

**Universidad Nacional de Educación a
Distancia**

Facultad de Ciencias

Departamento de Física Fundamental



**Memoria del Trabajo de Fin de Máster en
Física de Sistemas Complejos**

**Implementación del método de
elementos finitos para problemas
tenso-deformacionales**

Alberto Solís Fajardo

Director externo: D. Jorge Alonso Zahr Viñuela

Tutor: D. Javier García Sanz

Curso 2015/2016

Índice

Índice de figuras	4
Resumen.....	5
Summary	5
Introducción	6
1. El teorema de los trabajos virtuales.....	8
2. El método de los elementos finitos.....	11
2.1. Planteamiento general.....	11
2.2. El método de los elementos finitos para elasticidad plana. Elementos isoparamétricos de cuatro nodos	20
2.3. Puntos de cuadratura.....	25
2.4. Elasticidad plana. Materiales isótropos y ortótropos	26
2.5. Recuperación de gradientes.....	30
3. Descripción del método	32
3.1. Esquema del método	32
3.2. Algoritmos.....	36
4. Algunos ejemplos	41
4.1. Un ejemplo sencillo.....	42
4.2. Placa con agujero	50
5. Tareas futuras.....	61
Bibliografía	63

Índice de figuras

Figura 1. Dominio cuadrado plano discretizado con cuatro elementos finitos cuadriláteros	17
Figura 2. Fuerzas y desplazamientos nodales	18
Figura 3. Fuerzas y desplazamientos elementales.....	18
Figura 4. Esquema de la correspondencia entre las variables naturales de un elemento (ξ, η) y las variables del elemento en el sistema global de coordenadas (x, y)	21
Figura 5. Rotación entre ejes principales y ejes cualesquiera	29
Figura 6. Esquema del campo de desplazamiento de los elementos A y B confluyentes en el nodo 2	31
Figura 7. Esquema del campo de desplazamiento de los elementos A y B confluyentes en el nodo 2 extrapolando a partir de los puntos de cuadratura.....	32
Figura 8. Esquema de un problema sencillo	42
Figura 9. Mallado del problema realizado con el módulo Abaqus CAE	43
Figura 10. Componente ϵ_x del campo de deformaciones	46
Figura 11. Componente ϵ_y del campo de deformaciones	46
Figura 12. Componente γ_{xy} del campo de deformaciones	47
Figura 13. Componente σ_x del campo de tensiones	47
Figura 14. Componente σ_y del campo de tensiones	48
Figura 15. Componente τ_{xy} del campo de tensiones.....	48
Figura 16. Componente u_x del campo de desplazamiento	49
Figura 17. Componente u_y del campo de desplazamiento	49
Figura 18. Esquema del problema de la placa con agujero	51
Figura 19. Mallado del problema realizado con el módulo Abaqus CAE.....	52
Figura 20. Componente ϵ_x del campo de deformaciones	54
Figura 21. Componente ϵ_y del campo de deformaciones	54
Figura 22. Componente γ_{xy} del campo de deformaciones.....	55
Figura 23. Componente σ_x del campo de tensiones	55
Figura 24. Componente σ_y del campo de tensiones	56
Figura 25. Componente τ_{xy} del campo de tensiones.....	56
Figura 26. Componente u_x del campo de desplazamiento	57
Figura 27. Componente u_y del campo de desplazamiento	57
Figura 28. Esquema de una placa delgada con agujero sometida a un estado de compresión uniaxial	58

Resumen

En el presente trabajo se realiza la implementación del método de elementos finitos para sólidos bidimensionales en régimen de elasticidad plana. Se utilizan elementos isoparamétricos cuadriláteros de cuatro nodos en sólidos planos isótropos y laminados de material ortótropo en ejes no principales.

Las rutinas desarrolladas se aplican al problema de una placa plana empotrada con un agujero sometido a un esfuerzo de compresión y los resultados se comparan con la solución analítica de un problema similar para determinar la bondad de los resultados obtenidos con las rutinas desarrolladas.

Summary

In this work we implement the finite elements method applied to 2D solids under planar elasticity supposition by using four-sided isoparametric elements with four nodes each. We consider isotropic planar solids and orthotropic laminates in no-main axes.

Programmable user subroutines are applied to an open hole plate subjected to uniaxial tensile loads and results are compared with the analytical solution in order to check their accuracy.

Introducción

La complejidad de las ecuaciones a la hora de obtener los campos de deformaciones y tensiones, en sólidos sometidos a determinadas solicitaciones, en problemas reales hace necesario algún método que sea capaz de sistematizar y resolver de forma numérica una amplia gama de tipologías y estados tensionales utilizando la potencia de cálculo que ofrecen las técnicas numéricas por ordenador.

De todas las técnicas de cálculo numérico, orientadas al tipo de problemas que se ha indicado, la que más popularidad ha alcanzado en la actualidad es el mecanismo conocido como método de los elementos finitos.

Existen en la actualidad múltiples herramientas comerciales que implementan este método y que permiten resolver geometrías progresivamente más complejas considerando diversos grupos de hipótesis a la hora de considerar diversas leyes de comportamiento.

Sin embargo, debido al coste de las licencias originales de este tipo de programas no siempre se tiene disponibilidad económica para tener acceso a este tipo de software. Además debido a la naturaleza cerrada de estos paquetes de programas, muchas veces no se tiene acceso al código fuente para saber con certeza el tipo de cálculo que se está implementando o bien para tener la posibilidad de introducir modificaciones que permitan mejoras en problemas concretos que se quieran abordar.

En este trabajo, se quiere hacer una primera aproximación a la implementación de rutinas que aplique dicho método y que constituya, sino una alternativa, una forma complementaria de obtener resultados a los programas de software comercial.

Estas rutinas se desarrollan en el marco de una tesis doctoral donde las tipologías sólidas planas cobran especial interés y, en concreto, se quiere ser capaz de determinar el estado tensional alrededor de orificios aislados tanto en materiales isótropos como en laminados compuestos por distintos espesores de láminas ortótropas.

De forma general, cualquier rutina que implemente el método de los elementos finitos debe realizar diversas tareas que se recogen a continuación:

- **Mallado del dominio.** Se debe discretizar el dominio y proporcionar un listado organizado que incluya los nodos y las diversas conectividades de los elementos.
- **Interpolación de los desplazamientos.** Se debe proponer un campo de desplazamientos en cualquier punto del dominio a partir de los desplazamientos de los nodos. Dependiendo de las funciones de forma que se elijan el grado de aproximación será distinto.
- **Deformaciones.** Las deformaciones se obtendrán a partir de los desplazamientos. Se pueden considerar transformaciones lineales entre deformaciones y desplazamientos si consideramos pequeñas deformaciones o bien no lineales si consideramos grandes deformaciones.

- **Ley de comportamiento.** Las tensiones se obtendrán a partir de las deformaciones. La relación constitutiva puede modelar muchos tipos de comportamientos. Desde comportamiento elástico lineal isótropo u ortótropo a relaciones de completa anisotropía. También podría considerarse endurecimiento y considerar comportamiento elasto-plástico.
- **Resolución del sistema.** Las matrices obtenidas tendrán que invertirse para obtener los desplazamientos nodales.
- **Visualización de resultados.** Tras obtener los resultados será necesario reconstruir los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones y proporcionar visualizaciones que muestren los valores obtenidos.

En este trabajo, utilizaremos matlab para desarrollar las rutinas. Partiremos de un dominio convenientemente mallado y del conocimiento de las coordenadas nodales, así como del conocimiento de los nodos que conforman cada elemento. Utilizaremos la herramienta *Abaqus CAE* para obtener los datos nodales y las conectividades que serán utilizadas como entradas.

Usaremos elementos isoparamétricos de cuatro lados y se considerarán funciones de forma lineales a partir de las que se construirán los campos de desplazamientos. Asumiremos pequeñas deformaciones que obtendremos a partir de las derivadas de los desplazamientos.

Consideraremos distintas leyes de comportamiento dentro del régimen de elasticidad lineal plana distinguiendo entre tensión y deformación plana. Consideraremos tanto sólidos isótropos como láminas ortótropas en ejes cualesquiera (aparentemente anisótropas).

Para invertir las matrices estructurales utilizaremos el comando `\` de matlab que invierte matrices por eliminación gaussiana.

Y finalmente, dado que consideraremos estados tensionales planos, utilizaremos el comando *fill* de matlab para mostrar visualizaciones de los estados tensionales y deformacionales mediante diagramas con código auxiliar de colores.

1. El teorema de los trabajos virtuales

Para poder enunciar este teorema se hace necesario, primeramente, definir lo que se conoce como desplazamiento virtual de un punto perteneciente a un sólido. En concreto, se conoce como desplazamiento virtual de un punto a un desplazamiento arbitrario que no tiene lugar en el problema real que se está tratando pero que es compatible con las condiciones de contorno de nuestro problema y, por tanto, es posible.

El teorema está basado en que el trabajo virtual realizado por un sistema de fuerzas (de volumen y aplicadas en la superficie), que se encuentre en equilibrio, aplicadas sobre el sólido cuando se impone un campo de desplazamientos virtuales debe ser igual al trabajo de las fuerzas internas del mismo.

Supongamos que tenemos un sólido en equilibrio sometido a unas fuerzas por unidad de volumen \vec{X} y unas fuerzas en el contorno \vec{t}_c . En esta situación las componentes del tensor de tensiones de este sólido que represente el estado tensional del mismo deberán verificar las ecuaciones de equilibrio interno. A saber:

$$X_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$X_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$X_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

Si, a continuación suponemos un campo de desplazamientos virtual $\vec{\delta}(x, y, z) = u^\delta(x, y, z)\vec{i} + v^\delta(x, y, z)\vec{j} + w^\delta(x, y, z)\vec{k}$, multiplicando cada una de las componentes del desplazamiento virtual por cada una de las tres ecuaciones de equilibrio interno e integrando para todo el volumen y sumando, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_V (X_1 u^\delta + X_2 v^\delta + X_3 w^\delta) dV + \int_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) u^\delta dV \\ + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v^\delta dV + \\ + \int_V \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w^\delta dV = 0 \quad (1.1) \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u^\delta = \frac{\partial(\sigma_x u^\delta)}{\partial x} - \sigma_x \frac{\partial(u^\delta)}{\partial x} = \frac{\partial(\sigma_x u^\delta)}{\partial x} - \sigma_x \varepsilon_x^\delta$$

Donde se ha definido:

$$\varepsilon_x^\delta = \frac{\partial(u^\delta)}{\partial x}$$

Que representa la primera componente de la diagonal de un tensor de deformaciones compatible con el campo de desplazamientos virtual que se ha supuesto. Y de igual manera, definiendo:

$$\varepsilon_y^\delta = \frac{\partial(v^\delta)}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z^\delta = \frac{\partial(w^\delta)}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy}^\delta = \left(\frac{\partial(u^\delta)}{\partial y} + \frac{\partial(v^\delta)}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xz}^\delta = \left(\frac{\partial(u^\delta)}{\partial z} + \frac{\partial(w^\delta)}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{yz}^\delta = \left(\frac{\partial(v^\delta)}{\partial z} + \frac{\partial(w^\delta)}{\partial y} \right)$$

Y sustituyendo en 1.1 se tiene que:

$$\begin{aligned} & \int_V (X_1 u^\delta + X_2 v^\delta + X_3 w^\delta) dV \\ & + \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u^\delta + \tau_{xy} v^\delta + \tau_{xz} w^\delta) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \tau_{yz} w^\delta) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} u^\delta + \tau_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \right] dV \\ & - \int_V [\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\delta] dV = 0 \quad (1.2) \end{aligned}$$

La segunda integral se puede transformar utilizando el teorema de Gauss transformando la integral de volumen de la divergencia en una integral de superficie de la proyección del campo sobre el vector normal:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u^\delta + \tau_{xy} v^\delta + \tau_{xz} w^\delta) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \tau_{yz} w^\delta) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} u^\delta + \tau_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \right] dV \\ & = \int_\Omega [(\sigma_x u^\delta + \tau_{xy} v^\delta + \tau_{xz} w^\delta) \cdot l + (\tau_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \tau_{yz} w^\delta) \cdot m \\ & + (\tau_{xz} u^\delta + \tau_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \cdot n] d\Omega \end{aligned}$$

Donde Ω representa la superficie del sólido, $d\Omega$ su diferencial y l , m y n representan las componentes del vector normal a la superficie del sólido en cada punto. Pero aplicando el lema de Cauchy en la superficie del sólido y teniendo en cuenta que el estado tensional en la superficie debe estar en equilibrio con las fuerzas aplicadas en el contorno \bar{t}_c , se tiene que:

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = t_{cx}$$

$$\tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n = t_{cy}$$

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n = t_{cz}$$

Y así podemos escribir para el segundo sumando de 1.2:

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u^\delta + \tau_{xy} v^\delta + \tau_{xz} w^\delta) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} u^\delta + \sigma_y v^\delta + \tau_{yz} w^\delta) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} u^\delta + \tau_{yz} v^\delta + \sigma_z w^\delta) \right] dV \\ = \int_\Omega [(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) \cdot u^\delta + (\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{xz} n) \cdot v^\delta + (\tau_{xz} l + \tau_{yz} m \\ + \sigma_z n) \cdot w^\delta] d\Omega = \int_\Omega [t_{cx} \cdot u^\delta + t_{cy} \cdot v^\delta + t_{cz} \cdot w^\delta] d\Omega = \int_\Omega \bar{t}_c \cdot \vec{\delta} d\Omega \end{aligned}$$

Así podemos escribir 1.1 de la siguiente manera:

$$\int_V \vec{X} \cdot \vec{\delta} dV + \int_\Omega \bar{t}_c \cdot \vec{\delta} d\Omega - \int_V [\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\delta] dV = 0$$

Que teniendo en cuenta que:

$$\int_V [\sigma_x \varepsilon_x^\delta + \sigma_y \varepsilon_y^\delta + \sigma_z \varepsilon_z^\delta + \tau_{xy} \gamma_{xy}^\delta + \tau_{xz} \gamma_{xz}^\delta + \tau_{yz} \gamma_{yz}^\delta] dV = \int_V \sigma \cdot \varepsilon^\delta dV$$

Donde:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^\delta = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^\delta & \varepsilon_{xy}^\delta & \varepsilon_{xz}^\delta \\ \varepsilon_{xy}^\delta & \varepsilon_y^\delta & \varepsilon_{yz}^\delta \\ \varepsilon_{xz}^\delta & \varepsilon_{yz}^\delta & \varepsilon_z^\delta \end{pmatrix}$$

Y $\sigma \cdot \varepsilon$ representa la suma del producto de las componentes de los tensores de tensiones y de deformaciones virtuales una a una. Para escribir lo anterior, hemos tenido en cuenta que:

$$\varepsilon_{xy}^\delta = \frac{1}{2} \gamma_{xy}^\delta$$

$$\varepsilon_{xz}^\delta = \frac{1}{2} \gamma_{xz}^\delta$$

$$\varepsilon_{yz}^\delta = \frac{1}{2} \gamma_{yz}^\delta$$

Podemos escribir para 1.1:

$$\int_V \vec{X} \cdot \vec{\delta} dV + \int_\Omega \bar{t}_c \cdot \vec{\delta} d\Omega = \int_V \sigma \cdot \varepsilon^\delta dV \quad (1.3)$$

Esta expresión constituye la formulación del llamado teorema de los trabajos virtuales y constituirá el soporte sobre la que construiremos el método de los elementos finitos en este trabajo.

Este teorema indica, como hemos comentado, que el trabajo virtual de las fuerzas de volumen y del sistema de cargas exteriores debe ser igual al trabajo de las fuerzas internas que se almacenaría en el sólido.

