

Estudio y optimización de algoritmo numérico para problemas de lubricación hidrodinámica con cavitación

Pedro Gómez Molina¹, Jaime Carpio Huertas², Luis Sanz Lorenzo³

¹Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial. Universidad Politécnica de Madrid. España. Email: pedro.gomez@alumnos.upm.es

²Departamento de Ingeniería Energética. Universidad Politécnica de Madrid. España. Email: jaime.carpio@upm.es

³Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial. Universidad Politécnica de Madrid. España. Email: luis.sanz@upm.es

Resumen

En este trabajo se resuelve numéricamente el problema estacionario de lubricación hidrodinámica con cavitación en cojinetes, introduciendo para ello un campo de velocidades artificial y empleando el MEF junto con el método de las características. El problema parte del modelo matemático de Elrod-Adams para el comportamiento del lubricante. Considerar el fenómeno de cavitación en este modelo proporciona soluciones más realistas para la presión, pero requiere resolver un sistema de ecuaciones no lineal donde aparece un operador que es multivaluado. Para su resolución se utiliza el algoritmo de Bermúdez-Moreno, combinando sus ideas con el uso de una técnica de intersección de mallas, conocida como técnica supermalla, para llevar a cabo el cálculo exacto de ciertas integrales. Asimismo, se utilizan otras estrategias buscando una convergencia más rápida del algoritmo iterativo. Se realiza un estudio de las soluciones, de la precisión en la conservación de la masa, y de la velocidad de convergencia del método con el objetivo de acelerarla. Se presentan resultados numéricos de las simulaciones.

Palabras clave: MEF, Lubricación hidrodinámica, Método de las características, Técnica Supermalla.

Abstract

We present a study of a method to solve numerically stationary problems of hydrodynamic lubrication with cavitation in bearings using the finite element method and the method of characteristics. The problem is based on the Elrod-Adams mathematic model for the lubricant fluid behavior. To achieve realistic pressure solutions, cavitation must be considered. However, this leads to a non-linear system of equations including a multivalued operator. To solve this problem, we use the Bermúdez-Moreno algorithm combining its ideas with a mesh intersection technique, known as supermesh, to compute certain integrals exactly and other strategies to improve the performance of the iterative method. We have studied the solutions, the mass conservation precision and the convergence speed of the method trying to improve it. Numeric results of the simulations are presented.

Keywords: FEM, Hydrodynamic lubrication, Method of Characteristics, Supermesh technique.

1. Introducción

La tribología es la ciencia que estudia la interacción entre superficies. Uno de sus principales campos de estudio es la minimización de la fricción y el desgaste, y una de las soluciones más comunes para reducir estos fenómenos es la lubricación. El lubricante puede considerarse un tercer cuerpo que se sitúa entre dos superficies para evitar el contacto directo entre ellas y facilitar el movimiento relativo de una respecto a otra. De esta forma se sustituye la fricción entre los sólidos por fricción entre lubricante y sólido, mucho menor, consiguiendo también mejoras muy significativas en el deterioro [1].

Una de las aplicaciones más comunes de la lubricación son los cojinetes hidrodinámicos. Estos constan de un elemento fijo denominado cubo con un hueco cilíndrico en donde se aloja un eje. El fluido lubricante se introduce en el espacio que queda entre ambos elementos para permitir así la rotación del eje con muy baja fricción.

Para diseñar y estudiar estos elementos se debe comprender el fenómeno de la lubricación y cómo se comporta la película fluida durante su funcionamiento. A partir de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos, aceptando ciertas hipótesis fundamentales se llega al punto de partida más habitual en lubricación, la conocida ecuación de Reynolds. Esta, para el caso de fluido incompresible en cojinetes es:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{R^2 \eta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\omega \frac{\partial h}{\partial \theta}, \quad (1)$$

donde θ es la coordenada angular, z es la coordenada axial, η es la viscosidad dinámica, ω es la velocidad de

giro y h es el espesor de película, del cual se conoce una expresión analítica

$$h = C + e \cdot \cos(\theta) = C(1 + \epsilon \cdot \cos(\theta)), \quad (2)$$

siendo C la diferencia de radios entre cubo y eje, e la distancia entre centros, llamada excentricidad, y ϵ el coeficiente de excentricidad. En la Figura 1 se muestra un esquema de la geometría con la nomenclatura empleada.

A partir de (1) se pueden encontrar soluciones analíticas aproximadas para la distribución de presiones que funcionan bien cuando se cumple $L \gg D$ o bien $L \ll D$ siendo L la longitud axial del cojinete y D su diámetro. Usando la distribución de presiones, junto con la geometría, la velocidad de giro y las propiedades del lubricante, se pueden obtener los parámetros más importantes de funcionamiento del cojinete, destacando entre ellos la capacidad de carga.

Sin embargo, en las aplicaciones más habituales los cojinetes se suele cumplir $L \approx D$, por lo que las soluciones analíticas aproximadas quedan fuera de su campo de aplicación y se hace necesario resolver la ecuación de Reynolds bidimensional. Es en estos casos donde la simulación numérica cobra importancia para calcular la distribución de presiones y así conocer los parámetros de funcionamiento deseados.

