



MÉTODO GEOMÉTRICO-ITERATIVO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE POSICIÓN DIRECTO EN MECANISMOS PLANOS CON PARES INFERIORES

V. PETUYA, A. ALONSO, E. MACHO, A. HERNÁNDEZ

Universidad del País Vasco, Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao
Departamento de Ingeniería Mecánica
Alameda de Urquijo s/n, 48013-Bilbao

(Recibido 21 de julio de 2004, para publicación 14 de octubre de 2004)

Resumen – En este artículo se presenta un método de análisis cinemático para la resolución del problema de posición directo en mecanismos planos de varios grados de libertad. Los mecanismos a analizar poseerán cualquier nivel de complejidad, desde los débilmente a los fuertemente acoplados, con pares cinemáticos de rotación y prismáticos. El procedimiento presentado se fundamenta en un enfoque geométrico-iterativo consistente en la aplicación de una secuencia predefinida de restricciones mediante las que se modeliza el mecanismo de forma iterativa. Este procedimiento nuevo y distinto posee carácter general consiguiendo de esta forma un alto nivel de automatización. El método no pretende ser únicamente una alternativa a los verdaderamente generales, escasos por cierto, que son los métodos de computación matricial. Además, y gracias a la formulación geométrica de las ecuaciones de restricción del mecanismo, el procedimiento resuelve algunos de los problemas que presentan estos métodos como consecuencia de la utilización del algoritmo de Newton-Raphson, mejorando también su eficiencia.

1. INTRODUCCIÓN

La realización del análisis cinemático constituye la fase previa y fundamental al acometer el proceso de diseño de un mecanismo. Sin embargo, resulta llamativo el escaso número de métodos para la resolución del problema de posición directo desde un enfoque de tipo general [1]. La clasificación que aquí se presenta está basada en el tipo de planteamiento. Según esto pueden clasificarse en métodos gráficos, analíticos y de computación matricial.

De acuerdo con esta clasificación, en primer lugar se encuentran los métodos gráficos o, desde un enfoque más amplio y actual, los métodos grafo-analíticos. Dentro de ellos se pueden establecer a su vez tres subgrupos. Los dos primeros se encuadran en lo que se podría denominar métodos gráficos clásicos. Cabe distinguir, por tanto, los métodos de descomposición diádica o métodos de intersecciones [2,3]. En el segundo subgrupo están los procedimientos de interpolación gráfica o de falsas posiciones [2-4]. Los métodos gráficos clásicos se apoyan en la existencia de un lazo cuadrilátero en el mecanismo cosa que sucede en la mayoría de los mecanismos sencillos. En los métodos que forman el tercer subgrupo, el problema de posición se aborda desde un enfoque geométrico mientras que la resolución del problema se realiza mediante procedimientos analíticos. Son los métodos que utilizan el enfoque modular [5-7], que consiste en descomponer el mecanismo en bloques de elementos más simples para con posterioridad ensamblar sus resultados. La dificultad fundamental de los métodos modulares consiste en que cuanto más generalidad pretende darse, los módulos de mecanismos crecen en complejidad.

Los métodos analíticos se caracterizan por realizar un planteamiento analítico, independientemente de cual sea el procedimiento de resolución (en muchos casos numérico). Estos métodos toman como punto de partida las ecuaciones de cierre de los lazos independientes del mecanismo. En este sentido son métodos particulares que se concretan en programas de propósito particular. Una vez planteadas las ecuaciones del problema de posición del mecanismo, hay tres maneras de resolver estos sistemas de ecuaciones no lineales [8]: los métodos de continuación polinomial, los métodos de eliminación y las Bases de Gröbner.

Los métodos de continuación polinomial son conocidos también como métodos homotópicos. El procedimiento de continuación polinomial constituye un método de carácter puramente numérico [1,9]. Debido a que las ecuaciones de cierre de los lazos del mecanismo son polinómicas en senos y cosenos, el método de continuación es capaz de encontrar todas las posibles soluciones sin necesidad de partir de una solución aproximada cercana a la posición solución. Esto supone una ventaja a destacar con respecto a los tradicionales métodos basados en el algoritmo de Newton-Raphson. Otra ventaja fundamental es la capacidad del método para resolver sistemas de ecuaciones de muy grandes dimensiones. El coste computacional es la desventaja fundamental de estos métodos que no los hacen aptos para aplicaciones en las que se necesita controlar la posición de un mecanismo en tiempo real.

Para la obtención de soluciones en forma cerrada (solución analítica) existen dos posibilidades: los denominados métodos de eliminación y las Bases de Gröbner. Los métodos de eliminación utilizan una formulación algebraica que permite la eliminación de un gran número de variables convirtiendo un sistema de ecuaciones multivariante en una única ecuación univariante [10]. Habitualmente la ecuación resultante es compleja, y debe ser resuelta mediante un procedimiento numérico o mediante la resolución de un problema de valores y vectores propios a partir del determinante resultante [11]. Estos métodos resuelven totalmente el problema de posición obteniendo todas las soluciones reales, complejas y en el infinito. Dentro de los métodos de eliminación se pueden distinguir tres tipos: métodos de eliminación simultánea [12], de eliminación sucesiva [13,14] y de eliminación repetida [15]. Los métodos eliminación poseen una eficiencia computacional mayor que los de continuación polinomial y las Bases de Gröbner. La dificultad de los métodos de eliminación está en encontrar, para cada caso, una estrategia adecuada para la eliminación de las variables. Presentan asimismo el inconveniente de que no pueden evitar introducir soluciones ajenas al problema debido a las manipulaciones analíticas realizadas. Las Bases de Gröbner [16,17] constituyen un procedimiento algebraico iterativo de eliminación de variables. A pesar de su alto coste computacional, esta técnica resulta muy útil a la hora de confirmar el número de soluciones de un determinado problema de posición o como ayuda para determinar su polinomio característico. Asimismo, la utilización de las Bases de Gröbner ha demostrado ser muy eficiente en combinación con los métodos de eliminación basados en matrices resultantes [17].

Por último se encuentran los métodos generales de computación matricial. Por tales se entiende aquellos procedimientos que dan lugar a programas de computador basados en algoritmos sistemáticos de análisis [4] que permitan el análisis cinemático completo de forma automatizada para mecanismos con cualquier grado de complejidad y cualquier número de elementos. Dentro de los métodos de computación matricial existen dos enfoques: el más extendido, basado en sistemas multicuerpo, y otro más particular desarrollado a partir del Método de los Elementos Finitos [18]. En los métodos multicuerpo, a la hora de modelizar el mecanismo, hay que seleccionar un conjunto de coordenadas que definan unívocamente la posición de los elementos del mecanismo. Para ello, existen distintos tipos de coordenadas donde las más importantes son: coordenadas relativas [19], coordenadas cartesianas [20] y coordenadas naturales [21]. Una valoración comparativa de la utilización de los distintos tipos de coordenadas puede verse en las referencias [22]. A partir de estas coordenadas, las restricciones que se formulan para obtener el sistema de ecuaciones del problema de posición son restricciones de lazo, restricciones de par y restricciones de elemento respectivamente.

Para la resolución de dicho sistema la primera fase es el ensamblado del mecanismo, es decir, la obtención de una de las soluciones del problema de posición inicial. Para ello, se hace necesaria la asistencia de un método computacional estable para obtener una buena estimación de dicha posición. Esto puede conseguirse minimizando el desequilibrio en las ecuaciones de restricción [20]. Una vez se ha ensamblado el mecanismo, se realiza un chequeo para comprobar la existencia de restricciones redundantes en el modelo que haya podido incluir involuntariamente el usuario cuando se modelizan mecanismos complejos o con geometrías particulares. Posteriormente se eliminan de las ecuaciones de restricción dependientes. Para ello puede utilizarse la eliminación gaussiana con pivotamiento total. Otra alternativa es trabajar directamente con un procedimiento de resolución que trate con sistemas de ecuaciones redundantes. Un método eficiente para resolver este problema es utilizar la formulación de mínimos cuadrados en la iteración. Una vez eliminadas las restricciones redundantes se puede finalmente realizar el análisis de desplazamientos finitos obteniendo la simulación del movimiento del mecanismo. En la resolución de este problema se parte del conocimiento de una posición previa del mecanismo cercana a la posición a calcular. General-

