

Controles Adaptativos basados en Modelo de Referencia: Nuevos Recursos Hardware Software para su implementación

Gerardo Peláez Lourido¹, Higinio Rubio Alonso², Alejandro Bustos Caballero³, Juan C. García-Prada³

¹MaqLab, Dept. Ingeniería Mecánica, Universidad de Vigo, España. Email: gpelaez@uvigo.es

²MaqLab, Dept Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, España. Email: hrubio@ing.uc3m.es

³MaqLab, Dept. de Mecánica, UNED, España. Email: jcgprada@ind.uned.es

Resumen

Este trabajo desarrolla un control no lineal basado en modelo de referencia (MRC) y Lyapunov. Este MRC puede acomodarse a las variaciones de las frecuencias naturales de un brazo robotizado flexible cuando cambia la carga que se transporta en su extremo. Se utiliza el método de matrices de transferencia para obtener las formas modales, las frecuencias naturales y los rangos de variación de éstas. Con ellas se diseña el control MRC que de acuerdo con el segundo método de Lyapunov debe mantener la derivada de la función potencial del error entre los estados del modelo y los del sistema real negativa para que el sistema sea estable.

Palabras clave: Modelo de Referencia; Método de Matrices de Transferencia; Lyapunov; H7.

Abstract

This work develops a nonlinear Model Reference Control (MRC) Lyapunov based. The MRC can accommodate variations in the natural frequencies of a flexible robotic arm when the payload carried at its end changes. The transfer matrix method is used to obtain the mode shapes, the natural frequencies and their variation ranges. With them, the MRC control is designed which, according to Lyapunov's second method, must keep the derivative of the potential function of the error between the states of the model and those of the real system negative for the system to be stable.

Keywords: Model Reference Control; Transfer Matrix Method; Lyapunov; H7;

1. Introducción

1.1 Antecedentes y Motivación

Robots de eslabones rígidos diseñados para operar de forma autónoma o con conducción limitada, que son el tipo de robots industriales más implantados hasta la década de 2010, han sido ampliamente utilizados en automatización industrial. Sin embargo, para conseguir alta precisión de posicionamiento la razón entre su propio peso y el de la carga debe ser elevada y la velocidad de operación es habitualmente baja. Además el consumo de energía para operar estos robots pesados es elevado. Estas desventajas limitan de forma considerable la utilización de estos robots en los casos en que altas velocidades, alta precisión y bajo consumo de energía son necesarios. Las soluciones incluyen Delta Robots y manipuladores flexibles ligeros

robotizados. Los motores empleados para controlar los brazos de los robots Delta se localizan en el cuerpo principal del robot en oposición a la localización en los brazos. Esto consigue que casi toda su masa sea estacionaria, facilitando que sus brazos sean extremadamente ligeros. Por otra parte los manipuladores de brazos flexibles robotizados tienen un número de ventajas potenciales, tales como operación más rápida, bajo consumo de energía, y una alta capacidad de carga relativa a su propio peso. Para estos grupos de robots, los eslabones flexibles experimentarían deflexiones durante el movimiento causadas por su propia flexibilidad. En relación al modelo de manipulador de la Figura 1 se aprecia que una sección de la viga cantiléver tiene una desviación $W(x,t)$ respecto de la posición sin deformar y por lo tanto el movimiento de esa sección no está completamente determinado por el ángulo en la junta

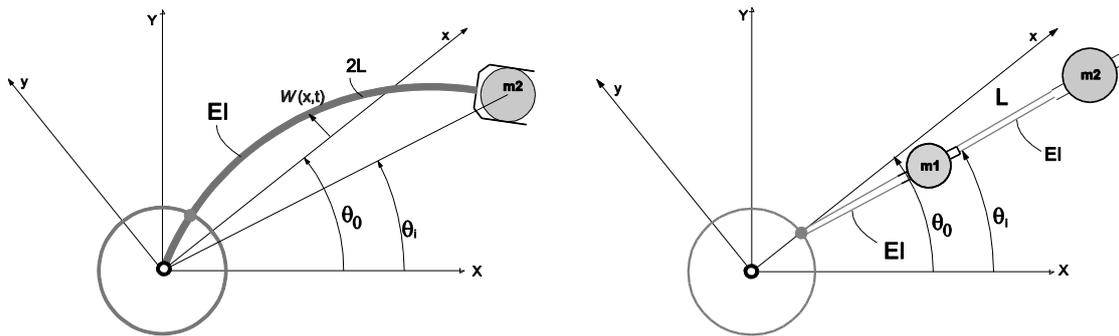


Figura 1. Modelos continuo y discreto de un manipulador robotizado flexible. Condiciones: (X, Y) sistema de referencia inercial, (x, y) ejes móviles, $W(x, t)$ elástica de la viga cantiléver, $\Theta(t)$ ángulo de giro de los ejes móviles (x, y) respecto a los ejes fijos (X, Y) .

Θ_0 , por lo tanto un número infinito de $W(x, t)$ son necesarios para describir el movimiento de la viga cantiléver flexible. Si este es el caso el objetivo de control es más complejo ya que el número de variables a controlar es mucho mayor que el número de entradas de control [1].

