

Calibración estática de una configuración de 8 galgas extensiométricas para la estimación de cargas mecánicas en ejes de sección transversal circular

Julen Bacaicoa Díaz^{1,2}, Xabier Iriarte Goñi^{1,2}, Jokin Aginaga García^{1,2}, Oier Saldaña Barroso¹

¹ Departamento de Ingeniería, Universidad Pública de Navarra, Campus de Arrosadia, 31006 Pamplona, España.
Email: [julen.bacaicoa, xabier.iriarte, jokin.aginaga, oier.saldana]@unavarra.es

² Institute of Smart Cities (ISC), Universidad Pública de Navarra, Campus de Arrosadia, 31006 Pamplona, España.

Resumen

La estimación de cargas mediante el uso de galgas extensiométricas es uno de los métodos más comunes en la actualidad, especialmente en secciones cilíndricas, dada la facilidad de adherirlas a superficies curvas. Las configuraciones de galgas típicas emplean dos o cuatro sensores que conectados en forma de puente de Wheatstone permiten estimar las cargas que se deseen. Estas configuraciones son más que conocidas en la literatura y permiten estimar cargas individualmente, sin la influencia del resto de cargas presentes. Por lo general, la calibración de estas configuraciones es casi inexistente, ya que los softwares para la adquisición de datos ya tienen integrada la calibración, y tan sólo requieren de un experimento en vacío. Sin embargo, para otro tipo de configuraciones, como la configuración de 8 galgas propuesta en este trabajo, resulta necesario diseñar un procedimiento de calibración.

Palabras clave: calibración; galgas extensiométricas; estimación de cargas.

Abstract

Load estimation using strain gauges is one of the most common methods today, especially in cylindrical sections, given the ease of attaching them to curved surfaces. Typical strain gauge configurations employ two or four sensors that are connected in a Wheatstone bridge configuration to estimate the desired loads. These configurations are more than well known in the literature and allow estimating loads individually, without the influence of the other loads present. Generally, calibration of these configurations is almost non-existent, since the data acquisition software already has the calibration integrated, and only requires a vacuum experiment. However, for other types of configurations, such as the 8-gauge configuration proposed in this work, it is necessary to design a calibration procedure.

Keywords: calibration; strain gauges; load estimation.

1. Introducción

Muchos de los aerogeneradores instalados en Europa están alcanzando su vida útil. La monitorización de su salud estructural ayuda a los ingenieros a estimar la vida útil restante de los aerogeneradores para prolongar su vida útil. En este contexto, la estimación de las cargas de viento es esencial, ya que se transmiten a toda la estructura. El eje lento es un lugar perfecto para medir la resultante de estas cargas mediante sensores de deformación. Para realizar una estimación de la vida

útil restante, los analistas tienen que basarse en las mediciones de carga. El método más común para medir las cargas estructurales es utilizar 4 galgas extensiométricas en configuraciones de puente completo Wheatstone [1]. Si las galgas extensiométricas se *pegan* con una orientación precisa y los parámetros geométricos y de material del modelo de eje fueran perfectamente conocidos, algo que normalmente no ocurre, se requiere de una calibración del conjunto de galgas extensiométricas.

En este trabajo se presenta la calibración de una novedosa configuración de 8 galgas extensiométricas, basada en cuartos de puente de Wheatstone, para para la estimación del torsor completo. La configuración de galgas extensiométricas propuesta ha sido inicialmente concebida para ser para ser instalada en ejes de sección circular, es decir, ejes lentos de aerogeneradores, pero puede ser aplicable a cualquier eje con características geométricas similares. Uno de los problemas más comunes durante el procedimiento de calibración de un sensor de carga/momento es el *efecto de cross-talk*, que significa que hay sensibilidades cruzadas entre los canales, de manera que la aplicación de una determinada carga influye en varias señales de salida [2]. No es posible desarrollar sensores totalmente desacoplados, donde cada salida responde sólo a la aplicación de una única carga, pero esos efectos de acoplamiento pueden minimizarse diseñando una configuración óptima de los sensores en la que su matriz de observación tenga número de condición bajo.

La necesidad de medir las componentes del torsor completo, 3 fuerzas y 3 momentos, es de gran importancia en muchas actividades de control y ensayo. Actualmente existen en el mercado muchas células de carga comerciales capaces de medir fuerzas y momentos estáticos y dinámicos, pero generalmente son muy caras y su uso está orientado a actividades avanzadas de investigación y desarrollo [3]. La creciente demanda de estos sensores en aplicaciones industriales ha promovido varias investigaciones en los últimos años. Bicchi [4] en 1992 llevó a cabo la identificación de una función objetivo matemática, cuya minimización correspondía a la optimización de la precisión del sensor empleando el criterio del número de condición, logrando una configuración óptima de 6 galgas extensiométricas para la estimación del torsor completo. Uchiyama et. al. [5] presentó un procedimiento para el diseño estructural de un sensor de fuerza para robots y un procedimiento de calibración utilizando 8 galgas extensiométricas. Demostraron que la minimización del número de condición de la matriz de observación producía una disposición óptima de las galgas extensiométricas que minimizaba el error de medición estático.

En una investigación reciente de Al-Mai et. al. [6] presentaron la fabricación de un sensor de fuerza y momento de torsión de seis grados de libertad basado en la tecnología de detección de fibra óptica y además una metodología de calibración. El sensor estaba destinado principalmente a sistemas biomecánicos y de rehabilitación. El procedimiento de calibración que propusieron pretendía reducir los errores derivados de una relación fuerza-deformación no lineal, dividiendo la calibración en dos modelos de estimación: un modelo lineal y un modelo de árboles de decisión no lineales. Liu et. al [7] y Yuan et. al [8] desarrollaron un sensor de fuerza/momento de seis componentes en el

que sus miembros sensores eran barras idénticas en forma de T formadas con 20 galgas extensiométricas y vigas de sección transversal rectangular formadas con 16 galgas extensiométricas, respectivamente. Ambos sensores fueron sometidos a un análisis de elementos finitos junto con una optimización del diseño para obtener altas sensibilidades en la medición.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2.1, se calcula la deformación de una galga situada arbitrariamente, considerando que está colocada en el perímetro de la sección transversal de un eje. Se obtiene una expresión explícita de la deformación de la galga como función de las componentes de fuerza y momento del torsor externo. En la Sección 2.2 se obtiene una configuración óptima de 8 galgas a partir del criterio de optimización D-Optimality. Posteriormente en la Sección 2.3, se describe el banco de pruebas diseñado, en el que se instala la configuración de 8 galgas extensiométricas. A continuación, en la Sección 2.4 se definen los diferentes experimentos para la calibración. En la Sección 3 se presentan y discuten los resultados obtenidos en los experimentos, se obtiene la matriz de calibración experimental y se realiza una validación preliminar a partir de uno de los experimentos realizados para la calibración. Por último, en la Sección 4, se presentan las conclusiones.