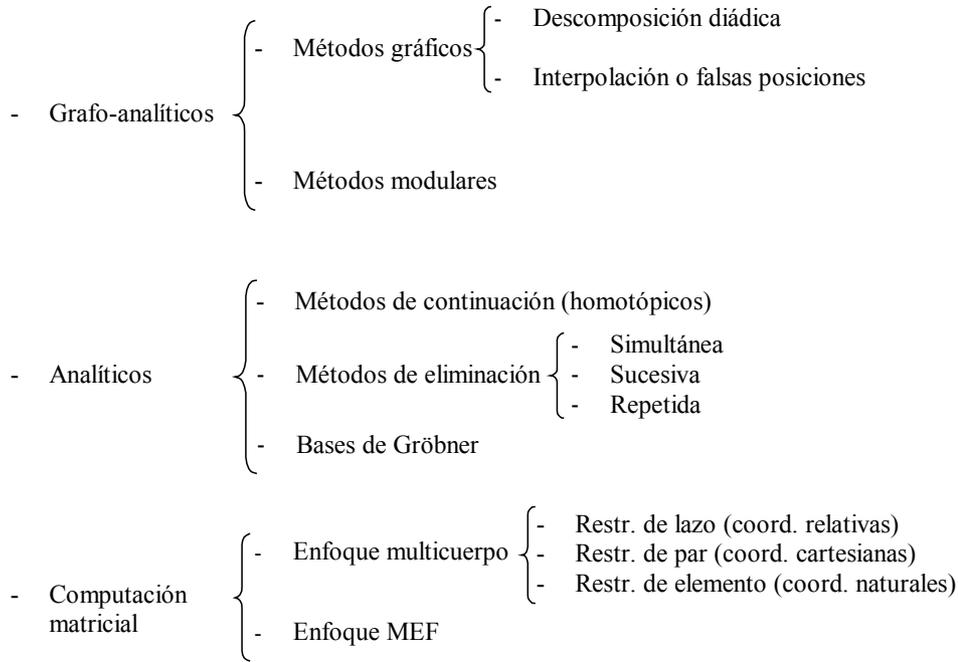


Fig. 1. Métodos de resolución del problema de posición directo.

mente, a partir de esta posición puede obtenerse una buena estimación de partida con la que el método de Newton-Raphson pueda alcanzar la convergencia cuadrática del error [23] y sea realmente eficaz. En el análisis de desplazamientos finitos, con el objeto de asegurar la convergencia del método, frecuentemente la estimación de partida es previamente mejorada a partir de los datos del análisis de velocidades y aceleraciones obtenidos para dicha posición [20,24].

Como resumen de lo presentado en esta introducción, en la Fig. 1 se propone una clasificación de los métodos de resolución del problema de posición directo:

En este trabajo se propone un procedimiento de resolución del problema de posición a través de la utilización de un enfoque geométrico-iterativo que se presenta a continuación. Se emplea por lo tanto una herramienta esencial en la Cinemática de mecanismos: la *geometría*. Además si se pretende que sea un procedimiento general que resuelva toda la casuística que aparece en el análisis de mecanismos, debe ser necesariamente un procedimiento *iterativo*, pues son éstos los que corresponden a la resolución de problemas no lineales.

2. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO GEOMÉTRICO-ITERATIVO

El Método Geométrico-Iterativo es un método de carácter general desarrollado para la resolución del problema de posición directo en mecanismos planos de cualquier complejidad con pares inferiores [25,26]. Este procedimiento se basa en la imposición secuencial sobre cada elemento del mecanismo de unas restricciones de carácter geométrico. Se distinguen dos tipos de restricciones geométricas: restricción de distancia y restricción angular. Los puntos geométricos que definen las posiciones de los pares cinemáticos, nudos, son las variables del procedimiento. De esta forma, el mecanismo se concibe como una serie de nudos en el plano ligados entre sí mediante restricciones geométricas.

Para la resolución del problema de posición, el proceso se inicia tomando como dato una determinada *posición de partida*. Esta posición puede ser una posición previa del mecanismo en el caso del problema de desplazamientos finitos. En el caso del problema de posición inicial, la posición de partida simplemente definirá la topología del mecanismo, no siendo necesario que posea las dimensiones reales de sus elementos. A partir de esta posición comienza el procedimiento de ajuste iterativo basado en la imposición de las restricciones geométricas sobre los nudos del mecanismo. Para dicha imposición, se utilizarán las

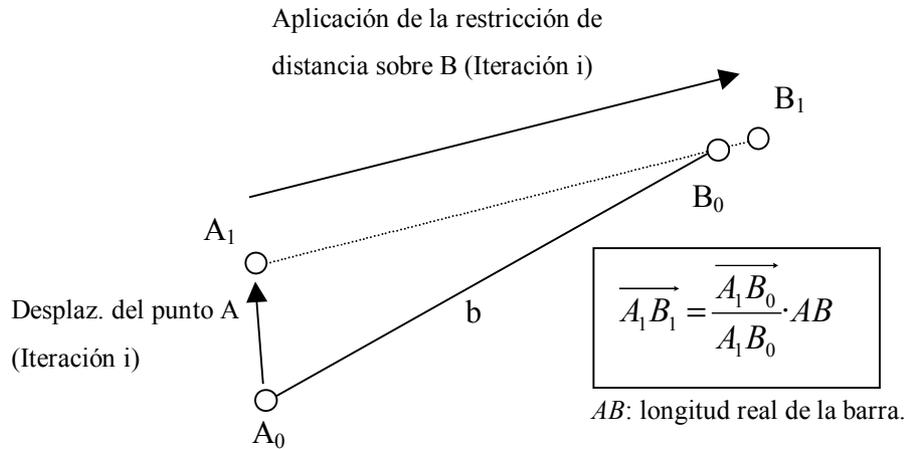


Fig. 2. Imposición de la restricción de distancia.

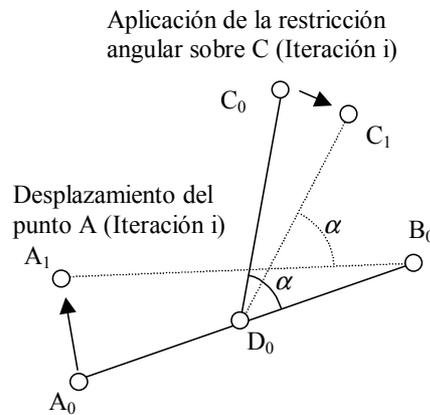


Fig. 3. Aplicación de la restricción angular.

posiciones que dichos nudos ocupaban en el estado anterior a la nueva aplicación de la restricción. En la Fig. 2 se muestra la aplicación de la restricción de distancia sobre el nudo B con origen en el punto A . Se conoce el desplazamiento previo del punto A durante la iteración (desde A_0 hacia A_1). Seguidamente, se aplica la restricción de distancia entre los puntos A y B_1 , a partir de la posición anterior de B (B_0). De esta forma se define la nueva posición del punto B para esta primera iteración (B_1).

Por otro lado, la restricción angular impone la invariabilidad del ángulo entre dos vectores. En la Fig. 3 se muestra la aplicación de la restricción angular. Una vez el nudo A ha sido movido hasta la posición A_1 ; el nudo C_0 es girado hasta la posición C_1 alrededor de D_0 de forma que el ángulo α se mantenga constante. La restricción angular impone geoméricamente la limitación que cinemáticamente introduce una unión prismática entre dos elementos de un mecanismo, es decir restringe la rotación relativa entre ellos.

El orden de aplicación de las restricciones, se denomina *configuración de la iteración geométrica o secuencia de la iteración*. Para la definición de la secuencia de iteración, se ha desarrollado un *algoritmo de búsqueda* que se describirá en el apartado 4 de este artículo. Dicha secuencia se obtiene a partir de la aplicación de una serie de *reglas y criterios jerarquizados* desarrollados para definir una estrategia que asegure la convergencia del proceso. Cuando una secuencia de iteración permite al proceso alcanzar la convergencia se dice que es una *secuencia de iteración válida*. Para ello, la secuencia debe verificar el cumplimiento de dos *condiciones fundamentales*:

1. Cada nudo no fijo del mecanismo debe ser movido al menos dos veces en cada iteración.
2. Cada restricción geométrica debe ser impuesta al menos una vez en cada iteración.

El cumplimiento de la primera condición posibilita que el nudo tenga dos componentes de desplazamiento consecuencia de las sucesivas aplicaciones de las restricciones geométricas. Ello permite al nudo una movilidad planar, lo cual concuerda con la realidad de que el posicionamiento de un nudo en el plano posee dos grados de libertad. Por su parte el cumplimiento de la segunda condición permite que se impongan todas las restricciones geométricas existentes en el mecanismo, con lo que se consigue que éste vaya tendiendo hacia su posición real. El cumplimiento de las dos condiciones fundamentales es condición necesaria pero no suficiente para garantizar la convergencia del proceso. Ésta se alcanza en la denominada secuencia de iteración válida, la cual además de incluir las dos condiciones fundamentales debe de especificar una secuencia de imposición restricciones tal que garantice un recorrido geométrico por los lazos independientes del mecanismo. Esto sería equivalente al cumplimiento de las ecuaciones de cierre. Durante el movimiento del mecanismo pueden aparecer posiciones que dan lugar a particularidades geométricas que impidan o dificulten la convergencia del proceso [27,28]. Una secuencia de iteración válida debe evitar la aparición de estas particularidades geométricas.