1.2 Trabajos Previos

A finales de los años 90 Howell y Midha [2] propusieron el concepto de cuerpo pseudo-rígido para vigas esbeltas cargadas en el extremo que promovió el desarrollo de mecanismos flexibles. Aplicaciones tales como reorientar un brazo robotizado flexible, transportando diferentes cargas en el extremo, requieren giros considerables con supresión de los modos de vibración flexibles asociados a la viga cantiléver como se muestra en la Figura 1. Por lo cual es necesario generar un par T de entrada de movimiento tal que el brazo se reorienta a través de un ángulo deseado Θ_0 , mientras que se mantienen las desviaciones entre la fase angular de la carga Θ_1 relativa a Θ_0 pequeñas a través del movimiento y tiendan a cero al final del giro.

Cuando la flexibilidad o elasticidad es deseable recurrir a técnicas de control que mitiguen las deflexiones y la vibración residual al finalizar el movimiento es primordial. Un elevado número de trabajos se han realizado en este campo de investigación aplicada. Las soluciones incluyen:

- Técnicas pasivas consistentes en añadir damping a las juntas cinemáticas flexibles[3]
- Técnicas semi-activas empleando dispositivos sintonizados para extraer la energía de la vibración del sistema en algunas frecuencias [4].
- Técnicas activas involucrando una distribución adecuada de sensores y actuadores en orden a estimar en tiempo real la deflexión del conjunto manipulador flexible [5].

Con referencia al último caso, el control de sistemas flexibles recae en:

- Aplicar técnicas de control lineal al modelo discretizado del sistema, en este caso el modelo de parámetros agrupados obtenido del análisis modal.
- Aplicar control distribuido empleando sensores y actuadores inteligentes.
- Utilizar estrategias de control adaptativo con fronteras de estabilidad.

La desventaja inicial del control distribuido es que la sensorización y la actuación son costosas de implementar. En contraste las estrategias de control adaptativo con fronteras requieren relativamente menos sensores y los actuadores pueden ser más asequibles [6]. Por estos argumentos este trabajo limita la discusión a las estrategias de control adaptativo con fronteras de estabilidad recayendo en el método directo de Lyapunov y en la regla del MIT. Esto es, a pesar de las no-linealidades, y de los efectos de la flexibilidad asociados la elasticidad del sistema. Las técnicas basadas en Lyapunov pueden a menudo utilizarse para conseguir la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

En este contexto Model Reference Adaptive Control (MRAC) es una estrategia de control adaptativo en pleno crecimiento, que puede mejorar las prestaciones de sistemas flexibles en presencia de incertidumbres debidas a una variedad de factores, tales como cambios en el propio sistema, degradación e incertidumbres de modelado [7].

El Control Adaptativo tiene una historia de éxitos y algunos fracasos. Los primeros intentos de utilizar técnicas de control adaptativo se remontan a la década de los años sesenta cuando se desarrolló la regla del MIT (MIT-rule) [8][9] basada en intuitivas y quizás ingeniosas ideas, sin embargo los resultados para afrontar el problema de diseñar pilotos automáticos para aeronaves operando en un amplio rango de velocidades y altitudes fue el fatal accidente ocurrido el 15 de noviembre de 1967 con el X-15-3. La razón fue debida a la carencia de conocimientos relativos al análisis de estabilidad cuando se emplean parámetros de control no estacionarios. Los métodos modernos de

análisis de estabilidad desarrollados por Lyapunov a finales de 1907 [10], no eran todavía conocidos en los Estados Unidos [11]. A pesar del fracaso puntual inicial la regla del MIT fue un primer intento de conseguir la ganancia correcta en el instante y situación del sistema adecuados.

Con posterioridad el análisis de estabilidad se convirtió en primordial para el desarrollo del control adaptativo. Importantes ingenieros e investigadores en la década de los setenta tales como Monopoli (1974), Landau (1974) y Farrenkopf (1979) entre otros [12-17] y posteriormente [18-23] elaboraron valiosas contribuciones a la robustez y estabilidad del control adaptativo. Implementaciones más recientes y modestas incluyen: control adaptativo para el control de la oscilación de una grúa con variación de la altura de sustentación y perturbaciones por viento [24]. Diseño de órdenes de movimiento basado en modelo de referencia para el control de la vibración de sistemas flexibles multi-modo con aplicación a un doble péndulo [25] y un estudio inicial del diseño óptimo de órdenes de movimiento para la reducción de la vibración de sistemas multicuerpo flexibles [26].

2. Métodos.

2.1 Método de Myklestad

El problema de estimar las frecuencias naturales y las formas modales de la vibración lateral de una viga cantiléver se resuelve de forma asequible empleando el método de Myklestad basado en matrices de transferencia. Éste es un método de parámetros agrupados que aproxima un cuerpo flexible mediante un conjunto de estaciones puntuales de masa conectadas mediante resortes-viga sin masa que actúan como campos de fuerza. Los coeficientes de estos resortes son funciones de las propiedades del material y de la geometría de estos elementos. Aunque el método de matrices de transferencia de Myklestad puede extenderse a sistemas complejos, es más adecuado para sistemas con una geometría tipo cadena como es el caso del modelo discreto del manipulador flexible robotizado mostrado en la Figura 1. Con referencia a este modelo la matriz de transferencia de un elemento masa que relaciona las variables de estado correspondientes a la flecha Y_i , el giro relativo θ_i , el momento flector M_i y el esfuerzo cortante V_i entre dos nodos consecutivos es:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ V_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_{masa}} * \begin{bmatrix} Y_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ M_{i-1} \\ V_{i-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Por otra parte el elemento viga-resorte se considera de tipo cantiléver cargado en sus extremos, la relación

entre las variables de estado entre nodos consecutivos en secuencia está explicitada por la matriz de transferencia:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ \theta_i \\ M_i \\ V_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \ell & \frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{\ell}{EI} & \frac{\ell^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_{beam}} * \begin{bmatrix} Y_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ M_{i-1} \\ V_{i-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

En este punto hay dos elementos con sus correspondientes matrices de transferencia disponibles para modelar el brazo robotizado. Dos estaciones de masa m_b corresponden a la propia masa del brazo, cuatro elementos viga-resorte modelan su elasticidad y dos masas concentradas m_1 y m_2 modelan la carga como se muestra en la Figura 2.

