



TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER EN FÍSICA DE SISTEMAS COMPLEJOS

DIMENSIÓN FRACTAL Y TOPOLOGÍA
DE LAS CUENCAS EN LA DISPERSIÓN
CAÓTICA CON FORZAMIENTO

ALEXANDRE RODRÍGUEZ NIETO

Dirigido por: *Prof. Jesús M. Seoane Sepúlveda*

Tutorizado por: *Prof. José Enrique Alvarellos Bermejo*

Curso Académico 2016/2017



Máster en Física de Sistemas Complejos
Trabajo Fin de Máster

El presente trabajo, bajo el título “Dimensión Fractal y Topología de las Cuencas en la Dispersión Caótica con Forzamiento”, ha sido tutorizado por el Prof. José Enrique Alvarelos Bermejo, Catedrático de la UNED en el área de Física de la Materia Condensada. El director del mismo ha sido el Prof. Jesús M. Seoane Sepúlveda, Profesor Titular de la Universidad Rey Juan Carlos en el área de Física Aplicada y miembro del Grupo de Dinámica No Lineal, Teoría del Caos y Sistemas Complejos de dicha universidad. En esta memoria se sintetizan e integran numerosas competencias generales y específicas adquiridas en el Máster en Física de Sistemas Complejos, especialmente aquellas relacionadas con el desarrollo de aptitudes investigadoras. Para su elaboración han sido muy enriquecedores conocimientos y métodos aprendidos en diversas asignaturas del Máster, entre las que destacan: Introducción a la Ciencia No Lineal, Métodos Numéricos Avanzados y Modelización y Simulación de Sistemas Complejos.

A la memoria del Prof. Javier García Sanz

Índice

1. Introducción	9
2. Descripción del modelo	12
2.1. Cuencas de escape	16
2.2. El sistema de Hénon-Heiles forzado	19
3. Dimensión fractal de la función de dispersión	23
3.1. Algoritmo de incertidumbre para la dimensión fractal	24
3.2. Efecto del forzamiento en la dimensión fractal	27
3.3. Argumentos heurísticos para los efectos del forzamiento	31
4. Topología e impredecibilidad de las cuencas	32
4.1. Leyes de decaimiento y desaparición de las superficies KAM	32
4.2. Fractalidad y tamaño de las fronteras	36
4.3. Impredecibilidad de las cuencas	40
5. Conclusiones	46

Resumen

La dispersión caótica no hiperbólica en sistemas Hamiltonianos abiertos es un tema de gran interés en Física. El efecto de pequeñas perturbaciones en este tipo de sistemas ha sido un importante foco de interés en la última década. En este trabajo presentamos un exhaustivo estudio numérico y cualitativo del efecto de un forzamiento periódico en el Hamiltoniano de Hénon-Heiles, un ejemplo paradigmático de sistema caótico con escapes. Hemos encontrado un comportamiento tipo resonancia cuando la frecuencia del forzamiento es $\omega \approx 1$. Este valor crítico genera importantes cambios en la dinámica de escape, en la topología de las cuencas de escape y en la fractalidad de la función de dispersión. El cómputo de las cuencas de escape en el espacio físico nos ha permitido observar la desaparición de las islas KAM y la disminución del área y fractalidad de las fronteras de las cuencas. Todos estos cambios dan lugar a un abrupto descenso de la impredecibilidad del sistema, que se estima utilizando el concepto de entropía de la cuenca. Los aspectos novedosos y más importantes de esta investigación son el cómputo de la dimensión fractal de la función de dispersión y la cuantificación de la impredecibilidad de las cuencas.

Abstract

Nonhyperbolic chaotic scattering in open Hamiltonian systems is a topic of fundamental interest in Physics. The effect of weak perturbations in this kind of systems has been an important focus of interest in the last decade. In this manuscript we present both a thorough numerical and qualitative study of the effect of periodic forcing in the Hénon-Heiles Hamiltonian, a paradigmatic example of chaotic system with escapes. We have found a resonant-like behaviour when the frequency of the forcing is $\omega \approx 1$. This critical value generates important changes on the escape dynamics, on the topology of the exit basins and on the fractality of the scattering function. The computation of the exit basins in the physical space has allowed us to observe the destruction of KAM islands and also the decreasing in both the area and fractality of the basin boundaries. All these changes lead to an abrupt decrease in the unpredictability of the system, which is estimated by using the concept of basin entropy. The novel and most important aspects of this research are the computation of the fractal dimension of the scattering function and the quantification of the unpredictability of the basins.

1. Introducción

El término “caos”, en el contexto físico y matemático, fue acuñado por James A. Yorke y Tien-Yien Li en el año 1975 [1]. El fenómeno se produce exclusivamente en sistemas dinámicos no lineales y su principal característica es la dependencia sensible a las condiciones iniciales [2, 3]. De este modo en un sistema caótico dos trayectorias que parten de condiciones iniciales infinitesimalmente próximas divergirán en el espacio de las fases según avanza el tiempo. Por ello el comportamiento caótico implica una cierta dificultad a la hora de predecir la evolución de las trayectorias y el estado asintótico del sistema a partir de las condiciones iniciales.

Los problemas de dispersión caótica (*chaotic scattering*) [4] resultan de interés en Dinámica No Lineal y Teoría del Caos y encuentran aplicación en diversos campos de la Física, entre los que podemos mencionar la Mecánica Celeste, la Mecánica de Fluidos y la Física Atómica y Nuclear (Ver Ref. [5] para una descripción completa de las aplicaciones de la dispersión caótica).

En un problema prototípico de dispersión caótica las partículas entran en una región de dispersión finita donde existe un cierto potencial no lineal $V(\mathbf{q})$, donde \mathbf{q} denota las coordenadas generalizadas, describen una trayectoria caótica y abandonan la región. De este modo el fenómeno puede entenderse como una manifestación de caos transitorio [6, 7]. Suficientemente lejos de la región de dispersión las partículas son libres y se mueven en línea recta, por lo que debe cumplirse $\lim_{|q| \rightarrow \infty} V(\mathbf{q}) = 0$. Habitualmente el objetivo es establecer relaciones funcionales entre las variables características de la entrada y salida de la región de dispersión. Por ejemplo, podemos preguntarnos acerca del tiempo que tardará una partícula en escapar en función del ángulo con el que se efectúa el disparo, entendiendo éste como el conjunto de condiciones iniciales que definen el lanzamiento de la partícula hacia la región de dispersión. Típicamente los sistemas dinámicos donde se estudian procesos de dispersión caótica son sistemas Hamiltonianos abiertos (e.g. [8-13]), los cuales se caracterizan por presentar curvas isopotenciales abiertas. Las regiones en el espacio de las fases por las cuales las partículas pueden escapar se denominan “salidas”. En algunos sistemas Hamiltonianos típicos éstas están presentes únicamente cuando la energía es superior a un cierto umbral que denominamos “energía de escape”.

En la figura 1 se representa el fenómeno de la dispersión caótica.

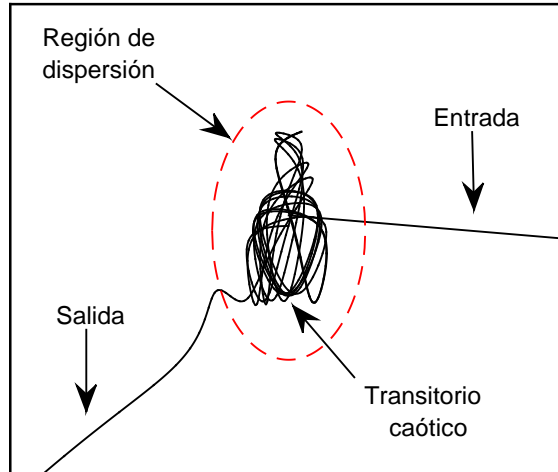


Figura 1: Ejemplo esquemático de dispersión caótica en el que una partícula entra en la región de dispersión y tras seguir una trayectoria caótica transitoria logra escapar.

Un aspecto ubicuo en las investigaciones sobre dispersión caótica es la función de dispersión, la cual representa la relación entre variables características de la entrada y salida de la región de dispersión. Cuando la dispersión no es caótica la función de dispersión estará formada por curvas suaves, lo que lleva de la mano una alta capacidad de predicción de una de las variables a partir de la otra. En problemas de dispersión caótica la función de dispersión presenta un conjunto de singularidades consecuencia de la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Si nos adentramos en el vecindario de una de las singularidades concluiremos que el rango de variación de la variable de salida no tiende a cero según se reduce arbitrariamente el tamaño del vecindario. Por ello la función de dispersión presenta geometría fractal, lo que implica una cierta impredecibilidad a la hora de relacionar las variables de entrada y salida en la región de dispersión.

En este trabajo exploraremos la dispersión caótica en el sistema de Hénon-Héiles [14] forzado. Para valores suficientemente grandes de energía el sistema se convierte en un ejemplo paradigmático de sistema Hamiltoniano abierto y mantiene todas las propiedades de un sistema caótico con escapes. El sistema ha sido profundamente estudiado en su caso puramente conservativo (e.g. [15-19]), si bien existen líneas de investigación que buscan dilucidar los efectos de pequeñas perturbaciones como ruido, disipación y forzamiento periódico [20-27]. La investigación que plasmamos aquí es de carácter fundamental y busca justamente avanzar en la comprensión de los efectos del forzamiento periódico en problemas de dispersión caótica asociados a sistemas Hamiltonianos abiertos.

A lo largo de este trabajo se reproducirán algunos resultados ya conocidos con el objetivo de comprender el origen y razón de ser de las partes genuinas de esta investigación. Los principales aspectos novedosos de este trabajo, no realizados en las investigaciones previas en esta línea [22], son:

1. Obtención de la evolución de la dimensión fractal de la función de dispersión según se modifican los parámetros característicos del forzamiento que perturba el Hénon-Heiles.
2. Estudio del efecto del forzamiento en la dimensión fractal y en el tamaño de las fronteras de las cuencas de escape del sistema [28].
3. Cuantificación de la impredecibilidad de las cuencas de escape utilizando como herramienta la entropía de las cuencas (*basin entropy*) [29].

La estructura del trabajo es la que sigue. En la segunda sección expondremos con suficiente detalle los aspectos básicos de la dinámica del sistema de Hénon-Heiles en el caso conservativo y forzado. En la tercera sección estudiaremos el efecto del forzamiento en la dimensión fractal de la función de dispersión y aportaremos argumentos heurísticos que podrían justificar los resultados obtenidos. En la cuarta sección analizaremos algunos aspectos característicos de la topología de las cuencas y la impredecibilidad asociada en función de la frecuencia del forzamiento. Finalmente sintetizaremos las conclusiones principales en la quinta y última sección.

La metodología del trabajo es fundamentalmente numérica y computacional. Muchos de los resultados aquí expuestos son fruto de simulaciones que presentan una gran carga computacional. Por ello los algoritmos se han programado en un lenguaje de bajo nivel, C++, utilizando además programación en paralelo mediante el protocolo MPI.

2. Descripción del modelo

El sistema de Hénon-Heiles apareció en la literatura por primera vez en el año 1964 en el artículo de los astrónomos franceses Michel Hénon y Carl Heiles “*The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments*” [14]. Ambos investigadores trabajaban en la búsqueda de una tercera integral del movimiento en sistemas galácticos. Concretamente el sistema de estudio era un Hamiltoniano expresado en coordenadas cilíndricas (R, z, θ) asociado a un potencial galáctico en el cual, en el modelo, se movería una estrella. Ya que el espacio de las fases presentaba seis dimensiones, necesariamente existirían cinco integrales del movimiento independientes. En aquel momento era conocido que dos de ellas no eran aislables y carecían de significado físico. Otras dos eran aislables y conocidas. La pregunta que movía en aquel entonces su investigación era: *¿cuál es la naturaleza de la última integral del movimiento?*. Simplificando el problema y trabajando en un espacio de las fases (x, y, \dot{x}, \dot{y}) se propusieron estudiar el Hamiltoniano que ahora conocemos como Hamiltoniano de Hénon-Heiles.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (1)$$

El cual en el modelo determina el movimiento de una estrella de masa unidad en un potencial galáctico bidimensional.

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (2)$$

Ya que la conservación de la energía implica una ligadura, cualquier trayectoria evolucionará en un espacio de las fases tridimensional (x, y, \dot{y}) (fijando arbitrariamente \dot{x}).

De las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}} \quad (3)$$

donde \mathbf{q} denota las coordenadas y \mathbf{p} los momentos generalizados, podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 2xy \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (4)$$

El sistema anterior carece de una solución analítica general, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos. Cuando se trabaja numéricamente con sistemas Hamiltonianos es habitual utilizar integradores geométricos simplécticos. El objetivo es que según avanza la integración numérica el valor de la energía, por definición constante, no decrezca. En el caso concreto del sistema de Hénon-Heiles cualquier problema de valor inicial $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ puede resolverse utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden [30, 31], un método general y bien conocido para resolver problemas en ecuaciones diferenciales ordinarias. M. Hénon y C. Heiles comprobaron, para 150 órbitas, que la energía decrecía en una cantidad menor de 0.00003, lo que supone, para valores habituales, aproximadamente un 0.015 %. Desde entonces en muchos trabajos relacionados con el Hamiltoniano de Hénon-Heiles se han realizado simulaciones utilizando este integrador. Nosotros seguimos en dicha línea.

El Hamiltoniano de Hénon-Heiles, bajo la aparente sencillez de sus ecuaciones, presenta un comportamiento dinámico muy rico y a la vez complejo. Es por ello que ha sido extensamente estudiado dentro de la Dinámica No Lineal y la Teoría del Caos.

Para visualizar de forma intuitiva el sistema de estudio representamos en la figura 2 las curvas isopotenciales para diferentes valores de energía. En dicha figura se hace patente la simetría de rotación $2\pi/3$ que presenta el Hamiltoniano. Existe un valor umbral de la energía, E_e , a partir del cual las trayectorias pueden escapar de la región acotada e ir al infinito a través de tres salidas posibles. En la parte superior tenemos la salida 1 ($y \rightarrow +\infty$), en la parte izquierda la salida 2 ($x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$) y en la parte derecha la salida 3 ($x \rightarrow +\infty, y \rightarrow -\infty$). La existencia de estas tres salidas es consecuencia de los términos x^2y y $\frac{1}{3}y^3$ del Hamiltoniano.

La energía umbral o energía de escape se corresponde con aquel valor asociado a los máximos del Hamiltoniano y puede obtenerse de forma sencilla utilizando herramientas básicas de cálculo, siendo $E_e = 1/6$. El valor es el mismo para los tres máximos, lo que implica una simetría triangular. En este trabajo estamos interesados en valores de energía superiores al umbral, pues es entonces cuando el sistema se convierte en un ejemplo paradigmático de dispersión caótica. De este modo las trayectorias provienen del infinito o de la propia región de dispersión y, tras interactuar con el potencial, escapan por una de las salidas. En la figura 3 se representan dos ejemplos de trayectorias escapando por dos salidas diferentes tras su paso por la región de dispersión.

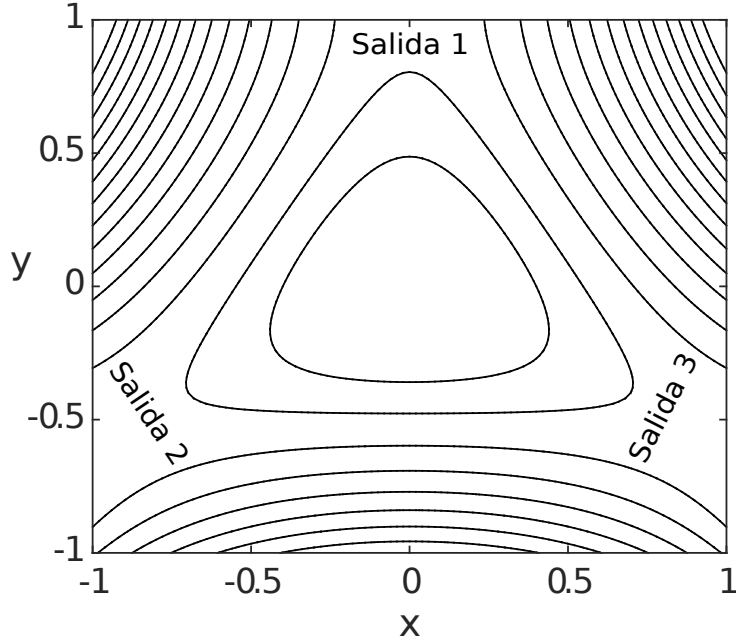


Figura 2: Curvas isopotenciales del sistema de Hénon-Heiles para diversos valores de energía inferiores y superiores a la energía de escape. Cuando $E > E_e = 1/6$ el Hamiltoniano presenta tres salidas simétricas.

