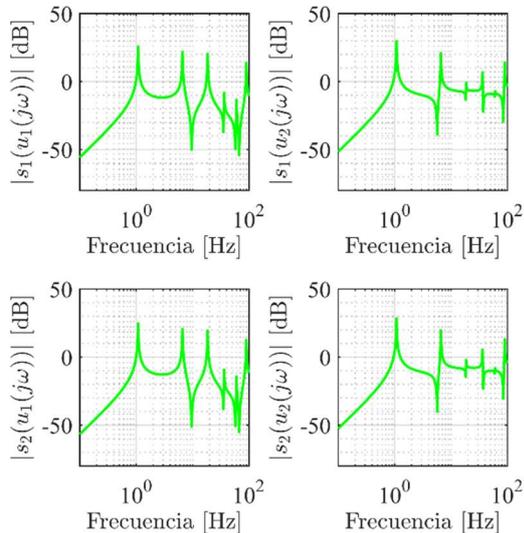


Figura 1: respuesta óptima del filtro con 1 acelerómetro

En la Figura 1 se visualiza las respuestas de $s_i(u_j)$ donde cada s_i representa a las salidas del filtro en función de las dos entradas denotadas por cada u_j . Se observa que con un solo acelerómetro, a pesar de estar ubicado en un lugar óptimo, no cumple con el objetivo, ya que no se puede aislar de manera clara el modo 1 en la salida 1 ni el modo 2 en la salida 2, para ninguna de las dos entradas.

En tanto que en la Figura 2 se muestran las respuestas para el caso de 3 acelerómetros. Se puede observar que la salida 1 del filtro aísla de una manera aceptable al modo 1 en la salida 1 para ambas entradas. Por otro lado, el modo 2 se ve magnificado respecto al resto de los modos en la salida 2 del filtro, para ambas entradas, sin embargo persiste la presencia del modo 1 y 3, lo cual podría no ser aceptable para el objetivo planteado.

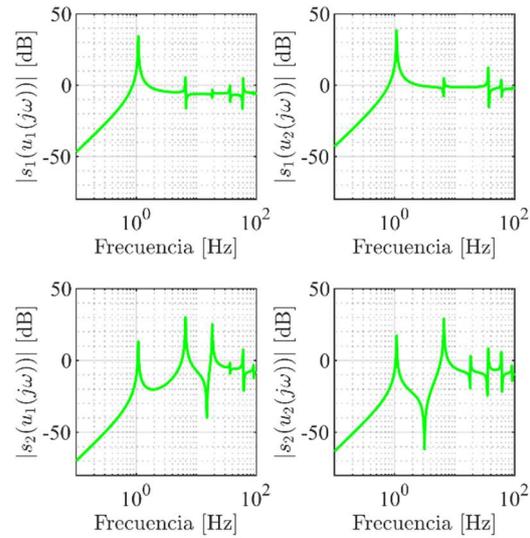


Figura 2: respuesta óptima del filtro con 3 acelerómetro

En cambio, en la Figura 3 se presenta la respuesta para el caso de 5 acelerómetros. Aquí se observa un perfecto aislamiento del modo 1 en la salida 1 y del modo 2 en la salida 2, para ambas fuerzas externas.

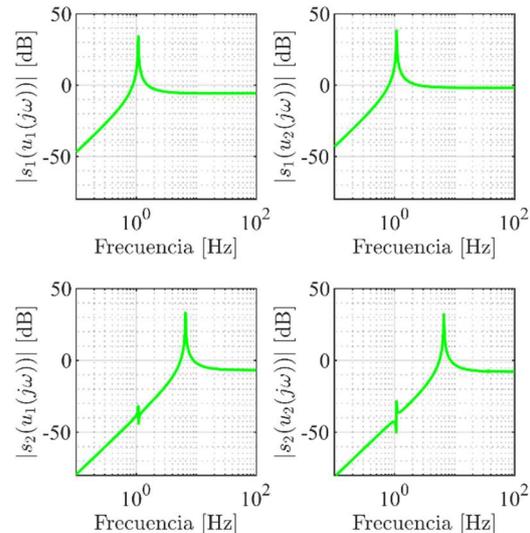


Figura 3: respuesta óptima del filtro con 5 acelerómetro

4.3 Análisis de la posición de los acelerómetros

En los resultados precedentes se ha estudiado la respuesta del filtro para diferente cantidad de acelerómetros, donde en cada caso se mostró la configuración óptima de los mismos. Cabe la pregunta de que pasa con la respuesta del filtro si la posición de los acelerómetros no es la óptima. Para ello se ha estudiado el último caso presentado de 5 acelerómetros, donde ahora la Figura 6 muestra la respuesta del filtro para 3 configuraciones de ubicaciones de los acelerómetros.