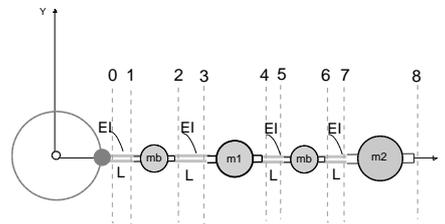


Figura 2: Modelo de Myklestad del brazo robotizado flexible. Condiciones: sección transversal de cada elemento viga $b \times h = 2 \times 20$ [mm], longitud $L = 112.5$ [mm], $m_b = 70$ [gr], $m_1 = 125$ [gr], $m_2 = 250-500$ [gr]

El éxito del análisis mediante el método de matrices de transferencia dependerá de lo preciso de este modelo, de lo ajustadas que sean las condiciones de contorno y de los cálculos matriciales.

2.1.1 Frecuencias Naturales

La dinámica de los brazos robotizados flexibles está estrechamente relacionada con los parámetros de estos sistemas. Consecuentemente variaciones en parámetros tales como la masa en el extremo conducen a variaciones en las frecuencias naturales. Si este es el caso estimar de forma analítica como es la dependencia de las frecuencias respecto de los parámetros facilita el diseño del control adaptativo basado en modelo de referencia y la capacidad de éste para acomodarse a las variaciones en las frecuencias naturales. Con referencia al sistema discretizado de la Figura 2 el modelo analítico se desarrolla en dos pasos. El primero de ellos consiste en estimar el vector de estados en el punto 8 en relación al vector de estado en el punto 0 mediante la multiplicación de las sucesivas matrices de transferencia de la forma indicada en la ecuación (3). Las condiciones de contorno determinan el valor del vector de estados en el nodo 8 el extremo libre de la cadena: $M_8 = 0$ y $V_8 = 0$. Señalar que cada una de las filas de la ecuación matricial (3) es una ecuación de

$$\begin{bmatrix} Y_8 \\ \theta_8 \\ M_8 \\ V_8 \end{bmatrix} = [M_2] [F_b] [M_b] [F_b] [M_1] [F_b] [M_b] [F_b] \begin{bmatrix} Y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

fuerza o de desplazamiento. Las ecuaciones de fuerza determinan la ecuación de frecuencia, mientras que las ecuaciones de desplazamiento determinan las formas modales. Para el primer caso, el de la ecuación de frecuencias, las condiciones de contorno facilitan escribir

$$\begin{bmatrix} M_8 = 0 \\ V_8 = 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,3} & u_{4,4} \end{bmatrix}}_U * \begin{bmatrix} M_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La solución no trivial de este sistema de ecuaciones requiere que

$$\det(U) = 0 \quad (5)$$

En este punto se utilizó computación simbólica para estimar las variaciones de las frecuencias naturales como función de los parámetros físicos inerciales. Asumiendo que la propia masa del elemento viga no es significativa comparada con la masa de la carga en el extremo, se utilizó Maple para resolver la Ecuación (5) empleando su capacidad de cálculo simbólico que resultó en:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{6EI m_1 + 8EI m_2 - EI \sqrt{m_1^2 + 9m_1 m_2 + 64m_2^2}}{7 \ell^3 m_1 m_2} \\ \omega_2 &= \frac{6EI m_1 + 8EI m_2 + EI \sqrt{m_1^2 + 9m_1 m_2 + 64m_2^2}}{7 \ell^3 m_1 m_2} \end{aligned} \quad (6)$$

Como muestra la Figura 3, la frecuencia natural correspondiente al primer modo ω_1 se incrementa según disminuye la carga inercial en el extremo del brazo m_2 desde 1Kgr a 0.2 Kgr, variando en el rango de 1.20 Hz a 4 Hz aproximadamente. Lo cual refuerza la idea de que los cambios en la carga inercial m_2 del extremo del brazo tendrán un considerable efecto en la frecuencia de la vibración correspondiente al primer modo. Sin embargo para una carga en el extremo determinada la razón entre la carga en la mitad del brazo y la del extremo tiene una muy ligera influencia en la primera frecuencia natural del sistema. Esto no sucede en el segundo modo. Tal como demuestra la Figura 4 para una determinada carga en el extremo según se decremanta la razón m_1/m_2 la frecuencia del segundo modo se incrementa de forma exponencial. Esta frecuencia varía en el rango de 15 a 50 Hz cuando ambas variables m_2 y m_1/m_2 lo hacen entre 0.1 y 1.