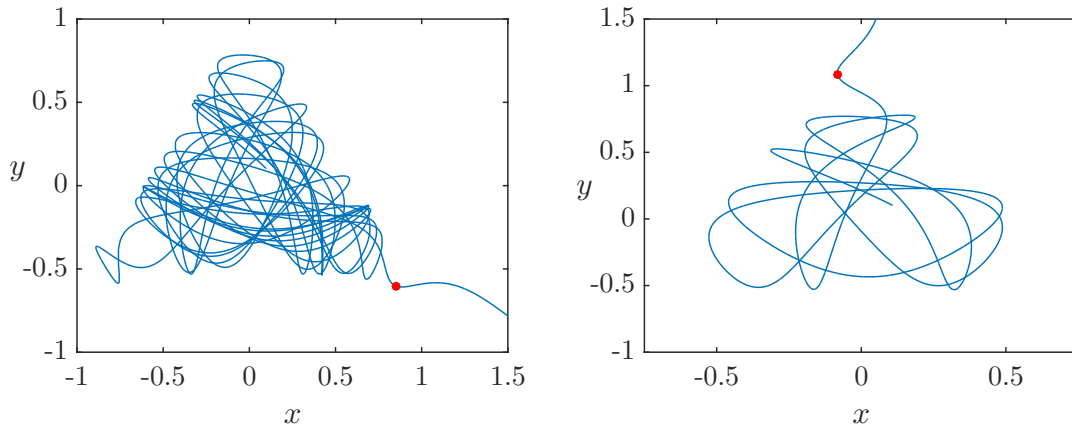


Figura 3: Trayectorias del sistema de Hénon-Heiles en el espacio físico para una energía $E = 0.19$, escapando de la región de dispersión por la salida 1 (derecha) y 3 (izquierda). El punto rojo presente en ambas gráficas se corresponde con el punto en el que la trayectoria intersecta la órbita de Lyapunov y definitivamente escapa.

Una de las propiedades del sistema de Hénon-Heiles es la existencia de tres órbitas periódicas altamente inestables conocidas como órbitas de Lyapunov [32], situada cada una de ellas en las proximidades de una de las salidas. Cuando una trayectoria atraviesa una órbita de Lyapunov con su vector velocidad apuntando hacia fuera de la región de dispersión, ésta escapará y no regresará jamás.

Cuanto mayor es la energía del sistema mayor es el tiempo, en general, que tardan las partículas en abandonar la región de dispersión. Sin embargo, todavía para valores $E > E_e$ existen condiciones iniciales que generan trayectorias que permanecerán para siempre en la región de dispersión. Estas trayectorias son típicamente cuasiperiódicas, si bien pueden ser periódicas altamente inestables como las órbitas de Lyapunov. Las órbitas cuasiperiódicas son trayectorias que regresan periódicamente a una región finita del espacio de fases pero nunca se cierran sobre sí mismas. Una trayectoria en un espacio de fases N-dimensional es cuasiperiódica con cuasiperíodo T si para todo t se cumple:

$$(\mathbf{p}(t+T), \mathbf{q}(t+T)) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) + (\gamma_1, \dots, \gamma_N), \quad \sum_{i=1}^N \gamma_i \neq 0$$

En la figura 4 representamos dos ejemplos de órbitas cuasiperiódicas obtenidas para diferentes valores de energía.

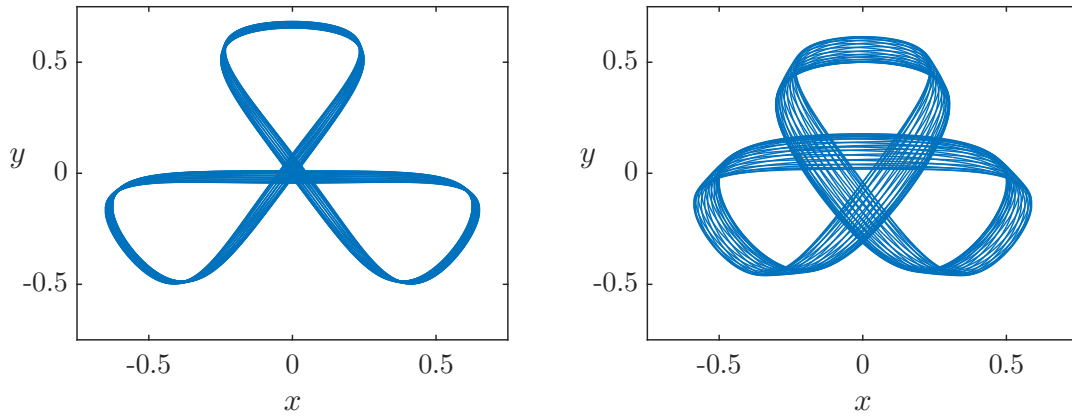


Figura 4: Órbitas cuasiperiódicas del sistema de Hénon-Heiles en el espacio físico para energías $E = 0.19$ (izquierda) y $E = 0.17$ (derecha).

Las órbitas caóticas del sistema están asociadas a una silla caótica (*chaotic saddle*), un conjunto formado por órbitas que nunca escapan de la región de dispersión cuando $t \rightarrow \infty$ o $t \rightarrow -\infty$ [2]. La silla caótica presenta algunas propiedades comunes a los atractores caóticos si bien, como impone la naturaleza de los sistemas Hamiltonianos, el conjunto es no atractor. Se trata de un conjunto invariante, es decir, si denotamos la silla caótica como A entonces $\mathbf{F}(A) \subseteq A$, siendo \mathbf{F} el flujo en el espacio de las fases. Otra propiedad compartida entre ambos conjuntos es, por su naturaleza caótica, la dependencia sensible del flujo a las condiciones iniciales cuando éste actúa sobre el conjunto. Finalmente decir que la estructura de la silla caótica es fractal y de tipo conjunto de Cantor, por lo que tiene medida zero Lebesgue. En el espacio de fases tridimensional del sistema de Hénon-Heiles

lo anterior se traduce en que la silla caótica no tiene volumen.

Las órbitas cuasiperiódicas pertenecen a superficies de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) [33]. La existencia de estas superficies es una de las principales características de la dispersión caótica no hiperbólica. Una de sus consecuencias es que la ley de decaimiento en la fracción de partículas que permanecen en la región de dispersión es algebraica. Cuando la dispersión es hiperbólica las variedades estable e inestable de la silla caótica nunca son tangentes y todo punto de silla es hiperbólico [34]. Además no existen superficies KAM mezcladas con la silla caótica y en consecuencia la ley de decaimiento pasa a ser exponencial. Nosotros, interesados entre otras cosas en la dinámica del sistema asociada a las superficies KAM, hemos trabajado dentro del régimen no hiperbólico, el cual se produce para energías en el intervalo aproximado $E \in [E_e, 0.23]$.

2.1. Cuencas de escape

Dependiendo de cual sea la condición inicial una trayectoria en el sistema de Hénon-Heiles puede escapar de la región de dispersión o permanecer para siempre en ella. El escape puede producirse por cualquiera de las tres salidas del Hamiltoniano. Muchas de estas trayectorias son caóticas, lo que implica, entre otras cosas, que presentan dependencia sensible a las condiciones iniciales [2, 3]. El comportamiento caótico deja su huella en sistemas disipativos por medio de fronteras fractales en sus cuencas de atracción [35, 36]. En un sistema Hamiltoniano, en cuanto a que estos carecen de atractores, no es posible definir cuencas de atracción. Sin embargo en un sistema Hamiltoniano abierto pueden definirse de forma análoga las cuencas de escape (*exit basins*) [28]. Decimos que la cuenca de escape asociada con la salida i es el conjunto de condiciones iniciales cuyas trayectorias escapan por la salida i . En el caso del sistema de Hénon-Heiles tendremos tres cuencas de escape y, en su caso, un conjunto de condiciones iniciales que nunca escapan de la región de dispersión.

Para obtener computacionalmente las cuencas de escape seleccionamos una malla de $P \times P$ condiciones iniciales en un cierto espacio y para cada una de ellas obtenemos la trayectoria. Una vez detectamos el escape de la partícula, ya sea por medio de las órbitas de Lyapunov o estableciendo otro criterio en base a sus coordenadas, asignamos un cierto valor entero $S = 1, 2, 3$ a dicha condición inicial en función de la salida por la que haya escapado. En caso de que transcurrido un cierto tiempo de integración la

partícula no escape asignamos $S = 0$. Finalmente asociamos un color a cada uno de estos valores y representamos en el plano correspondiente. Típicamente las condiciones iniciales se seleccionan en el espacio físico (x, y) o en el espacio de las fases (y, \dot{y}) . Una vez fijada una energía E la velocidad inicial puede expresarse

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} = \sqrt{2E - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0^2 y_0 + \frac{2}{3}y_0^3} \quad (5)$$

Para obtener las cuencas de escape (y, \dot{y}) es suficiente con fijar un valor e x (habitualmente $x = 0$) pues el momento en x viene perfectamente determinado para cada (y_0, \dot{y}_0) , $\dot{x}_0 = \sqrt{v_0^2 - \dot{y}_0^2}$.

En el caso de las cuencas (x, y) resulta especialmente interesante efectuar el disparo de tal modo que se mantenga la simetría de rotación $2\pi/3$. Para ello se utiliza el método conocido como disparo tangencial [15], en el cual el vector velocidad se define de tal modo que este sea tangente al círculo centrado en el origen y pasante por el punto (x_0, y_0) . En la práctica exigiremos que el vector \mathbf{r} que une los puntos $(0, 0)$ y (x_0, y_0) sea perpendicular al vector velocidad, es decir, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$. Ya que existen dos vectores anti-paralelos que cumplen dicha condición, arbitrariamente fijaremos que su sentido sea anti-horario, es decir, que $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ apunte en el sentido positivo del teórico eje z . De imponer estas condiciones obtenemos

$$\dot{x}_0 = -\frac{v_0 y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \quad \dot{y}_0 = \frac{v_0 x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad (6)$$

El objetivo de utilizar este método de disparo es únicamente hacer patente la simetría original del problema. Los resultados del trabajo no cambiarían cualitativamente si se utilizara otro método.

Sin más dilación en la figura 5 representamos varias cuencas de escape (x, y) e (y, \dot{y}) para diferentes valores de energía. El código de colores es el siguiente: verde para las trayectorias que escapan por la salida 1, azul para la salida 2, rojo para la 3 y blanco para las islas KAM (trayectorias cuasiperiódicas). Las regiones prohibidas fuera de los muros del potencial se representan también en blanco. Para realizar estas figuras se ha tomado una malla de 500×500 puntos y se ha fijado un tiempo máximo de integración $t = 3000$. El criterio para detectar el escape de se basa en la posición de las partículas. En las dos primeras filas de gráficas pueden apreciarse regiones bien definidas donde las partículas nunca escapan (régimen no hiperbólico), pero no ocurre lo mismo en las dos últimas filas (régimen hiperbólico).

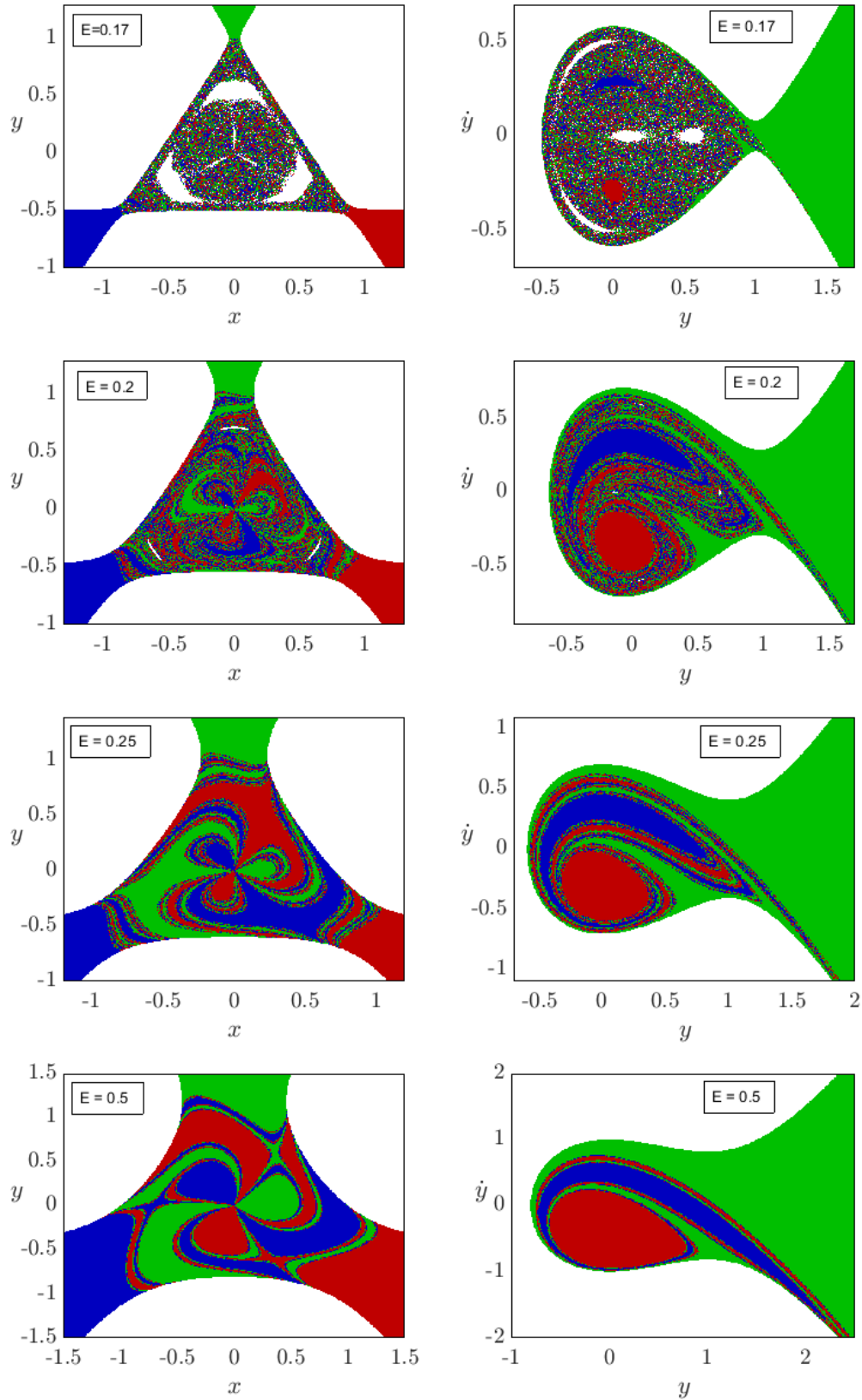


Figura 5: Cuencas de escape en los planos (x, y) (columna izquierda) e (y, \dot{y}) (columna derecha) para los valores de energía que se indican en cada figura. El código de color es el siguiente: verde para trayectorias que escapan por la salida 1, azul para la salida 2, rojo para la salida 3 y blanco para trayectorias que nunca escapan.

En el año 2001 se demostró que las cuencas de escape del sistema de Hénon-Heiles presentan la propiedad de Wada [15], una fuerte propiedad topológica que puede implicar una alta impredecibilidad. En líneas generales decimos que una cuenca es Wada si cualquier punto de la frontera es a la vez punto de frontera de 2 o más cuencas. La idea original de esta propiedad topológica proviene de Kunizo Yoneyama [37], quien la nombró en honor a su profesor Takeo Wada. Años más tarde la idea sería retomada por Hocking & Young [38], mientras que algunos teoremas importantes y avances acerca de las condiciones numéricas necesarias para garantizar la existencia de cuencas Wada vinieron de la mano de Nusse, Kennedy & Yorke [39, 40]. En los años 90 se encontró la propiedad de Wada en las cuencas de atracción del péndulo forzado y amortiguado [41] y en flujos hidrodinámicos abiertos [42]. En los últimos años se han encontrado cuencas Wada en el oscilador de Duffing [43], en sistemas con retardo [44] y en escapes en tokamaks [45], entre otros. También se han desarrollado nuevas técnicas computacionales para probar que una cuenca es Wada [46].