Antes de seguir, es interesante hacer algunas consideraciones acerca de la generalidad de la expresión 1.3. En primer lugar, hay que notar que las componentes del tensor de tensiones σ están relacionadas con las fuerzas por unidad de volumen \vec{X} únicamente a través de las ecuaciones de equilibrio interno y con el sistema de cargas exteriores \bar{t}_c a través del lema de Cauchy y de la condición de equilibrio externo.

En segundo lugar, las componentes del tensor de deformaciones virtuales están relacionadas con las componentes del vector de desplazamiento a través de las relaciones de compatibilidad que se han definido para un campo de desplazamiento virtual aunque compatible con las condiciones de contorno de nuestro problema.

Por otro lado, en la formulación del teorema no se ha hecho referencia a la ley de comportamiento característica de nuestro sólido deformable que relacione tensiones con deformaciones, pudiendo entonces 1.3 ser aplicable a comportamiento elástico lineal, elástico no lineal, plástico...

A pesar de esto, el teorema puede también aplicarse cuando el campo de deformaciones y desplazamientos es el que corresponde al estado tensional de nuestro problema a través de una ley de comportamiento concreta.

2. El método de los elementos finitos

2.1. Planteamiento general

En lo que sigue, conviene adoptar la notación de pseudo-vectores que contengan las seis componentes diferentes de los tensores de tensión y deformación¹. Es decir:

$$\sigma^T = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy}]$$

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \gamma_{yz} \gamma_{xz} \gamma_{xy}]$$

Adicionalmente también tomaremos:

$$\delta^T = [u^\delta v^\delta w^\delta]$$

$$X^T = [X_x X_y X_z]$$

¹ Aunque los tensores de tensión y deformación tienen nueve componentes en realidad sólo hay seis componentes independientes ya que se trata de tensores simétricos.

De forma que los productos que aparecen en 1.3, en la nueva notación, pueden escribirse:

$$\sigma \cdot \varepsilon^\delta = \varepsilon^{\delta T} \sigma$$

$$\vec{X} \cdot \vec{\delta} = \delta^T X$$

$$\vec{t}_c \cdot \vec{\delta} = \delta^T t_c$$

Para hacer surgir el método de los elementos finitos de forma natural a partir de 1.3 es necesario alguna ley de comportamiento concreta. Asumiremos, a partir de ahora, comportamiento elástico lineal². La relación lineal entre σ y ε más general se puede escribir:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Donde D_{ijkl} es un tensor de cuarto orden definido por 81 constantes que finalmente se puede reducir a 21 constantes y que adoptando la notación de pseudo-vectores, la ley de comportamiento se puede escribir:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = D\varepsilon \quad (2.1)$$

Por otro lado, se hace útil poner las relaciones de compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos que se han comentado anteriormente, asumiendo pequeñas deformaciones³, en forma matricial:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = Bu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

E igualmente se tendrá para las deformaciones virtuales:

$$\varepsilon^\delta = B\delta \quad (2.3)$$

² Para tener una particularización del método asumiendo otro tipo de comportamiento habrá que sustituir en este punto el tipo de ley que se desee.

³ Si no asumiéramos pequeñas deformaciones la relación entre ε y u vendría representada por otro tipo de operador al mostrado en 2.2 que sería, en general, no lineal.

Utilizando la notación de pseudo-vectores y sustituyendo las expresiones 2.1, 2.2 y 2.3 en 1.3, se tiene que:

$$\int_V \delta^T X dV + \int_\Omega \delta^T t_c d\Omega = \int_V \delta^T B^T DBu dV \quad (2.4)$$

La expresión 2.4 representa una forma del teorema de los trabajos virtuales que involucra un sistema de cargas t_c , X y σ (a través de las deformaciones que provoca) que se encuentra en equilibrio y un campo de desplazamiento virtual δ impuesto que es compatible⁴ con las deformaciones virtuales ε^δ y con las condiciones de contorno de nuestro problema.

Se tiene, por tanto, que en 2.4 la única incógnita es el campo de desplazamiento real $u(x, y, z)$ definido en el sólido. Es interesante recalcar que δ^T es un campo de desplazamiento virtual compatible con las condiciones de contorno que se ha impuesto por lo que resulta conocido a la hora de resolver.

En función de las condiciones de contorno que se propongan, algunas cargas representadas por el vector t_c pueden ser incógnitas (reacciones) aunque, por otro lado, se tendrá que los desplazamientos de algunos puntos del sólido pueden ser conocidos manteniéndose el sistema determinado. Esto no resultará ningún problema como se verá posteriormente.

Dada la increíble dificultad del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a resolver se aspirará sólo a obtener una solución aproximada para el campo de desplazamientos. La suposición de la cual parte el método de elementos finitos consiste en expresar el campo de desplazamiento de la siguiente manera:

$$u = \sum_{i=1}^N u_i \theta_i(x, y, z)$$

$$v = \sum_{i=1}^N v_i \theta_i(x, y, z)$$

$$w = \sum_{i=1}^N w_i \theta_i(x, y, z)$$

Para escribir las expresiones anteriores se debe tener en cuenta que los valores u_i , v_i y w_i son coeficientes y que se han utilizado las mismas funciones aproximantes θ_i y la misma cantidad N de ellas para aproximar las tres componentes del desplazamiento. Aunque esto no es obligatorio es la opción más habitual y será la que elegiremos.

En notación matricial, se puede escribir:

⁴ Ya que las deformaciones se obtienen por derivación a partir de los desplazamientos según 2.2.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \theta c = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & | & \theta_2 & 0 & 0 & | & \dots & \theta_N & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & 0 & | & 0 & \theta_2 & 0 & | & \dots & 0 & \theta_N & 0 \\ 0 & 0 & \theta_1 & | & 0 & 0 & \theta_2 & | & \dots & 0 & 0 & \theta_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ - \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \\ w_N \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Donde:

$$c = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ - \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ - \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \\ w_N \end{pmatrix}$$

Introduciendo 2.5 en 2.4 se tiene que:

$$\int_V \delta^T X dV + \int_\Omega \delta^T t_c d\Omega = \left| \int_V \delta^T B^T DB\theta dV \right| c$$

$$(1x3)x(3x1) + (1x3)x(3x1) = (1x3)x(3x6)(6x6)(6x3)(3x3N)(3Nx1)$$

Atendiendo a las dimensiones⁵ de las matrices, vemos que la expresión anterior, representa una ecuación con $3N$ incógnitas que son los $3N$ coeficientes del vector c .

Para obtener un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas utilizaremos el hecho de que podemos plantear tantos desplazamientos virtuales como queremos. En concreto, si planteamos $3N$ desplazamientos virtuales obtendremos un sistema de $3N$ ecuaciones con $3N$ incógnitas. Así, con estas consideraciones:

$$\int_V \Delta^T X dV + \int_\Omega \Delta^T t_c d\Omega = \left| \int_V \Delta^T B^T DB\theta dV \right| c \quad (2.6)$$

$$(3Nx3)x(3x1) + (3Nx3)x(3x1) = (3Nx3)x(3x6)x(6x6)x(6x3)x(3x3N)x(3Nx1)$$

Donde:

⁵ Se han incluido en entre paréntesis debajo de la última expresión dada.

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & | & \delta_2 & 0 & 0 & | & \dots & \delta_N & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & | & 0 & \delta_2 & 0 & | & \dots & 0 & \delta_N & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & | & 0 & 0 & \delta_2 & | & \dots & 0 & 0 & \delta_N \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

De una manera compacta, el sistema 2.6 se puede escribir:

$$F_{ext} = Kc \quad (2.8)$$

$$(3N \times 1) = (3N \times 3N) \times (3N \times 1)$$

Donde:

$$F_{ext} = \int_V \Delta^T X dV + \int_{\Omega} \Delta^T t_c d\Omega \quad (2.9)$$

$$K = \left| \int_V \Delta^T B^T D B \theta dV \right| \quad (2.10)$$

Que representa un sistema de 3N ecuaciones (2N ecuaciones en el caso plano) con 3N incógnitas (2N en el caso plano) que son las coeficientes c definidos en 2.5.

Es interesante recalcar que hasta ahora la única asunción que se ha hecho es la suposición del comportamiento elástico lineal del sólido. Para poner de manifiesto el método de los elementos finitos se hace necesario hacer dos consideraciones. La primera realmente ya se ha hecho y consiste en considerar la aproximación del campo de desplazamientos explicitada en 2.5.

La segunda es realmente la que más caracteriza al método y consiste en la elección de las funciones θ_i . El tratamiento por ordenador que se hará del sistema de ecuaciones resultante hace bastante aconsejable tener una forma de la matriz K simétrica. Dada la forma de K explicitada en 2.10 se hace evidente que conviene hacer la siguiente elección para las funciones de aproximación:

$$\delta_i = \theta_i \quad (2.11)$$

Y que producirá una matriz simétrica:

$$K = \left| \int_V \theta^T B^T D B \theta dV \right| \quad (2.12)$$

Para elegir las funciones de aproximación θ_i debemos tener en cuenta que, dado que las deformaciones, según 2.2, están definidas a partir de las derivadas de los desplazamientos, las funciones θ_i deberán ser al menos lineales.

Para las funciones θ_i se elegirán funciones de pequeño soporte de forma que sólo estén definidas en pequeñas zonas acotadas dentro del dominio completo y fuera de ellos sean nulas.

Estas funciones definidas a trozos tienen la ventaja de quedar determinadas siempre que sobre el sólido se haya definido una malla que será la responsable de cubrir completamente la

geometría del mismo por complicada que ésta sea. Habrá, por tanto, que definir algunos puntos del dominio, llamados nodos, que constituirán la base sobre la que se definirá la malla.

Cada nodo llevará asociado una función θ_i que valdrá la unidad en el nodo y cero en los demás. Esta versatilidad a la hora de definir la malla nos permitirá afinar más en aquellos sitios del dominio donde los gradientes sean más grandes y sea más interesante aumentar el número de elementos mientras que en aquellos lugares donde los gradientes sean más pequeños la cantidad de elementos podrá ser menor disminuyendo el coste computacional.

Dado que en un nodo concreto, su función de aproximación asociada valdrá la unidad y el resto se anularán, los coeficientes asociados a la función aproximante de este nodo concreto representarán, según 2.5, los desplazamientos en este nodo.

Por lo anterior, podemos asociar el vector c , en 2.8, con las componentes de los desplazamientos d de cada uno de los nodos, así que podremos escribir nuestro sistema como:

$$F_{ext} = Kd \quad (2.13)$$

E identificar la matriz K con una matriz de rigidez. Así cada componente de la matriz de rigidez tiene un claro significado físico. El elemento K_{ij} representará la fuerza que aparece en el nodo i cuando se da un desplazamiento unidad en el nodo j y cero en todos los demás.

Además se tendrá, dado que las funciones de aproximación son de pequeño soporte, que todos aquellos elementos de la matriz de rigidez que relacionen funciones de aproximación θ_i definidas en soportes distintos serán nulos. Así muchos elementos de la matriz K_{ij} serán nulos, dada su definición a partir de 2.12:

$$K_{ij} = \left| \int_V \begin{pmatrix} \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & \theta_i \end{pmatrix} B^T D B \begin{pmatrix} \theta_j & 0 & 0 \\ 0 & \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & \theta_j \end{pmatrix} dV \right| \quad (2.14)$$

El sólido habrá quedado dividido así en diversos elementos constituidos a partir de un conjunto de nodos adyacentes. Estos *elementos finitos*, puestos en conjunto, armarán el sólido completo.

Además, dado que en cada nodo confluirán varios elementos finitos, cada función θ_i podrá escribirse como una suma de funciones N_i que estén definidas sólo en cada uno de los elementos que confluyen en ese nudo y sean cero en todos los demás elementos.

Para aclarar este aspecto, consideremos la siguiente malla correspondiente a un posible problema plano constituido por un dominio cuadrado discretizado con cuatro elementos finitos A, B, C, D y nueve nodos:

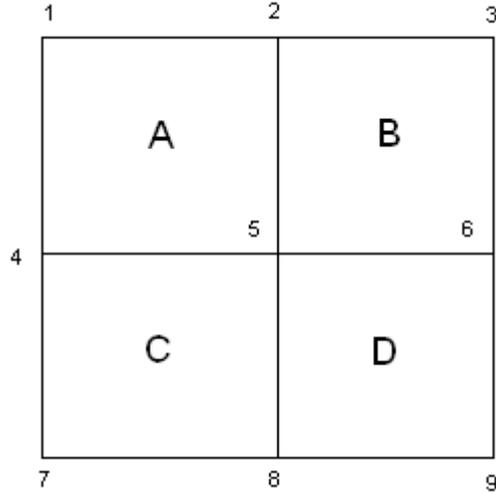


Figura 1. Dominio cuadrado plano discretizado con cuatro elementos finitos cuadriláteros

Si aplicásemos el método que estamos describiendo a este problema obtendríamos una matriz de rigidez K , dada por 2.12 cuyo elemento K_{24} , por ejemplo, vendrá dado por:

$$K_{24} = \left| \int_V \begin{pmatrix} \theta_2 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix} B^T DB \begin{pmatrix} \theta_4 & 0 \\ 0 & \theta_4 \end{pmatrix} dV \right| \quad (2.15)$$

Dado que en el nodo 2 confluyen los elementos A y B y en el nodo 4 confluyen los elementos A y C , podremos escribir, introduciendo las funciones N_i^e definidas a trozos⁶, para el elemento K_{24} de la matriz completa:

$$\begin{aligned} K_{24} &= \left| \int_V \begin{pmatrix} N_2^{A+B} & 0 \\ 0 & N_2^{A+B} \end{pmatrix} B^T DB \begin{pmatrix} N_4^{A+C} & 0 \\ 0 & N_4^{A+C} \end{pmatrix} dV \right| \\ &= \left| \int_V \begin{pmatrix} N_2^A & 0 \\ 0 & N_2^A \end{pmatrix} B^T DB \begin{pmatrix} N_4^A & 0 \\ 0 & N_4^A \end{pmatrix} dV \right| \\ &\quad + \left| \int_V \begin{pmatrix} N_2^B & 0 \\ 0 & N_2^B \end{pmatrix} B^T DB \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dV \right| + \left| \int_V \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B^T DB \begin{pmatrix} N_4^C & 0 \\ 0 & N_4^C \end{pmatrix} dV \right| \\ &= K_{24}^A \quad (2.16) \end{aligned}$$

Donde el segundo y tercer sumando son nulos debido a que el elemento B no aporta rigidez al nodo 4 y el elemento C no aporta rigidez al nodo 2, quedando solo el elemento A como transmisor de rigidez entre los nodos 2 y 4.