2. Metodología

2.1. Acotación de una galga arbitraria

Por motivos simplificados, las 3 fuerzas y los 3 momentos que constituyen el torsor se calculan en el centro de la sección transversal. Las galgas extensiométricas se sitúan en un plano perpendicular al eje del cilindro y que contiene el punto **O** (es decir, según Figura 1, en el perímetro de la perpendicular de la sección transversal que contiene el punto **O**).

Se supone que la sección transversal del eje es constante en las proximidades de la sección considerada y el torsor se escribe con respecto al punto **O**. Se supone que el material del eje es lineal, elástico e isótropo y que se cumple el *Principio de Saint Venant* suponiendo que las galgas extensiométricas se encuentran situadas suficientemente alejadas del punto de aplicación de las cargas.

Para determinar la posición y la orientación de cada galga extensiométrica se utilizan cuatro bases de orientación, dos parámetros angulares y una coordenada, tal y como se muestra en la Figura 1. La base xyz es una orientación fijada al suelo y su eje x positivo coincide con el eje de simetría del eje. La coordenada θ determina la rotación del eje con respecto al suelo y el ángulo φ determina la posición de la galga extensiométrica en el punto **P** y la

orientación de la base $1'2'3'$. El ángulo δ es un parámetro que determina la orientación de la galga extensométrica en la superficie del eje. Como la galga extensométrica está fijada al eje, las bases 123 , $1'2'3'$ y $1''2''3''$ también están fijadas al eje. Las bases $1'2'3'$ y $1''2''3''$ son diferentes para cada galga extensométrica ya que dependen de sus propios ángulos φ y δ . Por el contrario, las bases xyz y 123 son comunes a todas las galgas extensométricas. El torsor a estimar es la que ejerce la mitad derecha del eje de la Figura 1 sobre la mitad izquierda.

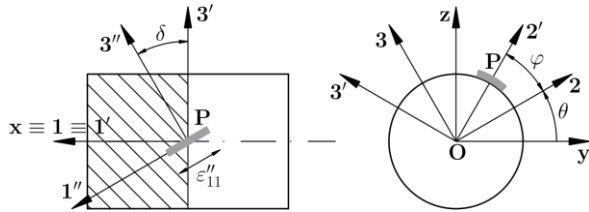


Figura 1. Acotación de una galga extensométrica arbitraria.

Sea $\mathbf{t} = \{F_1, F_2, F_3, M_1, M_2, M_3\}^T$ el torsor externo (con respecto al punto O) ejercido sobre el eje definido en la base 123 . Para calcular el tensor de tensiones en el punto P a causa del torsor \mathbf{t} , se calcula la contribución de los tensores de tensiones relacionados con los componentes individuales del torsor. Considerando un material lineal, elástico e isotrópico, el tensor de tensiones compuesto se determina por superposición de los individuales. Utilizando la elasticidad lineal se obtiene el tensor de deformaciones y sus componentes se proyectan en la base $1''2''3''$ para obtener la deformación de la galga ε [9].

Definiendo el vector fila $\mathbf{w} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{t}$, como ε es lineal en \mathbf{t} , la expresión explícita para la deformación de la galga puede escribirse como:

$$\varepsilon = \mathbf{w}\mathbf{t} \quad (1)$$

donde la expresión explícita de \mathbf{w} es:

$$\mathbf{w}(\varphi, \delta) = \begin{pmatrix} \frac{(1+\nu)\sin^2\delta - 1}{EA} \\ \frac{(1+\nu)\sin 2\delta \sin\varphi}{\kappa EA} \\ \frac{(1+\nu)\sin 2\delta \cos\varphi}{\kappa EA} \\ \frac{R(1+\nu)\sin 2\delta}{EI} \\ \frac{EI}{((1+\nu)\sin^2\delta - 1)\sin\varphi} \\ \frac{E\omega}{((1+\nu)\sin^2\delta - 1)\cos\varphi} \\ \frac{E\omega}{EI} \end{pmatrix}^T \quad (2)$$

donde A es el área de la sección transversal del eje completo o hueco, R es el radio exterior del eje, ω es el módulo resistente de la sección, I_p es el momento de inercia polar, E es el *módulo de Young* y ν el

coeficiente de Poisson. El coeficiente de cizalladura κ , según la *Teoría de Vigas de Timoshenko* [10] [11] representa la relación entre el esfuerzo cortante medio en una sección y el esfuerzo cortante en el centroide. Para una descripción detallada de este desarrollo se remite al lector a [9] [10].

Por tanto, para una galga situada en un punto arbitrario definido por φ y δ , la ecuación (1) proporciona la deformación de la galga a causa del torsor externo \mathbf{t} .

2.2. Estimación óptima del torsor

Supongamos que el torsor \mathbf{t} tiene que ser estimado a partir de las mediciones de la deformación de las galgas. Como el torsor tiene $p = 6$ componentes será necesario utilizar, al menos, p galgas extensométricas para estimar cada uno de los componentes individuales. Sea $n \geq p$ el número de galgas extensométricas situadas a lo largo del perímetro de cierta sección transversal del eje. Denotando por ε_i la deformación de la i -ésima galga y, φ_i y δ_i los ángulos que determinan la posición y la orientación de la i -ésima galga ($i = 1, \dots, n$) según se define en la Figura 1. Entonces, se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

donde $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}(\varphi_i, \delta_i)$. Agrupando las n deformaciones mecánicas en el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$, y los n \mathbf{w}_i vectores fila en \mathbf{W} , la ecuación (3) puede reescribirse como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{t} \quad (4)$$

donde $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ y $\boldsymbol{\vartheta} = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\delta})$. La matriz $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta})$ representa la matriz de observación $n \times p$, que contiene toda la información de la ubicación de las galgas. Midiendo la deformación de las galgas para un instante y evaluando \mathbf{W} para una determinada configuración de galgas, se puede resolver el sistema lineal de la ecuación (4) para calcular \mathbf{t} en términos de $\boldsymbol{\varepsilon}$, suponiendo que \mathbf{W} tiene rango completo.