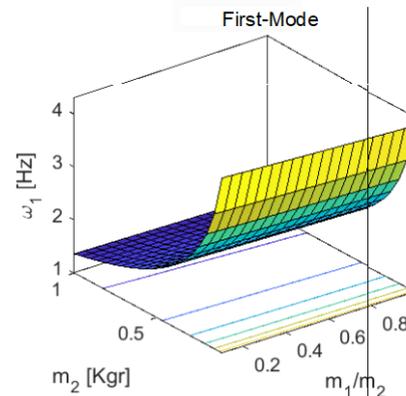


Figura 3.- Variación de la frecuencia natural del primer modo como función de la masa en el extremo m_2 y la razón m_1/m_2

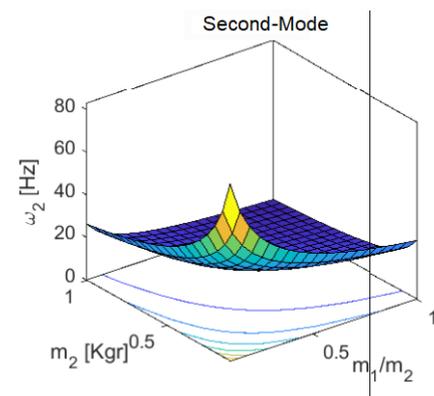


Figura 4.- Variación de la frecuencia natural del segundo modo como función de la masa en el extremo m_2 y la razón m_1/m_2 .

Si se fijan los valores de las cargas inerciales y de los parámetros geométrico-mecánicos de la viga resorte a los valores explicitados en la Tabla 1 las correspondientes formas modales se visualizan en la Figura 5 y sus frecuencias numéricas asociadas se obtienen resolviendo las raíces de la Ecuación (5) tal como se indica en la Figura 6 y la Tabla 2.

Como se ha señalado anteriormente, desde luego que estas raíces están sometidas a posibles variaciones cuando la carga inercial que se transporta en el extremo del brazo también varía. El control del brazo robotizado debe “acomodarse” a estas variaciones pues además de posicionar debe evitar la dinámica indeseada debida a las deflexiones durante el movimiento y a la vibración residual al finalizar éste.

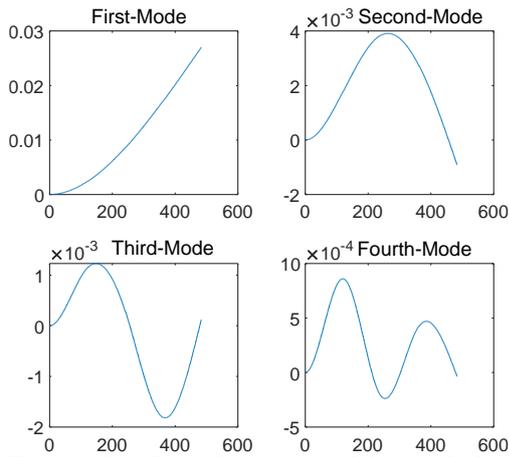


Figura 5.- Las formas modales del brazo robotizado como viga voladiza.

Tabla 1. Parámetros inerciales y geométrico-mecánicos de la viga-resorte.

Variable	Valor	Descripción
m_b	75 [gr]	Masa de ½ viga
m_1	250 [gr]	Masa punto medio
m_2	500 [gr]	Masa extremo
A_{xb}	2x20 [mm]	Sección Viga
I	$1/12 b a^3$ $1.33 \cdot 10^{-11} m^4$	Segundo momento estático sección
E	$205 \cdot 10^9$ Pascal	Módulo de Young (acero).
L	0.450 [m]	Longitud Viga

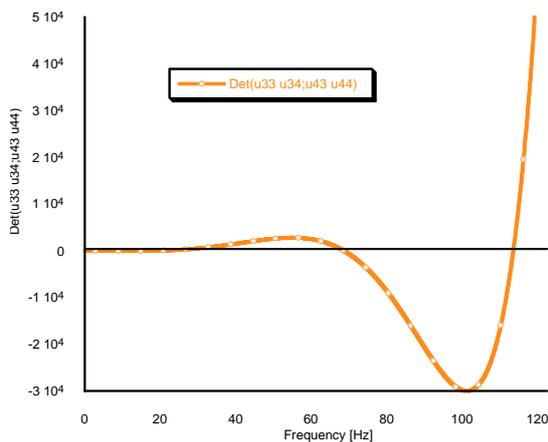


Figura 6.- Las raíces de la ecuación de frecuencias.

2.2 Control con Modelo de Referencia

El concepto básico de control con modelo de referencia (MRC) consiste en diseñar una ley de estabilización de control tal que la salida del sistema real siga lo más posible la salida de un modelo de referencia. Su diagrama de bloques correspondiente se explicita en la Figura 8. En este contexto el término “salida” refiere el

estado más significativo del sistema. El modelo de referencia utilizado en el MRC es el modelo de parámetros agrupados de un brazo robotizado para el cual toda la elasticidad de la viga se concentra en un resorte de torsión vinculado mediante una barra rígida a una masa en el extremo. Como se explicita en la Figura 7a, es un modelo linealizado de un solo grado de libertad. Se emplea este modelo porque es asequible de implementar y porque estimar con precisión las frecuencias naturales del segundo, tercer y cuarto modo del brazo robotizado experimentalmente requiere un análisis de señal laborioso.

Tabla 2. Las raíces de la ecuación de frecuencias.