Una vez definida la secuencia, ésta se aplica completando una *iteración*. El proceso continuará realizando sucesivas iteraciones hasta que se verifique el cumplimiento del *criterio de convergencia* y, por tanto, se obtenga la solución del problema. En este caso el criterio de convergencia, que se ha elegido para la restricción de distancia es el presentado en la ecuación (1).

$$e_{RD} = \max \left| \frac{L_j^i - L_j}{L_j} \right| < \varepsilon_D, \quad j = 1, \dots, (n^\circ \text{ barras}) \quad (1)$$

donde ε_D es un determinado nivel de precisión seleccionado por el usuario, L_j^i es la longitud de la barra j en la iteración i , y L_j es la longitud real de la barra j .

El criterio de convergencia de la restricción angular se define como la máxima diferencia entre los valores real y actual de las restricciones angulares, ecuación (2).

$$\max |\alpha_j^i - \alpha_j| < \varepsilon_A \quad j = 1, \dots, \text{nang} \quad (2)$$

donde nang es el número de restricciones angulares del mecanismo, ε_A es un determinado nivel de precisión seleccionado por el usuario, α_j^i es el valor de la restricción angular j en la iteración i , y α_j es el valor real de la restricción angular. Tras numerosos análisis se ha comprobado que un valor de 10^{-5} para ε_D y ε_A proporciona resultados muy precisos para las aplicaciones más usuales con un coste computacional aceptable. Se ha observado que la tendencia de los dos errores es para la mayoría de los análisis muy similar.

En resumen, tal y como se presenta en la Fig. 4, mientras que los métodos de análisis multicuerpo formulan algebraicamente las ecuaciones de restricción del mecanismo, el Método Geométrico-Iterativo realiza una formulación geométrica de las mismas. El algoritmo de búsqueda define una secuencia de iteración válida que se corresponde con el sistema no lineal de ecuaciones que representa las condiciones de cierre de los lazos independientes del mecanismo. Con los métodos multicuerpo tradicionales este sistema de ecuaciones es resuelto mediante un algoritmo matemático iterativo mientras que el método propuesto se puede decir que implícitamente lo está resolviendo a partir de un algoritmo

3. MODELIZACIÓN DEL MECANISMO

A continuación se presenta la modelización que adopta el método geométrico iterativo para las distintas uniones, elementos y accionamientos del mecanismo del mecanismo a partir de la utilización de las restricciones geométricas.

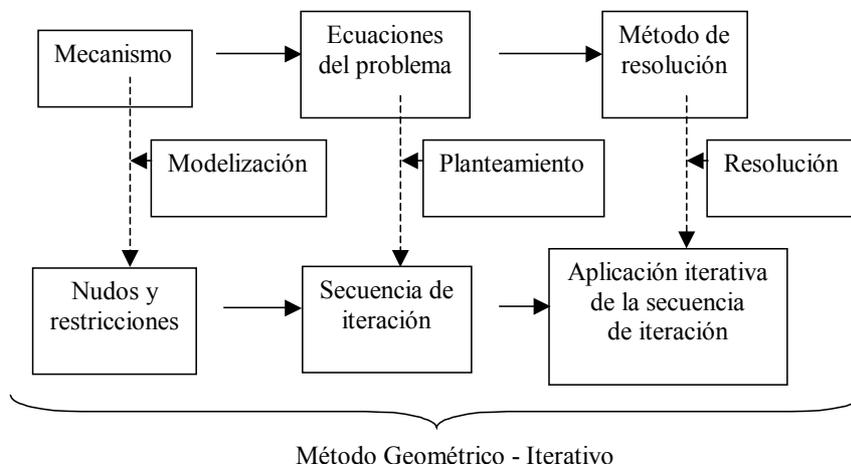


Fig. 4. Esquema del Método Geométrico-Iterativo.

3.1. Modelización de los elementos del mecanismo

- (i) *Elemento binario (barra)*: se utiliza simplemente una restricción de distancia (RD) entre los dos nudos extremos de la misma (Fig. 5).
- (ii) *Elemento n-ario*: se ha definido una modelización única para todos los elementos de orden n (Fig. 6). La restricción angular lleva implícito un sentido que impide a los elementos así modelizados adoptar configuraciones no deseadas.

3.2. Modelización de las uniones del mecanismo

- (i) *Par de rotación*: sólo se necesitan las restricciones geométricas de los elementos unidos mediante dicho par (Fig. 7).
- (ii) *Par prismático*: la modelización del par prismático se puede realizar de una forma única. Para ello se utiliza una restricción de ángulo de 180° (Fig. 8).

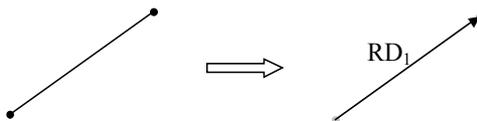


Fig. 5. Modelización del elemento binario.

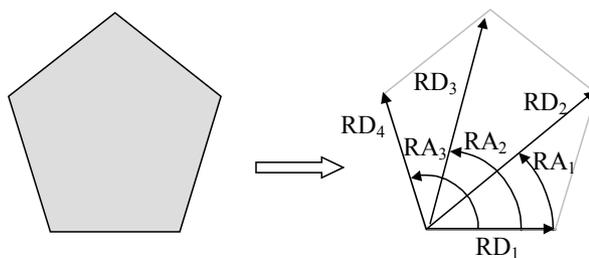


Fig. 6. Modelización de un elemento pentario.

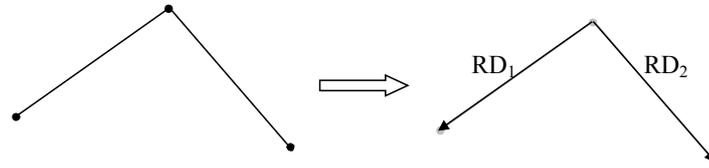


Fig. 7. Modelización del par de rotación.

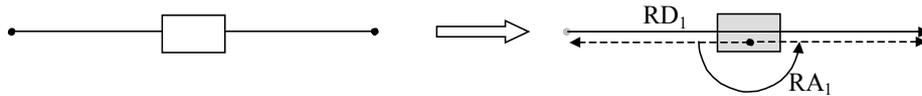


Fig. 8. Modelización del par prismático.

3.3. Modelización de los accionamientos

- (i) *Accionamiento lineal*: un accionamiento lineal se define como una restricción de distancia variable con el tiempo según una ley de movimiento predefinida (Fig. 9).
- (ii) *Accionamiento rotativo*: el accionamiento rotativo se define como una restricción angular variable con el tiempo según una ley de movimiento predefinida (Fig. 10).

4. DESARROLLO DEL ALGORITMO DE BÚSQUEDA DE LA SECUENCIA DE ITERACIÓN

Para un mecanismo cualquiera, en general, existen varias secuencias de iteración que verificando las condiciones fundamentales de la convergencia son capaces de alcanzar la solución. El algoritmo de búsqueda desarrollado para el Método Geométrico-Iterativo trata de obtener, en primer lugar, secuencias que permitan la convergencia del método y, dentro de esas secuencias de iteración, aquellas que sean más eficientes. Esta búsqueda se apoya en una clasificación interna de los nudos que permite conocer la *calidad* de cada nudo en cualquier instante de la iteración geométrica. Se pueden distinguir cuatro tipos distintos de nudos:

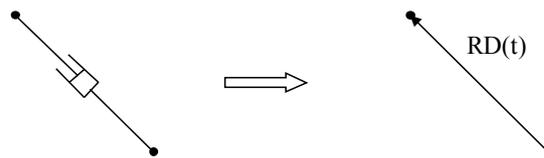


Fig. 9. Modelización del accionamiento lineal.

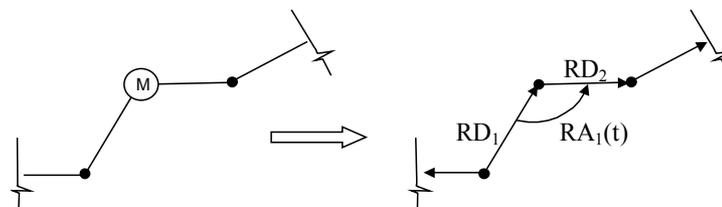


Fig. 10. Modelización del accionamiento rotativo.

1. *Nudo fijo (P)*: aquel que une el elemento fijo del mecanismo con uno o varios elementos móviles. Estos nudos son los nudos de referencia del algoritmo geométrico.
2. *Nudo estable (P_2)*: en este instante de la iteración ya ha sido movido dos veces como consecuencia de la imposición de dos restricciones geométricas.
3. *Nudo disponible (P_1)*: en este instante de la iteración ha sido movido una única vez como consecuencia de la aplicación de una restricción geométrica.
4. *Nudo libre (P_0)*: en este instante de la iteración todavía se encuentra en la posición que ocupaba en la anterior iteración.