Sin embargo, en un marco experimental, el vector $\boldsymbol{\varepsilon}$ se medirá con error y será apropiado utilizar Teoría de la Regresión Lineal [12] para obtener estimaciones de \mathbf{t} y varianzas de \mathbf{t} .

Escribamos un modelo estadístico típico en el que el vector de deformaciones medidas, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, se escribe como la suma de la *deformación mecánica real*, y la incertidumbre global de la medición, \mathbf{e} .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{W}\mathbf{t} + \mathbf{e} \quad (5)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ y \mathbf{e} son variables aleatorias [13] [14] y \mathbf{W} es determinista, es decir, conocida sin incertidumbre.

Por lo tanto, hay que establecer un criterio de optimización para determinar que una configuración de galgas es mejor que otra. En este contexto, D-Optimality es el mejor índice de observabilidad para maximizar la observabilidad del torsor [15]. Además, este criterio es *invariante de escala*, por lo que es insensible a las diferentes dimensiones de los componentes del torsor (fuerzas y momentos).

D-Optimality ha sido utilizado en varias referencias como [16] [17] [18] en el contexto de posicionamiento óptimo de sensores. Estas referencias describen procedimientos de optimización basados en la *matriz de información de Fisher* [19] para optimizar diferentes ubicación de los sensores. Así, la función de coste \mathcal{F} del criterio D-Optimality puede escribirse como [14] [20]:

$$\mathcal{F}(\mathbf{W}) = -\log(\det(\mathbf{W}^T\mathbf{W})) \quad (6)$$

Finalmente, una vez establecido el criterio de optimización, para determinar la posición y orientación óptimas de las galgas extensométricas, $\boldsymbol{\vartheta}^{opt}$ sería suficiente con resolver el problema de minimización:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{opt} = \underset{\boldsymbol{\vartheta}}{\operatorname{arg\,min}} (\mathcal{F}(\mathbf{W}(\boldsymbol{\vartheta}))) \quad (7)$$

sujeto a $\mathbf{c}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0}$

donde $\mathbf{c}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{0}$ son restricciones no lineales opcionales. Por ejemplo, estas restricciones podrían ser forzar a dos galgas a estar posicionadas en el mismo ángulo φ y que sus orientaciones δ estén desfasadas 90° . Esto llevaría a utilizar *Rosetas* con galgas desfasadas 90° entre sí, en lugar de galgas individuales.

2.2.1. Configuración óptima de 8 galgas

Para obtener una configuración simétrica que compense los efectos de la temperatura, se emplean 8 galgas extensométricas. Con 8 galgas, se ha encontrado una configuración óptima que obliga a las parejas de galgas, a estar posicionadas con el mismo valor de φ y desfasadas 90° entre sus ángulos δ . Ejecutando el procedimiento de optimización, la configuración óptima resultante es:

$$\begin{aligned} \varphi^{opt} &= \{0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 270^\circ\} \\ \delta^{opt} &= \{60^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -60^\circ, 60^\circ, -30^\circ, 30^\circ, -60^\circ\} \end{aligned} \quad (8)$$

La configuración definida en la ecuación (8) es la representada en la Figura 2.

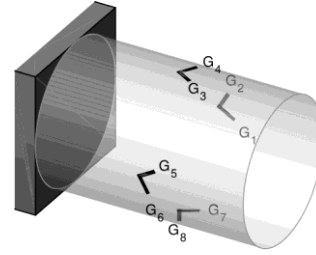


Figura 2. Configuración óptima de 8 galgas para la estimación de \mathbf{t} .

2.3. Descripción del banco de ensayos

El banco de ensayos consiste en un eje circular hueco empotrado en una viga. Las galgas extensométricas están situadas en la parte central del banco de ensayos, en dos secciones transversales diferentes. Por un lado, en la sección **B**, se han instalado un medio puente para la medición del momento flector, un puente completo para la medición del momento flector, un puente completo para la medición de la torsión y, por último, un puente completo para la medición de la fuerza axial. Por otro lado, en la sección **A** se ha instalado la configuración de 8 galgas extensométricas en 8 cuartos de puente de Wheatstone. El extremo izquierdo del eje está empotrado en un pilar. En el extremo derecho del eje hay un disco con un cáncamo, donde se ejercen las diferentes cargas mecánicas. El eje real del banco de pruebas y un croquis del mismo se muestran en las Figura 3a y Figura 3b, respectivamente.

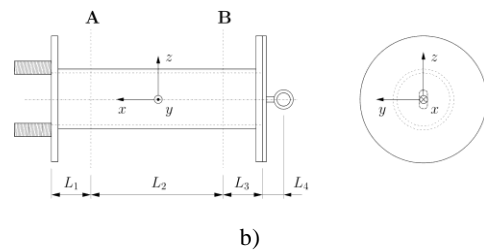


Figura 3. a) Eje real sensorizado y b) croquis con dimensiones del eje.

También se ha diseñado una extensión del eje, de modo que se pueda ejercer un momento flector de magnitud distinta con la aplicación de la misma fuerza de cortadura. Este eje está formado por un tubo circular hueco y dos discos soldados en los extremos, de modo

que pueda unirse al eje principal y al acoplamiento para aplicar las cargas. En la Figura 4 se muestra un croquis del banco de ensayos con la extensión del eje.

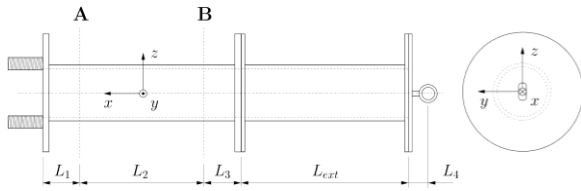


Figura 4. Croquis con dimensiones de la extensión del eje.