De esta manera, se tendrá una interpretación física para cada elemento equivalente a la de la matriz de rigidez de todo el sólido. Para ilustrar esta correspondencia incluiremos variables asociadas a los nodos de los elementos mostrados en la Figura 1, considerando estos de forma

⁶Ya que N_i^e serán completamente nulas fuera del elemento e y dentro del elemento valdrán la unidad en el nodo i y se anularán en el resto de nodos que contenga el elemento.

independiente. Así en cada nodo de la Figura 1 habrá definido vectores globales de fuerzas externas y desplazamientos nodales de la siguiente forma:

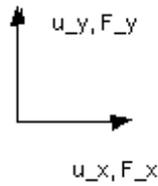


Figura 2. Fuerzas y desplazamientos nodales

Por otro lado, cada uno de los elementos definidos en la Figura 1 tendrá definidos vectores de fuerzas y desplazamientos elementales, por ejemplo para el elemento A:

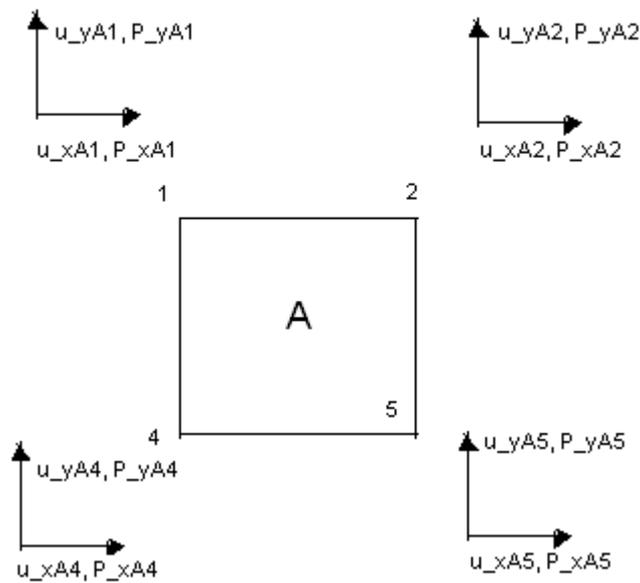


Figura 3. Fuerzas y desplazamientos elementales

Donde es evidente que las variables nodales y elementales de la Figura 2 y la Figura 3 deben estar relacionadas mediante relaciones de equilibrio para las fuerzas y relaciones de compatibilidad para los desplazamientos. Estas relaciones son, por ejemplo, para el nodo 2:

$$F_{2x} = P_{2x}^A + P_{2x}^B$$

$$F_{2y} = P_{2y}^A + P_{2y}^B$$

$$u_{2x} = u_{2x}^A = u_{2x}^B$$

$$u_{2y} = u_{2y}^A = u_{2y}^B$$

Así, para un elemento finito concreto, se tendrá una relación equivalente a la 2.13:

$$F_{elemental}^{local} = \left| \int_V (BN)_e^T D_e (BN)_e dV \right| d_{local} \quad (2.17)$$

Donde las magnitudes $F_{elemental}^{local}$, D_e , $(BN)_e$ y d_{local} hacen referencia a los nodos que son adyacentes y conforman el elemento finito concreto a la que se refiera 2.17 y que no tienen por qué estar ordenados de la misma manera que cuando consideramos el sistema completo 2.13.

La relación entre la numeración local de los nodos para cada elemento y la numeración global de todo el sólido puede expresarse utilizando matrices A_{ij}^e , llamada matriz de ensamblaje del elemento e . Por ejemplo, la matriz de ensamblaje del elemento B de la Figura 1 podría ser:

$$d_{local} = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_3 \\ u_2 \end{pmatrix} = A^e d = \begin{pmatrix} 000010000 \\ 000001000 \\ 001000000 \\ 010000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Estas matrices de ensamblaje, definidas como se ha hecho, nos permitirán escribir la matriz de rigidez total como una suma de matrices de rigidez para cada elemento en 2.13:

$$F_{ext} = Kd = \sum_{e=1}^E \left(A^{eT} \left(\int_V N_e^T B_e^T D_e B_e N_e dV \right) A^e \right) d \quad (2.19)$$

Donde E indica el número total de elementos finitos del modelo completo. La expresión anterior nos permite identificar matrices de rigidez k^e para cada elemento e de la forma:

$$k^e = \int_V N_e^T B_e^T D_e B_e N_e dV \quad (2.20)$$

Es interesante volver a recalcar que la única consideración particular que se ha hecho hasta ahora es considerar comportamiento elástico lineal para el material. Salvo por esto último, el método descrito es general y podrá ser aplicado siempre que sobre el dominio haya definida una malla que lo divida constituyendo diversos elementos que den lugar a un sistema de ecuaciones que al ser resuelto proporcionará el vector de desplazamientos nodales d .

A partir de d , utilizando 2.5 se obtendrá el campo de desplazamientos y sustituyendo este campo en las ecuaciones de compatibilidad 2.2, se obtendrá el campo de deformaciones. A su vez, el campo de deformaciones sustituido en la ley de comportamiento 2.1 proporcionará el campo de tensiones del sólido.

Hay veces que las condiciones de contorno que normalmente están dadas en acciones exteriores sobre el dominio a través de su contorno $d\Omega$ y que proporcionarían el vector de acciones exteriores F_{ext} , están dadas en desplazamientos en el contorno $d\Omega$. Esto significa que los desplazamientos de algunos nodos del vector d son conocidos y los valores de fuerzas externas en esos puntos del contorno son desconocidos.

En este caso, para poder despejar el sistema, que sigue siendo determinado, será necesario escribirlo por bloques.

A modo de ejemplo, volvamos al caso de la Figura 1. Imaginemos que los desplazamientos de los nodos 1, 2 y 3 son conocidos (mientras que los valores de las fuerzas externas aplicadas sobre ellos es desconocido) y los contenemos en un vector llamado d_1 . Asimismo las fuerzas, que son desconocidas, aplicadas en estos nodos las contenemos en un vector llamado F_1 . El resto de los desplazamientos, que son desconocidos, los introducimos en un vector d_2 y el resto de fuerzas conocidas en un vector F_2 . Con estas consideraciones, el sistema 2.19 podrá ser escrito por bloques:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

De la segunda de las dos ecuaciones podemos despejar:

$$d_2 = K_{22}^{-1}(F_2 - K_{21}d_1) \quad (2.22)$$

De donde, como todo es conocido en el segundo miembro, podemos despejar d_2 . Por otro lado, de la primera de las ecuaciones de 2.21:

$$F_1 = K_{11}d_1 + K_{12}d_2 \quad (2.23)$$

Y sustituyendo d_2 de 2.22 en 2.23, se obtiene para el vector F_1 desconocido:

$$F_1 = K_{11}d_1 + K_{12} \left(K_{22}^{-1}(F_2 - K_{21}d_1) \right) = K_{12}K_{22}^{-1}F_2 + (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})d_1$$

O bien que:

$$F_1 = K_{12}K_{22}^{-1}F_2 + (K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})d_1 \quad (2.24)$$

Así, utilizando 2.22 y 2.24, podremos calcular d_2 y F_1 respectivamente, en función de cantidades conocidas.

2.2. El método de los elementos finitos para elasticidad plana. Elementos isoparamétricos de cuatro nodos

Nos proponemos ahora aplicar el método descrito para un problema de elasticidad plana. Para ello, trataremos sólidos que verifican la condición geométrica de tener dos dimensiones (L, W) mucho más grandes que la tercera t . Es decir:

$$L, W \gg t \quad (2.25)$$

Consideraremos, en cada nodo de la malla que se plantee, dos grados de libertad de desplazamiento (uno horizontal u y otro vertical v) en el plano XY .

Para dividir el dominio, utilizaremos elementos cuadriláteros que tendrán un nodo en cada vértice. A cada elemento finito e que definamos, tendremos que asociar cuatro funciones N_i^e (asociada cada una a uno de los cuatro nodos i del elemento) que valdrán la unidad en el nodo i y se anularán en el resto de nodos que contenga el elemento, tal y como se expuso en 2.16.

Aunque las funciones estén definidas a trozos, la expresión analítica de cada una de las funciones N_i^e sería compleja de automatizar con vistas a la programación si utilizáramos para todas ellas el mismo sistema de coordenadas global.

Por ello, realizaremos la trazabilidad de las variables locales (a nivel de elemento) mediante un cambio de variables entre ξ y η (llamadas variables naturales del elemento) y las variables globales x e y . Un esquema de lo anterior se recoge en la Figura 4:

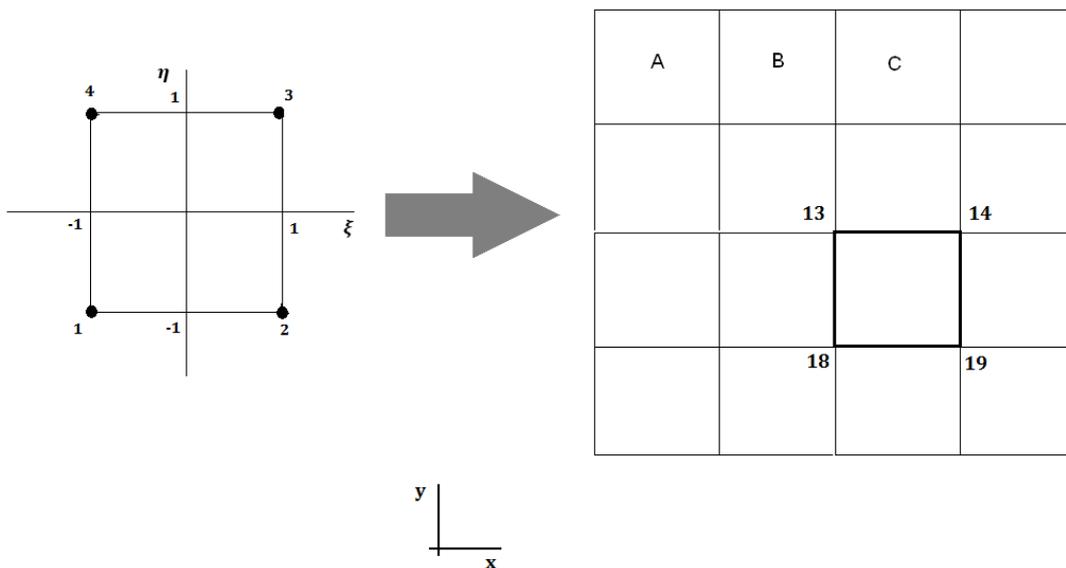


Figura 4. Esquema de la correspondencia entre las variables naturales de un elemento (ξ, η) y las variables del elemento en el sistema global de coordenadas (x, y)

El cambio de variables entre las coordenadas naturales de un elemento y las globales, se escribe:

$$x(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)x_1^e + N_2(\xi, \eta)x_2^e + N_3(\xi, \eta)x_3^e + N_4(\xi, \eta)x_4^e \quad (2.25)$$

$$y(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)y_1^e + N_2(\xi, \eta)y_2^e + N_3(\xi, \eta)y_3^e + N_4(\xi, \eta)y_4^e \quad (2.26)$$

Por otro lado, el campo de desplazamientos en función de las variables naturales se escribe:

$$u(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)u_1^e + N_2(\xi, \eta)u_2^e + N_3(\xi, \eta)u_3^e + N_4(\xi, \eta)u_4^e = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)u_i^e \quad (2.27)$$

$$v(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)v_1^e + N_2(\xi, \eta)v_2^e + N_3(\xi, \eta)v_3^e + N_4(\xi, \eta)v_4^e = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta)v_i^e \quad (2.28)$$

Podemos observar que se han elegido las mismas funciones de interpolación para describir el campo de desplazamientos que para el cambio de variables. Este tipo de elementos que utilizan las mismas funciones para interpolar los desplazamientos que para cambiar de variables, se denominan elementos isoparamétricos y las funciones de aproximación $N_i(\xi, \eta)$ se denominan funciones de forma. Estas funciones de forma $N_i(\xi, \eta)$ que, como hemos dicho, deben valer la unidad en el nodo i y cero en todos los demás, se escriben usando como referencia la parte de izquierda de la Figura 4:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (2.29)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (2.30)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (2.31)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (2.32)$$

La matriz jacobiana⁷ del cambio de variables del elemento e se obtiene derivando 2.25 y 2.26:

$$\begin{aligned} J^e &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\eta - 1) & (1 - \eta) & (\eta + 1) & -(\eta + 1) \\ (\xi - 1) & -(1 + \xi) & (1 + \xi) & (1 - \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \quad (2.33) \end{aligned}$$

De la misma manera, la matriz jacobiana inversa escrita en términos de los elementos de 2.33:

$$J^{e-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

⁷ Habitualmente, la matriz jacobiana de un cambio de variables $x, y \rightarrow \xi, \eta$ se escribe $J^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$.

Por conveniencia en la notación nosotros adoptaremos la forma descrita en 2.33.

El vector de desplazamientos nodales de un elemento genérico, como el mostrado en la parte izquierda de la Figura 4, es:

$$d^e = \begin{pmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

El campo de deformaciones del elemento, se obtiene derivando 2.27 y 2.28 según 2.2:

$$\varepsilon^e = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) u_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) v_i^e \\ \sum_{i=1}^4 \left[\left(\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) u_i^e + \left(\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) v_i^e \right] \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Que matricialmente se puede escribir:

$$\varepsilon^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Y definiendo:

$$P^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}
Q^e &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\eta - 1) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (\eta + 1) & 0 & -(\eta + 1) & 0 \\ (\xi - 1) & 0 & -(\xi + 1) & 0 & (\xi + 1) & 0 & (1 - \xi) & 0 \\ 0 & (\eta - 1) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (\eta + 1) & 0 & -(\eta + 1) \\ 0 & (\xi - 1) & 0 & -(\xi + 1) & 0 & (\xi + 1) & 0 & (1 - \xi) \end{pmatrix} \quad (2.39)
\end{aligned}$$

De esta manera, usando 2.38, 2.39 y 2.35, podemos escribir el vector de deformaciones de un elemento, definido en 2.36, usando únicamente las componentes de la matriz jacobiana y las derivadas parciales de la funciones de forma en coordenadas naturales:

$$\varepsilon^e = P^e Q^e d^e \quad (2.40)$$

Por otro lado, la ley de comportamiento, para este caso, se obtendrá de 2.1 particularizando para el caso plano:

$$\sigma^e = \begin{pmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{pmatrix} = D^e \varepsilon^e = D^e \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Donde D^e será una matriz 3×3 que, habiendo asumido ya elasticidad lineal, dependerá del tipo de hipótesis que se haga (deformación plana, tensión plana u ortotropía). Las posibles formas de D^e que asumamos serán especificadas más adelante.

Teniendo en cuenta 2.40 y 2.41, podemos escribir para la matriz de rigidez local del elemento plano, utilizando 2.20:

$$k^e = t^e \int_{S^e} N_e^T B_e^T D_e B_e N_e dx dy = t^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q^{eT} P^{eT} D_e P^e Q^e \det(J^e) d\xi d\eta \quad (2.42)$$

Donde t^e es el espesor del elemento e y S^e representa el dominio superficial del elemento plano. Vemos que hemos integrado en la dirección de z , considerando que todos los elementos del integrando son constantes en esta dirección.

Y, sustituyendo 2.42 en 2.19, tendremos para nuestro sistema:

$$F_{ext} = Kd = \sum_{e=1}^E \left(A^{eT} \left(t^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q^{eT} P^{eT} D_e P^e Q^e \det(J^e) d\xi d\eta \right) A^e \right) d \quad (2.43)$$

Que representa una forma operativa del método de los elementos finitos para elasticidad plana cuando se utilizan elementos isoparamétricos de cuatro nodos para un problema en el que se definen N nodos y e elementos (2 grados de libertad por nodo, $2N$ grados de libertad totales y 4 nodos por elemento). Los elementos que aparecen en 2.43 son:

$F_{ext}(2Nx1)$ es el vector de cargas externas sobre los grados de libertad en numeración global

$d(2Nx1)$ es el vector de desplazamientos nodales en numeración global

$D_e(3x3)$ es la matriz de comportamiento para elasticidad plana del elemento e

$P^e(3x4)$ es la matriz definida en 2.38 que contiene los elementos del jacobiano de la transformación

$Q^e(4x8)$ es la matriz definida en 2.39 que contiene las derivadas parciales de las funciones de forma

$A^e(8x2N)$ matriz de ensamblaje definida en 2.18 que relaciona las coordenadas globales y locales

2.3. Puntos de cuadratura

Para poder automatizar correctamente el proceso de integración necesario para obtener los elementos de la matriz de rigidez a nivel de elemento en 2.42, utilizaremos una fórmula de integración gaussiana.