2.2. El sistema de Hénon-Heiles forzado

El modelo original de Hénon-Heiles es puramente conservativo. En los últimos años han surgido líneas de investigación que tratan de estudiar el efecto de pequeñas perturbaciones en el sistema. Concretamente se han incorporado términos de disipación [23, 24], forzamiento periódico [22] y ruido [20, 25, 26]. También se ha estudiado el efecto conjunto de la disipación y el ruido [27] y de un forzamiento aleatorio [47]. Un análisis general del efecto cada una de estas tres perturbaciones fue realizado por Blesa *et al.* [21].

En este trabajo estamos interesados en estudiar el efecto del forzamiento periódico. Tomando amplitudes (A) y frecuencias (ω) de forzamiento iguales en ambas ecuaciones diferenciales obtenemos nuestro modelo.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x - 2xy + A \sin(\omega t) \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2 + A \sin(\omega t)\end{aligned}\tag{7}$$

Una primera observación de los efectos del forzamiento puede realizarse a la luz de las órbitas del sistema en el espacio físico. Utilizando la trayectoria de la figura 4 (derecha) podemos comprobar como, fijando $\omega = 1$, la amplitud puede determinar que la partícula escape o quede retenida. Para una amplitud pequeña $A = 0.001$ la trayectoria continúa siendo cuasiperiódica. Sin embargo cuando elevamos la amplitud a un valor $A = 0.005$, todavía muy pequeño, la partícula escapa en $t = 165$ (figura 6, derecha).

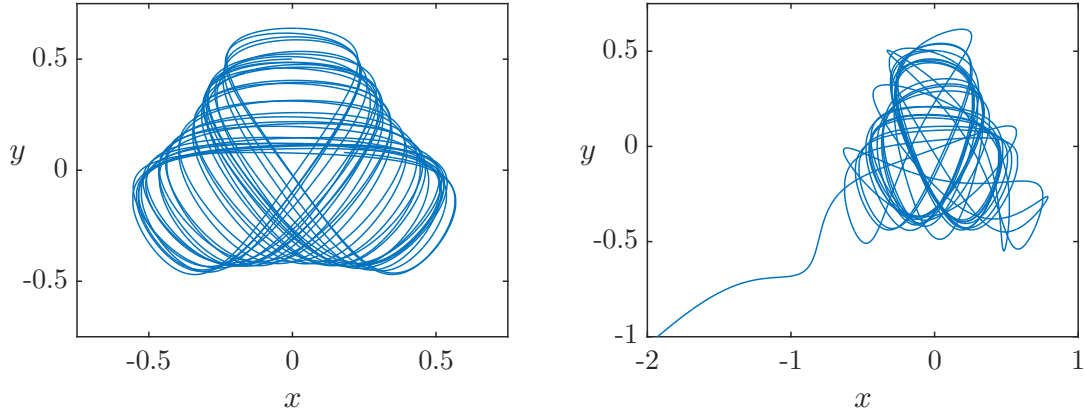


Figura 6: Trayectorias del sistema de Hénon-Heiles forzado en el espacio físico para $E = 0.17$. En ambos casos la frecuencia del forzamiento es $\omega = 1$ mientras que la amplitud es $A = 0.001$ (izquierda) y $A = 0.005$ (derecha).

Por otra parte, fijada una amplitud $A = 0.05$, puede observarse cómo el valor de la frecuencia será el que determine el destino de la trayectoria. En la figura 7 (izquierda) tenemos una órbita cuasiperiódica cuando la frecuencia es $\omega = 10$, mientras que al modificar la frecuencia a $\omega = 1$ se produce un escape en $t = 54$, tal y como se muestra en la misma figura (derecha).

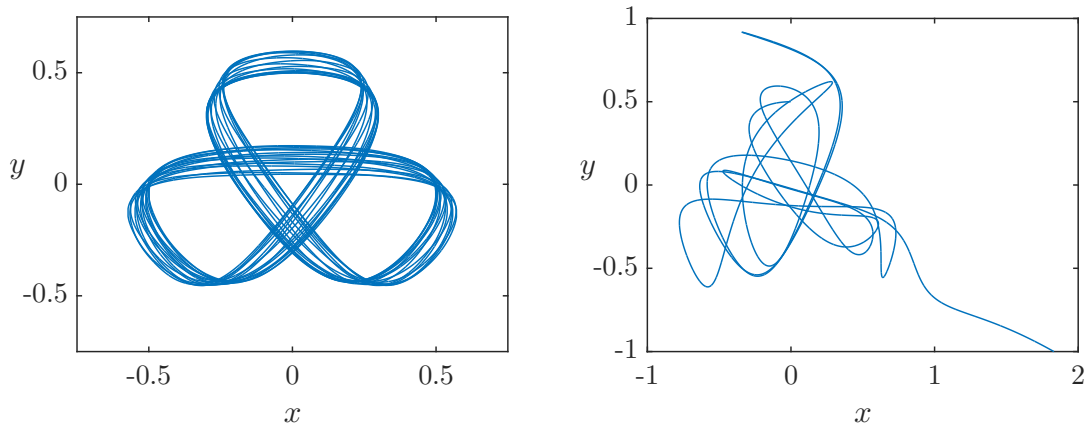


Figura 7: Trayectorias del sistema de Hénon-Heiles forzado en el espacio físico para $E = 0.17$. En ambos casos la amplitud del forzamiento es $A = 0.05$ mientras que la frecuencia es $\omega = 10$ (izquierda) y $\omega = 1$ (derecha).

Este primer análisis inmediato sobre el efecto del forzamiento nos dice que los parámetros de este, frecuencia y amplitud, puede modificar drásticamente la dinámica de escape. De forma más general pueden utilizarse las cuencas de escape para observar el efecto del forzamiento para un gran número de condiciones iniciales.

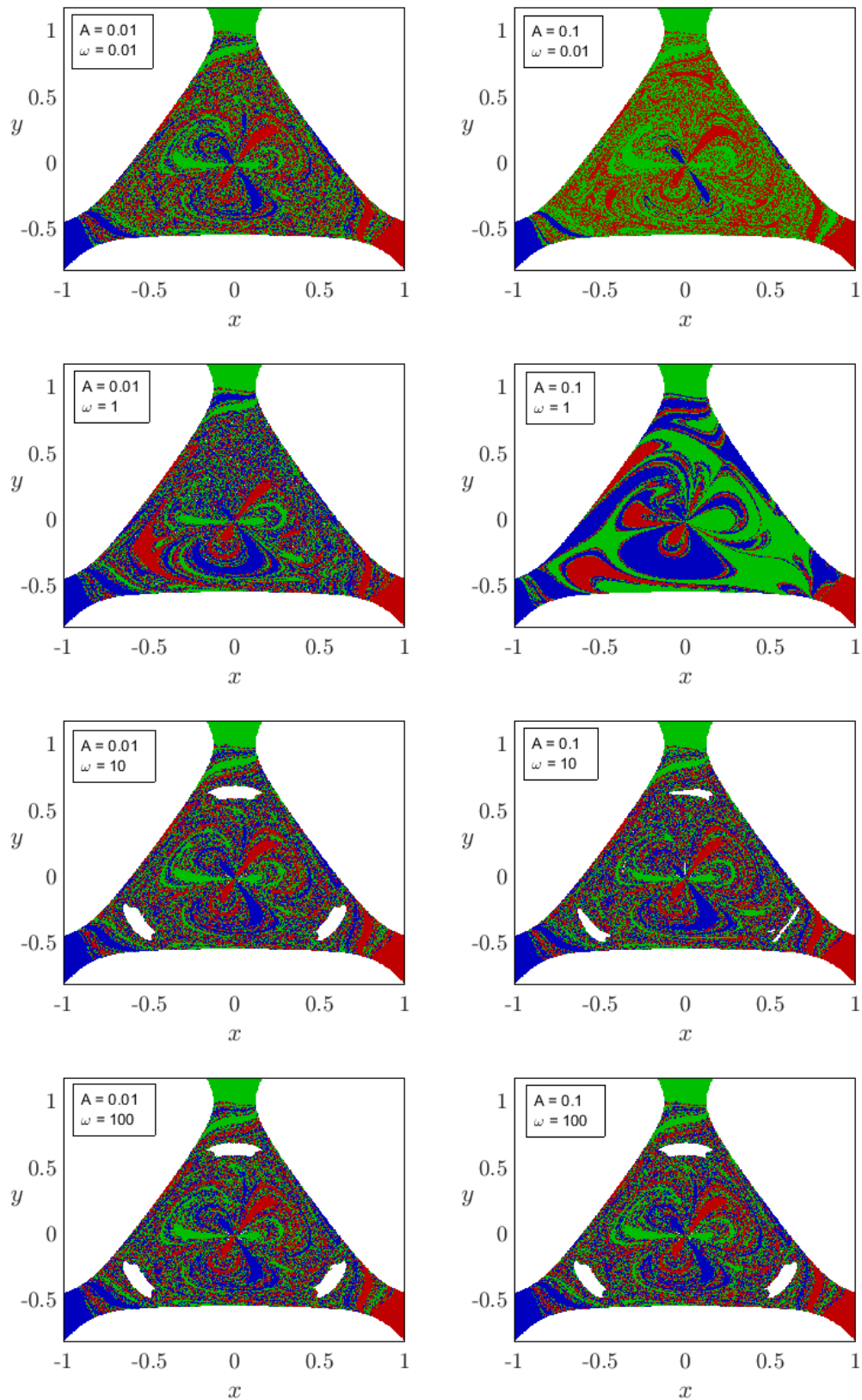


Figura 8: Cuencas de escape en el plano (x, y) del sistema de Hénon-Heiles forzado para los diferentes valores de frecuencia y amplitud que se muestran en cada figura. La energía es $E = 0.19$ y el código de colores el mismo que el de la figura 5.

A partir de las cuencas de escape de la figura 8 podemos realizar varias observaciones. En primer lugar vemos que existen valores de frecuencia para los cuales se desvanecen las superficies KAM. En segundo lugar para las tres primeras frecuencias el resultado es significativamente distinto para ambas amplitudes, pero no ocurre lo mismo para la última, donde el resultado es aproximadamente el mismo. En tercer lugar podemos notar que cuando la frecuencia es muy grande ($\omega = 100$) el sistema resulta prácticamente imperturbado independientemente de la amplitud. Finalmente en algunas de las cuencas (especialmente en el caso $A = 0.1$ y $\omega = 1$) se hace patente la ruptura de la simetría de rotación $2\pi/3$ así como la ausencia de equiprobabilidad en las salidas (especialmente en el caso $A = 0.1$ y $\omega = 0.01$). La cuarta sección de este trabajo está dedicada por completo a realizar un análisis minucioso del efecto del forzamiento en la topología de las cuencas de escape.

3. Dimensión fractal de la función de dispersión

Para obtener la función de dispersión tomaremos como variable característica de la salida justamente el tiempo de escape, T . Como variable característica de la región de dispersión puede utilizarse cualquiera de las variables del sistema siempre que las demás se mantengan fijas. Por el momento fijamos $x = 0$ y variamos $y \in [-0.5, 0]$, de tal modo que las condiciones iniciales se seleccionan dentro del segmento definido por los puntos $(x, y) = (0, -0.5)$ y $(x, y) = (0, 0)$. El valor de \dot{y} queda completamente definido al utilizar el método del disparo tangencial. Para cada condición inicial resolvemos numéricamente las ecuaciones hasta $t = 3000$ y obtenemos los tiempos de escape. Procedemos del mismo modo en el caso de añadir un forzamiento de amplitud $A = 0.05$ y frecuencia $\omega = 1$. Los resultados para ambos casos se muestran en la figura 9. En el caso conservativo el conjunto de singularidades constituye prácticamente la totalidad de la función de dispersión. Sin embargo al añadir forzamiento surgen regiones suaves muy amplias. En las mismas figuras también se puede apreciar como las partículas que nunca escapan desaparecen al añadir forzamiento. Vemos pues que la perturbación modifica drásticamente la dinámica de escape y la impredecibilidad del sistema.

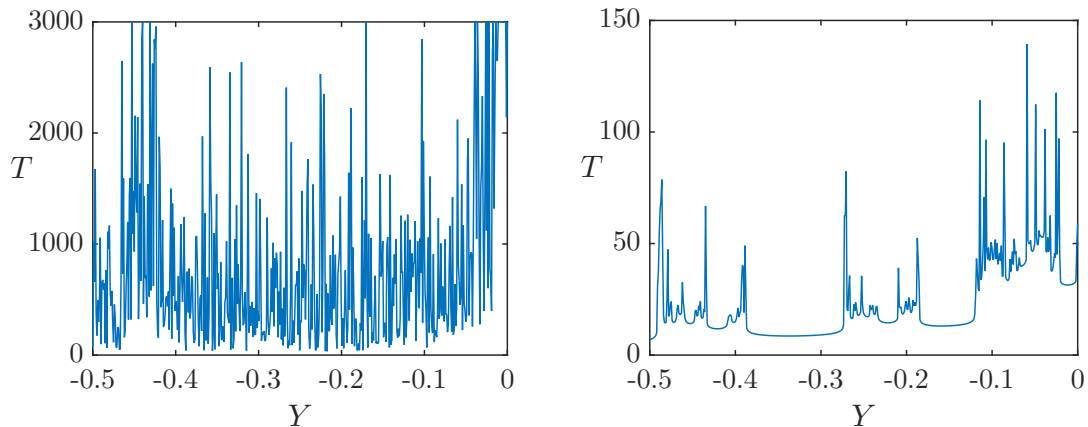


Figura 9: Función de dispersión obtenida utilizando disparo tangencial y fijando $x = 0$ en el caso conservativo (izquierda) y en presencia de un forzamiento de frecuencia $\omega = 1$ y amplitud $A = 0.05$. Se representa el tiempo de escape para 500 condiciones iniciales tras un tiempo máximo de integración $t = 3000$. La energía es $E = 0.17$.

Si nos adentramos en una de las singularidades comprobaremos que esta posee estructura a todas las escalas. Como ejemplo en la figura 10 se muestran varias magnificaciones de la función de dispersión en presencia de forzamiento que representábamos en la figura 9.

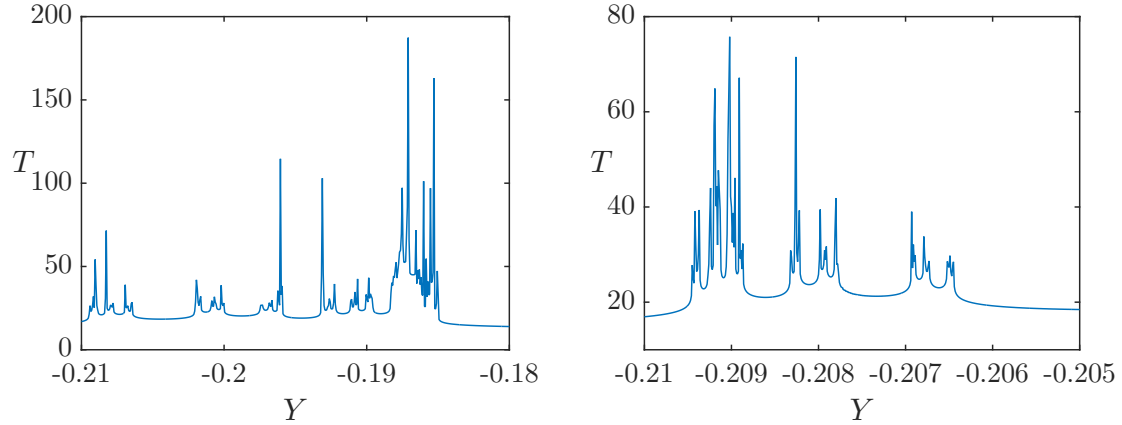


Figura 10: Magnificaciones de la función de dispersión representada en la figura 9 (derecha).

Hemos comentado que la fractalidad de la función de dispersión implica una cierta impredecibilidad. Estamos interesados en cuantificarla y para ello computamos la dimensión fractal del conjunto de singularidades. Y.-T. Lau [48] conjeturó, aportando evidencia numérica, que en problemas de dispersión caótica no hiperbólica el conjunto de singularidades tiene medida cero Lebesgue y su dimensión fractal es siempre $d = 1$. Este valor implica que la dificultad para determinar la variable de salida a partir de la variable de entrada es máxima. El valor unidad se justifica en base a la ley de decaimiento algebraica en la fracción de partículas que permanecen en la región de dispersión característica del régimen no hiperbólico.