Al plantear un modelo del comportamiento del fluido en lubricación debe tenerse en cuenta un fenómeno clave en mecánica de fluidos: la cavitación. Se denomina cavitación a la aparición de burbujas en el interior de un líquido por alcanzarse en él presiones inferiores a la presión de vapor del fluido. Las distribuciones de presiones cuando no se tiene en cuenta este fenómeno muestran en muchos casos una

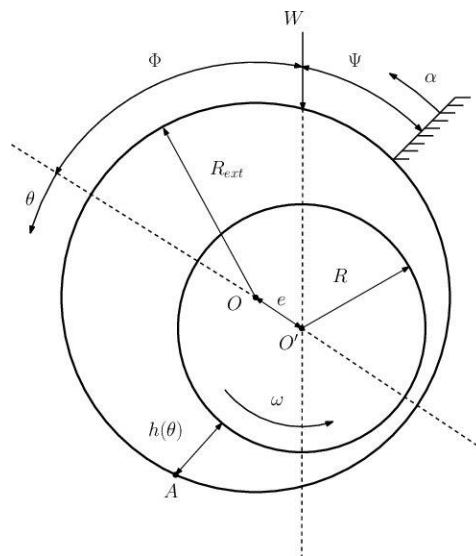


Figura 1. Esquema simplificado de la geometría del cojinete. Fuente: elaboración propia.

zona de presiones negativas que en la realidad no puede aparecer, ya que el fluido cavita antes de alcanzarlas, generando zonas donde aparecen burbujas y la ecuación de Reynolds deja de ser válida. Además, conocer la zona de cavitación en la fase de diseño puede ser interesante para prevenir o controlar la aparición de fenómenos vibratorios, erosión de superficies y alteraciones de funcionamiento del elemento.

El modelo empleado en este trabajo, conocido como modelo de Elrod-Adams, se complementa con la condición de Floberg en la frontera entre las zonas con y sin cavitación para considerar este fenómeno [2]. La frontera entre estas regiones no se conoce al inicio del problema, por lo que se trata de un problema de frontera libre, por ser necesario hallar la posición de esta interfase en la resolución. El planteamiento seguido pasa por introducir una variable adicional al problema, que se denota por γ y que corresponde a la fracción del espesor ocupada por lubricante líquido.

El valor de γ es igual a la unidad en la zona sin cavitación, y se cumple $0 \leq \gamma < 1$ en la región de cavitación. La relación entre la presión p y γ se da a través del denominado operador monótono maximal, H , definido por:

$$H(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \\ (0,1) & \text{si } p = 0 \\ 1 & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Este operador es multivaluado, por lo que aparece una relación no lineal en el problema, $\gamma \in H(p)$.

Sea Ω el dominio rectangular $[0, 2\pi] \times [0, L/R]$ resultante de la adimensionalizar las variables θ y z . Este puede observarse en la Figura 2. La función presión adimensional, \bar{p} debe cumplir la ecuación de

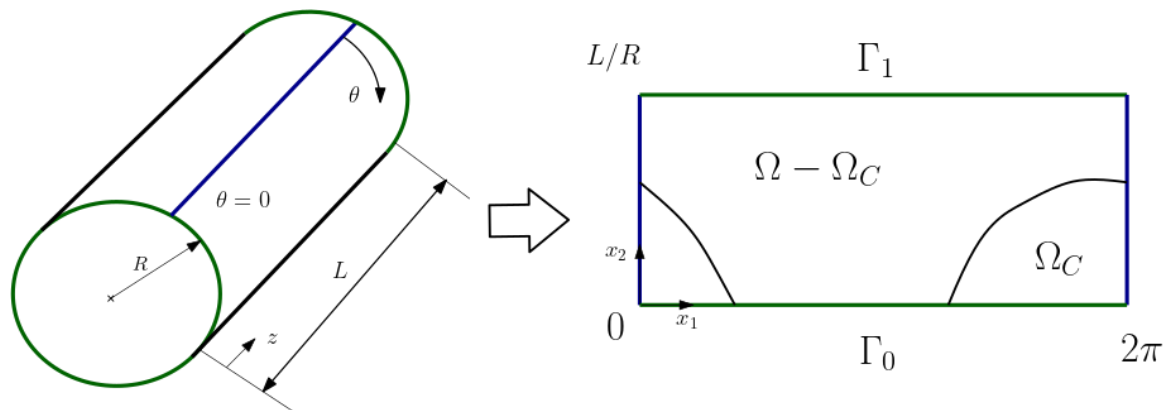


Figura 2. Dominio adimensionalizado del problema. Fuente: elaboración propia.

Reynolds en la zona de la película fluida donde no hay cavitación. En la región de cavitación, denominada Ω_C , esta ecuación deja de modelar el comportamiento del fluido.

Las ecuaciones del modelo adimensionalizado de Elrod-Adams [2], para el dominio Ω , denotando $\Gamma_0 = (0, 2\pi) \times \{0\}$ y $\Gamma_1 = (0, 2\pi) \times \{L/R\}$, son las siguientes:

$$\begin{cases} \bar{p} = 0, & 0 \leq \gamma < 1 & \text{en} & \Omega_C \\ \nabla \cdot (\bar{h}^3 \nabla \bar{p}) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} & & \text{en} & \Omega - \Omega_C \\ \bar{p} > 0, \gamma = 1 & & \text{en} & \Omega - \Omega_C \\ \bar{p} = 0, \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} = (1 - \gamma) \bar{h} \nu_{x_1} & & \text{en} & \partial \Omega_C \cap \Omega \\ \bar{p} = \bar{p}_0 & & \text{en} & \Gamma_0 \\ \bar{p} = \bar{p}_1 & & \text{en} & \Gamma_1 \end{cases} \quad (4)$$

En artículos como [2], [3] y [4] se prueba la existencia y unicidad de solución de este conjunto de ecuaciones. También se obtiene que el problema débil asociado es:

Encontrar $(\bar{p}, \gamma) \in K \times L^\infty(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} \bar{h}^3 \nabla \bar{p} \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} \frac{\partial(\bar{h}\gamma)}{\partial x_1} \cdot \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in K_0 \quad (5)$$

$$\gamma \in H(\bar{p})$$

siendo:

$$K = \{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_0} = \bar{p}_0, \phi|_{\Gamma_1} = \bar{p}_1, \phi \text{ es } 2\pi \text{ periódica en la variable } x_1 \}$$

$$K_0 = \{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_0} = 0, \phi|_{\Gamma_1} = 0, \phi \text{ es } 2\pi \text{ periódica en la variable } x_1 \}$$

2. Metodología

Para poder resolver numéricamente este problema se empleará una estrategia basada en las ideas de [2] y [3] que hace uso del método de las características y el algoritmo de Bermúdez-Moreno [5].