Teniendo en cuenta esta clasificación, cada vez que se inicia una nueva iteración todos los nudos no fijos se consideran libres. Si se progresa recorriendo un camino válido, todos los nudos libres se habrán convertido en disponibles para, finalmente, llegar a ser todos estables al final de la iteración. Las dos reglas se enuncian de la siguiente forma:

Regla I: *si una restricción geométrica afecta a un nudo disponible y el resto de sus nudos son fijos, dicha restricción será impuesta sobre el nudo disponible a partir de sus nudos fijos.*

Regla II: *todas las restricciones geométricas que afecten a un nudo estable y no hayan sido utilizadas deben ser impuestas a partir de dicho nudo. El orden de imposición de estas restricciones geométricas es:*

1. *Las restricciones geométricas que necesariamente deben mover un nudo.*
2. *Las combinaciones de restricciones que permitan conseguir directamente nudos estables.*
3. *Las demás restricciones geométricas.*

Cuando el uso de estas dos reglas basta para completar una secuencia de iteración, se garantiza el cumplimiento de las dos condiciones fundamentales de la convergencia y además es una secuencia de iteración válida. Puede observarse como la aplicación jerarquizada de las reglas I y II es una aplicación sistemática del método de descomposición diádica a cualquier mecanismo débilmente acoplado. El objetivo de las reglas consiste en imponer las restricciones tomando como origen los nudos mejor situados en cada momento. La regla I convierte los nudos disponibles en estables, mediante la imposición de las restricciones geométricas a partir de los nudos fijos. Cuando la aplicación de la regla I no es posible se recurre a la regla II generándose nuevos nudos disponibles y estables. Esto se realiza apoyándose siempre en los nudos que en ese momento están mejor colocados, es decir, en este caso en los nudos estables. Dado que un nudo estable puede estar afectado por varias restricciones geométricas, no sólo se trata de asegurar que todas son utilizadas sino que incorpora un orden de imposición de las mismas que aumente la eficiencia de la secuencia.

Cuando se está trabajando con problemas de posición fuertemente acoplados, las reglas I y II no bastan para obtener una secuencia que complete una iteración. Aparecen situaciones durante el proceso de búsqueda en que sólo existen nudos disponibles y ninguno de ellos está incluido en restricciones geométricas que posean un nudo fijo. Para completar la secuencia se definen dos criterios que determinan la siguiente restricción a utilizar y el nudo disponible origen en que se apoya la aplicación de dicha restricción. Dichos criterios son:

Criterio de selección del nudo origen: *si existen varios nudos disponibles sin posibilidad de aplicación de la regla I, el nudo origen para la imposición de la restricción será aquel nudo disponible contenido en más restricciones sin usar.*

Criterio de selección de la restricción: *en el caso de que el nudo origen seleccionado haya sido movido previamente con una restricción de distancia, si dicho nudo está afectado por otra restricción de distancia que se encuentra alineada con la anterior, se impondrá dicha restricción.*

El nudo origen elegido por el primer criterio es un nudo disponible por lo que debe ser movido otra vez durante la actual iteración. Las probabilidades de lograrlo son mayores si en el nudo origen seleccionado confluyen muchas restricciones sin utilizar, que permitirán un segundo movimiento de dicho nudo. Esta es la justificación del primer criterio. El segundo criterio evita las particularidades geométricas que aparecen si los dos movimientos de un nudo son realizados según direcciones muy similares [27,28]. Esto puede suceder si dos restricciones de distancia se alinean durante el movimiento del mecanismo o si el alineamiento ocurre durante el proceso de ajuste iterativo.

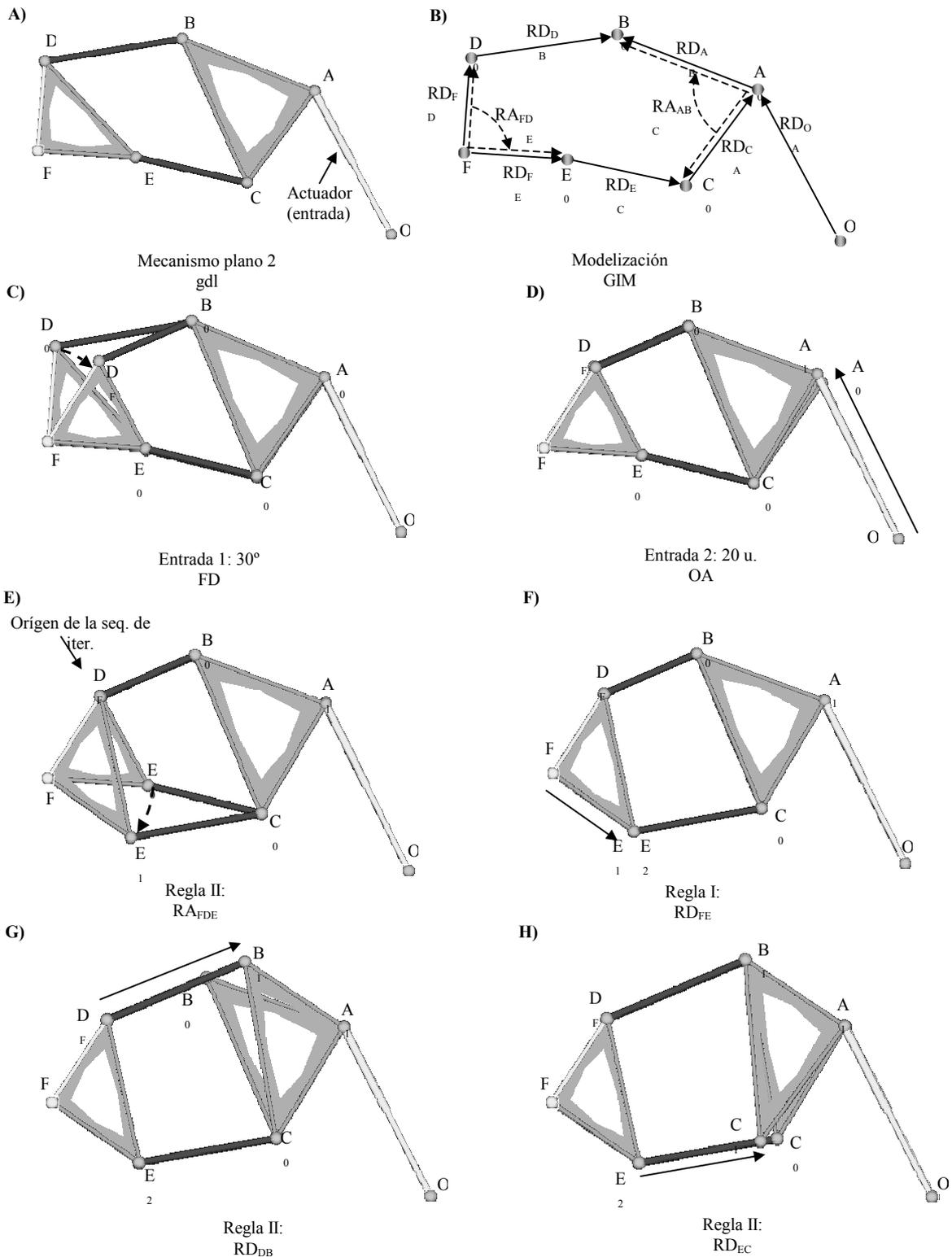


Fig. 11. Ejemplo ilustrativo: resolución del problema de posición directo de un mecanismo de 2 gdl.