Estas fórmulas se utilizan para aproximar la integral definida de una determinada función mediante una suma (ponderada con unos determinados coeficientes C_i) de evaluaciones de la función del integrando en determinados puntos, llamados puntos de cuadratura, que elegidos convenientemente minimicen el error de la aproximación.

Una aplicación de estas fórmulas, para las integrales que tenemos que resolver en 2.42, sería:

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^S C_i f(x_i) \quad (2.44)$$

Cuanto más sumandos S se elijan, el grado de aproximación de la fórmula será mejor aunque también se tendrá más coste computacional. Dado el grado de los polinomios que queremos aproximar, en nuestro caso será suficiente con elegir dos sumandos ($S = 2$).

Evidentemente la fórmula anterior, cuando la función $f(x)$ es un polinomio, puede ser exacta en función del grado del polinomio y de la cantidad S de sumandos que elijamos. Si elegimos $S = 2$ habrá que fijar cuatro cantidades en 2.44 que serían los dos coeficientes C_1 y C_2 y los dos puntos de cuadratura x_1 y x_2 .

Por otro lado, la integral definida de un polinomio de grado tercero vendrá determinada por cuatro coeficientes. Estos coeficientes son a_3 , a_2 , a_1 y a_0 :

$$\begin{aligned} \int_a^b (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)dx &= \left[\frac{a_3}{4}x^4 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + D \right]_a^b \\ &= \frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) + \frac{a_2}{3}(b^3 - a^3) + \frac{a_1}{2}(b^2 - a^2) + a_0(b - a) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Así que igualando 2.44 y 2.45 (para el caso en que $a = -1$ y $b = 1$) obtendremos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas del que despejar los coeficientes de la fórmula de aproximación:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_3}{4}(1^4 - (-1)^4) + \frac{a_2}{3}(1^3 - (-1)^3) + \frac{a_1}{2}(1^2 - (-1)^2) + a_0(1 - (-1)) \\
&= C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) \\
&= C_1(a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0) \\
&+ C_2(a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0) \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Así se obtiene:

$$C_1 x_1^3 + C_2 x_2^3 = 0$$

$$C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 2$$

Que tras despejar:

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Así 2.44 quedaría:

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (2.47)$$

Esta fórmula, evidentemente, producirá resultados exactos si los polinomios a integrar son de grado menor o igual que tres. La particularización para integrales dobles como las que habría que resolver en 2.42 es inmediata, basta con aplicar la fórmula 2.47 dos veces:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \approx \int_{-1}^1 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, y\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, y\right) dy \\
&\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (2.48)
\end{aligned}$$

2.4. Elasticidad plana. Materiales isótropos y ortótropos

Quedaría para terminar de construir el método, especificar la ley de comportamiento lineal que queremos implementar. En nuestro caso, partiremos de la expresión más general para elasticidad lineal dada por 2.1 y explicitaremos las leyes de comportamiento para los casos de materiales isótropos y ortótropos en el caso plano.

Para dar valor a las constantes del tensor D , en 2.1, hace falta asumir algún tipo de comportamiento. Para el caso de materiales isotrópicos, en ejes cualesquiera, las ecuaciones de Lamé fijan los siguientes valores para las constantes del tensor⁸:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2G + \lambda) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (2G + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (2G + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Donde las constantes G y λ están relacionadas con el módulo de Young E y la constante de Poisson ν de la siguiente manera:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.50)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.51)$$

Para elasticidad plana se pueden hacer dos tipos de hipótesis. En primer lugar, se tiene la hipótesis de tensión plana:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (2.52)$$

Y, por tanto, de la cuarta y quinta de las filas de 2.49 se sigue:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (2.53)$$

Mientras que de la tercera, se tiene que:

$$0 = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (2G + \lambda)\varepsilon_z$$

Que permite despejar:

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{(2G + \lambda)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (2.54)$$

Y que nos permite calcular la deformación en la dirección z en función de las otras dos. De esta manera, sustituyendo 2.54 en la primera y segunda relación de 2.49 y utilizando 2.50 y 2.51, se tiene:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{(1 - \nu)}{2} \gamma_{xy}$$

⁸ Se ha tomado como referencia las expresiones expuestas en el capítulo 3 de (Zienkiewicz, 1994).

Podemos condensar las magnitudes anteriores en una relación de la forma dada en 2.41:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Y calcular ε_z en función de ε_x y ε_y a través de 2.54.

En segundo lugar, se puede hacer la hipótesis de deformación plana:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.56)$$

Y, por tanto, de la cuarta y quinta de las filas de 2.49 se sigue:

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (2.57)$$

De la primera, segunda y tercera relación de 2.49 y utilizando 2.50 y 2.51, se tiene:

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_y \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_x + \varepsilon_y \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \gamma_{xy}$$

Que también se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{pmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Conviene recordar que los tensores dados en 2.55 y 2.58 son tensores dentro de la asunción de elasticidad plana bajo hipótesis de tensión plana y deformación plana respectivamente. Además, ambos están obtenidos a partir de las ecuaciones de Lamé para materiales isotrópicos y, por tanto, no cambian su forma cuando se expresan en otros ejes distintos.

Por último, se tiene que la ley de comportamiento en tensión plana para materiales ortótropos en ejes principales es:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^e \\ \sigma_y^e \\ \tau_{xy}^e \end{pmatrix} = Q' \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^e \\ \varepsilon_y^e \\ \gamma_{xy}^e \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

La matriz Q' en función de las constantes elásticas del material ortótropo es:

$$Q' = \frac{E_{11}E_{22}G_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu_{21}}{E_{22}G_{12}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_{11}G_{12}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_{11}E_{22}G_{12}}\right)G_{12} \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Donde las cantidades E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21} y G_{12} son cinco constantes que definen el comportamiento del material ortótropo. Gracias a la condición de simetría del tensor 2.60 se tendrá $\frac{\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{E_{11}}$. El tensor Q' , definido en 2.59, expresado en otros ejes que no sean de ortotropía y que formen con éstos un ángulo α (medido positivo en el sentido opuesto al movimiento de las agujas del reloj tal y como se muestra la Figura 5) será un tensor lleno:

$$D_e^p(\alpha_p) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Las relaciones entre las componentes del tensor en ejes cualesquiera, dado en 2.61, con las componentes en ejes principales, dado en 2.59 son:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q'_{11} \cos^4 \alpha + Q'_{22} \sin^4 \beta + (2Q'_{12} + 4Q'_{66}) \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ Q_{22} &= Q'_{11} \sin^4 \beta + Q'_{22} \cos^4 \alpha + (2Q'_{12} + 4Q'_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \beta \\ Q_{66} &= (Q'_{11} + Q'_{22} - 2Q'_{66} - 2Q'_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + Q'_{66}(\cos^4 \alpha + \sin^4 \beta) \\ Q_{12} &= (Q'_{11} + Q'_{22} - 4Q'_{66}) \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + Q'_{12}(\cos^4 \alpha + \sin^4 \beta) \\ Q_{16} &= (Q'_{11} - 2Q'_{66} - Q'_{12}) \cos^3 \alpha \sin \beta + (Q'_{12} - Q'_{22} + 2Q'_{66}) \cos \alpha \sin^3 \beta \\ Q_{26} &= (Q'_{11} - 2Q'_{66} - Q'_{12}) \sin \alpha \cos^3 \beta + (Q'_{12} - Q'_{22} + 2Q'_{66}) \sin \beta \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.62)$$

Donde:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

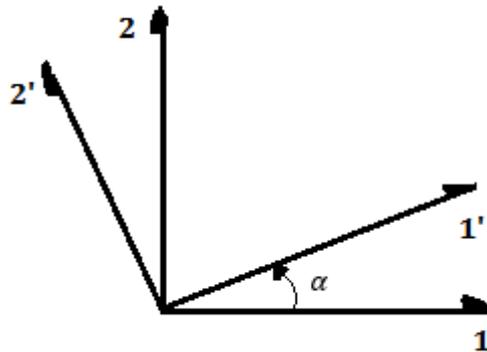


Figura 5. Rotación entre ejes principales y ejes cualesquiera

La generalización para las matrices elementales de rigidez para laminados conformados con láminas con distintas orientaciones, se hace integrando para los distintos espesores a partir de 2.42:

$$k^e = \sum_{p=1}^P t_p^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q^{eT} P^{eT} D_e^p(\alpha_p) P^e Q^e \det(J^e) d\xi d\eta \quad (2.63)$$

Donde t_p^e es el espesor del elemento e de la lámina p y $D_e^p(\alpha_p)$ es la matriz de comportamiento del elemento e y de la lámina p girada respecto de los ejes principales de ortotropía un ángulo α_p y dada por 2.61.

2.5. Recuperación de gradientes

Una vez que hayamos resuelto el sistema 2.19, sujeto a las condiciones de contorno de nuestro problema, tendremos disponible el vector de desplazamientos nodales d . Con este vector, a través de 2.27 y 2.28, podremos obtener las componentes del campo de desplazamiento en función de las coordenadas naturales ξ y η . A través de 2.40 y 2.41, de igual manera, podremos obtener los campos de deformaciones y tensiones respectivamente.

Evidentemente, dado que las funciones de forma son lineales y todos los elementos confluyentes en un nodo tendrán el mismo valor del campo de desplazamiento cuando se evalúan en dicho nodo, tendremos que el campo de desplazamiento es continuo y su variación, tal y como asumimos al principio, es lineal.

Por otro lado, dado que las deformaciones se calculan como las derivadas de los desplazamientos, éstas serán continuas en el elemento. Sin embargo, el valor de las deformaciones que se obtendrá en cada uno de los elementos confluyente en un nodo será distinto en ese nodo. Por este motivo, los campos de deformaciones y de tensiones serán continuos dentro de cada elemento pero discontinuos de un elemento a otro en contraposición con el significado físico de tensiones y deformaciones que se maneja en el campo de los medios continuos.

Esto no debe extrañar ya que el método de elementos finitos parte de determinadas hipótesis que hacen que las soluciones que se obtengan a través de él constituyan aproximaciones de la solución. En concreto, la forma lineal del campo de desplazamientos de la que se parte es una suposición.

Sin embargo, el método de elementos finitos, cuando se cumplen determinadas condiciones, converge a la solución del problema elástico cuando el tamaño de los elementos finitos que se proponen tiende a cero.

Así que, debido a lo anterior, cuando el tamaño de los elementos finitos se va haciendo más pequeño los valores de las deformaciones y tensiones en los distintos elementos que confluyen en un nodo, cuando se evalúan en éste, deben ir acercándose al mismo valor, para que en el límite los campos obtenidos sean continuos.

A efectos de obtener campos de deformaciones y tensiones continuos podemos seguir diversas estrategias. Por ejemplo, podemos considerar que las componentes del tensor de deformaciones y tensiones varían linealmente dentro de cada elemento a partir de unos valores en los nodos calculados como la media de los diversos valores que se tienen en estos nodos provenientes de los diversos elementos que confluyen en ese nodo. El esquema de la Figura 6 muestra un ejemplo unidimensional para tres nodos 1, 2 y 3 y dos elementos A y B:

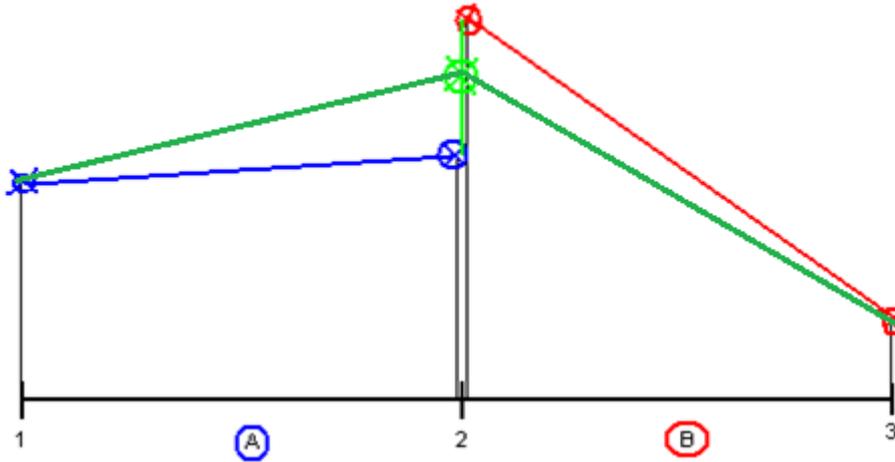


Figura 6. Esquema del campo de desplazamiento de los elementos A y B confluyentes en el nodo 2

En este ejemplo, se tiene, al derivar el campo de desplazamiento que se ha obtenido aplicando el método, un campo de deformaciones⁹ en el elemento A (en color azul) y otro en el elemento B (en color rojo). A partir de los valores de la deformación, se calcula el valor medio en los nodos (en este caso sólo en el nodo 2 ya que los otros dos nodos sólo pertenecen a un elemento) y sobre estos valores medios se construye el nuevo campo de deformaciones (en color verde).

Otra estrategia consiste en calcular primeramente, en cada elemento, el valor de las deformaciones en los puntos de cuadratura, extrapolar estos valores a los nodos y a partir de aquí calcular el promedio de los valores proveniente de cada uno de los elementos. Finalmente construir el campo interpolando linealmente desde los nodos. Un esquema se presenta en la Figura 7:

⁹Y también de tensiones

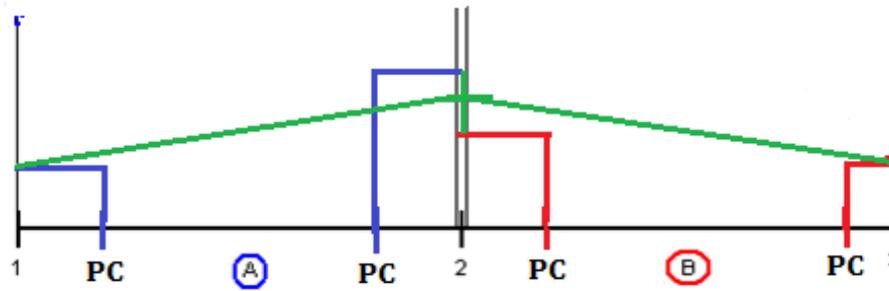


Figura 7. Esquema del campo de desplazamiento de los elementos A y B confluente en el nodo 2 extrapolando a partir de los puntos de cuadratura

Donde los puntos de cuadratura están representados en la Figura 7 con las letras *PC*. Las propiedades de los puntos de cuadratura hacen que esta última estrategia sea utilizada por la mayoría de los programas comerciales de elementos finitos y será la que utilizaremos aquí.

Debemos recordar que la solución que se ha obtenido usando el método de elementos finitos termina cuando se obtienen los desplazamientos nodales y se reconstruye el campo de desplazamiento a partir de 2.27 y 2.28. Estas soluciones tienen las limitaciones que se han expuesto y, por tanto, las estrategias seguidas para obtener a partir de éstas los campos de deformación y tensión continuos tienen un interés meramente gráfico.

3. Descripción del método

Expondremos en este capítulo, utilizando todos los elementos mostrados hasta ahora, cual es el procedimiento que seguiremos para aplicar el método de elementos finitos a un problema concreto y explicitaremos los programas que se han desarrollado, indicando sus entradas y salidas.