2.1. Método de las características

En primer lugar, transformaremos el problema en uno de evolución, de forma que la solución buscada es la solución estacionaria de dicho problema de evolución. Con este fin se introduce una dependencia de un tiempo artificial t en todas las funciones del problema y se denota con “ \sim ” a estas funciones. Si se introduce un campo de velocidades artificial $\vec{V}(x_1, x_2) = (1, 0)$ se puede escribir:

$$\frac{\partial(\tilde{h}\tilde{\gamma})}{\partial x_1} = \frac{D}{Dt}(\tilde{h}\tilde{\gamma}) \quad (6)$$

Se denota por $X(x, t; \tau)$ a la posición en el instante τ de una partícula que alcanza en el instante t la posición x al ser conveccionada por el campo de velocidades \vec{V} . Se escribe, por simplificar la notación, $X^k(x) = X(x, t; t - k)$, donde k representa el paso de tiempo escogido para la discretización temporal. El operador derivada material en este caso puede discretizarse con paso de tiempo k según la expresión

$$\frac{Df}{Dt} \simeq \frac{f(x) - f(X^k(x))}{k} \quad (7)$$

Usando (7) se puede reformular la expresión del problema (5) sustituyendo la derivada material por su discretización para obtener el siguiente problema débil:

Encontrar $(\bar{p}, \gamma) \in K \times L^\infty(\Omega)$ tal que:

$$k \int_{\Omega} h^3 \nabla \bar{p} \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} h \gamma \varphi = \int_{\Omega} ((h\gamma) \circ X^k) \varphi \quad \forall \varphi \in K_0 \quad (8)$$

$$\gamma \in H(\bar{p})$$

A continuación, empleando las ideas de [2], se demuestra que este problema débil puede formularse como el siguiente problema de iteración de punto fijo:

Dado $\tilde{\gamma}^n$, encontrar \tilde{p}^{n+1} y $\tilde{\gamma}^{n+1}$ tales que:

$$k \int_{\Omega} \tilde{h}^3 \nabla \tilde{p}^{n+1} \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} \tilde{h} \tilde{\gamma}^{n+1} \varphi = \int_{\Omega} ((\tilde{h}\tilde{\gamma}^n) \circ X^k) \varphi \quad \forall \varphi \in K_0 \quad (9)$$

$$\tilde{\gamma}^{n+1} \in H(\tilde{p}^{n+1})$$

Si esta iteración converge lo hará a la solución del problema débil, $(\bar{p}, \bar{\gamma})$. Sin embargo, la formulación obtenida sigue presentando una relación no lineal entre

las variables del problema a través del operador multivaluado H . Para poder lidiar con él se emplea el algoritmo de Bermúdez-Moreno [5].

2.2. Algoritmo de Bermúdez-Moreno

Este algoritmo introduce la variable β^{n+1} en el problema y aplica ciertas transformaciones trabajando con la regularización de Yosida para convertir el problema en uno con operadores univaluados. En concreto se define β^{n+1} a través de:

$$\beta^{n+1} \in H(\tilde{p}^{n+1}) - \omega \tilde{p}^{n+1} = (H - \omega I)\tilde{p}^{n+1} \quad (10)$$

Donde ω es un número real y positivo e I es el operador identidad. El objetivo es aplicar al operador $(H - \omega I)$ la denominada regularización de Yosida, H_λ^ω [5], definida como:

$$H_\lambda^\omega(x) = \frac{x - [I + \lambda(H - \omega I)]^{-1}(x)}{\lambda} = \begin{cases} -\omega x & x \leq 0 \\ \frac{1 - \lambda\omega}{\lambda} x & 0 < x < \lambda \\ \frac{1 - \omega x}{1 - \lambda\omega} & x \geq \lambda \end{cases} \quad (11)$$

y usar la propiedad de que si se emplean ω y λ adecuados, se verifica

$$\beta \in (H - \omega I)(p) \iff \beta = H_\lambda^\omega(p + \lambda\beta) \quad (12)$$

La ventaja de H_λ^ω es que, a diferencia de H , es univaluado y elimina del problema el operador multivaluado que relacionaba las variables.

Esto quiere decir que, usando (10), puede hallarse β^{n+1} como solución del problema de punto fijo $\beta^{n+1} = H_\lambda^\omega(p^{n+1} + \lambda\beta^{n+1})$.

Ahora se pueden escribir las ecuaciones del problema en términos de la variable β^{n+1} . Esto permite, dados $(\tilde{p}^n, \tilde{\gamma}^n)$, encontrar las soluciones $(\tilde{p}^{n+1}, \tilde{\gamma}^{n+1})$ como solución de una segunda iteración de punto fijo, en j , donde el problema a resolver es:

Dado β_j^{n+1} , encontrar \tilde{p}_j^{n+1} y β_{j+1}^{n+1} tales que:

$$k \int_{\Omega} \tilde{h}^3 \nabla \tilde{p}_j^{n+1} \cdot \nabla \varphi + \omega \int_{\Omega} \tilde{h} \tilde{p}_j^{n+1} \varphi = \int_{\Omega} ((\tilde{h}\tilde{\gamma}^n) \circ X^k) \varphi - \int_{\Omega} \tilde{h} \beta_j^{n+1} \varphi \quad \forall \varphi \in K_0 \quad (13)$$

$$\beta_j^{n+1} = H_\lambda^\omega(\tilde{p}_j^{n+1} + \lambda\beta_j^{n+1})$$

Para avanzar en el proceso iterativo hay que resolver el problema lineal de la primera ecuación de (13) para hallar \tilde{p}_j^{n+1} y utilizar este resultado para actualizar el valor de β_j^{n+1} con la segunda expresión.