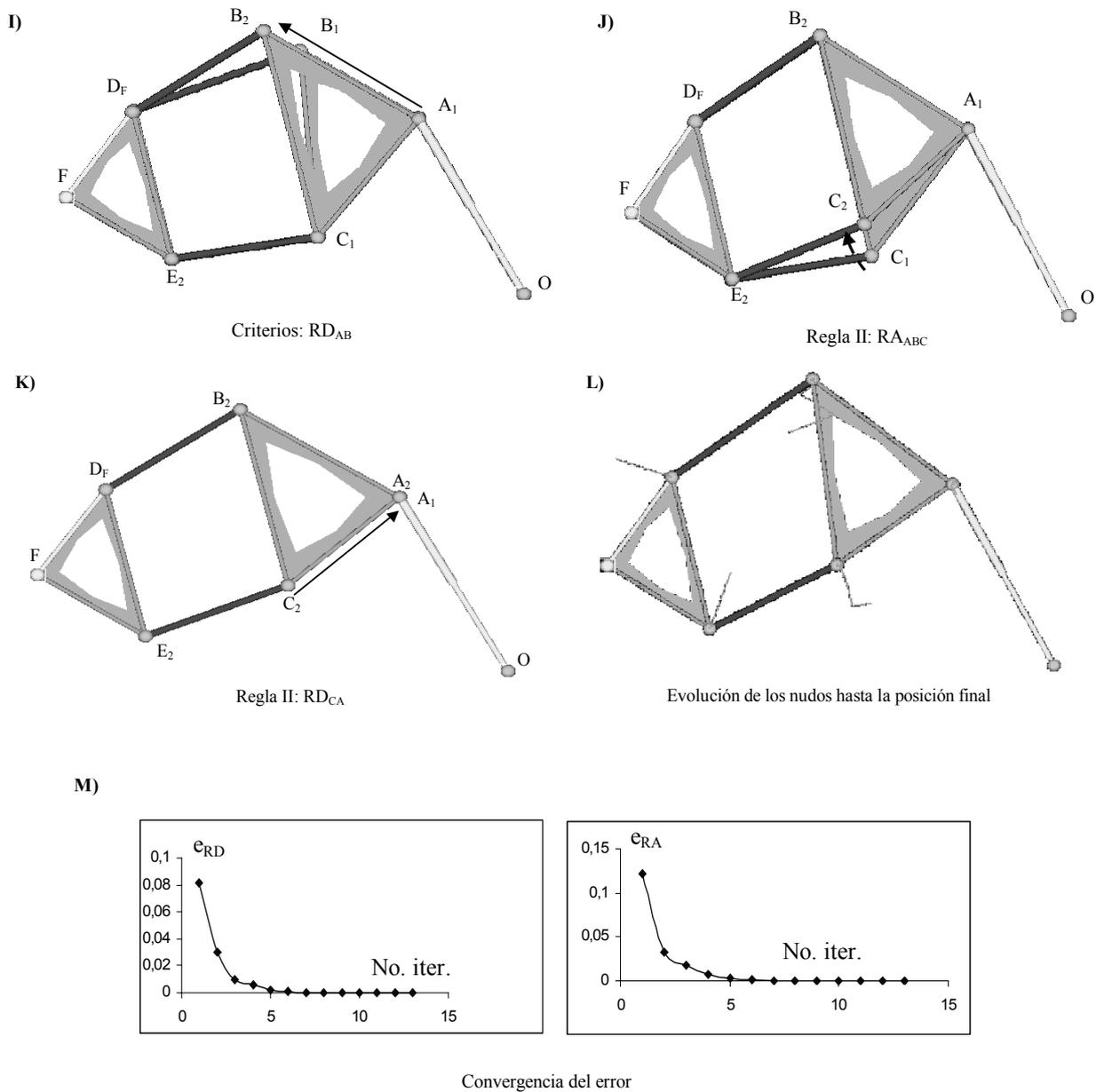


Fig. 11. Ejemplo ilustrativo: resolución del problema de posición directo de un mecanismo de 2 gdl (cont.).

A continuación se va a mostrar un ejemplo ilustrativo de la aplicación del Método Geométrico-Iterativo. En este caso se ha resuelto el problema de posición directo en un mecanismo plano de dos grados de libertad (Fig. 11a). El procedimiento modeliza el mecanismo utilizando 5 nudos relacionados entre sí mediante 7 restricciones de distancia y 2 restricciones angulares (Fig. 11b). La nueva posición del mecanismo se debe corresponder con una rotación de 30° en la barra FD (Fig. 11c) y un incremento en de 20 unidades en el actuador lineal OA (Fig. 11d). Destacar que, con estas entradas, el problema de posición es fuertemente acoplado. El origen de la secuencia de iteración se sitúa en el nudo D_F que se considera estable. A continuación la aplicación de la regla II determina la aplicación de la restricción angular FDE obteniendo el nuevo nudo disponible E_1 (Fig. 11e). Dicho nudo está incluido en una restricción de distancia que posee un nudo fijo, F , de esta forma la regla I se aplica obteniendo transformando el nudo disponible

E_1 en el nudo estable E_2 (Fig. 11f). Seguidamente el algoritmo determina la aplicación de la regla II obteniendo el nuevo nudo disponible B_1 (Fig. 11g). De nuevo se aplica la regla II para obtener el nuevo nudo disponible C_1 (Fig. 11h). En este punto de la iteración las reglas no pueden ser aplicadas por lo que es necesario recurrir a los criterios para que el algoritmo pueda progresar. Debido a la simetría estructural de este mecanismo la siguiente restricción a aplicar es seleccionada aleatoriamente. Así, el nudo B_1 es convertido en el nudo estable B_2 imponiendo la restricción de distancia AB (Fig. 11i). Por último la regla II se aplica dos veces obteniendo los nuevos nudos estables C_2 (Fig. 11j) y A_2 (Fig. 11k). De esta forma la secuencia de iteración queda totalmente definida. Repitiendo esta secuencia 13 veces la solución final es obtenida con una precisión de 10^{-5} para cada uno de los errores definidos en las Eq. (1) y (2).

5. EFICIENCIA DEL MÉTODO

En este apartado se realiza un análisis de la eficiencia del Método Geométrico-Iterativo comparándolo con los métodos de computación matricial que utilizan algoritmos de resolución basados en Newton-Raphson al ser también éstos métodos de carácter general. Se han realizado numerosos análisis experimentales para modelizar el error de convergencia del procedimiento. Se ha comprobado experimentalmente que el error de convergencia de cada tipo de restricción (distancia y ángulo) en la iteración i se ajusta, casi exactamente, a una función exponencial del tipo:

$$E_i = C_1 \cdot e^{-C_2 \cdot i} \quad (3)$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes positivas diferentes para el error de convergencia de cada tipo de restricción geométrica y que dependen de la topología del mecanismo, la secuencia de iteración y las posiciones inicial y final del mecanismo analizado. A partir de la ecuación (3) se obtiene el tipo de convergencia del método:

$$\frac{E_{i+1}}{E_i} = \frac{C_1 \cdot e^{-C_2 \cdot (i+1)}}{C_1 \cdot e^{-C_2 \cdot i}} \quad (4)$$

$$E_{i+1} = e^{-C_2} \cdot E_i \quad (5)$$

En la ecuación (5) se observa como la convergencia del Método Geométrico-Iterativo es lineal con un factor de proporcionalidad menor que 1 al ser C_2 siempre positiva. Este hecho garantiza que el Método Geométrico-Iterativo sea un método estable, es decir, siempre es convergente independientemente de lo cercana o lejana que esté la aproximación de partida. En las primeras iteraciones el descenso del error es siempre muy pronunciado como puede observarse en los ejemplos de la Fig. 12 donde se resuelve el problema de posición inicial de un mecanismo de Stephenson y del denominado mecanismo Doble-Mariposa

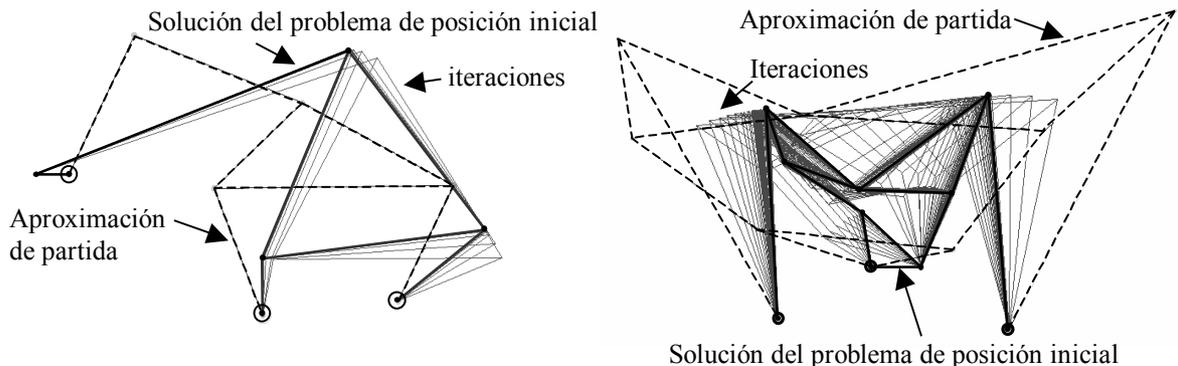


Fig. 12. Iteraciones para la resolución del problema de posición inicial del mecanismo de Stephenson III y del Doble-Mariposa.

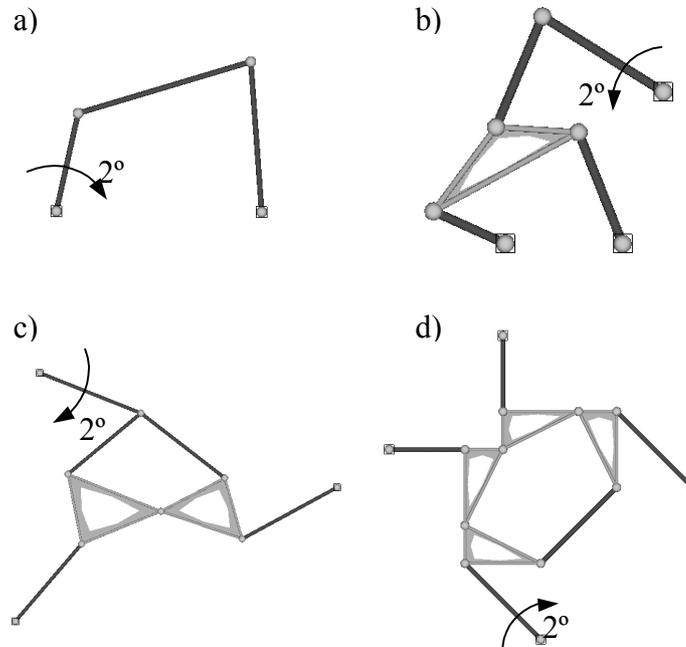


Fig. 13. Mecanismos utilizados para el análisis del coste computacional.

respectivamente a partir de aproximaciones de partida lejanas de la posición solución.