3.1. Esquema del método

Se supondrán conocidas las propiedades elásticas del material en cuestión (módulo de Young E y módulo de Poisson ν para isótropos y las cinco constantes elásticas E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21} y G_{12} además de la orientación de los ejes principales para materiales ortótropos). También contaremos con los distintos espesores de los elementos.

Partiremos de un dominio, que ya haya sido previamente mallado, en el que se habrán establecido N nodos y N_e elementos cuadriláteros como los que se han expuesto en el apartado 2.2. Los nodos deben estar enumerados y deben conocerse sus coordenadas así como cuales son los nodos que conforman cada elemento (lo que se conocerá como conectividad).

En cada nodo habrá definidos dos grados de libertad (uno horizontal y otro vertical) por lo que habrá $2N$ grados de libertad en el modelo completo. En cada elemento, por tanto, habrá definidos ocho grados de libertad (2 por nodo). Y el vector de desplazamientos locales referidos a un elemento e vendrá dado por 2.35.

Se seguirán los siguientes pasos:

1. A partir de las coordenadas de los nodos y la conectividad se calcularán cada una de las matrices de rigidez local de cada uno de los elementos utilizando la expresión que se obtiene de sustituir en 2.42 la fórmula de cuadratura dada en 2.48:

$$k^e \approx t^e \sum_{k=1}^4 Q^e T(\xi_k, \eta_k) P^e T(\xi_k, \eta_k) D_e P^e(\xi_k, \eta_k) Q^e(\xi_k, \eta_k) \det(J^e(\xi_k, \eta_k)) \quad (2.64)$$

Los puntos de cuadratura se recogen en la siguiente tabla:

k	ξ_k	η_k
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Tabla 1. Coordenadas de los puntos de cuadratura para la integración de los elementos de la matriz de rigidez local

Donde $J^e(\xi_k, \eta_k)$ se escribe, a partir de 2.33:

$$J^e(\xi_k, \eta_k) = \begin{pmatrix} J_{11}(\xi_k, \eta_k) & J_{12}(\xi_k, \eta_k) \\ J_{21}(\xi_k, \eta_k) & J_{22}(\xi_k, \eta_k) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\eta_k - 1) & (1 - \eta_k) & (\eta_k + 1) & -(\eta_k + 1) \\ (\xi_k - 1) & -(1 + \xi_k) & (1 + \xi_k) & (1 - \xi_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Y $P^e(\xi_k, \eta_k)$ y $Q^e(\xi_k, \eta_k)$ se escriben a partir de 2.38 y 2.39 respectivamente:

$$P^e(\xi_k, \eta_k) = \frac{1}{\det(J^e(\xi_k, \eta_k))} \begin{pmatrix} J_{22}(\xi_k, \eta_k) & -J_{12}(\xi_k, \eta_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21}(\xi_k, \eta_k) & J_{11}(\xi_k, \eta_k) \\ -J_{21}(\xi_k, \eta_k) & J_{11}(\xi_k, \eta_k) & J_{22}(\xi_k, \eta_k) & -J_{12}(\xi_k, \eta_k) \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

$$Q^e(\xi_k, \eta_k) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\eta_k - 1) & 0 & (1 - \eta_k) & 0 & (\eta_k + 1) & 0 & -(\eta_k + 1) & 0 \\ (\xi_k - 1) & 0 & -(\xi_k + 1) & 0 & (\xi_k + 1) & 0 & (1 - \xi_k) & 0 \\ 0 & (\eta_k - 1) & 0 & (1 - \eta_k) & 0 & (\eta_k + 1) & 0 & -(\eta_k + 1) \\ 0 & (\xi_k - 1) & 0 & -(\xi_k + 1) & 0 & (\xi_k + 1) & 0 & (1 - \xi_k) \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Y D_e es la matriz de rigidez elástica del elemento e y que dependiendo del tipo de hipótesis que se haga tendrá la forma correspondiente. Para tensión plana isótropa adoptará la forma 2.55. Para deformación plana isótropa la forma a utilizar será la 2.58 y para materiales ortótropos adoptará la forma 2.61. Estas matrices se calcularán a partir de las propiedades elásticas del material que se esté tratando y la orientación de los ejes principales para el caso de materiales ortótropos.

Además si se tratara de un laminado habría que sustituir 2.64 por la expresión resultante de sustituir la fórmula de cuadratura 2.48 en 2.63:

$$k^e \approx \sum_{p=1}^P t_p^e \sum_{k=1}^4 Q^{eT}(\xi_k, \eta_k) P^{eT}(\xi_k, \eta_k) D_e^p(\alpha_p) P^e(\xi_k, \eta_k) Q^e(\xi_k, \eta_k) \det(J^e(\xi_k, \eta_k)) \quad (2.68)$$

También será necesario obtener las matrices de ensamblaje que relacionen los grados de libertad locales de cada elemento con el vector de grados de libertad globales que tendrán la misma forma que la explicitada en 2.18. La entrada de la matriz de ensamblaje del elemento e que relaciona el grado de libertad global i con el local j , vendrá representada por A_{ij}^e .

La entrada A_{ij}^e valdrá la unidad si, en el elemento e , el grado de libertad global i coincide con el grado de libertad local j y será nula en caso contrario.

2. Una vez que se hayan obtenido todas las matrices de rigidez local correspondiente a cada elemento del dominio y las matrices de ensamblaje asociadas a cada elemento concreto, se obtendrá la matriz de rigidez total utilizando 2.19:

$$K = \sum_{e=1}^E (A^{eT} k^e A^e) \quad (2.69)$$

3. En este punto utilizando 2.69, escribiremos un sistema de la forma dada en 2.19. Así, tal y como se dijo allí, se tendrá un sistema de la forma:

$$F = Kd$$

Los vectores F y d son los vectores de fuerzas y desplazamientos nodales ordenados según la numeración global del sistema. Este sistema representa un sistema de $2N$ ecuaciones que deberán ser independientes entre sí para que sea determinado. En principio, este sistema no será determinado ya que a cualquier vector de desplazamientos nodales que sea solución de este sistema se le podrá sumar un vector

de desplazamientos que represente un movimiento como sólido rígido y que siga siendo solución.

Por tanto, las condiciones de contorno deben ser tales que impidan el movimiento como sólido rígido haciendo que el sistema sea determinado.

Las condiciones de contorno, tal y como se indicó al final del apartado 2.1, pueden establecer algunos de los desplazamientos, algunas de las fuerzas o ser mixtas y establecer ambas cosas. En cualquier caso, la cantidad de magnitudes desconocidas (ya sea en el vector de fuerzas externas, en el vector de desplazamientos o en ambas) debe ser $2N$ para que el sistema siga siendo compatible determinado.

Es, en este punto, donde conviene tener el vector de desplazamientos d ordenado de forma tal que sean los grados de libertad cuyos desplazamientos imponen las condiciones de contorno los que aparezcan primero y los grados de libertad cuyos desplazamientos se desconocen los que aparezcan después.

Dado que la numeración de los nodos inicial, por defecto, no establecerá que los nodos estén ordenados de esta manera habrá que reordenar el sistema (intercambiando filas y columnas) para que se pueda hacer uso de la representación por bloques que se propuso en 2.21.

Así utilizando 2.22 y 2.24 se podrán despejar d_2 y F_1 y conocer los valores de las fuerzas y desplazamientos nodales.

4. Una vez que hayamos obtenido todas las incógnitas volveremos a ordenar los vectores de fuerza y desplazamientos nodales de acuerdo a la numeración original.
5. A partir de estos valores, utilizando las expresiones 2.27 y 2.28 y las coordenadas de los puntos de cuadratura de la Tabla 1, obtendremos los valores de los desplazamientos en los puntos de cuadratura. Equivalentemente, obtendremos los valores de las deformaciones y las tensiones respectivamente a partir de 2.40 y 2.41 en los puntos de cuadratura utilizando las matrices de ensamblaje (introducidas en 2.18) para relacionar los grados de libertad locales con los globales:

$$\varepsilon^e(\xi_k, \eta_k) = P^e(\xi_k, \eta_k) Q^e(\xi_k, \eta_k) A^e d \quad (2.70)$$

$$\sigma^e(\xi_k, \eta_k) = D^e P^e(\xi_k, \eta_k) Q^e(\xi_k, \eta_k) A^e d \quad (2.71)$$

6. Extrapolaremos los valores de las deformaciones y las tensiones en los puntos de cuadratura a los nodos y posteriormente asociaremos a cada nodo los valores promedio de las deformaciones y tensiones de todos los elementos que confluyen en ese nodo tal y como se expuso en 2.5.

7. Construiremos finalmente los campos de deformaciones y tensiones desde los nodos al interior de los elementos mediante una interpolación lineal obteniendo así campos continuos.

3.2. Algoritmos

En este apartado, haremos una descripción de los diversos ficheros que compondrán el programa efectuado en matlab que implementará el método de elementos finitos para problemas tenso-deformacionales en régimen de elasticidad plana.

Se utilizará la descripción de los distintos pasos efectuados en el apartado 3.1 para indicar la funcionalidad de cada rutina. Se enumerarán a continuación las distintas rutinas, especificando las variables de entrada que necesitan y las variables de salida que aportan. Debemos recordar que partimos de un dominio previamente mallado con una malla compuesta por N nodos y N_e elementos donde hay definidos dos grados de libertad por nodo. Además es conocida la conectividad entre elementos.

Se especificarán las dimensiones de cada matriz definida:

- Fichero con los **datos de entrada**. Carga las matrices llamadas $Xnod$ y $Cnod$. Cada matriz contiene:
 - $Xnod$ ($N \times 2$): La fila i -ésima de esta matriz corresponde al i -ésimo nodo del modelo. La primera columna corresponde a los valores de abcisas y la segunda a los valores de ordenadas.
 - $Cnod$ ($N_e \times 4$): La fila i -ésima de esta matriz corresponde al i -ésimo elemento del modelo. La fila i -ésima contiene por columnas, de la primera a la cuarta, la numeración de los cuatro nodos que conforman el elemento, ordenados en el sentido opuesto a las agujas del reloj.
- Fichero **main**: Encargado de ejecutar todas las tareas necesarias:
 - En primer lugar, genera una matriz que contiene las propiedades del sólido de estudio. Genera, para el caso de tensión plana y deformación plana isótropas, una matriz llamada $PROpel$ ($N_e \times 3$) que contiene por filas cada uno de los elementos y por columnas el módulo de Young E , módulo de Poisson ν y el espesor t . Y, para el caso, de un laminado conformado por varias láminas en tensión plana, genera una matriz llamada $PROpel_comp$ (N° de laminas $\times 8$) que contiene por filas cada una de las láminas del laminado y por columnas respectivamente las propiedades E_{11} , E_{22} , ν_{12} , ν_{21} , G_{12} , t , α y β de cada una de las láminas.
 - Se establece una bandera llamada TH que permite discernir el tipo de hipótesis que se asumirá:

- $TH = 1$. Deformación plana isótropa.
 - $TH = 2$. Tensión plana isótropa.
 - $TH = 3$. Laminados ortótropos en tensión plana.
- Ejecuta la función llamada *local* que genera las matrices de rigidez local de cada elemento y las matrices de ensamblaje. Éste es el primer paso descrito en el apartado anterior.
 - Ejecuta la función llamada *globale* que genera la matriz de rigidez del sistema a partir de las matrices de rigidez local y las matrices de ensamblaje. Éste es el segundo paso descrito en el apartado anterior.
 - Se rellenan aquellas entradas del vector de fuerzas F que impongan las condiciones de contorno y el resto de entradas, que son desconocidas a priori, se rellenan con ceros.
 - Se construye un vector que indica la numeración de los nodos en cuyos grados de libertad, las condiciones de contorno imponen desplazamientos.
 - Ejecuta la función *reorder_matrix* que genera una matriz, llamada RM , que relaciona el vector de desplazamientos nodales ordenado de la forma expuesta en el tercer punto del apartado anterior con el vector de desplazamientos nodales ordenados según la numeración global inicial del sistema:

$$d = RM \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

- Usando la matriz RM se construyen los elementos que se proponen en 2.21. A saber, el vector de fuerzas ordenado¹⁰ según F_1 y F_2 y las matrices K_{11} , K_{12} , K_{21} y K_{22} :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = RM^{-1} F$$

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = RM^{-1} K RM$$

- Se imponen las condiciones de contorno en desplazamientos y mediante 2.22 y 2.24 se despejan d_2 y F_1 . Éste es el tercer paso desarrollado en el apartado anterior.
- Volviendo a utilizar la matriz RM , se vuelven a reordenar el vector de desplazamientos nodales y el vector de fuerzas (ahora completamente conocidos) según la numeración global. Éste es el cuarto paso desarrollado en el apartado anterior:

¹⁰ Evidentemente, como las entradas que eran desconocidas del vector F se rellenaron con ceros, en este momento las entradas de F_1 serán nulas. Estos valores se calcularán en el siguiente punto usando 2.24.

$$F = RM \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$d = RM \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

- Usando las matrices de rigidez local y las matrices de ensamblaje se construyen los vectores de fuerza elementales aplicadas en los grados de libertad de cada elemento finito:

$$F_{elemental}^{local} = k^e A^e d$$

Al construir los vectores de fuerzas $F_{elemental}^{local}$ y sumar todos los vectores correspondientes a los diversos elementos que confluyen en cada nudo deben verificarse las relaciones de equilibrio que se explicitaron en el apartado 2.1.

- Ejecuta la función llamada *solucion* que calcula los valores de las deformaciones y tensiones en los puntos de cuadratura a partir de las matrices de rigidez de los elementos, las matrices de ensamblaje, el vector de desplazamientos nodales, las coordenadas nodales y las conectividades. Éste es el quinto paso desarrollado en el apartado anterior.
- Ejecuta la función llamada *campos* que calcula el promedio de los campos de tensiones y deformaciones provenientes de todos los elementos que confluyen en cada nodo, extrapolando a partir de los valores en los puntos de cuadratura de cada elemento, las conectividades y las coordenadas nodales. Éste es el sexto paso desarrollado en el apartado anterior.
- Usando el comando *fill* de matlab se construyen gráficos de colores para representar los campos de deformaciones, tensiones y desplazamientos calculados interpolando linealmente a partir de los valores en los nodos obtenidos como el promedio de los valores en los puntos de cuadratura del paso anterior, las coordenadas nodales y las conectividades. Éste es el séptimo paso desarrollado en el apartado anterior.
- Función **local**:
 - Variables de entrada:
 - *Xnod*
 - *Cnod*
 - *Propel*
 - *Propel_com*
 - *TH*
 - Variables de salida:
 - k ($8 \times 8 \times N_e$): Hipermatriz de rigideces locales. La tercera dimensión de la hipermatriz contiene las matrices de rigidez local de todos los elementos.