2.3.1. Geometría de los ejes

Las longitudes del eje principal son $L_1 = 90 \text{ mm}$, $L_2 = 235 \text{ mm}$, $L_3 = 92 \text{ mm}$ y $L_4 = 33 \text{ mm}$. Ambos ejes huecos tienen un radio exterior de $R = 40 \text{ mm}$ y un radio interior de $r = 38 \text{ mm}$. Como ya se ha mencionado, la extensión del eje sirve para aplicar un momento flector de diferente valor aplicando una fuerza de cortadura igual. En este caso, la longitud de la extensión del eje se ha dimensionado de forma que en la sección A (sección donde se adhieren los cuartos de puente) aplicando la misma fuerza de cizalladura, se ejerce el doble de momento flector que sin la instalación de la extensión del eje. Esto implica que la longitud de la extensión del eje sea $L_{ext} = L_2 + L_3 + L_4 = 360 \text{ mm}$.

2.3.2. Parámetros estructurales

Ambos ejes huecos son de acero común con $E = 210 \text{ GPa}$ y $\nu = 0,3$, y su geometría y parámetros estructurales son los siguientes:

$$\begin{aligned} A &= \pi(R^2 - r^2) = 4.91 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ \omega &= \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R} = 9.37 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \\ I_p &= \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = 7.51 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 \\ m &= \frac{r}{R} = 0.95; \quad \kappa(m, \nu) = 0.53 \end{aligned} \quad (9)$$

2.3.3. Sensorización

Tras la aplicación de las cargas mecánicas, las galgas extensiométricas se deforman, cambia su resistencia y producen una determinada variación de tensión eléctrica a la salida del correspondiente puente de Wheatstone. Esta tensión de salida (V_{out}) es función de las resistencias (R) que forman el puente de Wheatstone, del tipo de puente de Wheatstone (cuarto, medio o puente completo), así como de la tensión de

entrada (V_{in}). En todos los puentes de Wheatstone las resistencias utilizadas son de $R = 200 \Omega$ y la tensión de entrada es $V_{in} = 3 \text{ V}$. La tensión de salida obtenida en los puentes se transmite a unos nodos (que recogen las señales de salida de los puentes), que a su vez transmiten inalámbricamente esas señales a unas bases conectadas al sistema de adquisición. Se utiliza un PC para configurar el sistema de adquisición y almacenar todas las mediciones. Para la medición de la carga aplicada, se ha utilizado una célula de carga con una capacidad de carga nominal de 350 Kg y una sensibilidad de 2 mV/V .

2.4. Experimentos de calibración

El objetivo principal de este trabajo es la calibración de una configuración de 8 galgas extensiométricas. Por esta razón, es necesario excitar las 6 componentes del torsor \mathbf{t} , de manera que se pueda calibrar la contribución de cada galga a la estimación de cada componente del torsor externo.

2.4.1. Criterios para las cargas máximas admisibles

Para la realización de los experimentos de calibración, es de gran importancia realizar un dimensionamiento previo de las cargas máximas que se pueden ejercer. Para ello, se han establecido dos criterios mediante los cuales se han determinado los valores máximos de carga (fuerzas y momentos) que pueden ejercerse sobre el eje. El primero de los criterios establece la carga máxima admisible para alcanzar el límite de fluencia del material del eje (σ_y), y el segundo criterio establece que los cuartos de puente de Wheatstone no se saturen. En la Tabla 1 se muestran las cargas máximas admisibles según cada uno de los criterios, el segundo criterio es más restrictivo y, por tanto, establece las cargas máximas que pueden aplicarse sobre el eje.

2.4.2. Experimentos con fuerza cortante y momento flector

En los experimentos de fuerza cortante y momento flector, el eje se ha empotrado horizontalmente en una viga rígida. El eje se orienta según el sistema de coordenadas 123 (o xyz) y se ejerce una fuerza cortante F_3 , tal y como muestra la Figura 5, en la dirección positiva del eje 3, provocando así un momento flector en la dirección positiva del eje 2.

Tabla 1. Cargas máximas admisibles, según límite elástico del material y saturación de los puentes de Wheatstone.

Criterio	Carga máxima admisible					
	F_1 [N]	F_2 [N]	F_3 [N]	M_1 [Nm]	M_2 [Nm]	M_3 [Nm]
σ_y del material	49135	15068	15068	1082	937	937
Saturación puentes	6000	1200	1200	600	389	389

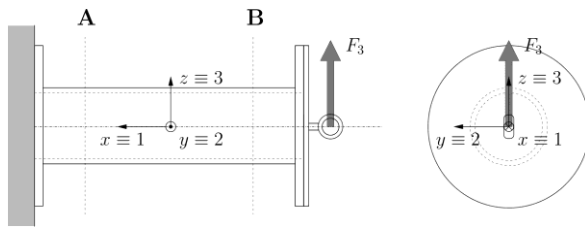


Figura 5. Experimento con aplicación de fuerza cortante en la dirección +3 y momento flector en la dirección +2.

Además de este experimento, se han realizado para otras tres orientaciones del eje, es decir, rotando 90° en la dirección positiva del eje 1 consecutivamente. De este modo, las fuerzas cortantes introducidos son en las direcciones: positiva en el eje 3, positiva en el eje 2, negativa en el eje 3 y negativa en el eje 2. Se han realizado un total de 36 experimentos (9 por cada orientación de la fuerza cortante), con masas desde 0 Kg hasta 40 Kg, cada 5 Kg.

2.4.3. Experimentos con fuerza cortante y momento flector con la extensión del eje

Para la calibración del momento flector, debido a la dependencia directa de la fuerza cortante ($M_{flector} = F_{cortante} \cdot d$), es necesario realizar experimentos adicionales en los que la relación entre la fuerza cortante y el momento flector sea distinta. Para ello, se añade la extensión del eje tal y como se muestra en la Figura 6. Con el eje orientado según el sistema de coordenadas 123, se aplica una fuerza cortante F_3 en la dirección positiva del eje 3, provocando así un momento flector en la dirección positiva del eje 2.