3.1. Algoritmo de incertidumbre para la dimensión fractal

Estamos interesados en conocer cómo se ve modificada la dimensión fractal en función del valor de la frecuencia y la amplitud del forzamiento. Investigaciones previas han estudiado la evolución de la dimensión fractal del conjunto de singularidades de la función de dispersión en el sistema de Hénon-Heiles en el caso de incorporar disipación [23, 24] y ruido [27].

Para calcular la dimensión fractal nos serviremos del algoritmo de incertidumbre (*uncertainty algorithm*) [49, 50] que a continuación explicamos. La idea original surgió con el objetivo de estudiar la impredecibilidad en sistemas dinámicos no lineales disipativos. En dichos sistemas en muchas ocasiones coexisten varios atractores en el espacio de las fases, de tal modo que la topología de las cuencas de atracción puede resultar extremadamente complicada. Mínimos cambios en la condición inicial pueden provocar que se modifique el

estado asintótico del sistema. Podemos pensar en una cuenca de atracción en el plano XY que presenta dos atractores A y B . Se dice una condición inicial x_0 es incierta bajo un cierto error ε cuando las trayectorias asociadas a las condiciones iniciales x_0 y $x_0 + \varepsilon$ convergen a atractores distintos. Cuando las fronteras de las cuencas son fractales la fracción de condiciones iniciales inciertas con un error ε obedece la ley [50]

$$f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha \quad (8)$$

donde $\alpha \in [0, 1]$ es conocido como exponente de incertidumbre y está relacionado con la dimensión fractal, d , y la dimensión del espacio de las fases, D , mediante la relación $\alpha = D - d$. Si el valor de α es significativamente menor que 1 una reducción en el error ε producirá tan solo una ligera disminución en la fracción f . En el caso extremo $\alpha = 0$ la fracción f no se ve reducida por mucho que nos adentremos en la frontera pues ésta presenta estructura a todas las escalas.

El algoritmo de incertidumbre puede adaptarse fácilmente a sistemas Hamiltonianos y al estudio de la fractalidad de la función de dispersión [48]. En este caso fijada una cierta condición inicial x_0 diremos que esta es incierta bajo un error ε si para la condición inicial $x_0 + \varepsilon$ se ve modificada alguna variable característica del escape. En el caso concreto de considerar el tiempo de escape la condición inicial es incierta si $|T(x_0 + \varepsilon) - T(x_0)| > h$, donde el umbral h habitualmente se considera justamente como el paso de integración del método numérico. De este modo si ambas trayectorias no escapan en el mismo número de pasos de integración decimos que la condición inicial es incierta. En el caso de la función de dispersión, en cuanto a que $D = 1$, la ecuación (8) es

$$f(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1-d} \quad (9)$$

Tomando logaritmos en la ecuación anterior obtenemos

$$\log \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = -d \log \varepsilon + k \quad (10)$$

donde k es una constante. Esta ecuación nos permite obtener la dimensión fractal computacionalmente a partir de la pendiente de la recta que debe arrojar una representación $\log(f(\varepsilon)/\varepsilon)$ frente a $\log \varepsilon$. A continuación exponemos esquemáticamente el algoritmo implementado.

Algoritmo 3.1.

1. Fijamos un valor del error considerado en la condición inicial, ε .
2. Obtenemos el tiempo de escape para dos condiciones iniciales x_0 y $x_0 + \varepsilon$.
3. Si $|T(x_0 + \varepsilon) - T(x_0)| > h$ decimos que la condición inicial es incierta y acumulamos en un contador, U .
4. Repetimos los pasos 3–4 un total de N veces y calculamos la fracción de condiciones iniciales inciertas, $f(\varepsilon) = U/N$.
5. Guardamos $\log(f(\varepsilon)/\varepsilon)$ y $\log \varepsilon$.
6. Reiniciamos el contador U , modificamos ε y repetimos los pasos 2 – 6 .
7. Tras realizar el procedimiento para varios valores de ε representamos gráficamente $\log(f(\varepsilon)/\varepsilon)$ frente a $\log \varepsilon$.
9. Realizamos un ajuste por mínimos cuadrados y a partir de la pendiente obtenida determinamos la dimensión fractal.

En todas las simulaciones de esta sección se ha fijado $h = 0.005$ y tomado 21 valores de ε desde 10^{-9} hasta 10^{-5} en pasos de $10^{0.2}$. En la figura 11 se representa el resultado para el caso conservativo y en presencia de un forzamiento de amplitud $A = 0.05$ y frecuencia $\omega = 1$. En este caso el número de condiciones iniciales para cada ε es 50.000 y la representación demuestra una estricta relación lineal entre las variables. La dimensión fractal que arroja la pendiente de la recta es, respectivamente, $d = 0.99$ y $d = 0.72$.

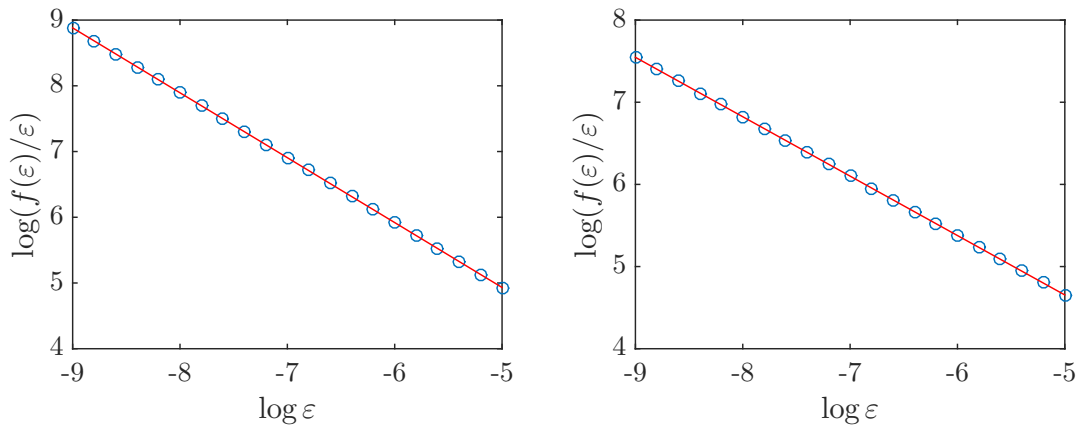


Figura 11: Representación de $\log(f(\varepsilon)/\varepsilon)$ frente a $\log \varepsilon$, junto con la recta obtenida utilizando un ajuste lineal, para el caso conservativo (izquierda) y en presencia de un forzamiento de amplitud $A = 0.05$ y frecuencia $\omega = 1$ (derecha). La energía es $E = 0.17$.

3.2. Efecto del forzamiento en la dimensión fractal

Inicialmente fijaremos una energía $E = 0.17$ y estudiaremos el efecto de los parámetros del forzamiento en la dimensión fractal de la función de dispersión. Primeramente buscamos conocer el efecto de la frecuencia. Para ello utilizamos el algoritmo 3.1. para diversos valores de $\omega \in [0, 5]$. En la figura 12 se muestra la dimensión fractal en función de la frecuencia de forzamiento para tres amplitudes distintas. Para cada valor de ω se han utilizado en el algoritmo 20.000 condiciones iniciales para y_0 seleccionadas mediante un barrido a lo largo del segmento definido por los puntos $(x, y) = (0, -0.5)$ y $(x, y) = (0, 0)$.

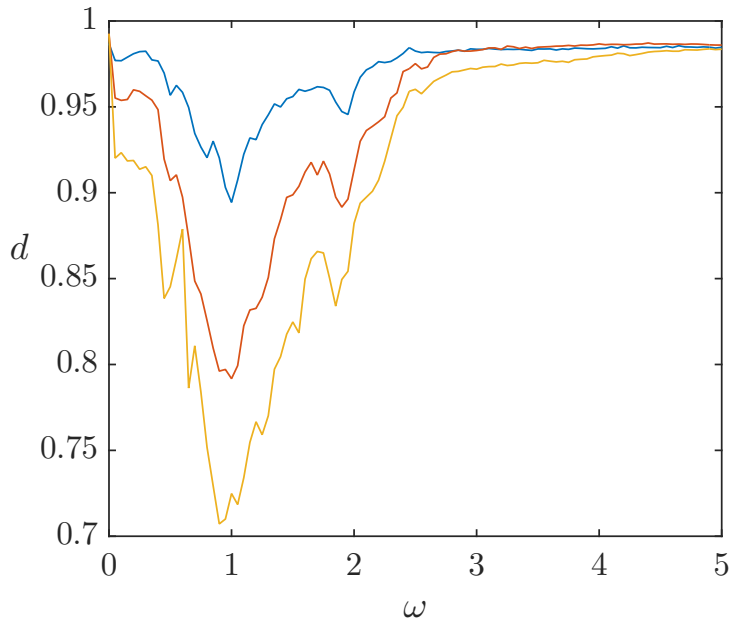


Figura 12: Dimensión fractal de la función de dispersión en función de la frecuencia del forzamiento periódico para el caso $E = 0.17$ y amplitudes $A = 0.01$ (azul), $A = 0.03$ (rojo) y $A = 0.05$ (amarillo). La variable característica de la región de dispersión es la coordenada “y”, utilizándose para generar las condiciones iniciales el método del disparo tangencial.

En la figura 12 se aprecia un comportamiento tipo resonancia según aumenta el valor de ω . Para valores próximos a $\omega = 1$ ésta desciende drásticamente y lo hace de nuevo, de forma menos notable, cuando $\omega \approx 2$. De aquí en adelante diremos que dichas frecuencias son frecuencias de resonancia y las denotaremos, respectivamente, $\omega_{r,1}$ y $\omega_{r,2}$. Superada la segunda frecuencia de resonancia la dimensión fractal regresa monótonamente a $d \approx 1$. De las tres curvas que acompañan a cada gráfica se desprende que la disminución se produce para el mismo valor de ω independientemente de la amplitud. Además, cuanto mayor es la amplitud mayor es el descenso.

Los resultados anteriores se han obtenido fijando las condiciones iniciales utilizando el método del disparo tangencial, pero el hecho de utilizar un método u otro no debería afectar de forma cualitativa a los resultados. Para aportar solidez a los resultados, computamos la dimensión fractal en función de la frecuencia utilizando como variable característica el ángulo de disparo. En este caso se han lanzado 20.000 condiciones iniciales $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ desde $(x_0, y_0) = (0.15, -0.25)$. El resultado se muestra en la figura 13, donde se confirma que el comportamiento es cualitativamente el mismo utilizando ambos métodos de disparo.

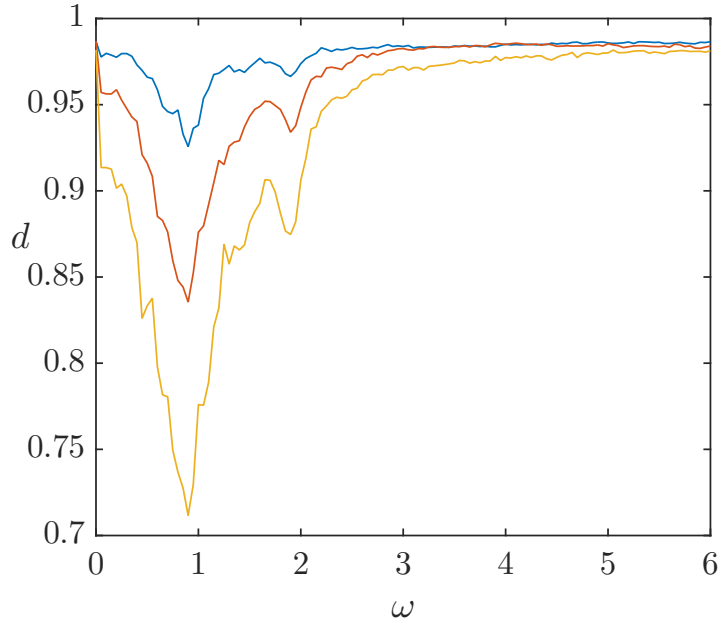


Figura 13: Dimensión fractal de la función de dispersión en función de la frecuencia del forzamiento periódico para el caso $E = 0.17$ y amplitudes $A = 0.01$ (azul), $A = 0.03$ (rojo) y $A = 0.05$ (amarillo). La variable característica de la región de dispersión que se ha variado es el ángulo de lanzamiento, θ .

Para generalizar este resultado hemos obtenido la dimensión fractal para 200×200 valores de $A \in [0, 0.05]$ y $\omega \in [0, 5]$ para una energía $E = 0.17$. Debido a la enorme carga computacional de esta simulación, en este caso se han tomado 5000 condiciones iniciales utilizando el método del disparo tangencial, de nuevo a lo largo del segmento definido por los puntos $(x, y) = (0, -0.5)$ y $(x, y) = (0, 0)$. Una buena forma de representar estos resultados es mediante un mapa de color en el plano (ω, A) , donde la intensidad del mismo hace referencia al valor de la dimensión fractal (ver figura 14). Puede observarse un descenso de la dimensión fractal cuando se consideran las frecuencias próximas a las de resonancia. Cuando la frecuencia se aleja de la resonancia el valor de amplitud resulta irrelevante y la dimensión fractal converge a aquella asociada al caso no perturbado.

Como ya se apreciaba en las figuras 12 y 13, un aumento de la amplitud, cuando la frecuencia es próxima a la resonancia, se traduce en un mayor descenso de la dimensión fractal. Para visualizar esto último desde otra perspectiva en la figura 15 se representa la dimensión fractal frente a la amplitud cuando $\omega = 1$.

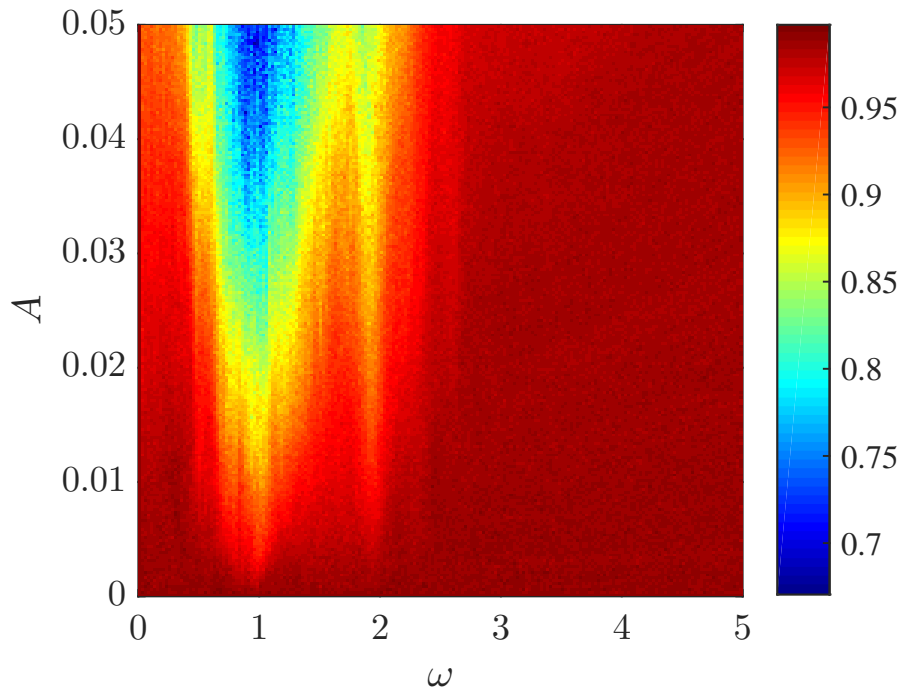


Figura 14: Mapa de color de la dimensión fractal de la función de dispersión para diferentes valores de la amplitud y la frecuencia del forzamiento cuando $E = 0.17$. El color de cada punto indica el valor de la dimensión fractal de acuerdo con el código de color que se muestra en la derecha de la figura.