Se tiene por tanto un doble problema de punto fijo. Dentro de cada iteración en n , para obtener las soluciones $(\tilde{p}^{n+1}, \tilde{\gamma}^{n+1})$, se debe alcanzar la convergencia de las iteraciones de Bermúdez-Moreno en j , lo que proporciona nuevos valores \tilde{p}^{n+1} y β^{n+1} con los que actualizar el valor de

$$\tilde{\gamma}^{n+1} = \beta^{n+1} + \omega \tilde{p}^{n+1} \quad (14)$$

Al alcanzar la convergencia de las iteraciones en n se tiene que los valores de \tilde{p} y $\tilde{\gamma}$ obtenidos son solución del problema débil (8). Esta convergencia está garantizada por [6] siempre que los parámetros del método escogidos cumplan $\lambda\omega = 0.5$.

Para resolver este problema se emplea una discretización espacial basada en el método de los elementos finitos (MEF). El algoritmo de resolución se programa en C para realizar las simulaciones necesarias.

2.3. Conservación de la masa

Por otro lado, las ecuaciones del problema de lubricación implican que la masa de fluido en el dominio se debe conservar al alcanzarse la convergencia del método iterativo. Esto equivale a decir que el flujo neto entrante al cojinete por las tapas, correspondientes a las fronteras superior e inferior, debe ser nulo. El uso del MEF garantiza dicha conservación de la masa si las integrales que aparecen al emplearlo se calculan de forma exacta. Es conocido que las fórmulas de cuadratura empleadas para calcular

dichas integrales sobre cada elemento dan resultados exactos al integrar polinomios.

Al aplicar el MEF, la presencia de X^k en los términos implica el cálculo de integrales sobre los elementos del mallado original de productos de funciones base pertenecientes al mallado original y a uno nuevo que resulta de convectar sus nodos. Estos productos serán en el caso general polinomios a trozos sobre dichos elementos. Esto significa que las integrales no se calculan de forma exacta al emplear el enfoque convencional, lo cual se traduce en un error en la conservación de la masa.

Una opción para que el error en masa sea pequeño es utilizar un elevado número de puntos de cuadratura para buscar una buena aproximación [7], y otra opción, para conseguir un cálculo con precisión de error máquina en estos términos, es emplear métodos de intersección de mallados como la técnica supermalla [8]. En este trabajo se han empleado ambos enfoques para comparar sus resultados

La técnica supermalla implica llevar a cabo la construcción de una nueva malla de la intersección de los elementos del mallado original y el convectado, de forma que cada elemento de la supermalla pertenezca a un único elemento del mallado original y del convectado. De esta forma, integrando los términos sobre los elementos de la supermalla y después ensamblándolos, se consigue un cálculo exacto de las integrales.

La construcción de la supermalla se realiza con un enfoque local según el algoritmo explicado en [8], y lleva asociado un coste computacional. Un ejemplo de supermalla local de los elementos puede verse en la Figura 3.

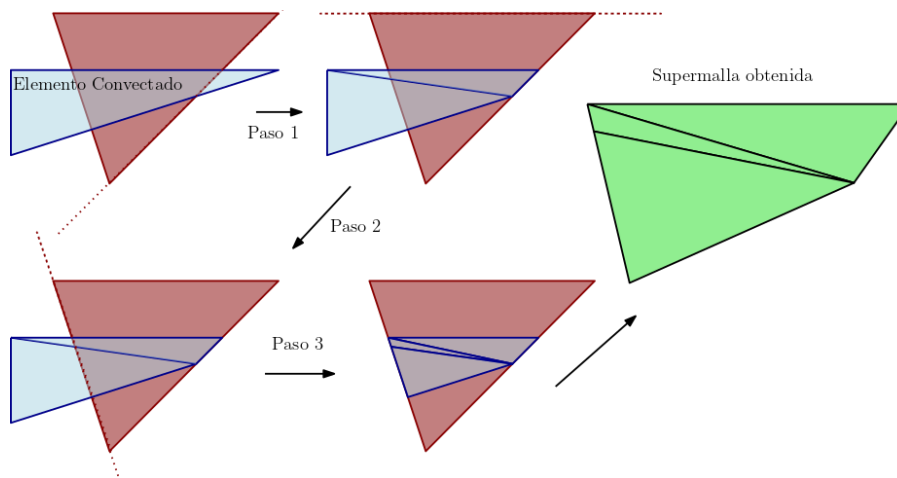


Figura 3. Ejemplo de creación de la supermalla local asociada a la intersección entre dos elementos. Fuente: elaboración propia.

3. Resultados

Para validar el modelo implementado y buscar métodos para acelerar su convergencia o mejorar sus resultados se plantean una serie de pruebas. Los resultados se detallan en este apartado.

3.1. Validación del modelo

La ecuación de Reynolds tiene solución analítica aproximada en los casos donde se cumple $L \gg D$ o bien $L \ll D$. El modelo numérico debe proporcionar soluciones similares a las analíticas en los casos en que estas sean válidas. Además, los valores de los parámetros obtenidos con el modelo numérico en la zona donde $L \approx D$, deben presentar una evolución coherente y suave en relación con los que predicen las soluciones analíticas en su zona de aplicación.

Para comprobar este comportamiento se realiza un estudio de la evolución del número de Sommerfeld en función de L/D . El número de Sommerfeld es un parámetro adimensional relacionado con la capacidad de carga del cojinete [1]. Se define como:

$$S = \frac{2\eta NLR^3}{WC^2} \quad (15)$$

Los resultados se muestran en la Figura 4. En ella se puede observar la evolución esperada, un ajuste razonable a las soluciones analíticas aproximadas en los extremos, especialmente en el caso de cojinete corto, y una transición suave en la zona central.