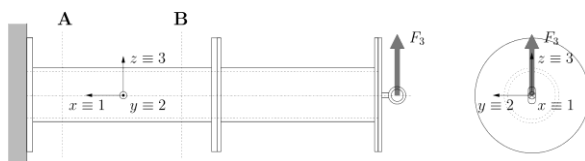


Figura 6. Experimento con extensión del eje con aplicación de fuerza cortante en la dirección +3 y momento flector en la dirección +2.

Una vez más, se han realizado experimentos en otras tres orientaciones, girando 90° en sentido positivo del eje 1, consecutivamente. Se han realizado un total de 36 experimentos (9 por cada orientación de la fuerza cortante), con masas desde 0 Kg hasta 20 Kg, cada 2,5 Kg.

2.4.4. Experimentos con fuerza axial

Para los experimentos con donde se aplica una fuerza axial, el eje se ha empotrado verticalmente en una viga rígida. El eje está orientado según el sistema de coordenadas 123 y se ha ejercido una fuerza axial F_1 (tal y como se muestra en la Figura 7), en la dirección

negativa dirección del eje 1. La fuerza axial produce una tensión y deformación uniforme en todo el eje. Se han realizado un total de 9 experimentos, con masas desde 0 Kg hasta 80 Kg, cada 10 Kg.

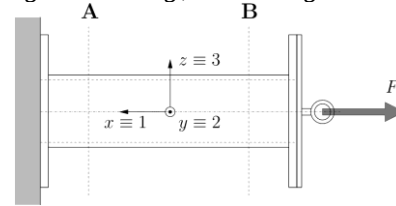


Figura 7. Experimento con aplicación de fuerza axial en la dirección -1.

2.4.5. Experimentos con momento de torsión

Por último, en el experimento para calibrar el momento de torsión, el eje se empotra horizontalmente en una viga rígida. El eje se orienta según el sistema de coordenadas 123 y se ejerce una fuerza cortante F_3 en la dirección positiva del eje 3 (tal y como se muestra en la Figura 8). La fuerza F_3 se aplica a una distancia $L_T = 345 \text{ mm}$ del centro del eje, lo que provoca un momento de torsión uniforme $M_1 = F_3 \cdot L_T$. Nótese que además del momento de torsión también se está introduciendo una fuerza cortante F_3 que provoca un momento flector M_2 en la dirección positiva del eje 2. Se han realizado un total de 9 experimentos, con masas desde 0 Kg hasta 40 Kg, cada 5 Kg.

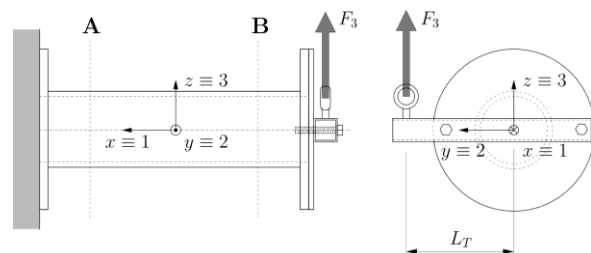


Figura 8. Experimento con aplicación de momento torsor en la dirección +1.

2.4.6. Procesamiento de señales de deformación

Las señales medidas por los puentes de Wheatstone deben ser convertidas de mV/V a unidades de deformación. Para ello, se han utilizado las conocidas ecuaciones que relacionan la deformación y la relación de tensión de salida y entrada del puente de Wheatstone. Para los cuartos de puente, medios puentes y puentes completos la deformación equivalente, ϵ_{eq} , se define en la ecuación (10). Esta deformación equivalente no es una deformación como tal, sino una combinación lineal de las deformaciones de las galgas que forman el puente de Wheatstone. Sin embargo, esta combinación de deformaciones tiene una relación directa y proporcional con las cargas ejercidas.

$$\varepsilon_{eq} \triangleq n \sum_{i=1,2,3,4} (-1)^{i+1} \varepsilon_i = \frac{4 V_{out}}{k_g V_{in}} \quad (10)$$

donde ε_i es la deformación de la i -ésima galga, $n = 1,2,4$ define el número de galgas que forman en puente de Wheatstone (es decir, cuarto de puente, medio puente y puente completo). El escalar k_g es el factor de galga, y V_{in} y V_{out} son las tensiones de entrada y salida del puente, respectivamente.

Una vez calculada *eléctricamente* la deformación equivalente de cada puente de Wheatstone, puesto que las galgas extensiométricas miden una deformación residual sin la presencia de cargas (debida a efectos térmicos y tensiones residuales causadas por el propio peso del eje), debe eliminarse este *offset* mediante la puesta a cero. El sistema de adquisición tiene una frecuencia de muestreo de 100 Hz y crea un nuevo archivo de datos cada 10 segundos, dando lugar a 1000 mediciones para cada puente de Wheatstone, tipología del experimento y diferente carga aplicada.

3. Resultados y discusión

Los resultados obtenidos tras realizar los experimentos para la calibración de la configuración de 8 galgas se presentan a continuación. En primer lugar, se representan las deformaciones equivalentes medidas mediante las configuraciones tradicionales (medios puentes y puentes completos) y, por otro lado, las deformaciones equivalentes medidas con la configuración de 8 galgas.

3.1. Experimentos con fuerza cortante y momento flector

La relación entre el momento flector aplicado y la deformación equivalente se muestra en la Figura 9. La fuerza de cortadura F_3 ejercida en la dirección positiva del eje 3, provoca un momento flector M_2 negativo. El puente completo está posicionado en el plano que contiene el eje 2, por lo que la deformación $\varepsilon_{HB,B}$ es cero ya que es insensible al momento flector aplicado. Sin embargo, la deformación del medio puente $\varepsilon_{FB,B}$ aumenta a medida que aumenta la carga.

La configuración de 8 galgas, se comporta de forma similar, al aumentar la carga la deformación que sufre cada galga es mayor. En este caso las galgas 2 y 6 situadas en $(\varphi, \delta) = (0^\circ, -30^\circ)$ y $(\varphi, \delta) = (180^\circ, -30^\circ)$, respectivamente, son más sensibles al momento flector M_2 que el resto. La razón principal es que las galgas 2 y 6 están situadas más cerca del plano donde el momento flector es máximo y están prácticamente alineadas con la dirección principal de las deformaciones principales.