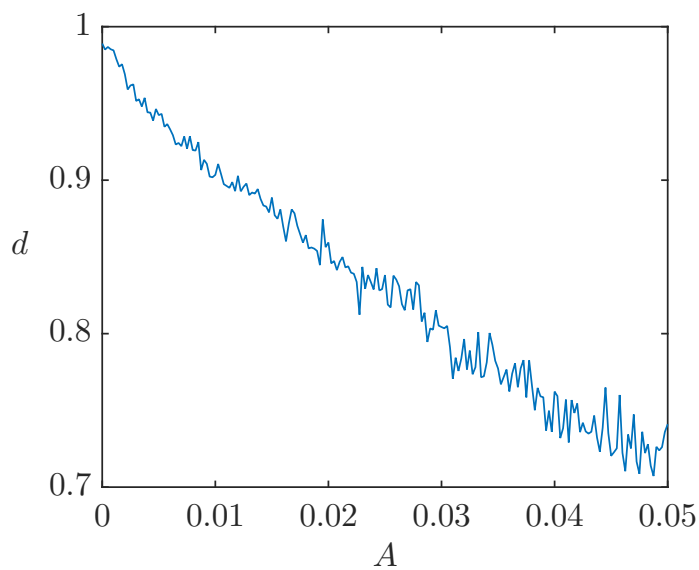


Figura 15: Dimensión fractal de la función de dispersión para diferentes valores de la amplitud del forzamiento, siendo la frecuencia $\omega = 1$ y la energía del sistema $E = 0.17$.

Los resultados de la dimensión fractal en función de la amplitud y frecuencia del forzamiento se han realizado para una energía concreta dentro del régimen no hiperbólico. Resulta interesante realizar el estudio para diferentes valores de energía dentro de dicho régimen. Obtener la dimensión fractal variando al mismo tiempo la amplitud, la frecuencia y la energía es inviable computacionalmente, por lo que en este caso fijamos $A = 0.05$ y variamos la energía y la frecuencia. Del mismo modo que hicimos en el caso de la amplitud, computamos la dimensión fractal de la función de dispersión para 200×200 combinaciones de valores de energía $E \in [0.17, 0.20]$ y de frecuencia $\omega \in [0, 5]$. El resultado se expone, de nuevo en forma de un mapa de color, en la figura 16. De esta representación se desprende que la evolución de la dimensión fractal con la frecuencia del forzamiento es cualitativamente la misma dentro del régimen no hiperbólico. Igualmente que ocurría en el caso de la figura 14 pueden apreciarse con claridad los mínimos de dimensión fractal asociados a las frecuencias de resonancia $\omega_{r,1} \approx 1$ y $\omega_{r,2} \approx 2$.

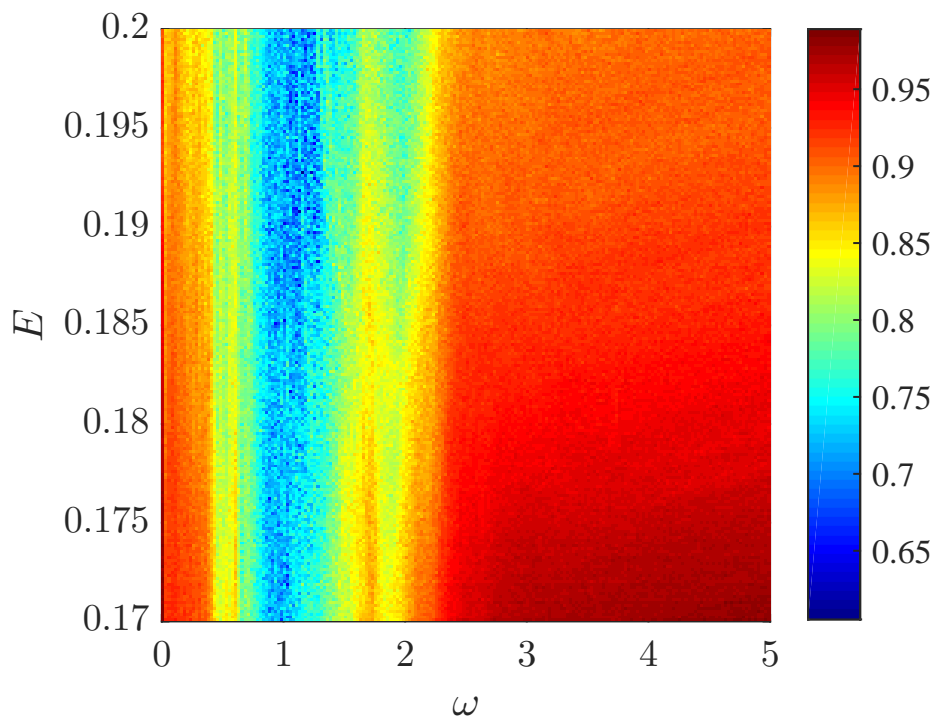


Figura 16: Mapa de color de la dimensión fractal de la función de dispersión para diferentes valores de la energía y la frecuencia del forzamiento cuando $A = 0.05$. El color de cada punto indica el valor de la dimensión fractal de acuerdo con el código de color que se muestra en la derecha de la figura.

3.3. Argumentos heurísticos para los efectos del forzamiento

A lo largo de esta sección hemos aportado evidencia numérica de la existencia de dos frecuencias de resonancia $\omega_{r,1} \approx 1$ y $\omega_{r,2} \approx 2$ en las cuales la dimensión fractal disminuye. En este apartado proponemos argumentos heurísticos que podrían justificar el comportamiento resonante para dichas frecuencias. Estos argumentos siguen la línea de aquellos expuestos por Blesa *et al.* [22], quienes obtuvieron las mismas frecuencias de resonancia a partir de simulaciones relativas a los tiempos de escape de las partículas en función de la frecuencia, entre otras.

El sistema de Hénon-Heiles presenta ocho modos normales no lineales (NNM's) Π_i cuando $E \leq E_e$ y únicamente cinco cuando $E > E_e$ (ver figura 17). Se trata de una familia de soluciones periódicas relacionadas con las simetrías del sistema. El sistema de Hénon-Heiles presenta un grupo completo de simetría $D_3 \times \mathcal{T}$, donde D_3 es un grupo diédrico y \mathcal{T} es una simetría de inversión temporal [16, 17]. En nuestro sistema de estudio el período de todos los modos normales no lineales es $T = 2\pi$ cuando $E = 0$ [51] y aumenta (casos Π_{4-6}) o disminuye (casos $\Pi_{7,8}$) con la energía. De cualquier modo los períodos son siempre próximos al valor original $T = 2\pi$ [22]. Podemos conjeturar que la frecuencia que favorecerá el escape en mayor medida será justamente aquella para la cual el forzamiento entra en resonancia con los modos normales Π_{4-8} , es decir, para $\omega \approx 1$, que es justamente el resultado obtenido. La segunda frecuencia de resonancia se justifica de un modo similar, siendo esta el primer múltiplo entero de la frecuencia de los modos normales.

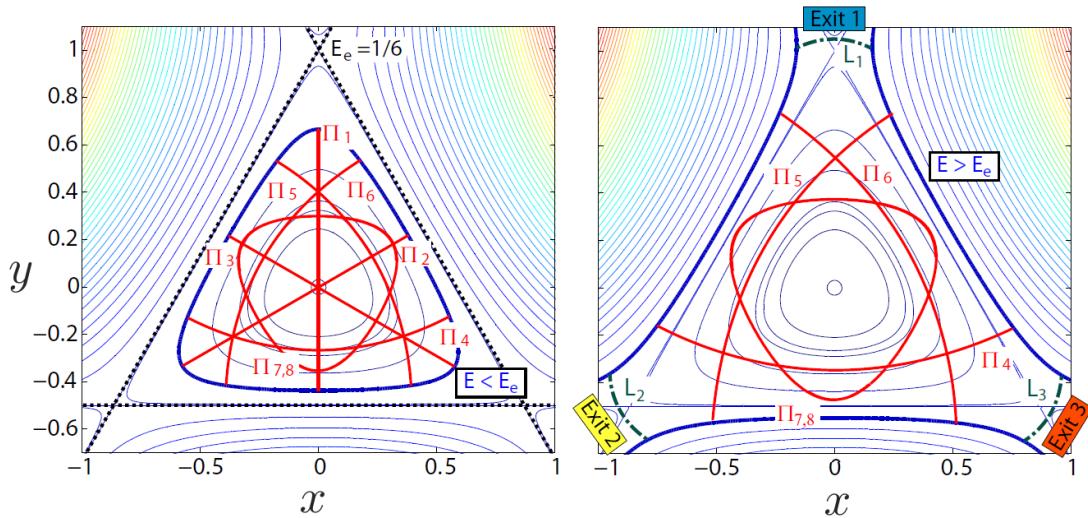


Figura 17: Modos normales no lineales del sistema de Hénon-Heiles Π_i para energías $E < E_e$ (izquierda) y $E > E_e$ (derecha). Se representan además las curvas isotopenciales y, aproximadamente, las tres órbitas de Lyapunov L_i . Figura adaptada de [22].

4. Topología e impredecibilidad de las cuencas

En la segunda sección de este trabajo representábamos algunas cuencas de escape del sistema de Hénon-Heiles para diferentes valores de la amplitud y del forzamiento. En ellas se hacían patentes cambios cualitativos en su topología. En esta sección vamos a cuantificar dichos efectos para frecuencias próximas a la resonancia mediante el estudio de diversas magnitudes características de las cuencas de escape. En el primer apartado (4.1) se discute la desaparición de las superficies KAM y la ley de decaimiento en la fracción de partículas que permanecen en la región de dispersión. En el segundo apartado (4.2) se relaciona el forzamiento con una disminución en la fractalidad y tamaño de las fronteras de las cuencas de escape. Finalmente en el último apartado se cuantifica la incertidumbre de las cuencas utilizando como herramienta la entropía de las cuencas [29].

4.1. Leyes de decaimiento y desaparición de las superficies KAM

Para todo valor de energía en el régimen no hiperbólico existen condiciones iniciales en las cuencas de escape que generan trayectorias cuasiperiódicas que permanecen en la región de dispersión para siempre. Estas órbitas están asociadas a superficies KAM y como consecuencia de su existencia la ley de decaimiento en la fracción de partículas que permanecen en la región de dispersión es algebraica.

Cuando la dispersión caótica es hiperbólica existe un tiempo finito en el que todas las partículas han abandonado la región de dispersión. En estos casos la ley de decaimiento es exponencial.

$$R(t) \sim e^{-\gamma t} \quad (11)$$

donde $R(t)$ es la fracción de partículas que no han escapado en un tiempo t y $\gamma \geq 0$ es el coeficiente de decaimiento.

Se ha demostrado que la incorporación de disipación débil destruye las superficies KAM en sistemas discretos [52] y continuos [24]. Lo mismo ocurre al incorporar ruido [26]. En el caso del forzamiento, fijada una energía y una amplitud del mismo, existen frecuencias para las cuales las superficies KAM se desvanecen [22]. Sin embargo este cambio en la dinámica de escape no se producirá para todas las frecuencias de forzamiento ni para cualquier valor de amplitud.

Fijada una amplitud del forzamiento $A = 0.05$ nos interesa buscar aquellas frecuencias para las cuales no existen trayectorias retenidas en la región de dispersión. Para ello hemos seleccionado 31 energías en el rango $E \in [0.17, 0.20]$ y hemos computado para cada una de ellas 101 cuencas de escape para valores de frecuencia $\omega \in [0, 10]$. A partir de cada cuenca hemos obtenido la fracción de partículas, f_r , que permanecen tras un tiempo $t = 3000$. El resultado demuestra que, con precisión 0.1, para toda energía existen dos frecuencias $\omega = 0.9$ y $\omega = 1$ para las cuales no existen partículas retenidas en la región de dispersión. Estas frecuencias de resonancia están en buena sintonía con la primera frecuencia de resonancia obtenida en la sección anterior.

En la figura 18 se representan varias cuencas de escape para energías $E = 0.17$, $E = 0.18$ y $E = 0.19$ en el caso conservativo y forzado con frecuencias $\omega = 0.9$ y $\omega = 1$, mostrando la desaparición de las superficies KAM.

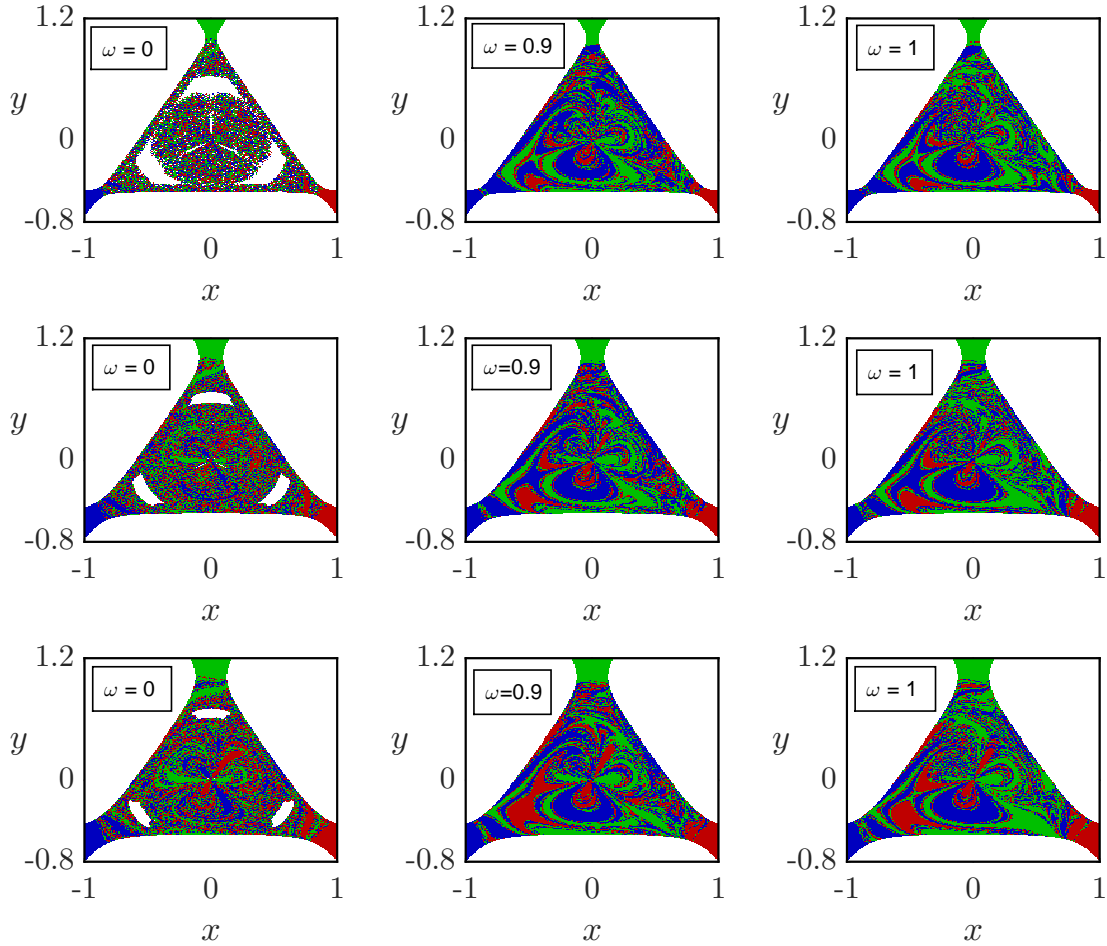


Figura 18: Cuencas de escape (x,y) para energías $E = 0.17$ (fila 1), $E = 0.18$ (fila 2) y $E = 0.19$ (fila 3) para los diferentes valores de la frecuencia del forzamiento $\omega = 0$ (conservativo), $\omega = 0.9$ y $\omega = 1$. La amplitud del forzamiento es $A = 0.05$ en todas las simulaciones.

Para estos valores de frecuencia ($\omega = 0.9$ y $\omega = 1$) la ley de decaimiento es exponencial. Si tomamos logaritmos naturales en la ecuación (11) obtenemos

$$\ln R(t) = -\gamma t + k \quad (12)$$

siendo k una constante.

De este modo una representación gráfica $\ln R$ frente al tiempo debería arrojar una recta a partir de cuya pendiente podemos obtener el coeficiente de decaimiento. Para obtener la fracción de partículas que permanecen en la región de dispersión tras un cierto tiempo utilizamos una malla de 1000×1000 condiciones iniciales en el espacio físico (x, y) . Para cada trayectoria computamos el tiempo de escape y finalmente determinamos la fracción que permanece en pasos $\Delta t = 20$. En la figura 19 se representa $\ln R$ frente al tiempo, mostrándose una ley de decaimiento exponencial para $\omega = 0.9$ en los casos $E = 0.17$ y $E = 0.19$. Se adjunta además una recta asociada a un ajuste lineal por mínimos cuadrados.