Modo	Frecuencia
1	1.84 [Hz]
2	15.52 [Hz]
3	68.59 [Hz]
4	113.31 [Hz]

Asumiendo el vector del error e como la diferencia entre los estados del modelo de referencia x_d y los estados del brazo robotizado flexible real x , el desafío consiste en elegir u tal que garantice que una función potencial del error $V(e)$ o función de la energía sea una función decreciente, esto es la energía se está disipando o se mantiene a un nivel constante, y por lo tanto el sistema en bucle cerrado se considera estable en un cierto sentido. Tal función $V(e)$ que permite deducir la estabilidad se denomina función de Lyapunov. Para expresar analíticamente esta estrategia de control sea la expresión en el espacio de estados que representa al modelo de referencia:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= Ax_d + Bv \\ y_d &= Cx_d \end{aligned} \quad (7)$$

En la cual la matriz A es la conocida función de ω_m y ζ_m . Sin pérdida de generalidad, con referencia a la Figura 1, es necesario generar una entrada de movimiento tal que el brazo se reoriente a un ángulo deseado Θ_0 , mientras que se mantienen las desviaciones Θ_i relativas a Θ_0 pequeñas durante el movimiento y tiendan a cero al finalizar el giro. Si este es el caso se definen las variables de estado para el Modelo de Referencia y para el sistema real de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_i \\ x_2 &= \dot{x}_1 \\ x_{d1} &= \theta_0 \\ x_{d2} &= \dot{x}_{d1} \end{aligned} \quad (8)$$

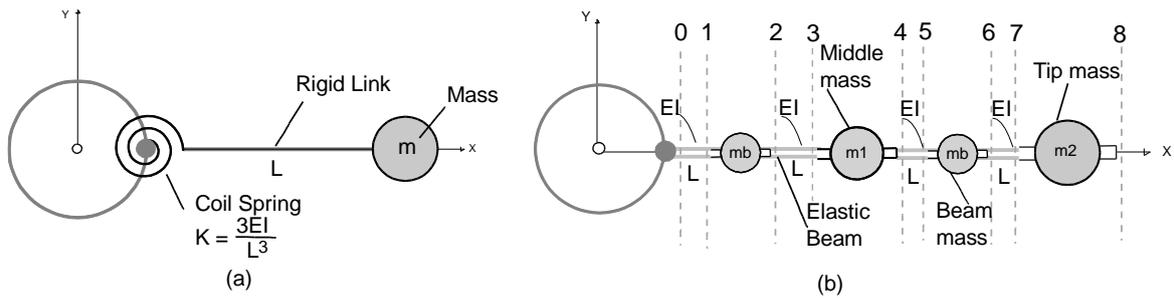


Figura 7.- (a) Modelo de Referencia Simplificado y (b) Modelo Multimodo del sistema real.

Si este es el caso con la función resumen

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (9)$$

se intenta describir el comportamiento dinámico del brazo robotizado flexible multimodo. El vector del error es pues

$$e = x_d - x \quad (10)$$

La función de Lyapunov para el error puede escribirse de la forma

$$V(e) = e^T P e \quad (11)$$

En este punto la derivada de Lyapunov proporciona

$$\dot{V}(e) = \underbrace{e^T (A^T P + P A) e}_{\dot{V}_a} + 2 \underbrace{\{e^T P [Ax + Bv - f(x, u, t)]\}}_{\dot{V}_b} \quad (12)$$

De forma algo más compacta

$$\dot{V}(e) = \dot{V}_a(e) - \dot{V}_b(e) \quad (13)$$

Nótese que el término $\dot{V}_a(e)$ de la ecuación (12) es la ecuación matricial de Lyapunov, por lo cual como es habitual denotando

$$(A^T P + P A) = -Q \quad (14)$$

Entonces el término $\dot{V}_a(e)$ de la derivada de Lyapunov puede escribirse de forma algo más compacta como

$$\dot{V}_a = -e^T Q e \quad (15)$$

En la cual Q es una matriz simétrica definida positiva $Q=Q^t > 0$

Y de acuerdo con el teorema de Lyapunov la matriz del espacio de estados A es asintóticamente estable, esto es todos los autovalores de A tienen partes reales negativas si y solo si para cualquier matriz $Q=Q^t > 0$ la solución P , de la ecuación matricial de Lyapunov (14) es

simétrica definida positiva. Por supuesto este será el caso de la matriz jacobiana del espacio de estados A del Modelo de Referencia explicitado en la Figura 7a. Tratando ahora con la segunda parte de la derivada de Lyapunov, esto es $\dot{V}_b(e)$, el objetivo es hacer una elección de $u(t)$ tal que $\dot{V}_b(e)$ sea no positiva, esto es:

$$\dot{V}_b = e^T P [(A - A_R)x - B_R u + Bv] \leq -\gamma \quad (16)$$

En la cual A_R y B_R son las matrices de la expresión en el espacio de estados del sistema real. Estas matrices describen como es la función resumen del brazo robotizado flexible para el cual se asume inicialmente como frecuencia natural simple la media de los valores de los dos primeros modos, $\omega_{n1med} = 8.68$ [Hz]. Estos valores se extraen de la FFT de la señal experimental proporcionada por un acelerómetro instalado en la masa del extremo del brazo. Los valores experimentales coinciden con los valores analíticos obtenidos con el modelo explicitados en la Tabla 2. Ahora despejando u en la Ecuación (16) se obtiene:

$$u = \frac{e^T P A x - e^T P A_R x + e^T P B + \gamma}{e^T P B_R} \quad (17)$$

En este punto se sustituyen las ecuaciones de estado (7) y (9) junto con el valor del vector de error e de la (10) en la ecuación (17). Para el escalar arbitrario γ se asigna un valor $\gamma = (e_1 P_{12} + e_2 P_{22})^2$, en la cual P_{12} y P_{22} son coeficientes de la segunda columna de P .