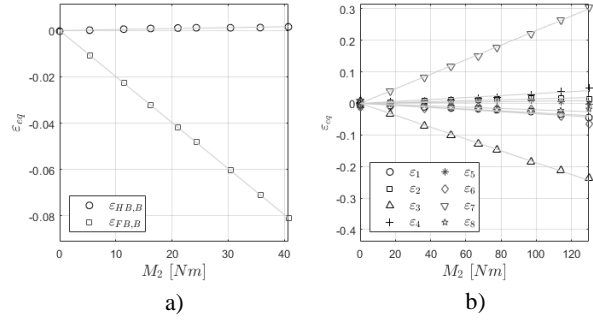


Figura 9. Deformaciones equivalentes a causa del momento flector M_2 , a) puentes tradicionales y b) configuración de 8 galgas.

En el resto de los experimentos en los que la orientación de la fuerza de cortadura está rotada 90° , los resultados obtenidos son análogos.

3.2. Experimentos con fuerza cortante y momento flector con la extensión del eje

Al igual que los experimentos anteriores, en la Figura 10 se muestra la relación entre el momento flector y las deformaciones equivalentes. En este caso al instalarse la extensión del eje y haberse aplicado la mitad de la fuerza cortante de los experimentos anteriores, el momento flector M_2 ejercido en la sección **A** (configuración de 8 galgas) resulta ser de la misma magnitud. El puente completo está posicionado en el plano que contiene el eje 2, por lo que la deformación $\varepsilon_{HB,B}$ es cero ya que es insensible al momento flector aplicado. Sin embargo, la deformación del medio puente $\varepsilon_{FB,B}$ aumenta a medida que aumenta la carga.

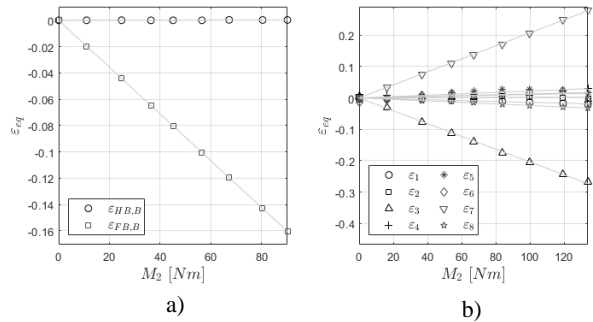


Figura 10. Deformaciones equivalentes a causa del momento flector M_2 con extensión del eje, a) puentes tradicionales y b) configuración de 8 galgas.

La configuración de 8 galgas se comporta de la misma manera que en los experimentos anteriores, las galgas 2 y 6 situadas en $(\varphi, \delta) = (0^\circ, -30^\circ)$ y $(\varphi, \delta) = (180^\circ, -30^\circ)$, respectivamente, son más sensibles al momento flector M_2 que el resto.

En el resto de los experimentos en los que la orientación de la fuerza de cortadura está rotada 90° , los resultados obtenidos son análogos.

3.3. Experimentos con fuerza axial

Los resultados del experimento con la fuerza axial, se muestran en la Figura 11. La fuerza axial F_1 aplicada en la dirección negativa del eje 1, provoca una deformación de tracción uniforme en el eje. Como 2 de las galgas que forman el puente completo se encuentran en el plano perpendicular al eje 1, la deformación $\varepsilon_{FB,Ax}$ disminuye a medida que aumenta la carga debido a que estas se estrechan debido a la deformación transversal de las mismas.

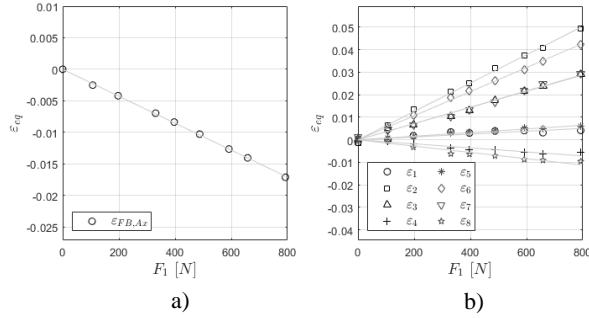


Figura 11. Deformaciones equivalentes a causa de la fuerza axial F_1 . a) puentes tradicionales y b) configuración de 8 galgas.

En la configuración de 8 galgas, las galgas 2, 3, 6 y 7 situadas en $(\varphi, \delta) = (0^\circ, -30^\circ)$, $(\varphi, \delta) = (90^\circ, 30^\circ)$, $(\varphi, \delta) = (180^\circ, -30^\circ)$ y $(\varphi, \delta) = (270^\circ, 30^\circ)$, respectivamente, son más sensibles a la fuerza axial F_1 e incrementan su deformación. El motivo principal es que están prácticamente alineados con la dirección donde la deformación es máxima. Sin embargo, con las galgas 1, 4, 5 y 8 ocurre lo contrario, es decir, la deformación disminuye al aumentar la carga.

3.4. Experimentos con momento de torsión

Los resultados del último experimento se muestran en la Figura 12, donde por medio de una fuerza cortante se aplica un momento de torsión uniforme M_1 . El puente completo está posicionado en el plano perpendicular al eje principal del eje, por lo que la deformación $\varepsilon_{FB,Torq}$ disminuye a medida que aumenta la carga.

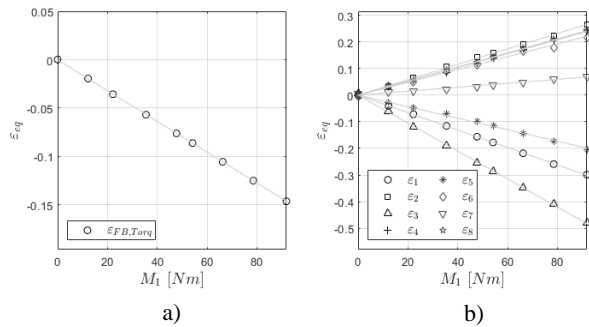


Figura 12. Deformaciones equivalentes a causa del momento de torsión M_1 . a) puentes tradicionales y b) configuración de 8 galgas.