Al evaluar el coste computacional del método propuesto se observa como aunque el número de iteraciones que necesita es, en general, superior al de Newton-Raphson, cada iteración de Newton-Raphson conlleva muchas más operaciones matemáticas. La forma propuesta para comparar ambos métodos, considerándola como la más objetiva, es estimar sus costes computacionales en operaciones matemáticas. Para ello, y por simplicidad, se ha considerado que el mecanismo está modelizado únicamente con restricciones de distancia. Si el mecanismo posee alguna restricción angular las conclusiones son similares dadas las diferencias en coste operacional obtenidas. Al completarse una iteración del Método Geométrico-Iterativo cada nudo ha sido movido dos veces como consecuencia de la aplicación de las restricciones geométricas, y cada aplicación de la restricción de distancia supone seis operaciones matemáticas. Por tanto el número total de operaciones matemáticas por iteración es doce veces el número de nudos móviles del mecanismo (n_{nod}). La baja complejidad matemática del método es una de las características principales del procedimiento propuesto.

Considérese el mecanismo modelizado, utilizando por ejemplo, coordenadas cartesianas, y el sistema de ecuaciones resultante, resuelto mediante el algoritmo de Newton-Raphson. El número total de variables del problema (en el caso plano) es tres veces el número de elementos móviles del mecanismo (E). Por lo tanto la dimensión del sistema de ecuaciones resultante es $3Ex3E$. Por simplificar, no se contarán en este ejemplo, ni las operaciones debidas a la construcción del sistema de ecuaciones de restricción, ni las debidas a la obtención del Jacobiano, ni a su actualización en cada iteración. Sólo contaremos las operaciones debidas a la factorización LU que es necesaria para resolver el sistema lineal formado en cada iteración. El número de operaciones que conlleva dicha factorización en un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es $O(n^3/3)$ [23]. Una vez factorizado, el sistema requiere $O(n^2)$ operaciones adicionales para resolverlo que tampoco contabilizaremos en este ejemplo. Hay que indicar que las matrices Jacobianas que resultan con este tipo de coordenadas son dispersas con alrededor de un 75 % de ceros. Sin embargo, dichos ceros no ocupan siempre los mismos lugares por lo que su gestión operacional también conlleva un coste computacional. A la vista de los resultados presentados en la Tabla 1, donde se ha evaluado el coste computacional sobre cuatro mecanismos de complejidad creciente (Fig. 13), se puede concluir que el exponente cúbico correspondiente al número de operaciones de la factorización LU contrarresta el efecto de la convergencia cuadrática del algoritmo de Newton-Raphson. Por su parte el bajo número de

Tabla 1. Eficiencia computacional. Número de operaciones utilizando Newton-Raphson y el Método Geométrico-Iterativo.

Mecanismo	$N-R: [(3E)^3/3] \cdot nit$	$GIM: [12 \cdot nmod] \cdot nit$
Mec. Fig. 13a	972 (9 · 3 ³ · 4)	48 (12 · 1 · 4)
Mec. Fig. 13b	5625 (9 · 5 ³ · 5)	252 (12 · 3 · 7)
Mec. Fig. 13c	12348 (9 · 7 ³ · 4)	1080 (12 · 5 · 18)
Mec. Fig. 13d	32805 (9 · 9 ³ · 5)	2112 (12 · 8 · 22)

operaciones por iteración del Método Geométrico-Iterativo resta lentitud al hecho de que su convergencia sea lineal.

Debido a que el algoritmo de resolución del Método Geométrico-Iterativo es geométrico no se necesita utilizar ningún procedimiento auxiliar para la eliminación, ni siquiera la detección previa, de las restricciones redundantes ya que, aunque existan, el procedimiento funciona sin problema. Otra capacidad inherente al algoritmo es la facilidad que posee para controlar las configuraciones que adopta el mecanismo al seguir las distintas ramas del movimiento que surgen en los puntos de bifurcación de las posiciones de indeterminación. En estas posiciones, los algoritmos matemáticos deben resolver los problemas de deficiencia del rango del Jacobiano. Por otro lado, desde un punto de vista cualitativo, Newton-Raphson es un método local, es decir, obtiene una solución cuando se le suministra una buena aproximación a la misma para iniciar la iteración. Por esto no existe garantía de resolución del problema de posición inicial a no ser que sea ayudado al inicio por otro método. Por el contrario, el método propuesto obtiene soluciones sin mas datos que la topología del mecanismo. Obviamente necesita iniciar la iteración con unos valores de las variables pero estos pueden ser cualesquiera. Ahora bien, la solución obtenida está influida por dichos valores. Utilizando distintas aproximaciones iniciales pueden obtenerse distintas configuraciones solución del mecanismo aunque el método no garantiza la obtención de su totalidad.

6. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Los mecanismos que se presentan en los siguientes ejemplos han sido analizados con un programa de computador de desarrollo propio, denominado GIM, basado en el Método Geométrico-Iterativo que se acaba de presentar. Dicho software, implementado en lenguaje Visual C++, posee un módulo de preproceso que se utiliza para modelizar y modificar el mecanismo. El programa de computador resuelve el problema de posición directo de cualquier mecanismo plano con pares inferiores obteniendo las trayectorias de los puntos seleccionados. Además, el programa incluye otros módulos para el análisis de velocidades y aceleraciones, así como para el análisis de posiciones singulares [29] y cálculo del espacio de trabajo. Las figuras presentadas en estos ejemplos están extraídas directamente del programa de simulación. Todas las soluciones han sido obtenidas con una precisión de 10^{-5} utilizando los criterios de convergencia de las Eq. (1) y (2).

6.1. Ejemplo 1

En el ejemplo de la Fig. 14 se presenta la resolución del problema de posiciones sucesivas del conocido mecanismo de un grado de libertad “Máquina Andante de Chébyshév” [30]. Para realizar el análisis, una de las “patas” del mecanismo es considerada el elemento fijo. El movimiento se introduce por un accionamiento rotativo continuo fijado a una de las manivelas del doble paralelogramo articulado situado sobre el “cuerpo” (elemento cuaternario). Este mecanismo posee la complejidad añadida de poseer varios elementos con tres y cuatro pares de rotación alineados.

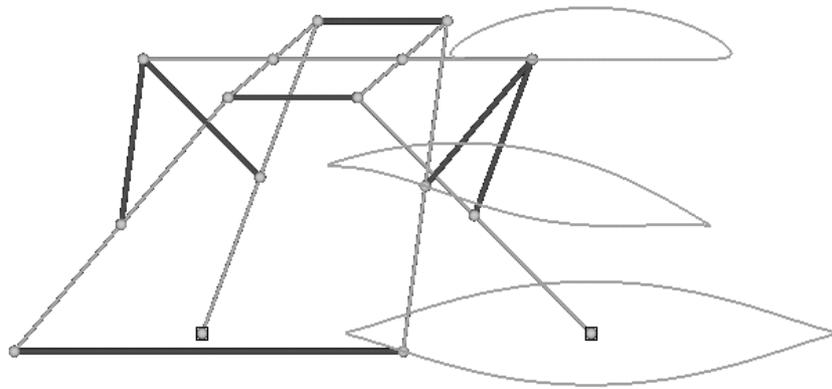


Fig. 14. Resolución del problema de desplazamientos finitos.

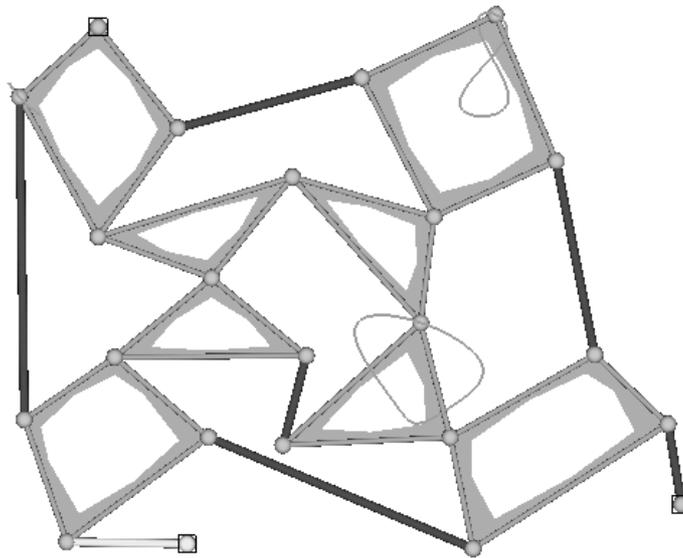


Fig. 15. Resolución del problema de desplazamientos finitos.

6.2. Ejemplo 2

En el siguiente ejemplo (Fig. 15) se resuelve el problema de desplazamientos finitos de un mecanismo altamente complejo de un grado de libertad con elementos binarios ternarios y cuaternarios que sólo posee circuitos de cinco y seis barras. En mecanismos de este tipo no sólo no son aplicables los procedimientos gráficos clásicos sino tampoco otros con vocación más amplia [31]. Asimismo la obtención de las ecuaciones de cierre de este mecanismo para la posterior utilización de un método analítico de resolución es una tarea extremadamente ardua. Por lo tanto, en la práctica, sólo puede ser resuelto por métodos de propósito general como el Método Geométrico-Iterativo.