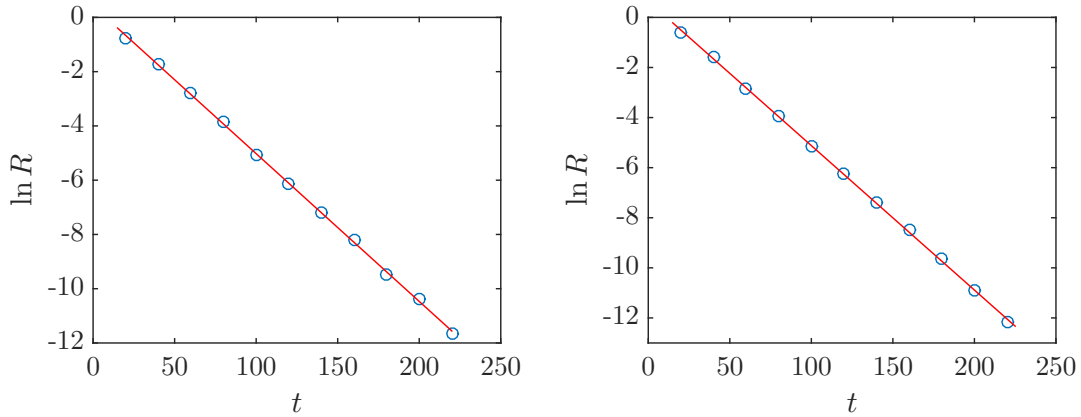


Figura 19: Logaritmo natural de la fracción de partículas que permanecen en la región de dispersión en función del tiempo para los casos $E = 0.19$ (izquierda) y $E = 0.17$ (derecha). En ambos casos los parámetros del forzamiento son $\omega = 0.9$ y $A = 0.05$.

En la figura 19 puede notarse que la pendiente de las rectas es aproximadamente la misma pese a la diferencia de energía, lo que indica que el exponente de la ley de decaimiento no ha cambiado. Para comprobar si se trata de una afortunada casualidad computamos el exponente γ para 31 energías en el rango $E \in [0.17, 0.20]$ tomando $\omega = 0.9$. El resultado confirma que el exponente es aproximadamente el mismo independientemente de la energía, obteniéndose un valor $\gamma = (5.648 \pm 0.097) \times 10^{-2}$. El error se ha considerado como tres veces el error cuadrático de la media, $\varepsilon_\gamma = 3\sigma(\gamma)/\sqrt{n}$, siendo $n = 31$ el número

de muestras y σ la desviación estándar. Si consideramos ahora $\omega = 1.0$ y siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene $\gamma = (3.318 \pm 0.033) \times 10^{-2}$.

En las simulaciones anteriores hemos tomado en todo caso $A = 0.05$ y hemos comprobado cómo en las proximidades de la resonancia el forzamiento extinguió las superficies KAM. Una pregunta natural en este punto es: ¿cuál es la amplitud del forzamiento mínima que permite que todas las partículas escapen cuando la frecuencia es próxima a la resonancia? Denominamos a esta amplitud como amplitud crítica y la denotamos A_c . Hemos obtenido su valor para 14 energías en el rango $E \in [0.17, 0.20]$ cuando $\omega = 0.9$. El valor obtenido es en todo caso $A_c = 0.015$ y, ya que la máxima precisión que hemos utilizado en el valor de amplitud es 0.001, expresamos el valor con su error como $A_c = 0.015 \pm 0.001$.

Como resultado preliminar, que podría ser un primer paso para una futura investigación al respecto, hemos comprobado si el forzamiento periódico asociado a la frecuencia de resonancia es capaz de evitar el escape todavía en presencia de disipación. En este caso las ecuaciones diferenciales del modelo de Hénon-Heiles son:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x - 2xy - \delta_x \dot{x} + A \sin(\omega t) \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2 - \delta_y \dot{y} + A \sin(\omega t)\end{aligned}\tag{13}$$

donde δ_x y δ_y son parámetros de disipación que habitualmente se consideran iguales $\delta_x = \delta_y = \mu$.

En presencia de disipación existe un atractor situado en el centro de la región de dispersión cuya influencia en la topología de las cuencas de escape se hace mayor según aumenta la disipación [24]. Para valores suficientemente grandes de disipación todas las condiciones iniciales generan trayectorias que terminan en el atractor. Por ejemplo para una energía $E = 0.17$ y un valor $\mu = 0.005$ todas las trayectorias quedan retenidas en la región de dispersión en ausencia de forzamiento. Al incorporar un forzamiento de frecuencia $\omega = 0.9$ comprobamos que una fracción de partículas logran escapar. Esta fracción aumenta con la amplitud hasta alcanzar el valor crítico $A_c = 0.025$ para el cual todas las trayectorias escapan. De este modo comprobamos que en presencia de disipación aumenta el valor de A_c pero el forzamiento es todavía capaz de evitar que las partículas queden retenidas en la región de dispersión.

4.2. Fractalidad y tamaño de las fronteras

Uno de los efectos del forzamiento con frecuencia de resonancia en la topología de las cuencas de escape, el cual ya se hacía notar en la figura 18, es la disminución del tamaño de las fronteras. Fijando una amplitud $A = 0.05$ hemos obtenido la fracción de las cuencas de escape ocupada por las fronteras en función de la frecuencia del forzamiento para el caso $E = 0.19$. El resultado se muestra en la figura 20.

Para $\omega \approx 2.0$ el tamaño de las fronteras, tras disminuir notablemente, alcanza un valor similar al original. A partir de ahí, con pequeñas fluctuaciones asociadas a las propias fluctuaciones en el tamaño de las superficies KAM, el tamaño de las fronteras tiende al valor del caso no forzado.

Para amplitudes menores (y mayores), el comportamiento es cualitativamente el mismo. Al aumentar la amplitud se reducen todavía más las fronteras mientras que al disminuirla ocurre lo contrario. A modo de ejemplo en la figura 21 se representan las fronteras en el plano (x, y) para el caso de energía $E = 0.19$ con forzamientos de diversa amplitud. En todos los casos la frecuencia es $\omega = 0.9$.

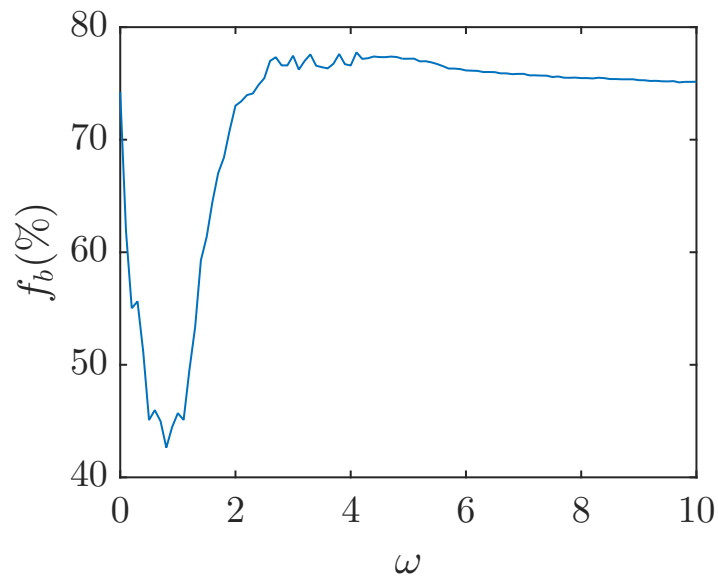


Figura 20: Fracción de condiciones iniciales en las cuencas de escape (x, y) contenidas en la frontera en función de la frecuencia del forzamiento periódico. La amplitud del forzamiento es $A = 0.05$ y la energía $E = 0.19$.

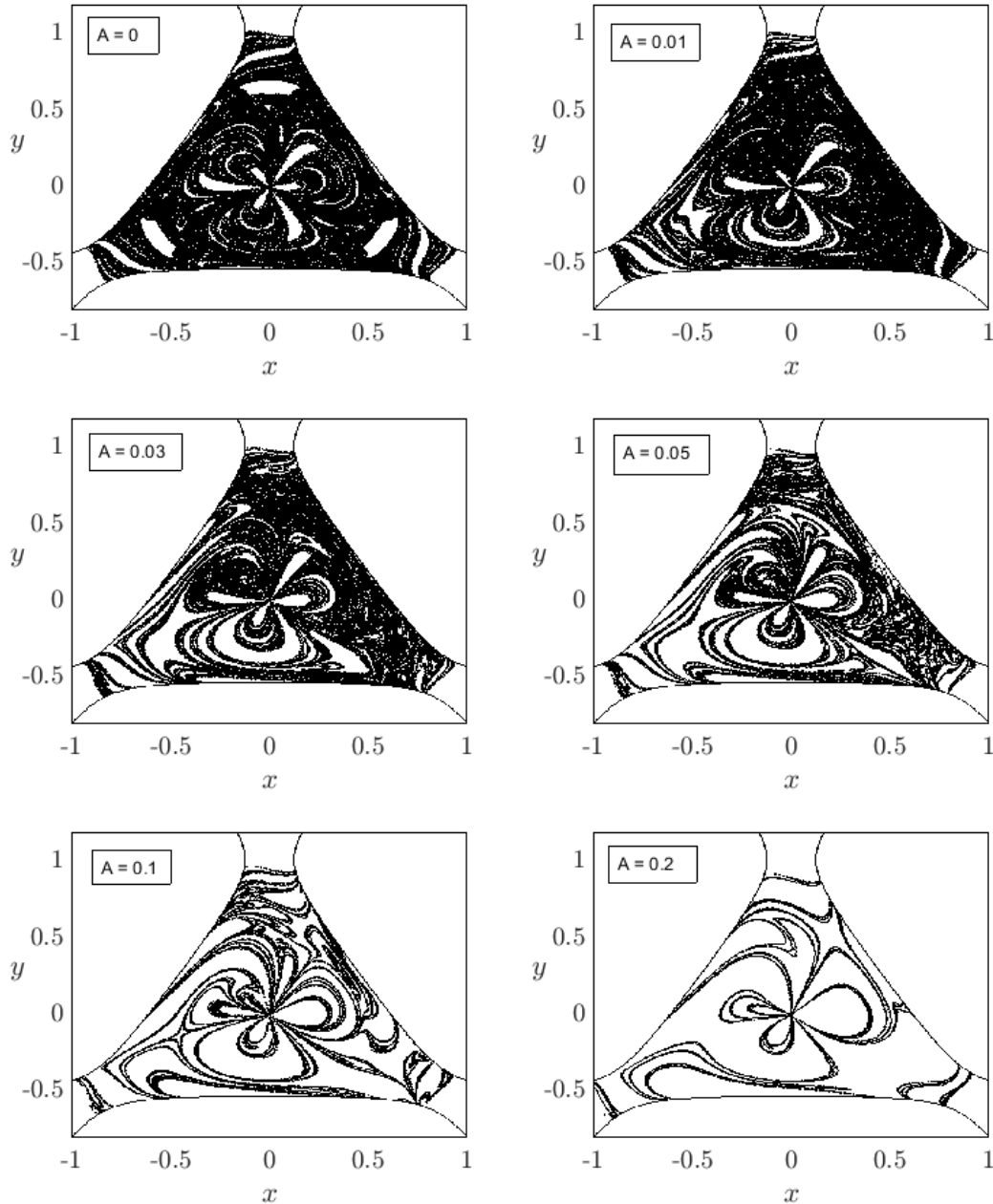


Figura 21: Fronteras de las cuencas de escape (x,y) para el caso no forzado y forzado con frecuencia $\omega = 0.9$ y distintas amplitudes. Se pintan en negro todos aquellos puntos contenidos en la frontera, sin hacer otra distinción de color en función de la salida asociada a la condición inicial.

Las fronteras de las cuencas de escape del sistema de Hénon-Heiles son fractales para toda energía y parámetros del forzamiento. Acabamos de ver que uno de los posibles efectos de la perturbación periódica es una reducción del tamaño de las fronteras. Para comprobar si ocurre lo mismo con su fractalidad hemos calculado la dimensión fractal utilizando la dimensión de capacidad (*capacity dimension* o *box-counting dimension*) [53].

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} \quad (14)$$

donde $N(\delta)$ es el número mínimo de cajas (en nuestro ejemplo bidimensional) de lado δ no solapadas necesarias para cubrir completamente la frontera. En el fondo estamos diciendo que el número de cajas necesarias escala con δ siguiendo la ley de potencias [50].

$$N(\delta) \sim \delta^{-d} \quad (15)$$

Tomando logaritmos en la ecuación (14) podemos obtener la dimensión fractal mediante la pendiente de la recta que se debería obtener en una representación gráfica de $\ln N(\delta)$ frente a $\ln \delta$. El algoritmo que hemos implementado al respecto es el siguiente.

Algoritmo 4.1.

1. Partimos de una cuenca almacenada en una matriz de $P \times P$ elementos.
2. Establecemos el valor mínimo y máximo que consideraremos para la dimensión lineal de cada caja, δ .
3. Barremos la cuenca con P^2/δ^2 cajas y para cada una de ellas determinamos si se encuentra en la frontera en base a si presenta al menos dos elementos distintos. Si nos encontramos en la frontera acumulamos en un contador B .
4. Guardamos $\ln B$ y $\ln \delta$.
5. Fijamos $B = 0$, modificamos δ en una cierta cantidad $\Delta\delta$ y repetimos los pasos 3 \rightarrow 4.
6. Repetimos los pasos 3 \rightarrow 5 hasta alcanzar el valor máximo fijado para δ .
8. Representamos gráficamente $\ln B$ frente a $\ln \delta$ y realizando un ajuste por mínimos cuadrados obtenemos la pendiente.

En nuestro caso hemos utilizado cuencas de 1000×1000 puntos y hemos variado δ desde 2 hasta 16 en pasos de 1. Tras varias pruebas esta elección resultó ser la que maximiza el coeficiente de correlación lineal de las rectas. Como ejemplo hemos tomado una energía $E = 0.19$ y una amplitud del forzamiento $A = 0.05$ y hemos representado $\ln B$ frente a $\ln \delta$ para valores de la frecuencia del forzamiento $\omega = 0$ y $\omega = 0.9$. El resultado se muestra en la figura 22 junto con una recta asociada a un ajuste lineal. La pendiente de

la recta indica una dimensión fractal $d = 1.87$ para el caso no forzado y $d = 1.64$ cuando $\omega = 0.9$.

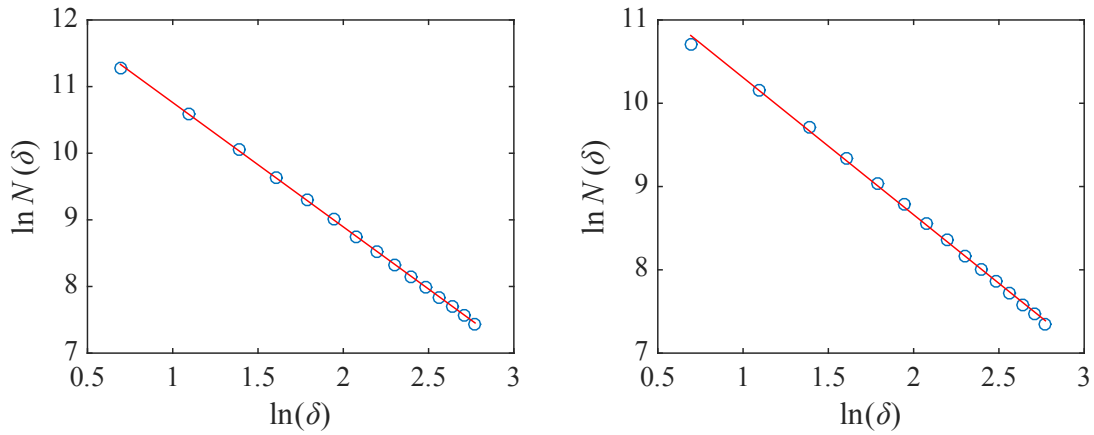


Figura 22: $N(\delta)$ frente a δ en una representación $\ln - \ln$ para el caso no forzado (izquierda) y forzado con una amplitud $A = 0.05$ siendo la frecuencia $\omega = 0.9$ (derecha). En ambos casos la energía es $E = 0.19$. Cada gráfica viene acompañada de una recta obtenida mediante un ajuste lineal por mínimos cuadrados.