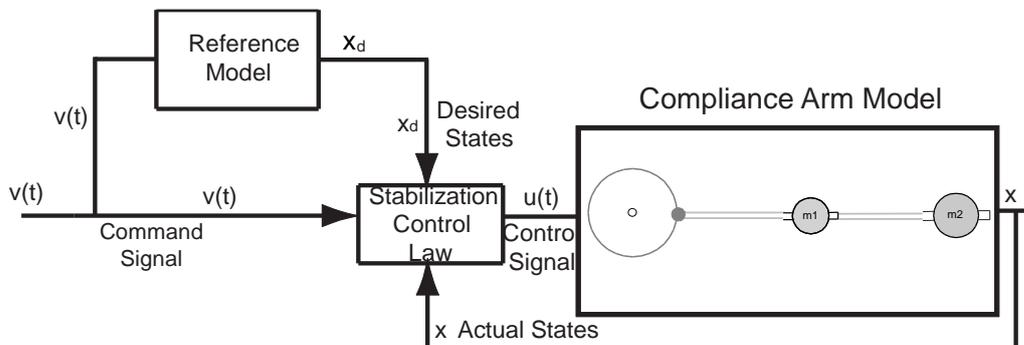


Figura 8.- Diagrama de Bloques de un Model Reference Control para un brazo robotizado flexible.

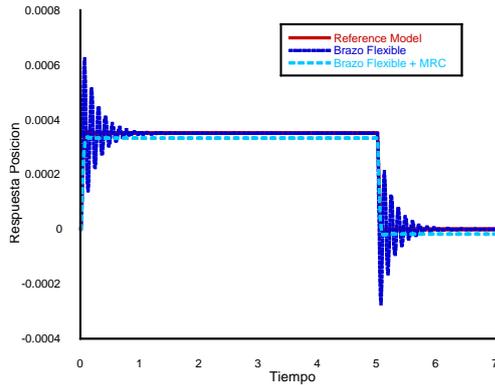


Figura 9.- Respuesta sobreamortiguada y subamortiguada del Modelo de Referencia y el Brazo Flexible sin MRC y con MRC. Condiciones: $\omega_{n1med} = 8.68$ [Hz], $\omega_m=8.68$ [Hz], $\xi_m=0.8$.

Se obtiene entonces un valor para u de

$$u = (-\omega_m^2 + \omega_{n1med}^2)x_1 + (-2\xi_m\omega_m)x_2 + v + \beta \quad (18)$$

Donde β está dado por

$$\begin{cases} 0.05v_{max} & \text{if } e_1p_{12} + e_2p_{22} > 0.05v_{max} \\ e_1p_{12} + e_2p_{2,2} & \text{if } |e_1p_{12} + e_2p_{2,2}| \leq 0.05v_{max} \\ -0.05v_{max} & \text{if } e_1p_{12} + e_2p_{22} < -0.05v_{max} \end{cases} \quad (19)$$

La condición de saturación $\pm 0.05v_{max}$ se hace cumplir en el término β para minimizar la vibración en la señal u . La expresión de u tiene en cuenta ambos el error de modelado en los parámetros y los errores de seguimiento. También satisface la condición de $\dot{V}_b(e) < 0$

3. Resultados

Con referencia a la Figura 9 la deformación del brazo flexible para un escalón de entrada de posición no es despreciable y tiene una acusada influencia en la respuesta del sistema. Sin embargo cuando actúa el control MRC el error de seguimiento para el estado posición es despreciable según proporciona la simulación numérica, en la cual la función resumen del sistema real $\dot{x} = f(x, u, t)$ está descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_R x + B_R u \\ y &= C_R x \end{aligned} \quad (20)$$

Donde la matriz jacobiana del espacio de estados es

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{n1med} & -2\xi_{n1}\omega_{n1med} \end{bmatrix} \quad (21)$$

En la simulación numérica de la Figura 9 para esta función resumen se asume una frecuencia media de valor $\omega_{n1med} = 8.68$ [Hz], que de acuerdo con la FFT experimental de la Figura 10, es el valor medio de los dos primeros armónicos. Inicialmente el mismo valor se adoptó para la frecuencia del modelo de referencia ω_m y $\xi_m=0.8$ en la Figura 9.

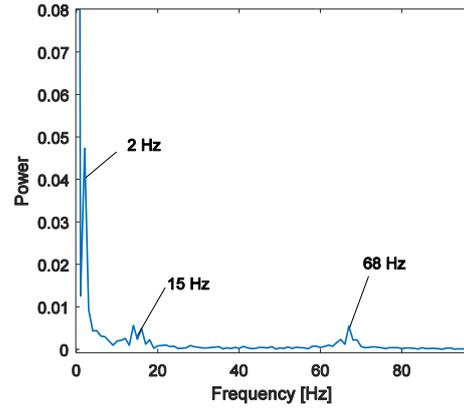


Figura 10.- FFT de la señal proporcionada por un acelerómetro instalado en la masa del extremo del brazo.