- $A(8 \times 2N \times N_e)$: Hipermatriz de matrices de ensamblaje. La tercera dimensión de la hipermatriz contiene las matrices de ensamblaje de todos los elementos.
 - $D_e(3 \times 3 \times N_e)$: Hipermatriz de rigideces. La tercera dimensión de la hipermatriz contiene las matrices de rigidez de todos los elementos.
- Función **globale**:
 - Variables de entrada:
 - k
 - A
 - Variables de salida:
 - $kg(2N \times 2N)$: Matriz de rigidez global del sistema.
- Función **reorder_matrix**:
 - Variables de entrada:
 - emp : Vector fila que contiene la numeración de los grados de libertad cuyos desplazamientos son impuestos por las condiciones de contorno.
 - $N_$: Dimensión de la matriz de rigidez global del sistema.
 - T : Longitud del vector emp .
 - Variables de salida:
 - $RM(2N \times 2N)$: Matriz de reordenamiento.
- Función **solucion**:
 - Variables de entrada:
 - D_e
 - A
 - $d(2N \times 1)$: Vector de desplazamientos nodales.
 - $Xnod$
 - $Cnod$
 - Variables de salida:
 - $epsilon(3 \times 4 \times N_e)$: Hipermatriz que contiene las deformaciones en los puntos de cuadratura. Por filas las tres componentes del tensor de deformaciones ϵ_x^e , ϵ_y^e y γ_{xy}^e y por columnas cada uno de los cuatro puntos de cuadratura. La tercera dimensión almacena cada elemento del modelo.
 - $sigma(3 \times 4 \times N_e)$: Hipermatriz que contiene las tensiones en los puntos de cuadratura. Por filas las tres componentes del tensor de tensiones σ_x^e , σ_y^e y τ_{xy}^e y por columnas cada uno de los cuatro puntos

de cuadratura. La tercera dimensión almacena cada elemento del modelo.

- Función **campos**:
 - Variables de entrada:
 - *epsilon*
 - *sigma*
 - *Cnod*
 - *Xnod*
 - Variables de salida:
 - *deformaciones* ($3 \times N$): Contiene por filas los valores de las tres componentes del tensor de deformaciones y por columnas cada uno de los nodos del modelo. Los valores del campo en los nodos se han calculado obteniendo el promedio utilizando la función *presencia* para detectar cuántos elementos coinciden en un nodo, cuáles son estos elementos y en qué columnas de la matriz de conectividad se encuentra dicho nodo.
 - *tensiones* ($3 \times N$): Contiene por filas los valores de las tres componentes del tensor de tensiones y por columnas cada uno de los nodos del modelo. Los valores del campo en los nodos se han calculado obteniendo el promedio utilizando la función *presencia* para detectar cuántos elementos coinciden en un nodo, cuáles son estos elementos y en qué columnas de la matriz de conectividad se encuentra dicho nodo.
- Función **presencia**:
 - Variables de entrada:
 - *Cnod*
 - *nodo*(1×1): Numeración del nodo del que queremos comprobar su presencia.
 - Variables de salida:
 - *R*(n° de elementos que coinciden en el nodo $\times 2$): Tiene tantas filas como elementos coinciden en el nodo en cuestión. En la primera columna, se encuentra el elemento que contiene el nodo en cuestión y en la segunda, la columna que ocupa el nodo en el elemento correspondiente de la matriz de conectividad.
 - *repetido* (1×1): N^o de elementos que coinciden en el nodo en cuestión.

4. Algunos ejemplos

En este apartado, mostraremos algunos resultados que se han obtenido con las rutinas expuestas para el caso de dos problemas concretos y los compararemos con los resultados obtenidos con el software comercial *Abaqus*. El objetivo es comprobar la bondad de los resultados que se obtienen al utilizar las rutinas desarrolladas, comparándolos con los resultados obtenidos al utilizar un paquete de programas suficientemente consolidado en la aplicación del método de los elementos finitos.

Dado que la recuperación de gradientes para obtener los campos de deformaciones y de tensiones puede realizarse siguiendo diversas estrategias, tal y como se ha expuesto en el apartado 2.5, y que todas las estrategias¹¹ parten del vector de desplazamientos nodales, centraremos la atención en comparar el vector de desplazamientos obtenido con las rutinas desarrolladas con el vector de desplazamientos obtenido con *Abaqus*.

El módulo *Abaqus CAE*, que se utiliza para introducir la geometría del problema, el tipo de material, las condiciones de contorno, el vector de cargas externo, realizar el mallado y visualizar los resultados permite analizar el problema partiendo de muchos tipos de hipótesis diferentes y haciendo consideraciones, en un grado alto, muy distintas a las que se han hecho en los capítulos precedentes.

Se hace, por tanto, necesario de cara a comparar resultados, seleccionar aquellas opciones que aseguren que las dos simulaciones están destinadas a resolver el mismo problema. Por ello, sin ánimo de hacer una descripción pormenorizada de los módulos de *Abaqus*, se hace interesante explicitar cuales son los elementos, constantes e hipótesis que se han seleccionado para lanzar las simulaciones de las cuales se han extraído los cálculos que se mostrarán más adelante.

En concreto, se utilizarán elementos geométricos planos tipo *shell* a los que se ha asociado una sección con las siguientes propiedades mecánicas:

- E (módulo de Young) : $70 * 10^9 \frac{N}{m^2}$
- ν (módulo de Poisson): 0.03
- t (espesor): 0.005 m

El tipo de malla que se ha seleccionado es una malla tipo *QUAD* estructurada para obligar al programa a que genere una malla compuesta de elementos cuadriláteros que encajen entre ellos y configuren todo el dominio. Los elementos usados son elementos tipo CPS4.

Asimismo, es interesante recordar que las rutinas desarrolladas parten siempre de un dominio que ha sido previamente mallado y del que se conocen las coordenadas de los nodos (contenidos en una matriz llamada *Xnod*) y la conectividad de los distintos elementos (contenidas en una matriz llamada *Cnod*).

¹¹ Estas estrategias también son seleccionables en el módulo *Abaqus CAE* a la hora de mostrar los campos de deformaciones y tensiones.

Para obtener estas matrices haremos un procesado de los datos registrados en el fichero con extensión *.inp*, dentro del set de ficheros que produce *Abaqus* tras mallar el dominio de estudio, para que sean legibles por matlab.

4.1. Un ejemplo sencillo

En este caso, aplicaremos las rutinas obtenidas a un problema concreto de geometría sencilla y considerando una malla de pocos nodos y pocos elementos finitos para que se puedan exponer y analizar de forma cómoda. Un esquema del problema se presenta en la Figura 8:

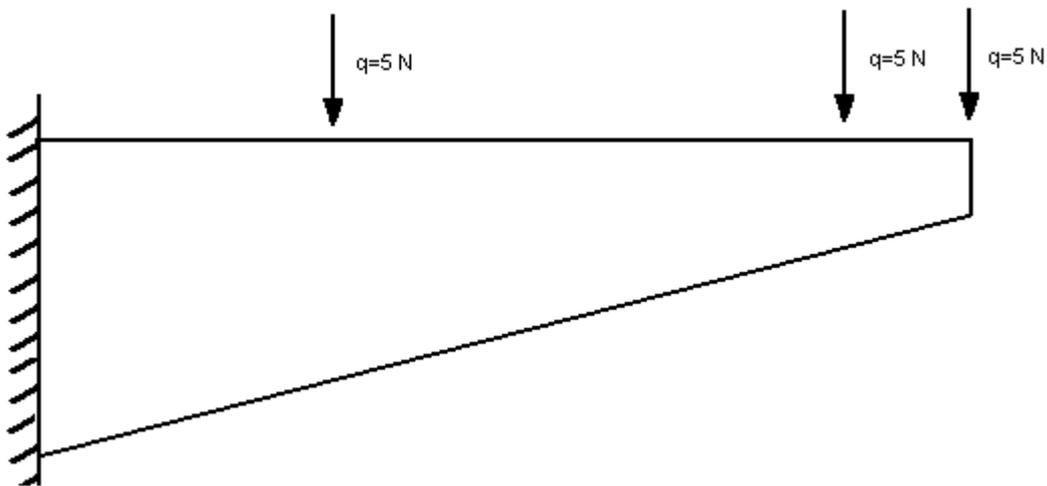


Figura 8. Esquema de un problema sencillo

Se pueden hacer las siguientes consideraciones:

- Las condiciones de contorno en cargas se concretan en tres cargas puntuales de 5 N. Será conveniente, por tanto, para poder modelar correctamente el problema definir nodos en los puntos de aplicación.
- Las condiciones de contorno en desplazamientos se establecen en la parte izquierda del dominio que está empotrada. De esta manera todos los nodos que se definan en este borde deben tener los desplazamientos restringidos.

Sobre este dominio se ha realizado un mallado con *Abaqus*, que se muestra a continuación:

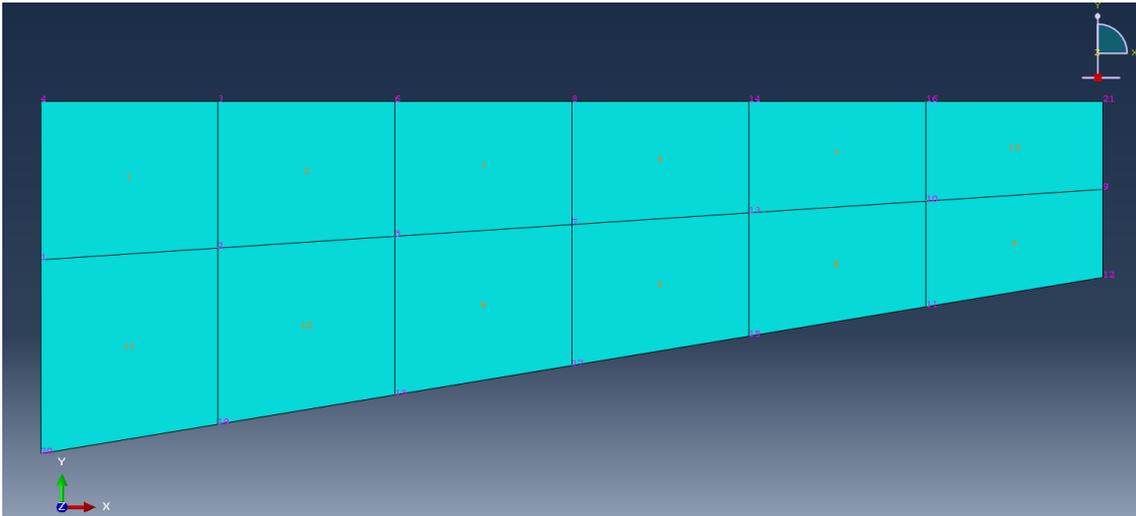


Figura 9. Mallado del problema realizado con el módulo *Abaqus CAE*

Se darán, a modo de ejemplo, a continuación las matrices de coordenadas nodales (X_{nod}) y conectividades (C_{nod}):

Nodos (X_{nod})	Abcisas (m)	Ordenadas (m)
1	0	0.11
2	0.1	0.1167
3	0.1	0.2
4	0	0.2
5	0.2	0.1233
6	0.2	0.2
7	0.3	0.13
8	0.3	0.2
9	0.6	0.15
10	0.5	0.1433
11	0.5	0.083
12	0.6	0.1
13	0.4	0.1367
14	0.4	0.2
15	0.4	0.066
16	0.5	0.2
17	0.3	0.05
18	0.2	0.033
19	0.1	0.0167
20	0	0
21	0.6	0.2

Tabla 2. Coordenadas nodales del problema

Elemento (C_{nod})	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
1	1	2	3	4

2	2	5	6	3
3	5	7	8	6
4	9	10	11	12
5	7	13	14	8
6	10	13	15	11
7	13	10	16	14
8	13	7	17	15
9	7	5	18	17
10	5	2	19	18
11	2	1	20	19
12	10	9	21	16

Tabla 3. Matriz de conectividades del problema

Así, sobre la numeración nodal que se ha propuesto, las condiciones de contorno en fuerzas establecen que sobre los nodos 6, 16 y 21 habrá fuerzas puntuales de 5 N, en los nodos 1, 4 y 20 las fuerzas son desconocidas y constituirán fuerzas de reacción que habrá que determinar. Asimismo todos los desplazamientos sobre los nodos 1, 4 y 20 deben imponerse nulos.

A continuación, se presentan en la Tabla 4 y Tabla 5 los resultados obtenidos para las componentes del vector de desplazamientos nodal y el vector de fuerzas nodales con las rutinas desarrolladas y con *Abaqus*:

Nodo/Desplaz. (m)	$u_x (*10^{-5})$	u_x (ABAQUS)	$u_y (*10^{-5})$	u_y (ABAQUS)
1	0	-5.5682E-037	0	1.07848E-036
2	0.001893379	1.89338E-008	-0.0155918	-1.55918E-007
3	0.0241311	2.41312E-007	-0.0190293	-1.90293E-007
4	0	3.28063E-035	0	-7.90341E-036
5	0.00636346	6.36346E-008	-0.0579324	-5.79324E-007
6	0.0447869	4.4787E-007	-0.0613569	-6.1357E-007
7	0.0119852	1.19853E-007	-0.121440	-1.2144E-006
8	0.0620378	6.20378E-007	-0.123162	-1.23163E-006
9	0.0327826	3.27826E-007	-0.417647	-4.17647E-006
10	0.0251897	2.51898E-007	-0.308482	-3.08483E-006
11	-0.0363421	-3.63421E-007	-0.308527	-3.08528E-006
12	-0.0212283	-2.12283E-007	-0.417207	-4.17207E-006
13	0.0181532	1.81532E-007	-0.206252	-2.06253E-006
14	0.0758290	7.5829E-007	-0.207364	-2.07364E-006
15	-0.0438298	-4.38299E-007	-0.207161	-2.07161E-006
16	0.0841690	8.41691E-007	-0.309552	-3.09552E-006
17	-0.0430970	-4.30971E-007	-0.122919	-1.22919E-006
18	-0.0352601	-3.52602E-007	-0.0594038	-5.94039E-007
19	-0.0202076	-2.02077E-007	-0.0190129	-1.90129E-007
20	0	-3.22494E-035	0	-8.17507E-036
21	0.0871700	8.717E-007	-0.419115	-4.19115E-006

Tabla 4. Comparación entre las componentes de los desplazamientos

Nodo/Fuerzas (N)	F_x	F_x (ABAQUS)	F_y	F_y (ABAQUS)
1	0.556819	0.556819	-1.078484	-1.07848
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	-32.806250	-32.8063	7.903409	7.90341
5	0	0	0	0
6	0	0	-5	-5
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0
13	0	0	0	0
14	0	0	0	0
15	0	0	0	0
16	0	0	-5	-5
17	0	0	0	0
18	0	0	0	0
19	0	0	0	0
20	32.249431	32.2494	8.175074	8.17507
21	0	0	-5	-5

Tabla 5. Comparación entre las componentes del vector de fuerzas

Como podemos observar la coincidencia es casi completa hasta en la quinta cifra significativa. En particular, es especialmente interesante el valor de las componentes de las fuerzas de reacción en los nodos 1, 4 y 20, que a la vista de los resultados, tienen un valor idéntico al proporcionado por *Abaqus*.