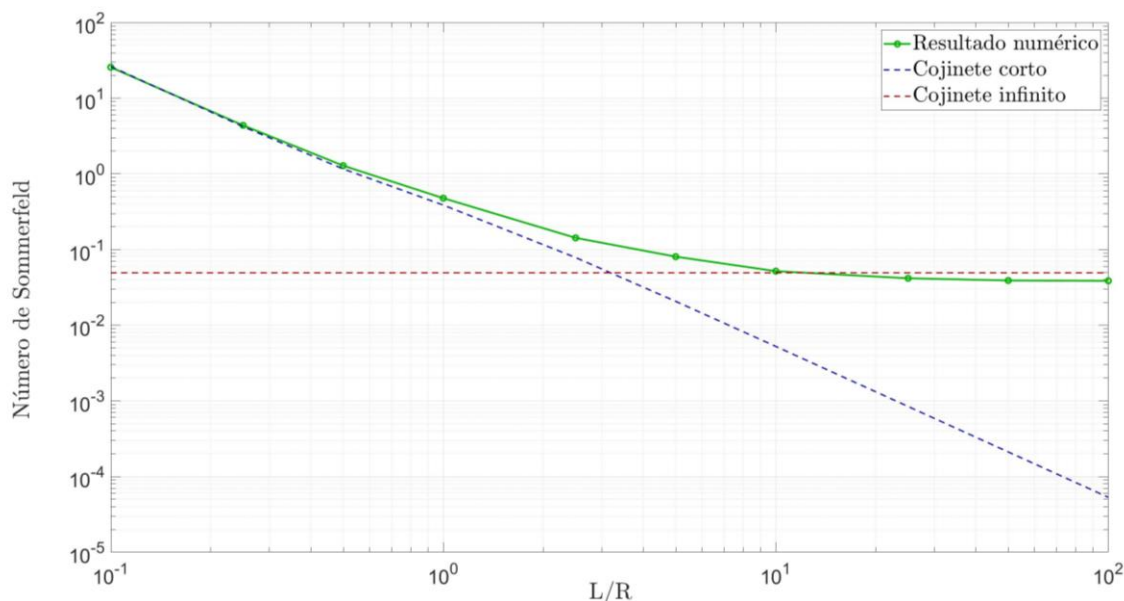


Figura 4. Evolución del número de Sommerfeld en función de la longitud axial del cojinete. Comparación con soluciones analíticas. Fuente: elaboración propia.

3.2. Estudio de la velocidad de convergencia

Es sabido que la velocidad de convergencia del algoritmo de Bermúdez-Moreno depende en gran medida de la elección del parámetro ω [5]. Se ha realizado un estudio, particularizado al problema de lubricación, del valor óptimo de ω , es decir, el que proporciona el número mínimo de iteraciones hasta la convergencia, comprobando la influencia en dicho valor óptimo del resto de parámetros de entrada del modelo.

Se analiza el número de iteraciones totales del algoritmo de Bermúdez-Moreno, en el índice j , para 80 iteraciones en n , tras comprobarse que para este número de iteraciones en n se puede considerar que el proceso ha alcanzado la convergencia.

Se analiza la influencia de parámetros físicos y numéricos del modelo en el valor del ω óptimo. En las Figuras 5 y 6 se muestran dos de los casos más relevantes, la variación con la excentricidad y con el tamaño de malla, respectivamente.

En ambas gráficas, al igual que en el resto de las pruebas de este estudio, se puede apreciar la dependencia del ω óptimo como función de un cierto parámetro.

Hay parámetros de entrada que mantienen el óptimo en un valor prácticamente constante, como sucede con h_{max} , pero otros como la excentricidad, o las condiciones de contorno hacen variar el valor de ω óptimo.

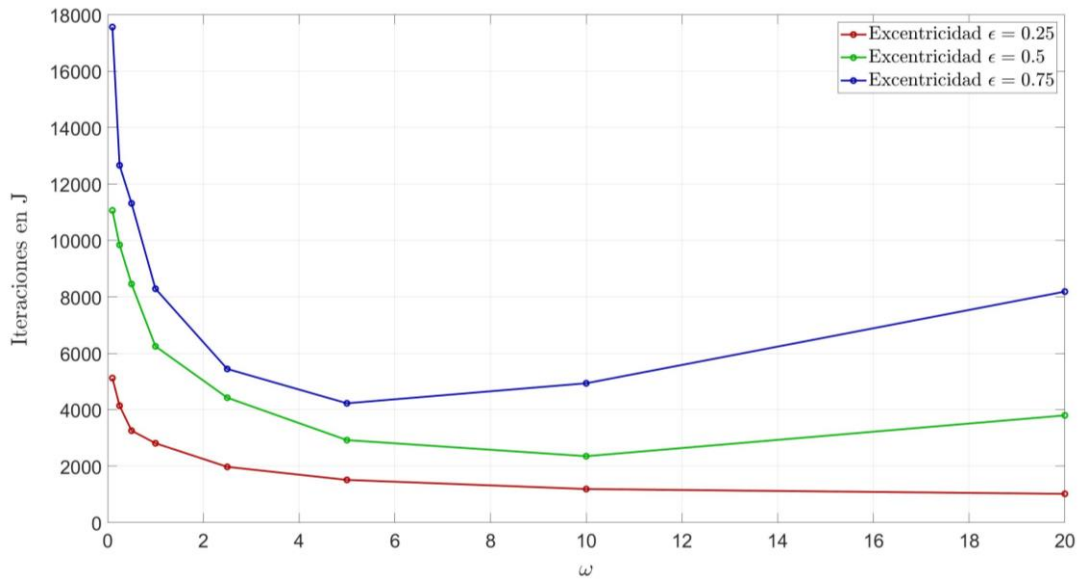


Figura 5. Número de iteraciones en función de ω para diferentes excentricidades, ϵ . Fuente: elaboración propia.