Nótese que además del momento de torsión también se aplica una fuerza cortante y un momento flector en el experimento, por lo que las deformaciones de las galgas extensiométricas son debidas a las 3 cargas aplicadas.

En la configuración de 8 galgas, debido a la fuerza cortante, el momento flector y el momento de torsión la galga 3 situada en $(\varphi, \delta) = (90^\circ, 30^\circ)$ es la más sensible. Sin embargo, la galga 7 situada en $(\varphi, \delta) = (270^\circ, 30^\circ)$ es la menos sensible a las cargas aplicadas.

3.5. Cálculo de la matriz de calibración

Para la calibración de la configuración de 8 galgas, se han calculado mediante regresiones lineales las pendientes de 8 las galgas en todos los experimentos realizados.

Una vez obtenidas las pendientes, han de ser relacionadas de forma lineal (como en la ecuación (4)) con la matriz de calibración experimental, \mathbf{C}_{exp} . Así, para obtener la matriz de calibración experimental, hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}_{RL} = \mathbf{P}\mathbf{C}_{exp}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/L_T & 1 & d/L_T & 0 \\ 0 & 0 & 1/D & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/D & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{C}_{exp}^T \quad (11)$$

donde \mathbf{P} es la matriz que relaciona la combinación de las componentes del tursor ejercidos en cada experimento, \mathbf{A}_{RL} es la matriz con las pendientes de las deformaciones de 8 galgas extensiométricas en los diferentes experimentos, y $d = L_2 + L_3 + L_4$ y $D = 2d$ son las distancias entre el punto de aplicación de la carga y la sección en la que se encuentra posicionada la configuración de 8 galgas.

Resolviendo el sistema lineal de la ecuación (11) se obtiene la matriz de calibración experimental:

$$\mathbf{C}_{exp} = \begin{bmatrix} 0.063 & 1.467 & -0.020 & -28.426 & -2.915 & 1.976 \\ 0.630 & -13.856 & 0.596 & 26.845 & -0.414 & -67.676 \\ 0.359 & -1.561 & 14.513 & -25.254 & -63.539 & 1.008 \\ -0.089 & 1.627 & 0.218 & 21.453 & 2.427 & 4.016 \\ 0.081 & -1.715 & -2.388 & -22.593 & 8.038 & -7.563 \\ 0.535 & 16.680 & -3.333 & 28.841 & 6.970 & 68.923 \\ 0.3620 & 2.605 & -12.359 & -26.010 & 61.180 & 11.823 \\ -0.140 & -1.008 & 1.804 & 29.328 & -7.582 & 2.693 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \quad (12)$$

3.6. Validación de la matriz de calibración

Una vez obtenida la matriz de calibración experimental \mathbf{C}_{exp} se ha llevado a cabo la validación. Esta consiste en a partir de las deformaciones medidas por las 8 galgas, tras la aplicación de unas cargas externas al eje,

estimar el torsor completo. Aunque en un futuro está previsto realizar experimentos adicionales para realizar la validación correctamente, en esta ocasión se ha realizado una validación preliminar a partir del experimento de la Sección 3.4, en el que se ejerce una fuerza de cortadura (con 40 Kg), momento flector y momento de torsión. De este forma, el torsor teórico aplicado, \mathbf{t}_{teo} , en la base 123 resulta ser:

$$\mathbf{t}_{teo} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40g \\ 40gL_T \\ 40gd \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\text{ N} \\ 0\text{ N} \\ 392.4\text{ N} \\ 87.9\text{ Nm} \\ 127.3\text{ Nm} \\ 0\text{ Nm} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

donde g es la aceleración gravitatoria.

La estimación del torsor externo, $\hat{\mathbf{t}}$, a partir de la matriz de calibración experimental (\mathbf{C}_{exp}) se obtiene según la ecuación (14):

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{C}_{exp}^+ (\boldsymbol{\varepsilon}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_m^0) \quad (14)$$

donde \mathbf{C}_{exp}^+ resulta ser la pseudoinversa de la matriz de calibración experimental, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_m^0$ son las deformaciones de las 8 galgas cuando se ejercen las diferentes cargas y sin ellas, respectivamente. Así, la estimación del torsor externo en la base 123 resulta ser:

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} 6.4\text{ N} \\ -14.3\text{ N} \\ 412.6\text{ N} \\ 91.8\text{ Nm} \\ 133.6\text{ Nm} \\ -0.5\text{ Nm} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Si analizamos los resultados obtenidos, y calculamos el error absoluto entre el torsor estimado $\hat{\mathbf{t}}$ y el torsor teórico \mathbf{t}_{teo} , podemos ver como la estimación de los momentos es notablemente mejor que en las fuerzas. Concretamente, el error absoluto en la estimación de M_1 es de 3.9 Nm , de 6.3 Nm en la estimación de M_2 y de 0.5 Nm en la estimación de M_3 . Sin embargo, la estimación de la fuerza axial F_1 el error asciende a 6.4 N , y en los cortantes F_2 y F_3 , 14.3 N y 20.2 N , respectivamente.

Esto se debe principalmente a que las deformaciones causadas por las 3 fuerzas resultan mucho menores que las deformaciones causadas por los 3 momentos, y por consiguiente resulta más difícil caracterizar la relación lineal entre carga y deformación equivalente.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un procedimiento de calibración estática de una novedosa configuración de 8 galgas para la medición de cargas mecánicas en ejes de sección circular. El primer paso ha sido obtener una

expresión para la deformación de un de una galga situada arbitrariamente en función de las cargas mecánicas (fuerzas y momentos) ejercidas sobre el eje. Esta expresión es útil por sí misma, ya que permite comprender la relación entre la deformación de una galga, su ubicación y los componentes de de la carga mecánica ejercida sobre el eje.

A partir de la relación lineal entre la deformación de una galga y la carga ejercida sobre el eje, se ha desarrollado un procedimiento para determinar la ubicación óptima de un conjunto de galgas extensométricas para estimar las seis componentes de la llave. Una de las características más innovadoras de este enfoque es que todas las galgas extensométricas contribuyen a la estimación de cada componente. En consecuencia, cada componente de la carga se estima como una combinación lineal diferente de las deformaciones medidas en las galgas individuales.