6.3. Ejemplo 3

En el siguiente ejemplo se presenta la obtención de la trayectoria de un mecanismo Doble Mariposa con unas dimensiones muy particulares. El mecanismo que se presenta en la Fig. 16 tiene la complejidad añ-

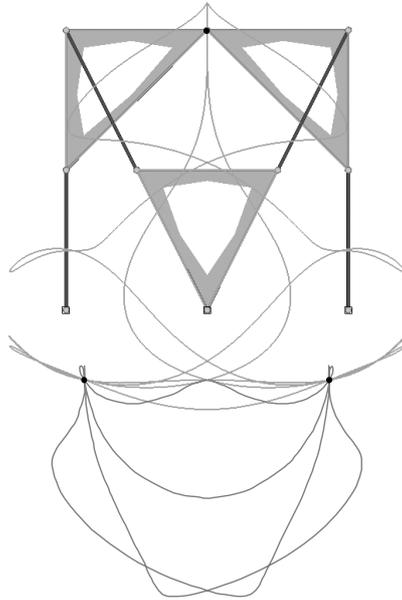


Fig. 16. Obtención de la trayectoria del punto central del mecanismo Doble Mariposa.

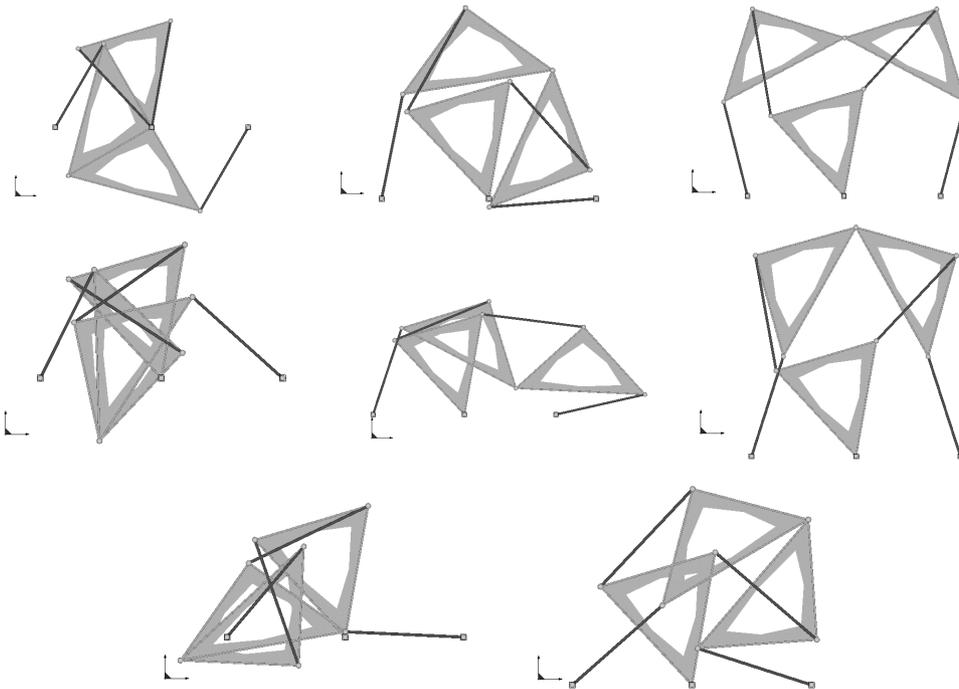


Fig. 17. Ocho soluciones del problema de posición inicial.

didada de que es un mecanismo de transición. En dicha figura se puede observar la complejidad de su trayectoria. Los puntos señalados en la trayectoria son puntos múltiples de bifurcación, es decir, en ellos el mecanismo pasa por una posición de indeterminación. Asimismo, en la Fig. 17 se presentan ocho soluciones del problema de posición inicial de este mecanismo considerando como elemento de entrada el elemento ternario central.

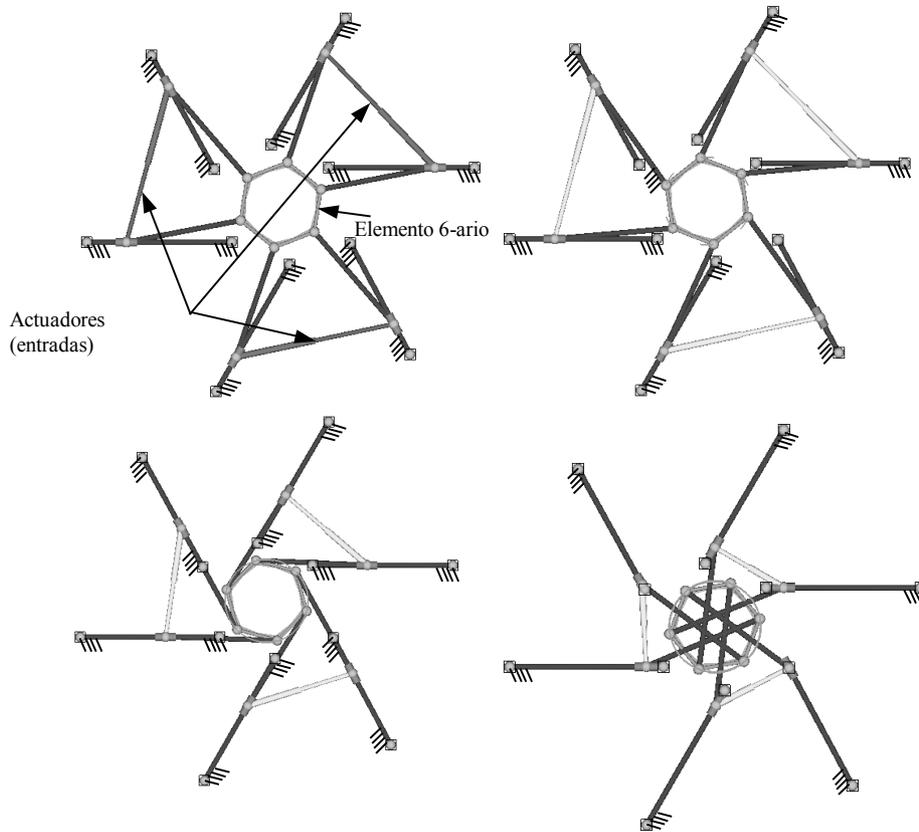


Fig. 18. Simulación del movimiento de un mecanismo flotante de tres grados de libertad.

6.4. Ejemplo 4

Por último en el ejemplo de la Fig. 18 se muestran cuatro instantes del movimiento de un mecanismo de tres grados de libertad que posee un elemento 6-ario. El mecanismo contiene pares de rotación, prismáticos y tres actuadores lineales. Este ejemplo muestra la potencia del método ya que, aunque el algoritmo de resolución se apoya fuertemente en los nudos fijos, también es capaz de resolver mecanismos planos totalmente flotantes en los que estos puntos no existen.

6.5. Ejemplo 5

En la actualidad se está trabajando en el desarrollo del Método Geométrico-Iterativo para el análisis de mecanismos espaciales y en particular de manipuladores de cinemática paralela. Sin embargo, la extrapolación del análisis de posiciones al espacio no es ni mucho menos directa. Si bien los conceptos teóricos sí pueden serlo, es en su aplicación práctica cuando aparecen las dificultades. La mayoría de las plataformas paralelas con aplicación industrial poseen particularidades geométricas en su configuración estructural. Asimismo, con frecuencia, son mecanismos con restricciones redundantes que presentan singularidades dentro de su espacio de trabajo. Además, el número de secuencias útiles de iteración es muy alto por lo que se hace necesario el desarrollo de nuevos criterios que permitan la elección de las secuencias más eficientes.

En la figura 19, y a modo de muestra de los resultados preliminares obtenidos, se presenta el Universal Cartesian Robot de Tsai. Éste es un manipulador paralelo compuesto por tres diadas CRE. En dicha figura se muestra la trayectoria generada por la herramienta de acuerdo con una secuencia de movimiento predefinida en los tres émbolos que actúan el mecanismo.

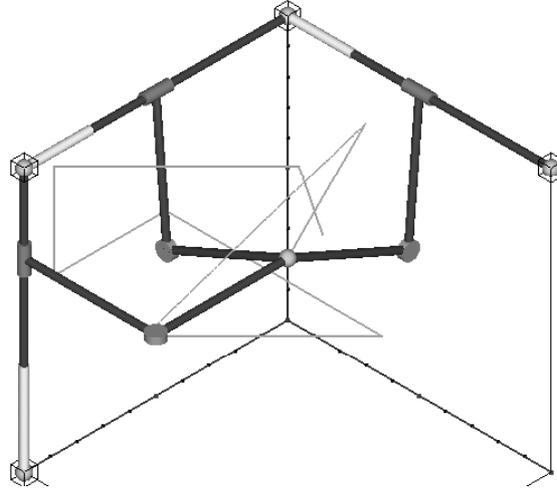


Fig. 19. Universal Cartesian Robot (Tsai).