A continuación se presentarán ocho figuras que contienen respectivamente las tres componentes del tensor de deformaciones, del tensor de tensiones y las dos componentes de los desplazamientos que se han obtenido para el problema anterior dibujadas con el comando *fill* de matlab:

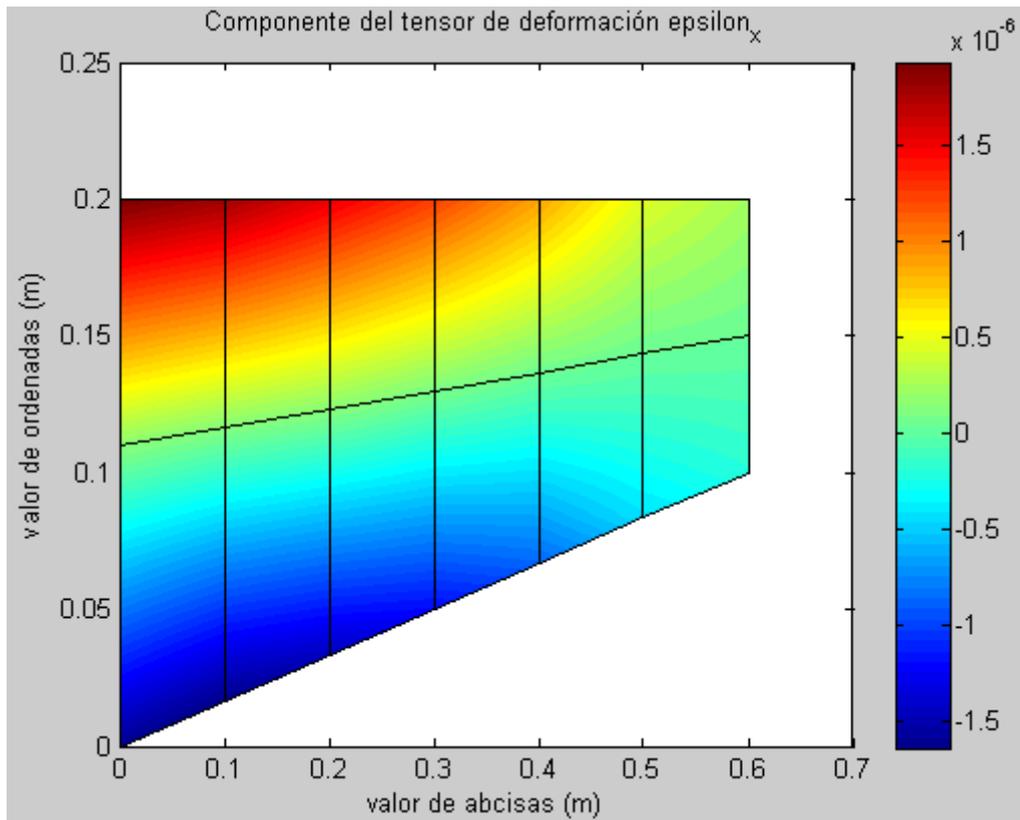


Figura 10. Componente ϵ_x del campo de deformaciones

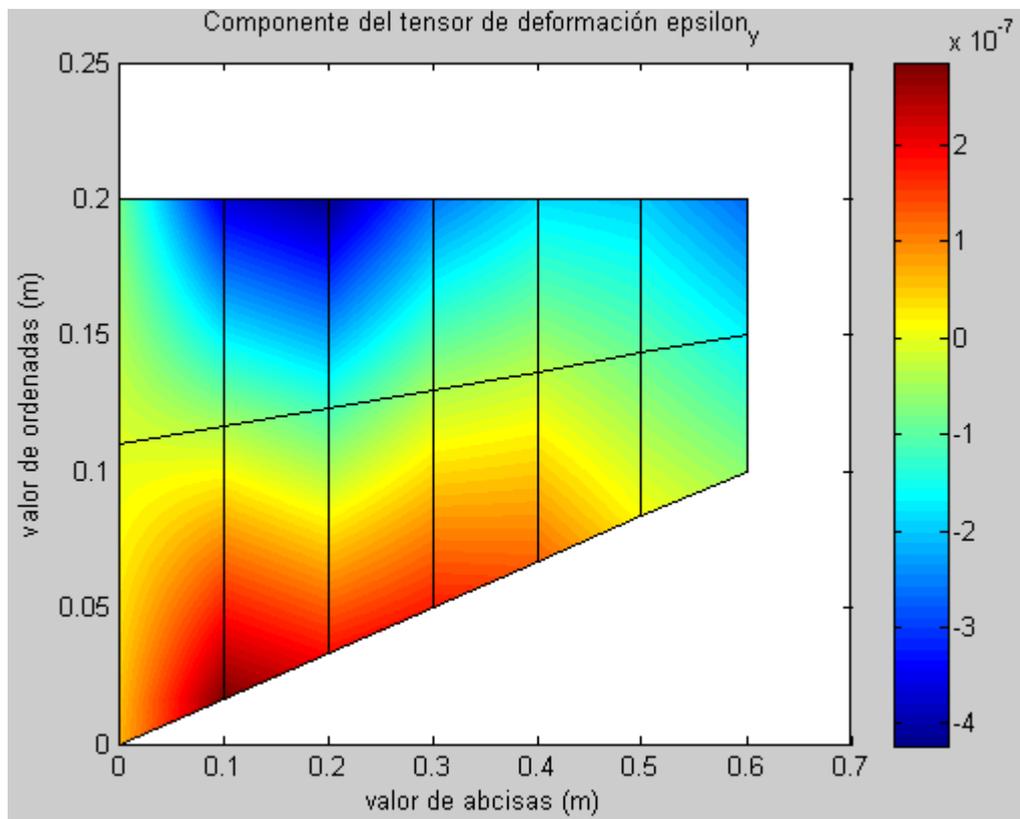


Figura 11. Componente ϵ_y del campo de deformaciones

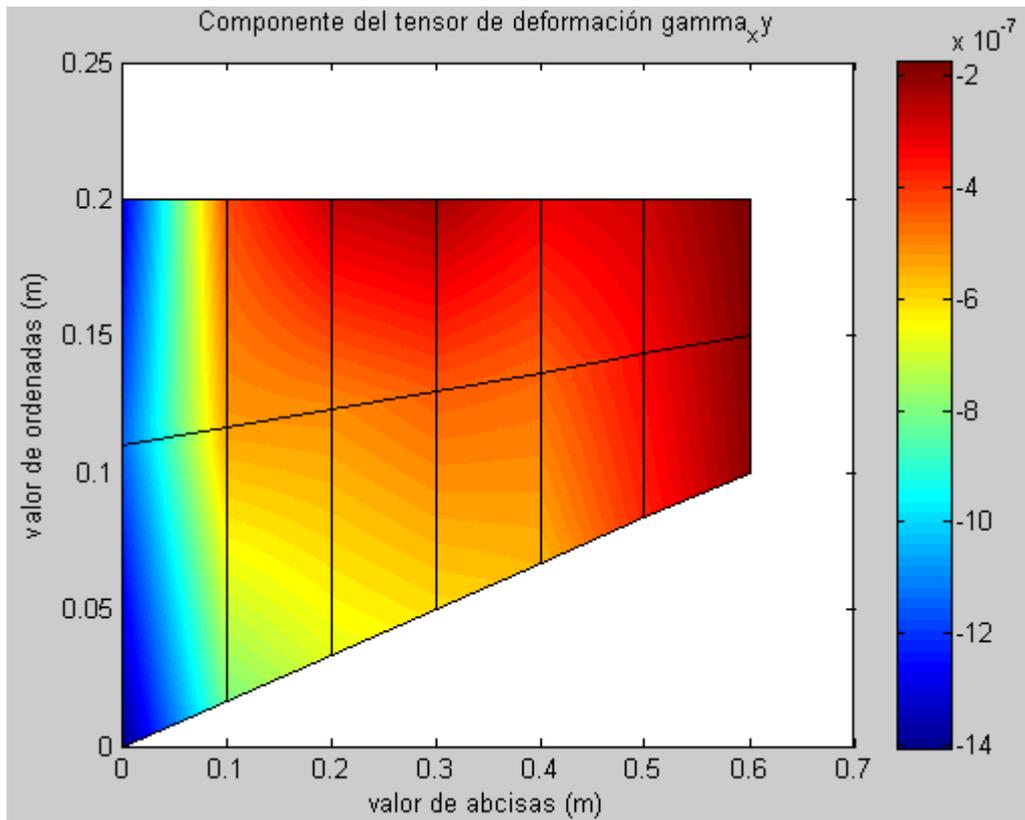


Figura 12. Componente γ_{xy} del campo de deformaciones

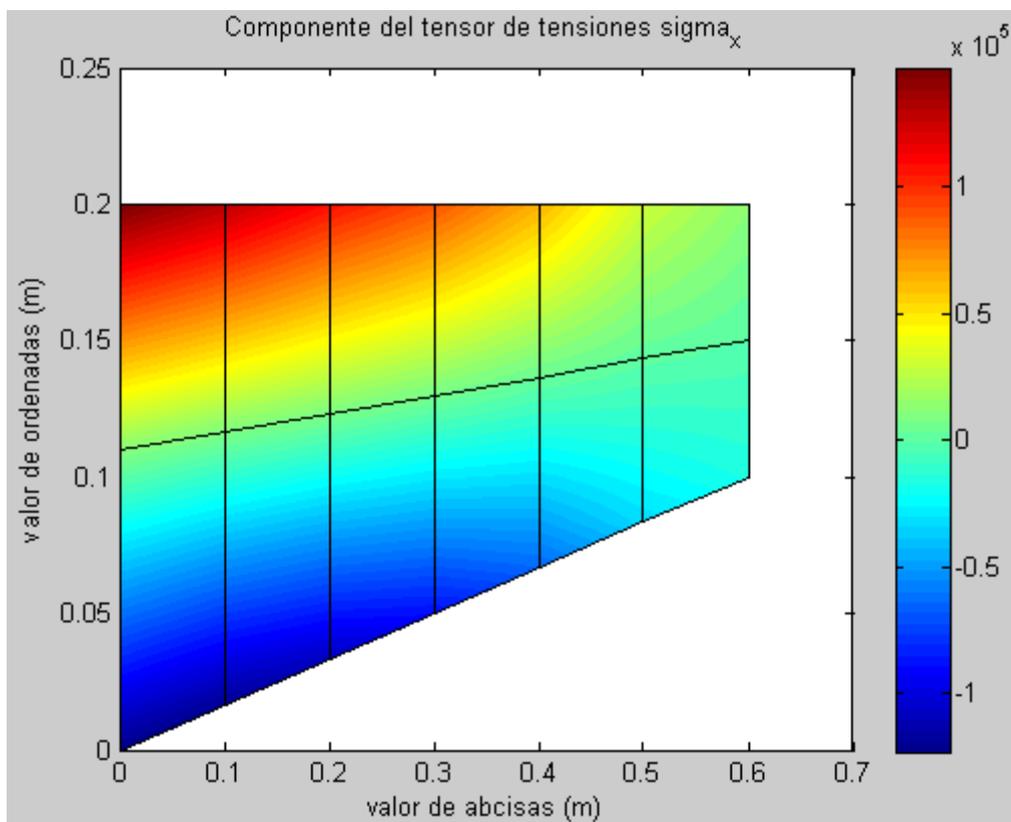


Figura 13. Componente $\sigma_x \left(\frac{N}{m^2} \right)$ del campo de tensiones