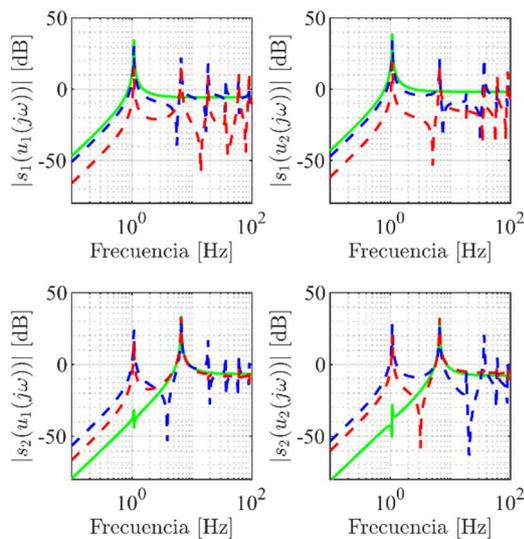


Figura 4: respuestas del filtro con 5 acelerómetros para tres casos: I_k óptimo (línea verde), intermedio (línea azul) y desfavorable (línea roja)

Para un lado está la configuración óptima con $I_k=1.64E10^{-6}$, más dos configuraciones desfavorables, elegidas con un valor intermedio de $I_k=0.25$ y un valor alto de $I_k=0.50$. Claramente, la respuesta del filtro resulta óptima para la configuración de los acelerómetros con el menor índice de desempeño, en especial para el caso de la salida 2 del filtro.

5 Conclusiones

Se ha presentado el diseño de un filtro modal donde el número de acelerómetros puede ser menor a la cantidad de modos de vibración considerados. De esta manera, se plantea como obtener la matriz de ganancia del filtro en base a un problema de minimización del error entre la respuesta obtenida y la respuesta deseada del filtro. En este caso particular, se estableció el objetivo de aislar diferentes modos de vibración en cada salida del filtro modal, para el caso de múltiples entradas de excitación. De esta manera, la metodología planteada permite encontrar la mínima cantidad de acelerómetros y su configuración óptima para poder cumplir con la respuesta deseada del filtro.

Referencias

- [1] L. Meirovitch, H. Baruh, The implementation of modal filters for control of structures, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 8 (6) (1985) 707–716, <https://doi.org/10.2514/3.20045>
- [2] Stuart J. Shelley, Investigation of discrete modal filters for structural dynamic applications, PhD thesis, University of Cincinnati, 1992.

- [3] André Preumont, Arnaud François, Pierre De Man, Vincent Piefort, Spatial filters in structural control, *Journal of Sound and Vibration* 265 (1) (2003) 61–79, [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01440-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01440-2)

- [4] W. Gawronski, Modal actuators and sensors, *Journal of Sound and Vibration* 229 (4) (2000) 1013–1022, <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2499>.

- [5] M.I. Friswell, On the design of modal actuators and sensors, *Journal of Sound and Vibration* 241 (3) (2001) 361–372.

- [6] Carlos C Pagani Jr, Marcelo A Trindade, Optimization of modal filters based on arrays of piezoelectric sensors, *Smart Materials and Structures* 18 (9) (2009), <https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/9/095046> 095046.

- [7] Marcelo A. Trindade, Carlos C. Pagani Jr, Leopoldo P.R. Oliveira, Ernesto Massaroppi Jr., Effect of parametric uncertainties on the effectiveness of discrete piezoelectric spatial modal filters, *International Journal for Uncertainty Quantification*, 3 (6) (2013).

- [8] Augusto Hirao Shigueoka, Marcelo Areias Trindade, Continuous optimization of discrete modal filters applied to flexible structures, in: *Em: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2014)*, 2014.