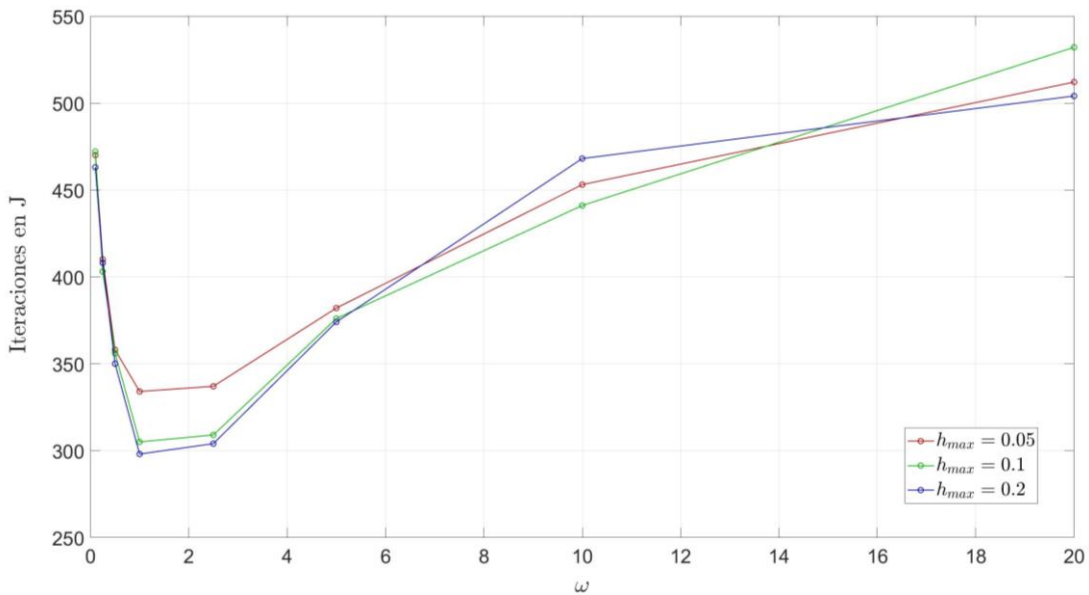


Figura 6. Número de iteraciones en función de ω para diferentes tamaños de malla, h_{max} . Fuente: elaboración propia.

3.3. Introducción de difusión numérica artificial

A lo largo de las simulaciones realizadas, se comprueba que las soluciones obtenidas para γ pueden presentar importantes oscilaciones numéricas espurias para algunos valores de los parámetros escogidos. Estas oscilaciones generan unos picos en la solución que la convierten en poco realista.

Una estrategia para mejorar las soluciones es la introducción de difusión numérica artificial en el modelo. Esta permite suavizar las soluciones a costa de

introducir un cierto error adicional, que deberá estudiarse sabiendo que la reducción de las oscilaciones puede también mejorar el error, equilibrando el introducido por la difusión, si esta se emplea de forma adecuada.

La idea consiste en introducir en el lado derecho de la primera ecuación de (9) un término de difusión en la variable γ similar al que afecta a la presión, pero multiplicado por una cierta constante C_{Suav} . El término tiene la forma:

$$C_{Suav} \cdot k \int_{\Omega} \tilde{h}^3 \nabla \tilde{\gamma}^{n+1} \cdot \nabla \varphi \quad (16)$$

Para obtener un valor de C_{Suav} razonable se procede de la siguiente forma: se compara el error L^2 entre la solución de presiones original y la que incluye difusión con el error entre la solución analítica de cojinete corto y la numérica en el límite de aplicación propuesto por [1], y se elige C_{Suav} de forma que ambos errores sean del mismo orden de magnitud. Esta comprobación se realiza para varios tamaños de mallado, obteniendo en todos los casos que C_{Suav} debe ser del orden de 10^{-2} .

En la Figura 7 se observa una comparativa entre soluciones sin y con difusión numérica artificial, empleando en la segunda $C_{Suav} = 3 \cdot 10^{-2}$. Se observa que la distribución de presiones no varía prácticamente nada, mientras que en γ sí se observa una mejora notable en la suavidad de la solución. Esto favorece un mayor realismo al determinar la zona de cavitación que aparece en el cojinete.

3.4. Precisión en la conservación de la masa

En el problema planteado, la masa de lubricante en el dominio debe permanecer constante al alcanzar la convergencia al estado estacionario, es decir, cuando $n \rightarrow \infty$. Esto equivale a decir que el flujo neto entrante al cojinete por las tapas, correspondientes a las fronteras en x_2 , debe ser nulo. En el caso de los flujos en $x_1 = 0$ y $x_1 = 2\pi$, se tiene que deben ser iguales por la periodicidad del dominio, debiéndose la posible diferencia a errores numéricos del método.

Estos errores numéricos están relacionados con la precisión en el cálculo de las integrales y en la

resolución de problema lineal, la cual está a su vez influida por la tolerancia elegida para marcar la convergencia del método iterativo. Además, influirá el método de cálculo de las integrales de términos compuestos con X^k según se comentó en anteriores apartados.

Se realiza un estudio del error de masa para el caso de alimentación de lubricante por un extremo a cierta presión, con el otro extremo a presión atmosférica. Se compara el error en flujo para diferentes valores de la tolerancia de parada del método iterativo empleando las dos técnicas de integración propuestas.

Esta simulación correspondería a imponer condiciones Dirichlet homogéneas en $x_2 = 0$ y Dirichlet $\bar{p} = \Delta p$ en $x_2 = L/R$. Al aumentar Δp se va reduciendo la zona de cavitación, y el método numérico es capaz de obtener mejores resultados hasta estabilizarse cuando la zona de cavitación prácticamente desaparece.

Si la tolerancia de parada se reduce mucho con el fin de conseguir mejoras en el error de masa, no se alcanza la convergencia del método iterativo debido al efecto del error numérico.