Los resultados de la optimización muestran que es posible estimar las 6 componentes del torsor utilizando sólo 8 galgas extensométricas, que compensan efectos térmicos, mientras que en el estado del arte se utilizan 24 galgas (4 para cada componente de carga). Se trata de una notable reducción del número de galgas que puede reducir sustancialmente el coste de las aplicaciones que requieren la medición de las 6 componentes del torsor. Sin embargo, el número de canales de medida se ve aumentado de 6 a 8. Otro aspecto a destacar es que en la configuración de 8 galgas la compensación de temperatura se realiza como resultado de operaciones matemáticas y no como resultado del circuito de puente de Wheatstone.

Además, se ha diseñado y fabricado un banco de ensayos formado por un eje de sección circular para la calibración de la configuración de 8 galgas extensométricas. Se han realizado un total de 10 experimentos diferentes para la calibración, donde en cada uno de ellos se han aplicado diferentes componentes del torsor. Concretamente, se realizaron cuatro experimentos de fuerza cortante y momento flector, cuatro experimentos de fuerza cortante y momento flector con el eje extendido, un experimento de fuerza axial y un experimento de momento flector (con fuerza cortante y momento flector). Se analizaron dos criterios para establecer las cargas máximas aplicables al eje, y se concluyó que la saturación de los puentes de Wheatstone era el criterio más restrictivo debido a la *alta* rigidez del eje.

El rango de cargas ejercidas en los resultados de los experimentos muestran la linealidad entre la deformación equivalente y las cargas aplicadas, por lo que mediante una regresión lineal se han calculado las pendientes de las deformaciones de 8 galgas en los diferentes experimentos. La relación entre las pendientes de la configuración de 8 galgas y la matriz

de calibración experimental se ha calculado atendiendo a las disposiciones geométricas de los experimentos realizados.

Una vez calculada la matriz de calibración experimental, se ha llevado a cabo una validación preliminar de la metodología de calibración. Para ello, a partir del experimento con momento torsor se han medido las deformaciones de las 8 galgas y a partir de la matriz de calibración se han estimado las componentes del torsor.

Los resultados de la validación reflejan que la estimación de los 3 momentos que componen el torsor resulta más precisa, frente a la estimación de las 3 fuerzas. La razón de que así sea reside en que las deformaciones causadas por los momentos resultan ser mucho mayores que las causadas por las fuerzas, dando lugar a mayores errores en la estimación de estas últimas.

Como futuro trabajo está previsto realizar nuevos experimentos, de manera que pueda hacerse una validación adecuada de la metodología de calibración propuesta.

4.1. Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por la "Convocatoria de ayudas a proyectos de I + D del Gobierno de Navarra" bajo el proyecto con Ref. 0011-1365-2021-000159.

5. Referencias

- [1] K. Hoffmann, An introduction to stress analysis and transducer design using strain gauges, 2012.
- [2] J. Templeman, B. Sheil y T. Sun, «Multi-axis force sensors: A state-of-the-art review,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 304, p. 111772, 2020.
- [3] F. Ballo, M. Gobbi, G. Mastinu y G. Previati, «Advances in force and moments measurements by an innovative six-axis load cell,» *Experimental*, vol. 54, pp. 571-592, 2013.
- [4] A. Bicchi, «A criterion for optimal design of multi-axis force sensors,» *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 10, nº 4, pp. 269-286, 1992.
- [5] M. Uchiyama, E. Bayo y E. Palma-Villalon, «A systematic design procedure to minimize a performance index for robot force sensors,» *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 113, nº 3, pp. 388-394, 1991.
- [6] O. Al-Mai, M. Ahmadi y J. Albert, «Design, development and calibration of a lightweight, compliant six-axis optical force/torque sensor,» *IEEE Sensors Journal*, vol. 18, nº 17, pp. 7005-7014, 2018.
- [7] T. Liu y H. Tzo, «A novel six-component force sensor of good measurement isotropy and sensitivities,» *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 100, nº 2, pp. 223-230, 2002.
- [8] C. Yuan, L. Luo, Q. Yuan, J. Wu, R. Yan, H. Kim, K. Shin y C. Han, «Development and evaluation of a compact 6-axis force/moment sensor with a serial structure for the humanoid robot foot,» *Measurement*, vol. 70, pp. 110-122, 2015.
- [9] X. Iriarte, J. Aginaga, G. Gainza, J. Ros y J. Bacaicoa, «Optimal strain-gauge placement for mechanical load estimation in circular cross-section shafts,» *Measurement*, vol. 174, p. 108938, 2021.
- [10] G. R. Cowper, «The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory,» *Journal of Applied Mechanics*, vol. 33, nº 06, pp. 335-340, 1966.
- [11] J. T. Hutchinson y M. J. Lacky, «Selection of day roosts by red bats in mixed mesophytic forests,» *The Journal of Wildlife Management*, vol. 64, nº 1, pp. 87-94, 2000.
- [12] N. R. Draper y H. Smith, Applied regression analysis, vol. 326, John Wiley & Sons, 1998.
- [13] E. A. Morelli y V. Klein, Aircraft System Identification: Theory And Practice, vol. 2, Sunflyte Enterprises Williamsburg, 2016.
- [14] L. Ljung, System Identification in Signal analysis and prediction, Springer, 1998.
- [15] Y. Sun y J. M. Hollerbach, «Observability index selection for robot calibration,» de *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008.
- [16] R. K. Kincaid y S. L. Padula, «D-optimal designs for sensor and actuator locations,» *Computers & Operations Research*, vol. 29, nº 6, pp. 701-713, 2002.
- [17] X. Liu, R. Y. Yue y K. Chatterjee, «Geometric characterization of d-optimal designs for random coefficient regression models,» *Statistics & Probability Letters*, vol. 159, p. 108696, 2020.
- [18] C. Stephan, «Sensor placement for modal identification,» *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 27, pp. 461-470, 2012.
- [19] S. M. Kay, Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory, Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [20] J. Swevers, C. Ganseman, D. B. Tukel, J. De Schutter y H. Van Brussel, «Optimal robot excitation and identification,» *IEEE transactions on robotics and automation*, vol. 13, nº 5, pp. 730-740, 1997.
- [21] D. C. Ramsay, Principles of engineering instrumentation, UK: Arnold London, 1996.