Para probar la robustez del MRC en este punto se considera una variación de la frecuencia del sistema real del 50% esto es $\omega_{n1med}=3.97$ [Hz]. Mientras que la frecuencia del modelo de referencia se mantiene en los $\omega_m=8.68$ [Hz]. Si este es el caso la Figura 11 muestra la evolución del segundo estado x_2 correspondiente a la velocidad. En ella se aprecia como el MRC consigue que el brazo flexible siga al modelo de referencia mitigando la deflexión y la vibración residual al finalizar el movimiento. En cuanto al valor de δ_m , el amortiguamiento del sistema de referencia, se determinó a partir del valor deseado de la sobreoscilación $M_p = \exp(-\xi_m\pi/\sqrt{1-\xi_m^2})$. Limitar la oscilación en la respuesta de referencia es necesario en orden a reducir la dinámica indeseada. Sin embargo elegir un valor muy elevado para δ_m hará que el modelo de referencia sea significativamente diferente de la planta y conducirá a un fuerte incremento del esfuerzo de control. Considerando esta negociación en la práctica se seleccionó $M_p=25.4\%$ ($\xi_m=0.4$) para evitar la saturación del actuador.

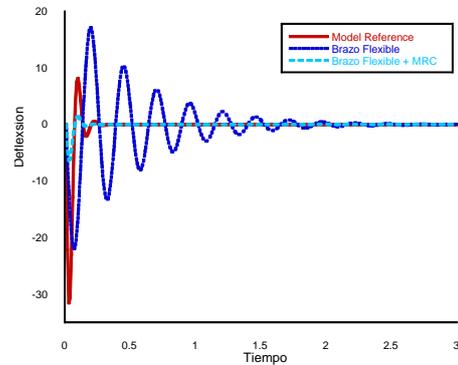


Figura 11.- Evolución del estado x_2 velocidad del Modelo de Referencia, y el Brazo Flexible y éste ultimo con MRC. Condiciones: $\omega_{n1med}=3.97$ [Hz] y $\omega_m=8.68$ [Hz], $\delta_m=0.4$.

También de acuerdo con la ecuación matricial de Lyapunov, ecuación (14), se seleccionó una matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

definida positiva pues sus autovalores son $\lambda_1^Q=0.3820$, $\lambda_2^Q=2.618$ ambos positivos. El valor de la matriz A para los valores de $\omega_m=8.86$ y $\delta_m=0.4$ resulta ser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_m & -2\delta_m\omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8.86 & -7.0880 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación de Lyapunov (14) se obtiene P empleando la función Lyap de Matlab a la que se pasan como argumentos la traspuesta de A y Q :

$$P = \text{Lyap}(A^t, Q) = \begin{bmatrix} 0.5665 & 0.1129 \\ 0.1129 & 0.0865 \end{bmatrix} \quad (23)$$

P es definida positiva ($\lambda_1^P=0.0612$ $\lambda_2^P=0.5983$). Esto asegura que el primer término de la derivada de Lyapunov \dot{V}_a sea siempre negativo. Puesto que u se ha elegido de forma tal que $\dot{V}_b(e) < 0$ entonces la función de Lyapunov $V(e) = e^t P e$ posee derivada negativa y el sistema es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov.

Además de las simulaciones numéricas precedentes se está trabajando en la obtención de datos experimentales para verificar el MRC propuesto respecto a sus prestaciones para el seguimiento de estados con un esfuerzo de control admisible. El brazo robotizado flexible de la Figura 12 se emplea para estos experimentos. El brazo gira hasta la posición fijada por un encoder absoluto en código gray. Un segundo encoder incremental conectado al eje del brazo permite estimar la posición incremental del brazo que es accionado por un motor asíncrono con un control vectorial de velocidad gestionado por un driver G120C (Siemens). Además un acelerómetro instalado en la masa del extremo facilita la adquisición de la señal de la vibración del brazo. Finalmente el control MRC embebido se basa en una tarjeta STM H743ZI2 que puede programarse a partir de la versión 2020 desde Simulink (Matlab). Este hardware es también parte de un proyecto relativo a generadores de vibración para cargas variables o programables.

4. Conclusiones

Este trabajo desarrolla un control no lineal basado en modelo de referencia (MRC) y Lyapunov. Este MRC puede acomodarse a las variaciones de las frecuencias naturales de un brazo robotizado flexible cuando cambia la carga que se transporta en su extremo. Se utiliza el método de matrices de transferencia para obtener las formas modales, las frecuencias naturales y los rangos de variación de éstas. Con ellas se diseña el control MRC que de acuerdo con el segundo método de Lyapunov debe mantener la derivada de la función potencial del error entre los estados del modelo y los

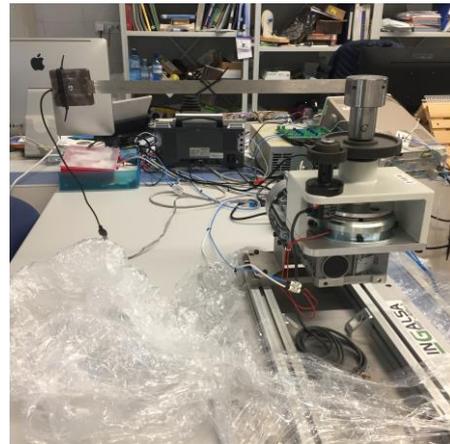


Figura 12.- El sistema experimental con el encoder y el acelerómetro instalados.

del sistema real negativa para que el sistema sea estable. El MRC resultó robusto frente a variaciones de la planta y no linealidades. Los nuevos recursos hardware en lo relativo a microcontroladores de 32bits tales como el H743 de STM facilitan trasladar de forma bastante directa el modelo MRC de simulink utilizado en las simulaciones al sistema físico.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer la financiación de este trabajo como parte del proyecto 2022-ETSII-UNED-09 y al ministerio de ciencia e innovación proyecto número PID2020-116984RB-C21 gobierno de España.