En las gráficas de la Figura 8 se observan los resultados. Como era de esperar, la precisión mejora al reducir la tolerancia de parada del método iterativo. También se comprueba que el uso de la técnica supermallado puede conseguir resultados hasta 5 órdenes de magnitud más precisos al combinarse con una tolerancia de parada reducida.

Este estudio se complementa con el de coste computacional que se muestra a continuación, comparando el coste de ambas técnicas de integración.

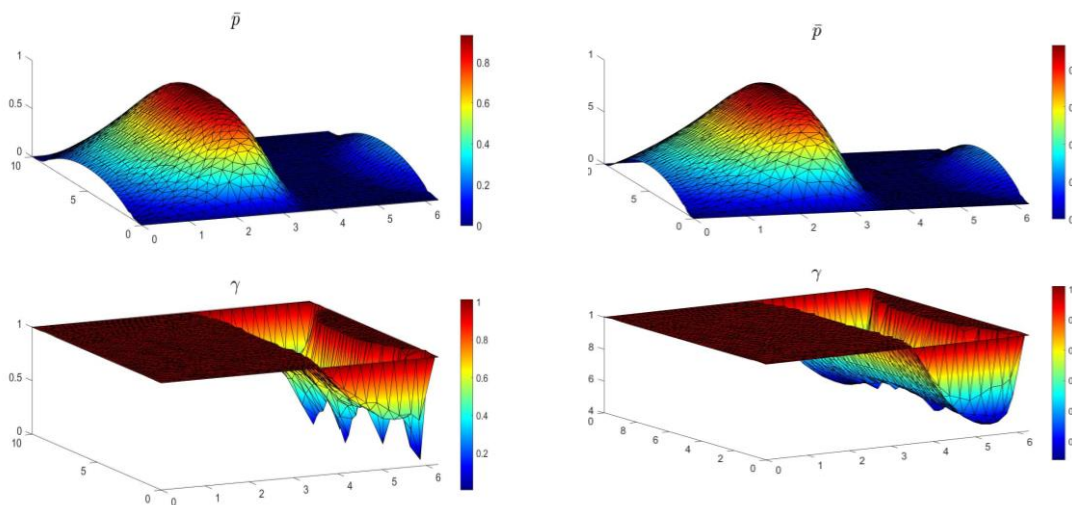


Figura 7. Soluciones de presión y γ con la formulación original (Izquierda) y con difusión numérica con $C_{Suav} = 0.03$ (Derecha). Fuente: elaboración propia.

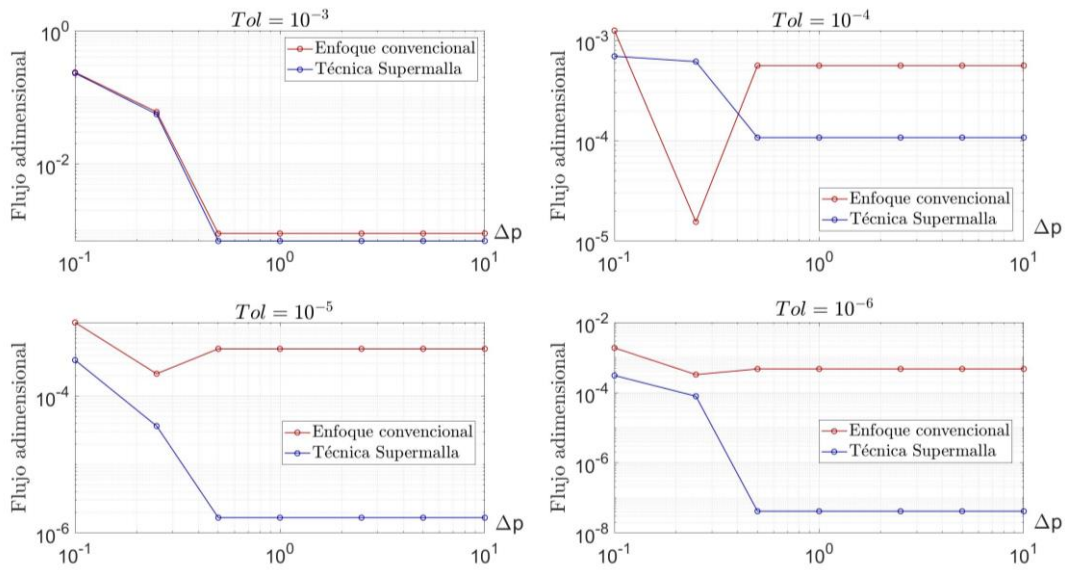


Figura 8. Errores en flujo para diferentes tolerancias de parada empleando proyección L^2 convencional y técnica Supermalla para el cálculo de los términos compuestos con X^k . Fuente: elaboración propia.

3.5. Coste computacional

Se ha puesto de manifiesto que el uso de la técnica supermalla consigue mayor precisión en el cálculo de ciertas integrales que aparecen en el problema. Sin embargo, el proceso de remallado de las intersecciones tiene asociado un coste computacional que en principio podría ser significativo en el rendimiento global del método.

Por las condiciones concretas del problema de lubricación, en el que los datos no dependen del tiempo, estos cálculos asociados al remallado solo deben realizarse una vez al inicio del algoritmo, en la etapa de cálculo y ensamblaje de las matrices. Esto empuja a pensar que la influencia en el tiempo de computación del uso de la técnica supermalla puede ser pequeña.

Esto se analiza con un estudio del coste computacional, en donde se comprueba, para diferentes valores de los parámetros de entrada, que ambas técnicas consiguen tiempos del mismo orden de magnitud en todos los casos, si bien es cierto que empleando la supermalla suele ser ligeramente superior.

Un caso interesante y en cierta medida inesperado se obtiene al analizar el coste en función de la tolerancia de parada, como puede verse en la Figura 9, donde se observa que la supermalla consigue una ejecución más rápida al combinarse con tolerancias de parada reducidas, lo que se debe a un menor error numérico que reduce el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia.