En la página web del grupo de investigación (www.ehu.es/compmech) se encuentran disponibles más ejemplos de la aplicación del Método Geométrico-Iterativo al análisis cinemáticos de mecanismos tanto planos como espaciales.

7. CONCLUSIONES

Tras la revisión bibliográfica realizada, se ha constatado que mientras la resolución de los problemas de velocidades, aceleraciones y dinámicos de los mecanismos ya han sido tratados suficientemente, los problemas de posición aún presentan dificultades en su resolución con los métodos actuales de carácter general que es donde se encuadra este procedimiento. El método presentado es general, nuevo y distinto, destacando su aplicabilidad para la resolución de los dos problemas de posición directos, a partir de un tratamiento unificado. Con este nuevo procedimiento las ecuaciones de restricción son formuladas geométricamente en lugar de algebraicamente y por tanto no se necesita utilizar ningún procedimiento auxiliar para la eliminación, ni siquiera la detección previa, de las restricciones redundantes superando además las ya comentadas limitaciones en la convergencia del método de Newton-Raphson. Por otro lado, para la resolución del problema de posición inicial no necesita de una posición de partida cercana a la posición final. Otra capacidad inherente al algoritmo es la facilidad que posee para controlar las configuraciones que surgen en las posiciones de indeterminación. Después de analizada la convergencia del método, se puede concluir que el procedimiento presentado es un método computacionalmente estable que presenta convergencia lineal con un factor siempre menor que 1. En términos de coste computacional, a partir de la comparativa realizada, se comprueba que el procedimiento es altamente competitivo y supera al algoritmo de Newton-Raphson. Asimismo, el algoritmo de búsqueda de secuencia de iteración desarrollado y los criterios de convergencia definidos posibilitan una alta eficiencia del procedimiento, apto para el cálculo de las sucesivas posiciones del mecanismo en tiempo real. Por otro lado, la implementación del Método Geométrico-Iterativo en un programa de computador tiene la ventaja de poseer una gran automatización y sencillez matemática, de la que se vale el proceso de análisis de mecanismos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este artículo quieren agradecer el apoyo recibido por el Gobierno Español a través del Ministerio de Ciencia y Tecnología (Proyecto DPI2002-04580-C02-01), así como de la Universidad del País Vasco (Proyecto 9/UPV00145.345-14494/2002).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. J. Waldron, S. V. Sreenivasan, "A study of the solvability of the position problem for multicircuit mechanisms by way of example of the double-butterfly linkage", *Journal of Mechanical Design*, vol.118, n° 4, 1996.
- [2] S. N. Kozhevnikov, *Mecanismos*, pp. 5-43, Editorial Gustavo Gili, 1981.
- [3] K. Hain, *Applied kinematics*, cap. 4, Mc Graw-Hill, 1967.
- [4] A. G. Erdman, G. N. Sandor, *Mechanism design: analysis and synthesis*, Prentice-Hall, 1997.
- [5] N. Manolescu, "For a united point of view in the study of structural analysis of kinematic chains and mechanisms", *Journal of Mechanical Design*, vol.3, pp149-169, 1968.
- [6] G. L. Kinzel, Ch. Chang, "The analysis of planar linkages using a modular approach" *Mechanism and Machine Theory*, vol. 19, pp. 165-172, 1984.
- [7] C. Innocenti, "Position analysis in analytical form of the 7-link Assur kinematic chain featuring one ternary link connected to ternary links only", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 32, pp. 501-509, 1997.
- [8] J. Nielsen, B. Roth; "On the kinematic analysis of robotic mechanisms" *The International Journal of Robotics Research*, vol. 18, n° 12, 1999.
- [9] C. W. Wampler, A. P. Morgan, A. J. Sommese, "Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics" *Journal of Mechanical Design*, vol. 112, pp. 59-68 1990.
- [10] G. Salmon, *Modern higher algebra*, Chelsea Publishing Co, New York, 1885.
- [11] M. Raghavan, B. Roth, "Solving polinomial systems for the kinematic analysis and synthesis of mechanisms and robot manipulators" Special 50th anniversary design issue, *Trans ASME*, vol. 117, pp. 71-79, 1995.
- [12] C. W. Wampler, "Solving the kinematics of planar mechanisms by Dixon determinant and a complex plane formulation", *Proceedings of ASME DETC*, Sept 10-13, Baltimore, 2000.
- [13] J. Nielsen, B. Roth. "Solving the input/output problem for planar mechanisms", *Journal of Mechanical Design*. Vol. 121, pp 206-211 1999.
- [14] A. K. Dhingra, A. N. Almadi, D. Kohli, "Closed form displacement analysis of 8, 9 and 10-link mechanisms. Part I: 8-link mechanisms", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35, pp. 821-850, 2000.
- [15] A. K. Dhingra, A. N. Almadi, D. Kohli, "Closed-form displacement analysis of 10-link 1-DOF mechanisms: Part I – general framework" *Mechanism and Machine Theory*, vol. 36, pp. 29-56, 2001.
- [16] B. Buchberger, "Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory", in N.K. Bose (Ed), *Multidimensional Systems Theory*, Holland, pp.184-232, 1985.
- [17] A. K. Dhingra, A. N. Almadi, D. Kohli, "A Gröbner-Sylvester hybrid method for closed-form displacement analysis of mechanisms", *Proceedings ASME DETDC*, September 13-16, Atlanta, 1998.
- [18] R. Avilés, M. B. G. Ajuria, M. V. Hormaza, A. Hernández, "A procedure based on finite elements for the solution of nonlinear problems in the kinematic analysis of mechanisms", *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 22, pp. 305-327, 1996.
- [19] P. N. Seth, J. J. Uicker, "IMP: A computer aided design analysis system for mechanisms and linkages", *Journal of Engineering for Industry*, vol. 94, pp. 454-464, 1972.
- [20] E. J. Haugh, *Computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems*, Ed. Allyn and Bacon, 1989.
- [21] J. García de Jalón, M. A. Serna, R. Avilés. "Computer method for kinematic analysis of lower-pair mechanisms-I: velocities and accelerations. -II: position problems". *Mechanism & Machine Theory*. Vol 16, n.5, pp. 543-566, 1981.
- [22] P. E. Nikravesh, *Computer-aided analysis of mechanical systems*, Ed. Prentice-Hall, 1988.
- [23] R. L. Burden, J. Douglas Faires. *Numerical Analysis (spanish edition)*. International Thomson Publishing, 1998.
- [24] J. García de Jalón, E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems, the real time challenge*, Springer-Verlag, 1994.
- [25] A. Hernández, V. Petuya, E. Amezua, "A method for the solution of the forward position problems of planar mechanisms with prismatic and revolute Joints", *Journal of Mechanical Engineering Science (P. I. Mech. Eng. Part C)*. Vol 216, pp 395-407, 2002.

- [26] V. Petuya, Ch. Pinto, A. Hernández, “Position analysis of planar mechanisms with R-pairs using a geometrical-iterative method”, *Proceedings of the The 8th IFToMM International Symposium on Theory of Machines and Mechanisms*, vol.1, Bucharest, Rumania, 2001.
- [27] A. Hernández, V. Petuya, “Position analysis of planar mechanisms with R-pairs using a geometrical-iterative method”, *Mechanism and Machine Theory*. Vol 39, pp.133-152, 2004.
- [28] V. Petuya, Método Geométrico-Iterativo para la resolución del problema de posición directo en mecanismos planos con pares inferiores. Análisis de posiciones singulares. *Tesis doctoral*. Universidad del País Vasco, 2002.
- [29] A. Hernández, O. Altuzarra, R. Avilés, V. Petuya, "Kinematic analysis of mechanisms via a velocity equation based in a geometric matrix", *Mechanism and Machine Theory*. Vol 38, pp.1413-1429, 2003.
- [30] I. I. Artobolevskii, *Mecanismos en la técnica moderna (6 volúmenes)*. Ed. MIR, Moscú, 1977.
- [31] T. Mlynarski, “Position analysis of planar linkages using the method of modification of kinematic units”, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 31, pp. 831-838, 1996.

A GEOMETRICAL-ITERATIVE METHOD FOR THE SOLUTION OF THE FORWARD POSITION PROBLEM IN LOWER-PAIR PLANAR LINKAGES

Abstract – In this paper a new method of kinematic analysis is presented. It solves the forward position problem of multi degree of freedom planar linkages. The linkages may be of any complexity, weakly or strongly coupled, with revolute and prismatic kinematic joints. The procedure is based on a geometric and iterative approach. It consists on the imposition of a predefined sequence of constraints that model the linkage in an iterative way. Thanks to the geometrical formulation of the constraint equations, this method is not only a new alternative to the general methods, the matrix computation methods. It also solves some problems common to these methods due to the use of the Newton-Raphson algorithm and achieves a higher efficiency.