Utilizando el algoritmo 4.1. para diversos valores de frecuencia del forzamiento podemos visualizar el efecto de la misma en la dimensión fractal. Concretamente hemos tomado 101 valores de $\omega \in [0, 10]$. El resultado arroja de nuevo una evolución tipo resonancia tal y como se muestra en la figura 23.

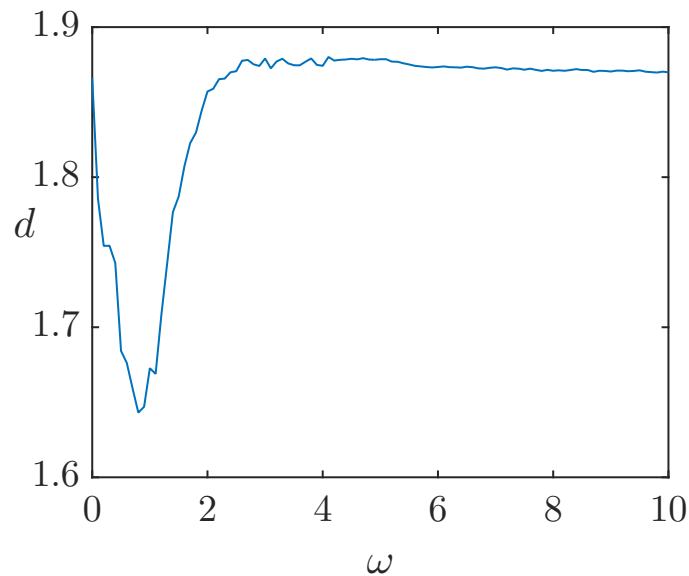


Figura 23: Dimensión fractal de las fronteras de las cuencas de escape frente a la frecuencia del forzamiento. La amplitud del forzamiento es $A = 0.05$ y la energía $E = 0.19$.

4.3. Impredecibilidad de las cuencas

En ocasiones la impredecibilidad en dinámica no lineal se define como la dificultad para predecir la evolución de las órbitas [54, 55, 56]. Nosotros, en el contexto de los sistemas Hamiltonianos abiertos, preferimos considerar la impredecibilidad como la dificultad para determinar el estado final de un sistema a partir de unas ciertas condiciones iniciales. Con ese sentido, la topología de las cuencas de escape en sistemas Hamiltonianos abiertos o de las cuencas de atracción en sistemas disipativos está estrechamente relacionada con la impredecibilidad del sistema. En la figura 24 se representan dos cuencas de escape del sistema de Hénon-Heiles con y sin forzamiento. Si tuviéramos que seleccionar uno de los dos sistemas para realizar un experimento en el que a priori queremos conocer la salida que escogerán las trayectorias, ¿por cuál nos decantaríamos? Sin duda por el de la derecha. Un simple vistazo a las cuencas de escape nos aporta una visión intuitiva acerca de la impredecibilidad del sistema para tal conjunto de parámetros.

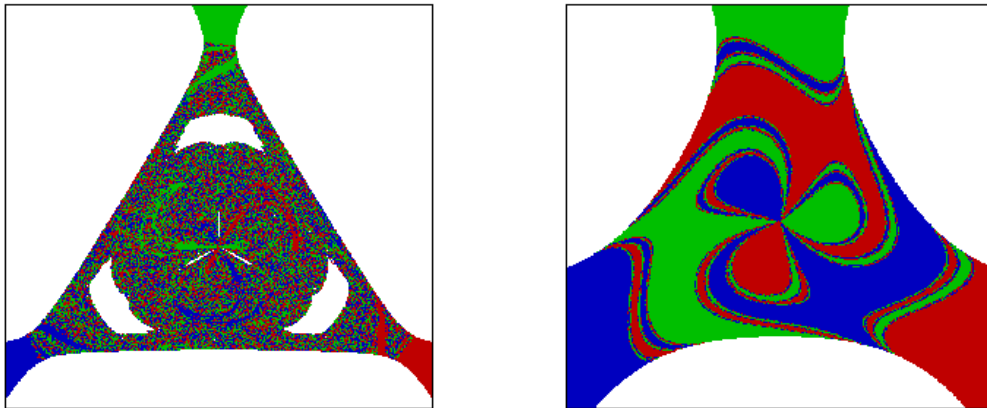


Figura 24: Cuencas de escape del sistema de Hénon-Heiles exhibiendo diferente impredecibilidad asociada a su topología.

Hasta hace pocos años el concepto de impredecibilidad en las cuencas de atracción/escape era un aspecto que se discutía de forma cualitativa en base a las observaciones directas o a la dinámica subyacente. Concretamente muchos autores han afirmado que los sistemas que exhiben cuencas Wada son más impredecibles que aquellos que presentan fronteras fractales [15, 39, 43, 57, 58]. En la introducción de este trabajo hemos dicho simplemente que la propiedad de Wada “puede implicar una alta impredecibilidad”, ya que la afirmación es estrictamente cierta en el caso de que las fronteras tengan un tamaño similar. Podemos pensar en una cuenca fractal que no presenta la propiedad de Wada

pero donde las fronteras ocupan toda la región de interés. En cambio podemos pensar en cuencas Wada donde la frontera ocupa únicamente una parte muy pequeña de las cuencas. En ese caso, ¿es todavía más impredecible? Ejemplos en los que sucede lo anterior se representan en la figura 25. En la cuenca que se muestra en la izquierda de la figura en lugar de considerar tres destinos posibles hemos tomado únicamente dos, escapar a $y \rightarrow \infty$ o a $y \rightarrow -\infty$, de tal modo que las salidas 2 y 3 se unifican.

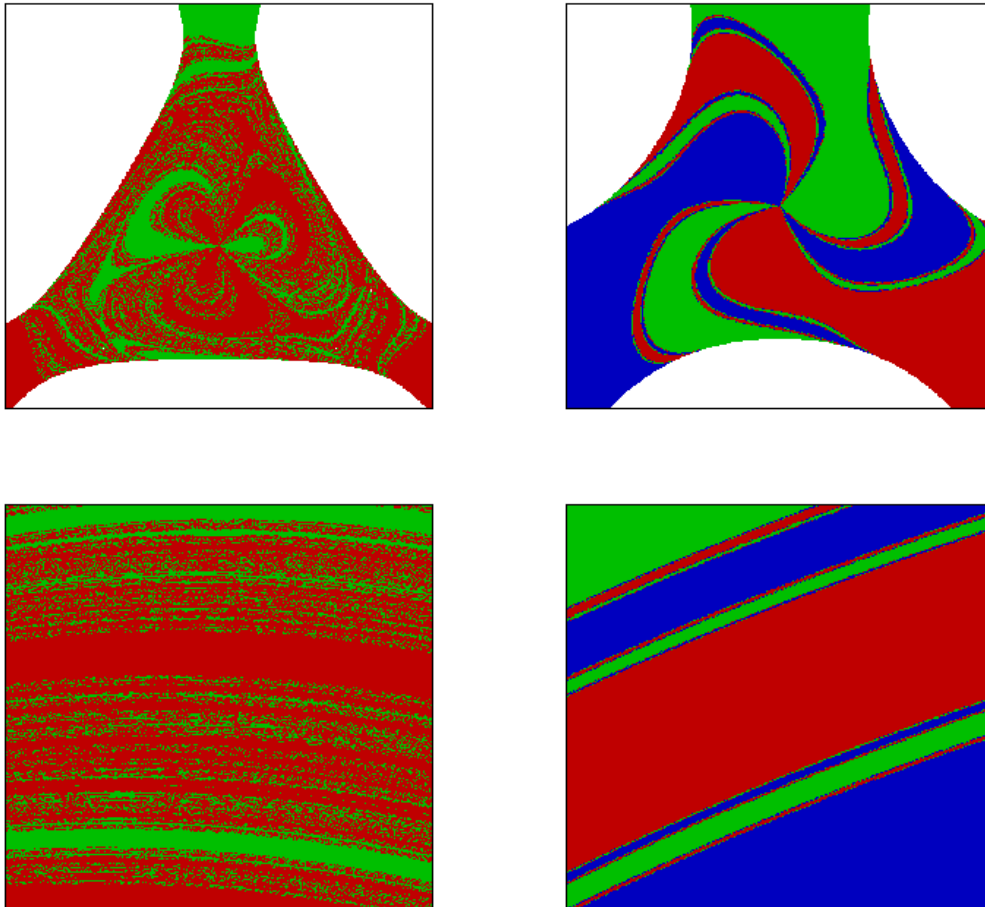


Figura 25: (Arriba) Cuencas de escape del sistema de Hénon-Heiles exhibiendo diferente impredecibilidad asociada a su topología. (Abajo) Magnificaciones de las figuras superiores mostrando fronteras fractales (izquierda) y propiedad de Wada (derecha).

Una herramienta reciente, desarrollada para cuantificar la impredecibilidad de las cuencas, es la entropía de las cuencas. Para construir las cuencas de escape hacemos uso de una aplicación $C : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ que asocia un número natural a cada coordenada en la región Ω del espacio de las fases. Computacionalmente esto se traduce en una matriz M de $P \times P$ puntos que pueden tomar un valor en el rango $[1, N_d]$, siendo N_d el número de destinos posibles del sistema dinámico. Como sabemos cada número tiene asociado un

color. En nuestro caso $N_d = 4$ pues consideramos que las partículas retenidas influyen en la impredecibilidad de las cuencas. Si seleccionamos en M una caja i de dimensión $\varepsilon \times \varepsilon$ podemos obtener su entropía.

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,j} \ln \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right) \quad (16)$$

donde $m_i \in [1, N_d]$ es el número de colores distintos en la caja i y $p_{i,j}$ es la probabilidad de encontrar el color j en la caja i . Computacionalmente la probabilidad se traduce en la fracción de puntos con un cierto color dentro de la caja, $p_{i,j} = n_j/\varepsilon^2$, donde n_j es el número de puntos del color j . Podemos pues expresar (16).

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{n_j}{\varepsilon^2} \ln \left(\frac{\varepsilon^2}{n_j} \right) \quad (17)$$

Si se utiliza un total de N_t cajas la entropía total de todas ellas será.

$$S = \sum_{i=1}^{N_t} S_i = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,j} \ln \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right) \quad (18)$$

o, equivalentemente

$$S = \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{n_j}{\varepsilon^2} \ln \left(\frac{\varepsilon^2}{n_j} \right) \quad (19)$$

Finalmente definimos la entropía de la cuenca como la entropía relativa al número de cajas

$$S_b = \frac{S}{N_t} \quad (20)$$

En el artículo original [29] se proponía un total de $N_t = P^2/\varepsilon^2$ cajas no solapadas. Nosotros, con la venia del primer autor del artículo, consideramos que será estadísticamente más significativo considerar cajas solapadas, de tal modo que existe un total de $N_t = (P - \varepsilon + 1)^2$ cajas posibles. Aquí utilizaremos matrices de 1000×1000 puntos y un tamaño $\varepsilon = 5$, de tal modo que este método permite utilizar 992.016 cajas en lugar de 40.000. De cualquier modo la cifra es desproporcionada por requerir de largos tiempos de computación, de modo que seleccionamos un total de 100.000 cajas utilizando el método de Monte Carlo. A continuación exponemos de forma esquemática el algoritmo implementado.

Algoritmo 4.2.

1. Partimos de una cuenca almacenada en una matriz $P \times P$.
2. Fijamos la dimensión lineal de cada caja, ε .
3. Determinamos el número de cajas posibles en cada dirección ($N_b = P - \varepsilon + 1$).
4. Generamos dos números aleatorios enteros en el rango $[1, N_b]$. Estos números definen la posición en la cuenca del extremo superior izquierdo de una caja de dimensión $\varepsilon \times \varepsilon$.
5. Descartamos los puntos fuera de los muros del potencial y determinamos el número de elementos distintos que hay en la caja. Si hay al menos dos elementos distintos calculamos la contribución de la caja a la entropía de la cuenca utilizando la expresión (17). Acumulamos el resultado en S .
6. Si la caja está fuera de los muros del potencial sumamos 1 a un contador V .
8. Repetimos los pasos 4 \rightarrow 6 un total de N_t veces.
9. Obtenemos la entropía de la cuenca.

$$S_b = \frac{S}{N_t - V}$$

El valor de la entropía de la cuenca está acotado entre 0 y $\ln(N_d)$. El primer valor se produciría en una cuenca con un único atractor mientras que el segundo estaría asociado a una cuenca generada aleatoriamente. El valor de S_b crece con ε , por lo que su valor debe seleccionarse con cierto cuidado. Si tomamos un valor $\varepsilon = P$ la entropía de la cuenca únicamente cuantificará cómo de equiprobables son los colores. En el extremo opuesto, si tomamos $\varepsilon = 1$ obtendremos indistintamente $S_b = 0$. La entropía de la cuenca supone una herramienta muy útil para cuantificar la impredecibilidad de una cuenca y que además nos sirve para explorar la evolución de la impredecibilidad según se varía un parámetro.

Hemos computado la entropía de la cuenca para los casos que representábamos en la figura 24. Encontramos $S_b = 0.86$ y $S_b = 0.23$ para las cuencas de la izquierda y derecha, respectivamente. La entropía de la cuenca ha dado cuenta de aquellas características topológicas que nuestra intuición nos decía que llevaban a una mayor impredecibilidad. Concretamente podemos afirmar que en la cuenca de la izquierda las fronteras ocupan una mayor fracción del total. Además esta presenta superficies KAM, que aportan un cuarto destino posible.

Un tercer factor que influye en la entropía de la cuenca es la fractalidad de las fronteras, que es difícil de cuantificar a simple vista. También hemos computado S_b en los casos de la figura 25 (arriba) obteniendo $S_b = 0.42$ (izquierda) y $S_b = 0.14$ (derecha), confirmando así con un contraejemplo que la presencia de la propiedad de Wada no implica necesariamente una mayor impredecibilidad.

Acabamos de mencionar tres factores que influyen en la impredecibilidad de las cuencas de escape, a saber la dimensión fractal y tamaño de las fronteras y la presencia o ausencia de superficies KAM. En esta sección hemos estudiado de forma individual cada uno de estos factores, por lo que esperamos que la entropía de las cuencas pueda dar cuenta de todos ellos y permitir un retrato fidedigno de la evolución de la impredecibilidad en función de la frecuencia del forzamiento. Para ello hemos tomado $E = 0.19$ y realizado 100 cuencas de escape de resolución 1000×1000 en el rango $x \in [-0.8, 1.2]$, $y \in [-1, 1]$ para diferentes valores de la frecuencia $\omega \in [0, 10]$. La amplitud del forzamiento considerada es $A = 0.05$. El resultado se muestra en la figura 26.

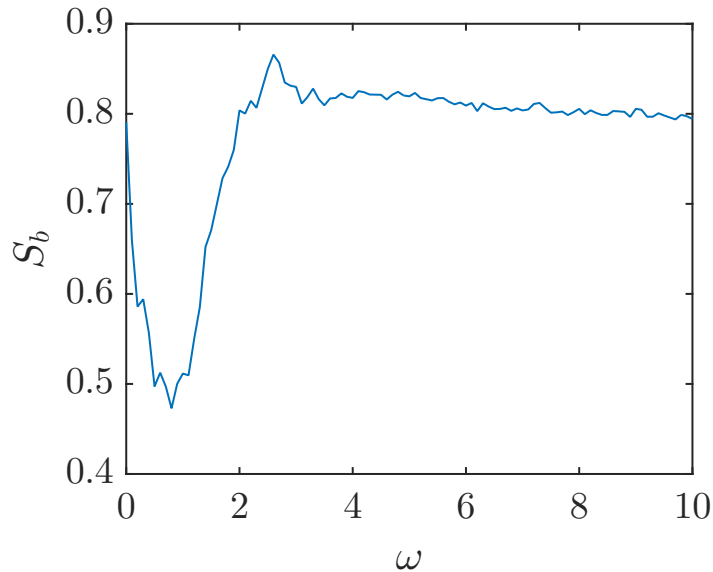


Figura 26: Entropía de las cuencas de escape del sistema de Hénon-Heiles en función de la frecuencia del forzamiento periódico para el caso $E = 0.19$, tomando $A = 0.05$.