4. Conclusiones

Este trabajo parte del modelo de Elrod-Adams. Este modelo plantea un problema de frontera libre al no conocerse los límites de las zonas con y sin cavitación, donde gobiernan ecuaciones diferentes. Para afrontarlo se introduce la variable γ que representa la fracción de líquido en el espesor de película. La zona de cavitación es aquella donde la variable γ es menor que la unidad.

En el problema débil asociado aparece una relación no lineal entre las incógnitas del problema, que son la presión, \bar{p} , y la fracción de líquido, γ . Esta relación se da a través del operador monótono maximal $\gamma = H(\bar{p})$, que es multivaluado. Para resolver el problema se introduce el método de las características y el algoritmo iterativo de Bermúdez-Moreno [5], obteniendo una doble iteración de punto fijo que se resuelve empleando el método de los elementos finitos para la discretización espacial.

El algoritmo propuesto se ha implementado en el lenguaje de programación C para realizar las simulaciones. Además, se han incorporado las funciones propias de la técnica supermalla para calcular de forma exacta ciertas integrales que aparecen al aplicar el método de las características.

Una vez desarrollado el modelo se ha realizado un estudio comparando las soluciones numéricas obtenidas con las soluciones analíticas en sus campos de aplicación, que ha permitido validar y depurar el modelo.

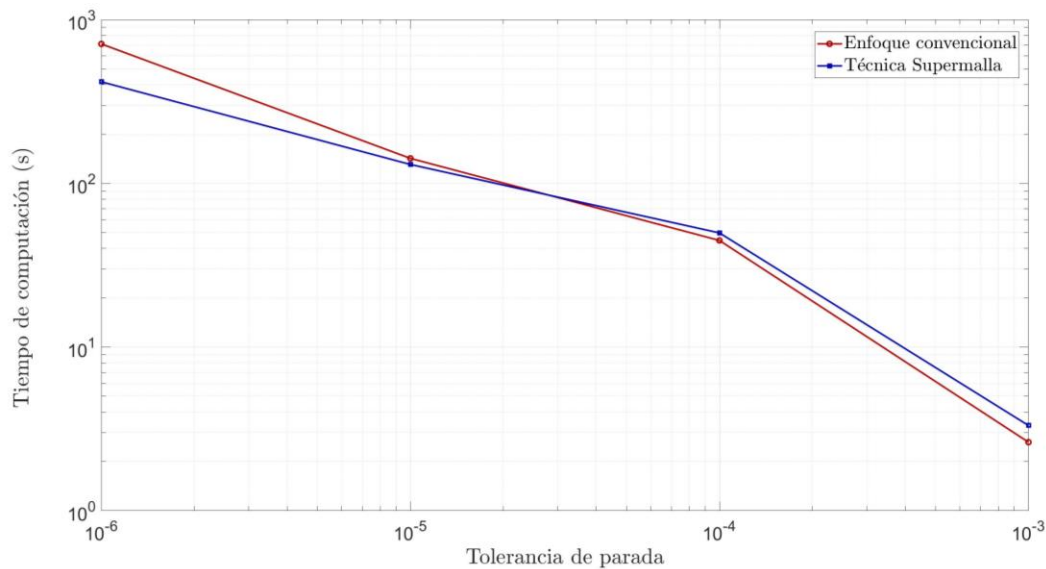


Figura 9. Coste computacional en función de la tolerancia de parada. Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se han realizado una serie de estudios sobre el rendimiento del algoritmo. Entre ellos destacan el test de velocidad de convergencia en función del parámetro ω del algoritmo de Bermúdez-Moreno y la introducción de difusión numérica artificial al modelo, cuyos resultados se han comentado anteriormente.

Por último, se ha realizado un estudio del error de masa en el dominio comparando los resultados de las dos técnicas propuestas para el cálculo preciso de las integrales. En este aspecto, a pesar de que el uso de la técnica supermalla mejora considerablemente la precisión en la conservación de la masa, el error de truncamiento inherente al método de Bermúdez-Moreno dificulta conseguir un error de masa a nivel de error máquina, como sí sucede al aplicar esta técnica a problemas de convección pura [8].

Para conseguir un mejor error de masa se debería recurrir a otro tipo de algoritmo de resolución. Además, contrariamente a lo que en un principio cabría esperar, el uso de la técnica supermalla puede reducir los tiempos de simulación al conseguirse la convergencia con menos iteraciones, gracias a la reducción del error numérico asociada a este método.

5. Referencias

- [1] M. K. Ghosh, B. C. Majumdar, y M. Sarangi, *Theory of Lubrication*. Tata McGraw Hill, 2013.
- [2] A. Bermúdez y J. Durany, Numerical solution of cavitation problems in lubrication, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 75, 457-466, 1989.
- [3] N. Calvo, J. Durany, y C. Vázquez, Comparación de Algoritmos Numéricos en Problemas de Lubricación Hidrodinámica con Cavitación en Dimensión Uno, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 13,2, 185-209, 1997.
- [4] J. Durany, C. Vazquez y N. Calvo. Comparación de algoritmos numéricos en problemas de lubricación hidrodinámica con cavitación en dimensión uno. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 13,2, 185-209, 1997.
- [5] A. Bermúdez y C. Moreno, Duality Methods for Solving Variational Inequalities, *Computers and Mathematics with Applications* Vol. 7, pp. 43-58, 1979.
- [6] C. Parés, M. Castro, y J. Macías. On the convergence of the Bermúdez-Moreno algorithm with constant parameters. *Numerische Mathematik*, 2001.
- [7] R. Bermejo, J. Carpio, L. Saavedra, New error estimates of Lagrange-Galerkin methods for the advection equation, Submitted 2022.
- [8] P. Gómez-Molina, J. Carpio, and L. Sanz-Lorenzo, A stable conservative Lagrange-Galerkin scheme to pure convection equations with mesh intersection, Submitted to *Computers and Mathematics with Applications*, 2022.