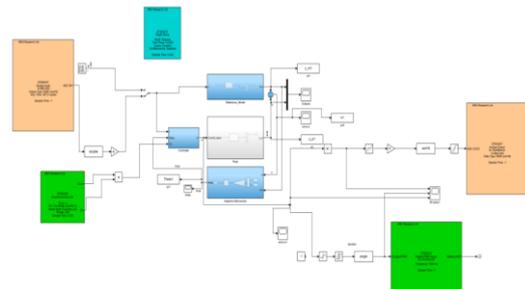


Figura 13.- Modelo Simulink del MRC embebido en un H743ZI de STM.

5. Referencias

- [1] G. Zhu, “ Modelling and Control of Flexible Robots”, Ph.D. National University of Singapore,1997
- [2] L. Howell, A. Midha, “Parametric deflection approximations for end loaded large deflection beams in compliant mechanism”. Transactions of the ASME, Journal of Mechanism in Design, Vol 3, nº117, pp156-165, 1995.
- [3] J. Mead, Passive Vibration Control. Wiley, 1998.

- [4] M. Smith, K. Grigoriadis and R. Skeleton “Optimal mix passive and active control in structures”, *J. of Guidance, Control and Dynamics*, vol 4 n°15, pp 912-919, 1992.
- [5] O. Tokhi and S. Veres. “Active sound and vibration control. Theory and Applications”, *IEEE Control Engineering series 62*. The Institution of Electrical Engineers, London (England) , 2002.
- [6] M. De Queiroz, M. Dawson, S. Nagarkatti, F. Zhang, “Lyapunov-Based Control of Mechanical Systems”, Springer-Science+Business Media, LLC. New York. 2002.
- [7] Nguyen Nhan T. *Model-Reference Adaptive Control, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*, Springer, 2017.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-56393-0>
- [8] H. Whitaker, “An adaptive performance of aircraft and spacecraft”, *Proceeding of Institute of Aeronautical Sciences*, pp 59-100,1959.
- [9] P.V. Osborn, H. Whitaker, and A. Kezer, ”New developments in the design of model reference adaptive control systems”,*Proceedings of the Institute of Aeronautical Sciences*, pp 61-39, 1961.
- [10] Lyapunov A. M.,*The General Problem of the Stability of Motion*, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Second Series*. Toulouse, vol. 9 FRANCE, 1907.
- [11] W. Hahn, *Stability of Motion*. Springer Verlag, New York 1967.
- [12] R.V. Monoply, “Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, no. 5, pp. 474–484. 1974.
- [13] Y.D. Landau, “A survey of model reference adaptive techniques: Theory and applications”, *Automatica*,vol.10, pp.353–379, 1974.
- [14] N.Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov’s Direct Method*, Springer-Verlag, New-York.1977.
- [15] A.Feuer and A. Morse, “Adaptive control of single-input, single-output linear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC–23, pp. 557–569, 1978.
- [16] Yoan D. Landau, *Adaptive Control, The Model Reference Approach*, Marcel Dekker Inc. New York and Bessel 1979.
- [17] R. Farrenkopf , “Optimal Open-Loop Maneuver Profiles for Flexible Spacecraft”, *J. of Guidance and Control*, vol 2, No 6, pp.491-498, 1979.
- [18] T. Moir and M. Grimble,” Optimal self-tuning filtering, prediction, and smoothing for discrete multivariable processes”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, No.2, pp. 128–137, 1984.
- [19] G. Goodwin and K. Sin, *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall,1984.
- [20] G. Kreiselmayr and B. Anderson, “Robust model reference adaptive control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC–31, no. 2, pp. 127–133,1986.
- [21] Tomizuka M., Horowitz R., Anwer G., and Jia Y.-L, “Implementation of adaptive techniques for motion control of robotic manipulators”, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, vol. 110, pp. 62–69. 1988.
- [22] K.S. Narendra and A. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.1989.
- [23] M.Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic., *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1995.
- [24] A. Abdullahi, Z. Mohamed, H. Selamat, H Pota, M. Zainal, F. Ismail, A. Haruna . “Adaptive output-based command shaping for sway control of a 3D overhead crane with payload hoisting and wind disturbance”, *Mech. Syst. Signal Process.* 98 ,pp 157-172, 2018.
- [25] H. Jaafar, Z. Mohamed, M. Shamsudin,N. Mohd Subha, R. Liyana R, A. Ab-dullahi, “ Model reference command shaping for vibration control of multimode flexible systems with application to a double-pendulum overhead crane”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 115, pp 677-695, 2019.
- [26] G.Peláez, E.Souto, H. Rubio H. and J.C. García-Prada, *Optimal Model Reference Command Shaping for Vibration Reduction of Multibody-Multimode Flexible Systems: Initial Study*,*The 15Th IFToMM World Congress Jun 30-July 4, Krakow Poland At: Krakow*, 2019.