En la figura 26, observamos buena sintonía con los resultados obtenidos para la evolución de la dimensión fractal y el tamaño de las fronteras. Existe así un valor de frecuencia para el cual la impredecibilidad de las cuencas disminuye notablemente. Además la entropía de la cuenca nos indica un máximo de impredecibilidad para el valor $\omega = 2.5$, que había pasado desapercibido en las simulaciones anteriores. Este máximo se corresponde

con un aumento transitorio en el tamaño ocupado por las partículas que nunca escapan. En la figura 27 representamos para este valor de frecuencia la fracción de partículas retenidas f_r y los tiempos medios de escape de la cuenca, mostrando el origen de este máximo de impredecibilidad.

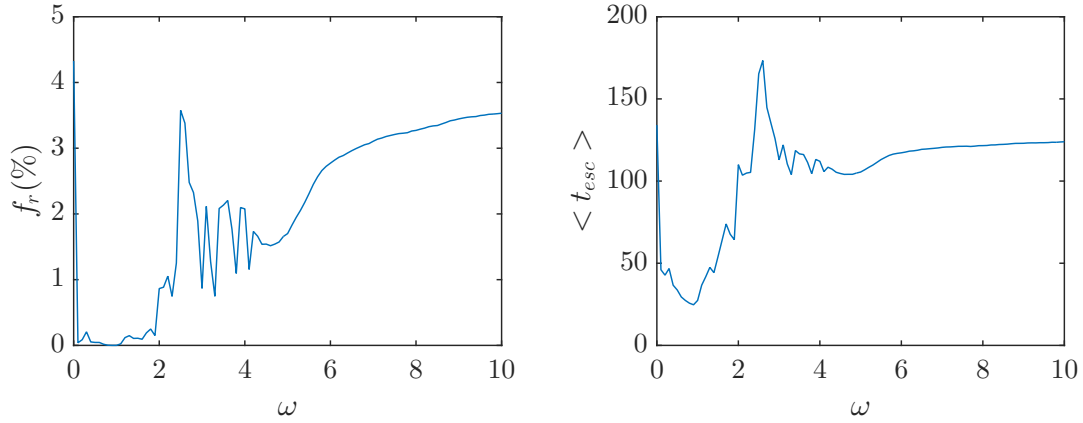


Figura 27: Fracción de condiciones iniciales que nunca escapan (izquierda) y tiempos medios de escape (derecha) en función de la frecuencia del forzamiento. En ambos casos los parámetros son $E = 0.19$ y $A = 0.05$.

La mejor forma de confirmar que la aparición del máximo se debe a las superficies KAM es calcular la entropía de la cuenca sin considerar que las partículas retenidas constituyen un destino del sistema. Representamos el resultado en la figura 28. La desaparición del máximo evidencia que éste se debe a la contribución de las superficies KAM a la impredecibilidad del sistema.

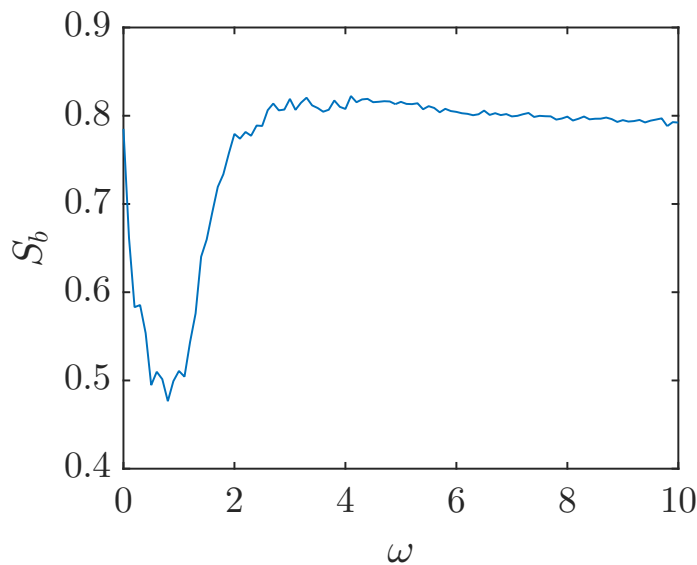


Figura 28: Misma representación que en la figura 26 sin considerar las islas KAM en el cálculo de la entropía de la cuenca.

5. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo era explorar la influencia de un forzamiento periódico en la fractalidad de la función de dispersión y en la topología de las cuencas de escape en el sistema de Hénon-Heiles. A la vista de todas las simulaciones realizadas la evidencia numérica sugiere las siguientes conclusiones:

1. Fijada una energía dentro del régimen no hiperbólico y una amplitud de forzamiento $A \neq 0$, la dimensión fractal de la función de dispersión presenta una evolución tipo resonancia según aumenta el valor de la frecuencia del forzamiento. Concretamente en las proximidades de la frecuencia $\omega_{r,1} \approx 1$ la dimensión fractal disminuye hasta alcanzar su mínimo absoluto y disminuye de nuevo, aunque en menor medida, cerca de la frecuencia $\omega_{r,2} \approx 2$. Para valores altos de la frecuencia del forzamiento el resultado forzado coincide con el conservativo, independientemente de A , cuyo papel es únicamente determinar la magnitud del descenso de la dimensión fractal en las frecuencias de resonancia. El valor concreto de las frecuencias de resonancia podría estar relacionado con los modos normales no lineales del sistema.

2. Un forzamiento próximo a la primera frecuencia de resonancia genera grandes cambios en la dinámica de escape y en la topología de las cuencas de escape. Sus principales efectos son la desaparición de las superficies KAM y la disminución del tamaño y fractalidad de las fronteras.

3. La entropía de las cuencas da cuenta del tamaño de las superficies KAM y de la fractalidad y tamaño de las fronteras a la hora de cuantificar la impredecibilidad de las cuencas de escape. Por ello los efectos del forzamiento con frecuencia cercana a $\omega_{r,1}$ generan un descenso de la impredecibilidad de las cuencas de escape.

Para futuras investigaciones en la misma línea de este trabajo proponemos como dignos de estudio los siguientes aspectos:

1. Determinar la presencia/ausencia de cuencas Wada en función de la frecuencia y la amplitud del forzamiento.

2. Realizar mapas de color para los parámetros característicos de la topología de las cuencas (f_r , d y S_b) en los planos (ω, A) y (ω, E) .

3. Tratar de generalizar algunas de las conclusiones de este trabajo en el caso de que exista disipación además de forzamiento.

Agradecimientos

En primer lugar al Prof. Jesús M. Seoane Sepúlveda de la URJC y al Prof. José Enrique Alvarellos Bermejo de la UNED, a quienes debo, por su apoyo y magnífica labor docente, gran parte de las ideas que han dado lugar a este trabajo.

Al Prof. Miguel Ángel Fernández Sanjuán de la URJC, por haberme inculcado la pasión por la Dinámica No Lineal y la Teoría del Caos y por haberme dado la oportunidad de adentrarme en la investigación científica con él y su equipo.

Al Prof. Álvaro Daza Esteban de la URJC, por las interesantes charlas que mantuvimos sobre entropía de las cuencas e impredecibilidad y por su inestimable ayuda en lo que respecta a la programación en paralelo.

Finalmente agradezco a la Comisión de Coordinación del Máster en Física de Sistemas Complejos de la UNED el ofrecerme la posibilidad de realizar un Trabajo de Fin de Máster dirigido por un profesor externo.

Referencias

- [1] Li, T.-Y. & Yorke, J. A. Period three implies chaos. *Am. Math. Mon.* **82**, 985-992 (1975).
- [2] Alligood, K. T., Sauer, T. D. & Yorke, J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag (New York, NY) (1996).
- [3] Strogatz, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books (Reading, MA) (1994).
- [4] Ott, E. & Tél, T. Chaotic scattering: an introduction. *Chaos* **3**, 417-426 (1993).
- [5] Seoane, J. M. & Sanjuán, M. A. F. New developments in classical chaotic scattering. *Rep. Prog. Phys.* **76**, 016001 (2013).
- [6] Lai, Y.-C. & Tél, T. *Transient Chaos: Complex Dynamics on Finite-Time Scales*. Springer (New York, NY) (2010).
- [7] Tél, T. & Gruiz, M. *Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics*. Cambridge University Press (New York, NY) (2006).
- [8] Contopoulos, G. & Kaufmann, D. Types of escapes in a simple Hamiltonian system. *Astron. Astrophys.* **253**, 379-388 (1992).
- [9] Contopoulos, G., Kandrup, H. E. & Kaufmann, D. Fractal properties of escape from a two-dimensional potential. *Physica D* **64**, 310-323 (1993).
- [10] Zotos, E. E. A Hamiltonian system of three degrees of freedom with eight channels of escape: the great escape. *Nonlinear Dyn.* **76**, 1301-1326 (2014).
- [11] Zotos, E. E. Elucidating the escape dynamics of the four hill potential. *Nonlinear Dyn.* **89**, 135-151 (2017).
- [12] Zotos, E. E. Fractal basin boundaries and escape dynamics in a multiwell potential. *Nonlinear Dyn.* **85**, 1613-1633 (2017).
- [13] Kandrup, H. E., Siopis, C., Contopoulos, G. & Dvorak, R. Diffusion and scaling in escapes from two-degrees-of-freedom Hamiltonian systems. *Chaos* **9**, 381-392 (1999).
- [14] Hénon, M. & Heiles, C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astron. J.* **69**, 73-79 (1964).

- [15] Aguirre, J., Vallejo, J. C. & Sanjuán, M. A. F. Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system. *Phys. Rev. E* **64**, 066208 (2001).
- [16] Barrio, R., Blesa, F. & Serrano, S. Fractal structures in the Hénon-Heiles Hamiltonian. *EPL* **82**, 10003 (2008).
- [17] Barrio, R., Blesa, F. & Serrano, S. Bifurcations and safe regions in open Hamiltonians. *New J. Phys.* **11**, 053004 (2009).
- [18] Vallejo, J. C., Aguirre, J. & Sanjuán, M. A. F. Characterization of the local instability in the Hénon-Heiles Hamiltonian. *Phys. Lett. A* **311**, 26-38 (2003).
- [19] Zotos, E. E. An overview of the escape dynamics in the Hénon-Heiles Hamiltonian system. *Meccanica* **52**, 2615–2630 (2017).
- [20] Bernal, J. D., Seoane, J. M. & Sanjuán, M. A. F. Weakly noisy chaotic scattering. *Phys. Rev. E* **88**, 032914 (2013).
- [21] Blesa, F., Seoane, J. M., Barrio, R. & Sanjuán, M. A. F. To escape or not to escape, that is the question - perturbing the Hénon-Heiles Hamiltonian. *Int. J. Bifurc. Chaos* **22**, 1230010 (2012).
- [22] Blesa, F., Seoane, J. M., Barrio, R. & Sanjuán, M. A. F. Effects of periodic forcing in chaotic scattering. *Phys. Rev. E* **89**, 042909 (2014).
- [23] Seoane, J. M., Aguirre, J., Sanjuán, M. A. F. & Lai, Y.-C. Basin topology in dissipative chaotic scattering. *Chaos* **16**, 023101 (2006).
- [24] Seoane, J. M., Sanjuán, M. A. F. & Lai, Y.-C. Fractal dimension in dissipative chaotic scattering. *Phys. Rev. E* **76**, 016208 (2007).
- [25] Seoane, J. M. & Sanjuán, M. A. F. Exponential decay and scaling laws in noisy chaotic scattering. *Phys. Lett. A* **372**, 110-116 (2008).
- [26] Seoane, J. M., Huang, L., Sanjuán, M. A. F. & Lai, Y.-C. Effects of noise on chaotic scattering. *Phys. Rev. E* **79**, 047202 (2009).
- [27] Seoane, J. M. & Sanjuán, M. A. F. Escaping dynamics in the presence of dissipation and noise in scattering systems. *Int. J. Bifurc. Chaos* **20**, 2783-2793 (2010).
- [28] Contopoulos, G. *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*. Springer (Berlín) (2002).

- [29] Daza, A. Wagemakers, A., Georgeot, B., Guéry-Odelin, D. & Sanjuán, M. A. F. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Sci. Rep.* **5**, 16579 (2015).
- [30] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. & Flannery, B. P. *Numerical Recipes in C, 3rd edition*. Cambridge University Press (New York, NY) (2007).
- [31] Burden, R. L. & Faires, J. Douglas, J. G. *Numerical Analysis, 10th edition*. Brooks-Cole (Boston, MA) (2015).
- [32] Contopoulos, G. Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian Systems. *Astron. Astrophys.* **231**, 41-55 (1990).
- [33] Ott, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press (New York, NY) (1993).
- [34] Aguirre, J., Viana, R. L. & Sanjuán, M. A. F. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Rev. Mod. Phys.* **81**, 333-386 (2009).
- [35] Nusse, H. E. & Yorke, J. A. Basins of attraction. *Science* **271**, 1376-1380 (1996).
- [36] Ott, E. Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.* **53**, 655-670 (1981).
- [37] Yoneyama, K. Theory of continuous sets of points. *Tokohu Math. J.* **11**, 43-158 (1917).
- [38] Hocking, J. G. & Young, G. S. *Topology*. Addison Wesley (Reading, MA) (1961).
- [39] Kennedy, J. & Yorke, J. A. Basins of Wada. *Physica D* **51**, 213-225 (1991).
- [40] Nusse, H. E. & Yorke, J. A. Wada basin boundaries and basin cells. *Physica D* **90**, 242-261 (1996).
- [41] Nusse, H. E., Ott, E. & Yorke, J. A. Saddle-node bifurcations on fractal basin boundaries. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2482-2485 (1995).
- [42] Toroczkai, Z., Károlyi, G., Péntek, Á., Tél, T., Grebogi, C. & Yorke, J. A. Wada dye boundaries in open hydrodynamical flows. *Physica A* **239**, 235-243 (1997).
- [43] Aguirre, J. & Sanjuán, M. A. F. Unpredictable behavior in the Duffing oscillator: Wada basins. *Physica D* **171**, 41-51 (2002).
- [44] Daza, A. Wagemakers, A. & Sanjuán, M. A. F. Wada property in systems with delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **43**, 220-226 (2017).

- [45] Portela, J. S. E., Caldas, I. L., Viana, R. L. & Sanjuán, M. A. F. Fractal and Wada exit basin boundaries in tokamaks. *Int. J. Bifurcat. Chaos* **17**, 4067-4080 (2007).
- [46] Daza, A. Wagemakers, A. & Sanjuán, M. A. F. Testing for Basins of Wada. *Sci. Rep.* **6**, 31416 (2016).
- [47] Coccolo, M., Seoane, J. M. & Sanjuán, M. A. F. Controlling unpredictability in the randomly driven Hénon-Heiles system. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18**, 3449-3457 (2013).
- [48] Lau, Y.-T., Finn, J. M. & Ott, E. Fractal dimension in nonhyperbolic chaotic scattering. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 978-981 (1991).
- [49] Grebogi, C., McDonald, S. W., Ott, E. & Yorke, J. A. Final state sensitivity: an obstruction to predictability. *Phys. Lett. A* **99**, 415-418 (1983).
- [50] McDonald, S. W., Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. Fractal basin boundaries. *Physica D* **17**, 125-153 (1985).
- [51] Churchill, R. C., Kummer, M. & Rod, D. L. On averaging, reduction, and symmetry in Hamiltonian Systems. *J. Differ. Equ.* **49**, 359-414 (1983).
- [52] Motter, A. E. & Lai, Y.-C. Dissipative chaotic scattering. *Phys. Rev. E* **65**, 015205(R) (2001).
- [53] Farmer, J. D., Ott, E. & Yorke, J. A. The dimension of chaotic attractors. *Physica D* **7**, 153-180 (1983).
- [54] Adler, R. L., Konheim, A. G. & McAndrew, M. H. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.* **114**, 309-319 (1965).
- [55] Hunt, B. R. & Ott, E. Defining Chaos. *Chaos* **25**, 97618 (2015).
- [56] Sinai, Y. G. On the notion of entropy of a dynamical system. *Dokl. Phys.* **124**, 768-771 (1959).
- [57] Nusse, H. E. & Yorke, J. A. Characterizing the basins with the most entangled boundaries. *Ergod. Theor. Dyn. Syst.* **23**, 895-906 (2003).
- [58] Vallejo, J. C., Aguirre, J. & Sanjuán, M. A. F. Wada basins and qualitative unpredictability in ecological models: a graphical interpretation. *Ecol. Model.* **176**, 65-74 (2004).