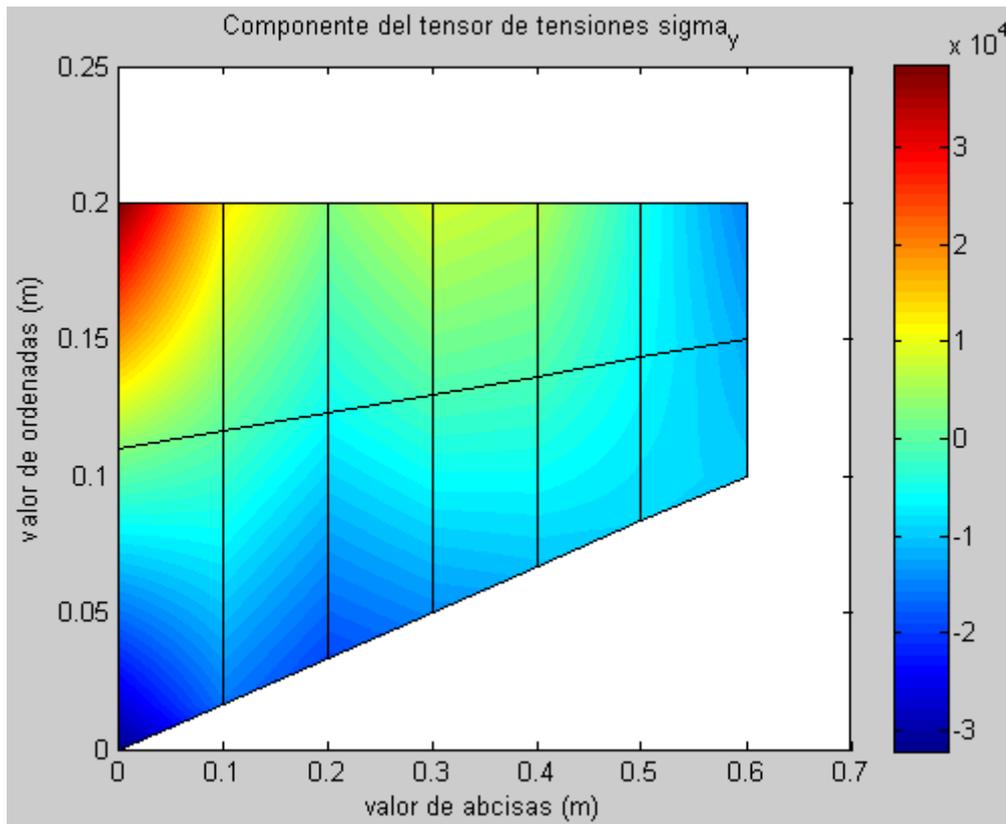


Figura 14. Componente σ_y ($\frac{N}{m^2}$) del campo de tensiones

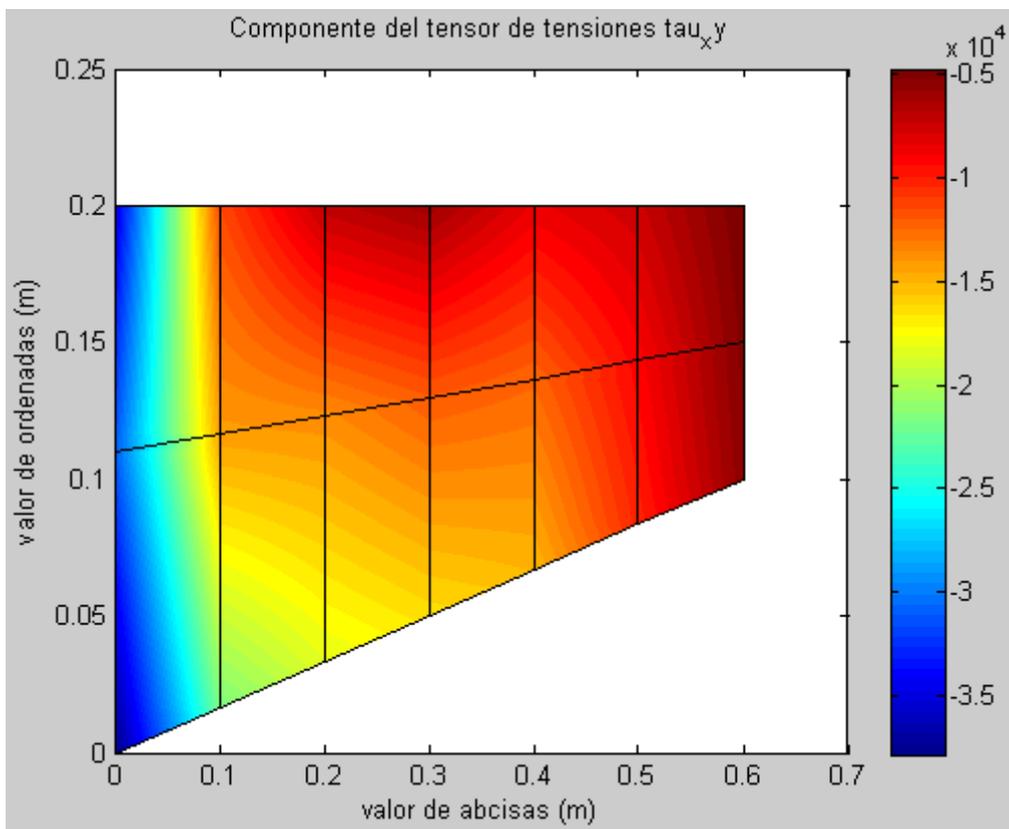


Figura 15. Componente τ_{xy} ($\frac{N}{m^2}$) del campo de tensiones

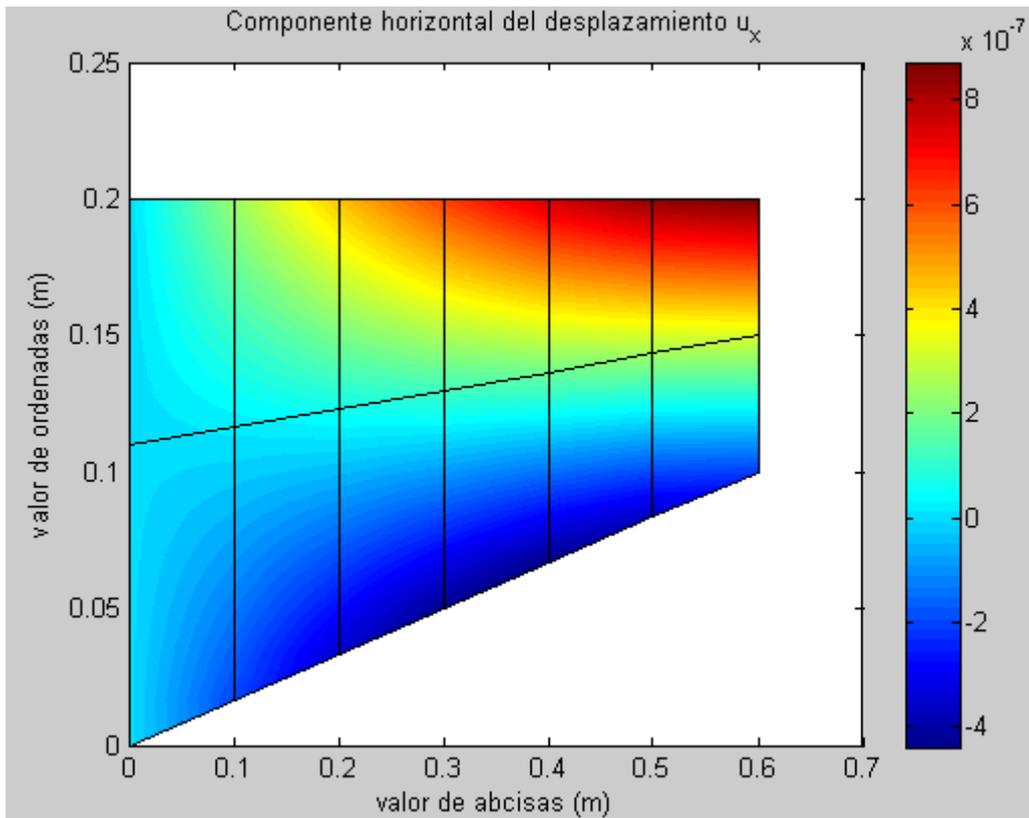


Figura 16. Componente $u_x(m)$ del campo de desplazamiento

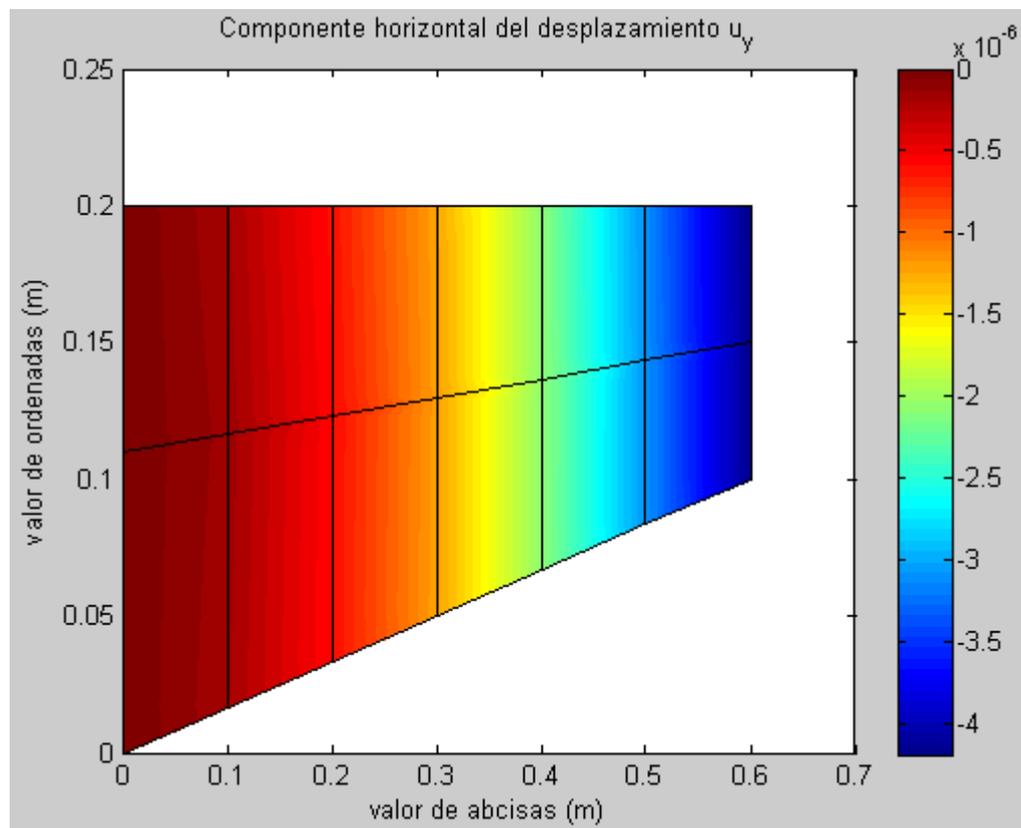


Figura 17. Componente $u_y(m)$ del campo de desplazamiento

Vemos que los órdenes de magnitud de deformaciones, tensiones y desplazamientos y también los signos de las tensiones y deformaciones son cualitativamente correctos. Por ejemplo, en la Figura 13 pueden verse, para la componente σ_x , tensiones de tracción en la parte superior izquierda y tensiones de compresión en la parte inferior izquierda. Por el contrario en la Figura 14 se predicen, para la componente σ_y , tensiones de compresión en la mayor parte del sólido salvo en la esquina superior izquierda, donde debido a las fuerzas de reacción, observamos tensiones de tracción.

Alternativamente se pueden observar, en relación a la componente ε_x , en la Figura 10 deformaciones positivas en la parte superior izquierda por lo que el sólido se estaría estirando y deformaciones negativas en la parte inferior izquierda debido a que el sólido se estaría comprimiendo. También se puede decir, respecto a la componente ε_y , que se muestra en la Figura 11 que en la parte superior del sólido encontramos deformaciones de compresión y en la parte inferior deformaciones positivas.

También llama la atención en la Figura 13, Figura 14 y Figura 15 como las tensiones más importantes se producen cerca del lado izquierdo, cerca del empotramiento, debido a las fuerzas de reacción.

Por último es importante también observar que los desplazamientos se anulan en el empotramiento, satisfaciendo así las condiciones de contorno. Asimismo vemos que los desplazamientos van siendo progresivamente mayores conforme nos acercamos al extremo derecho donde, en las esquinas, se encuentran los mayores valores.

4.2. Placa con agujero

En este segundo caso, aplicaremos las rutinas a una segunda tipología que requerirá, para obtener una solución satisfactoria, un mallado compuesto por un número de elementos mayor. En este caso, aplicaremos el método a un problema que tiene un alto interés dentro del marco de la tesis doctoral donde se desarrolla este trabajo. Este caso consiste en una placa al que se le ha practicado un agujero central. Puede verse un esquema de este problema en la siguiente figura:

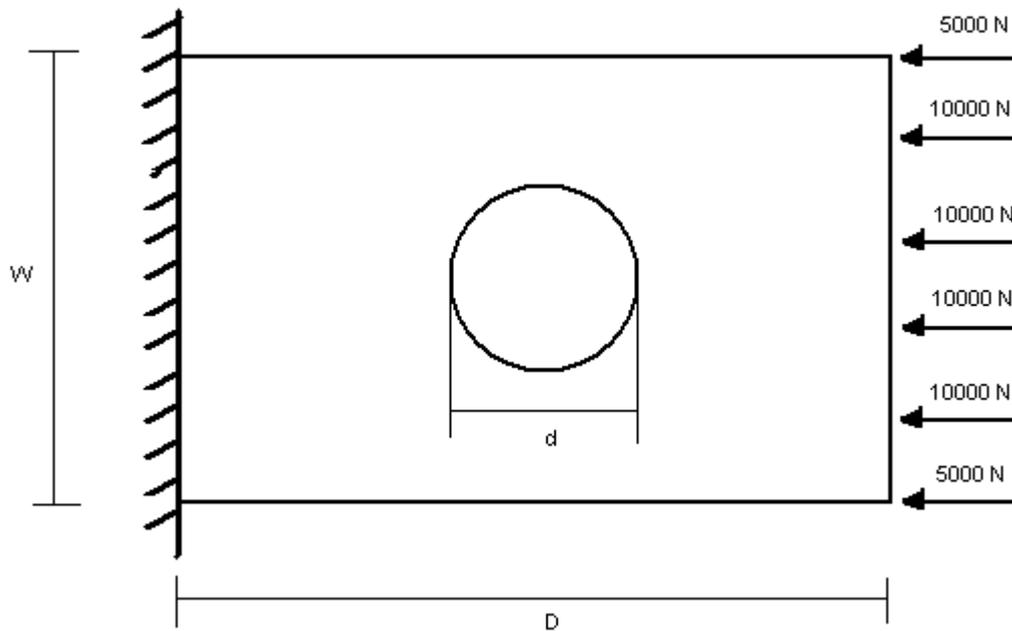


Figura 18. Esquema del problema de la placa con agujero

Las dimensiones que aparecen en la Figura 18 tienen las siguientes valores¹²:

$$D = 0.115 \text{ m}$$

$$W = 0.05 \text{ m}$$

$$d = 0.008 \text{ m}$$

En este caso también habrá que impedir los desplazamientos de todos los grados de libertad de los nodos que se encuentren en la pared izquierda. Asimismo las componentes del vector de fuerzas de los nodos que se encuentren en esta pared serán desconocidos ya que serán fuerzas de reacción. El vector de fuerzas impondrá los valores que muestran en la Figura 18 en los nodos donde estén aplicadas las fuerzas. En el resto de nodos las fuerzas externas aplicadas serán cero.

El mallado realizado con *Abaqus* para este problema se muestra en la siguiente figura¹³:

¹² Las dimensiones de la probeta han sido extraídos de (Atas, 2015).

¹³ Mallados de este tipo pueden encontrarse en (M.M. Moure, 2014)

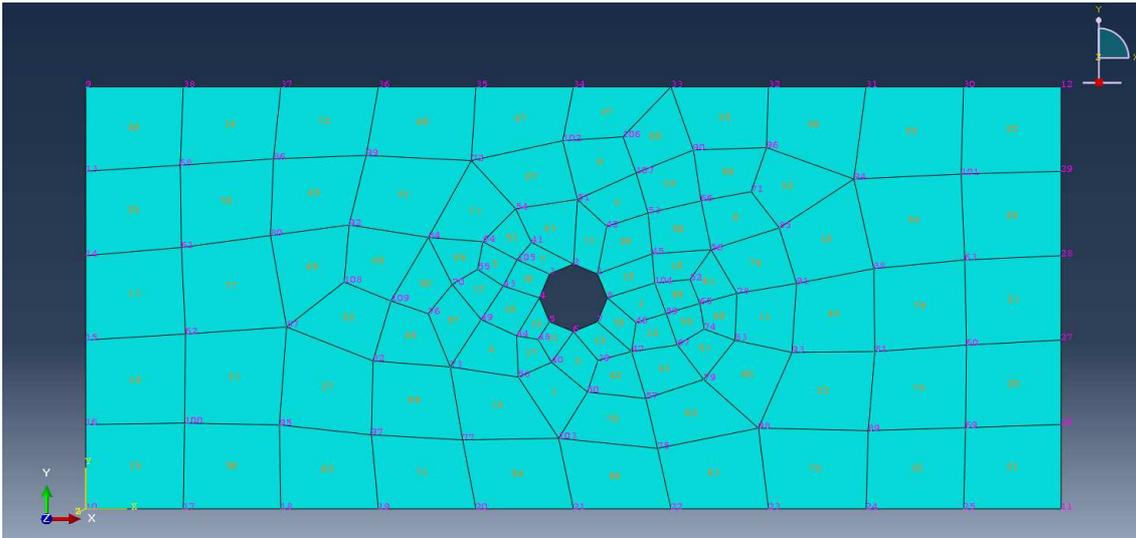


Figura 19. Mallado del problema realizado con el módulo *Abaqus CAE*

En este caso se han generado 90 elementos tipo CPS4. Así, los nodos 9, 10, 13, 14, 15 y 16 tienen impedidos los desplazamientos y se desconocen las fuerzas de reacción que hay aplicadas sobre ellos. En los nodos 11 y 12 hay aplicados dos cargas puntuales de 5000 N en sentido negativo y en los nodos 26, 27, 28 y 29 hay aplicadas dos cargas puntuales de 10000 N en sentido negativo. En el resto de nodos las cargas aplicadas sobre ellos son nulas.

Se mostrarán, a continuación, una tabla que recoge los valores de las componentes de los desplazamientos de algunos de los nodos obtenidas con las rutinas y con *Abaqus*. Dado que estaremos particularmente interesados en las tensiones y deformaciones en las proximidades del agujero, mostraremos los desplazamientos de los nodos del 1 al 8 y también los de los nodos que sufrirán desplazamientos, a priori, más grandes. Estos serán los de los nodos 11, 12, 26, 27, 28 y 29. Adicionalmente, se mostrarán los desplazamientos de algunos nodos repartidos por el dominio que sirvan como referencia.

También mostraremos una tabla con los valores de las fuerzas de reacción aplicadas sobre los nodos 9, 10, 13, 14, 15 y 16.

Nodo/Desp.(m)	$u_x(*10^{-3})$	u_x (ABAQUS)	$u_y(*10^{-3})$	u_y (ABAQUS)
1	-0.183692	-0.000183692	0.005140	5.14068E-006
2	-0.166506	-0.000166506	0.009095	9.09507E-006
3	-0.145215	-0.000145215	0.00454868	4.54869E-006
4	-0.135240	-0.000135241	-0.000199760	-1.99761E-007
5	-0.144355	-0.000144356	-0.00595732	-5.95733E-006
6	-0.165141	-0.000165141	-0.0107633	-1.07634E-005
7	-0.185637	-0.000185637	-0.00505678	-5.05678E-006
8	-0.195146	-0.000195146	0.000095149	9.51491E-008
9	0	-6.07246E-033	0	1.91979E-033
10	0	-6.06495E-033	0	-1.89332E-033
11	-0.333094	-0.00033309	-0.0216803	-2.16803E-005

12	-0.332867	-0.000332867	0.0206829	2.06829E-005
20	-0.132728	-0.000132729	-0.0235397	-2.35398E-005
26	-0.333071	-0.000333072	-0.0131355	-1.31356E-005
27	-0.333114	-0.000333114	-0.00469238	-4.69238E-006
28	-0.333064	-0.000333064	0.00368380	3.68381E-006
29	-0.332928	-0.000332928	0.0121320	1.2132E-005
30	-0.299955	-0.000299956	0.0206539	2.0654E-005
40	-0.156900	-0.000156901	-0.0111464	-1.11464E-005
50	-0.170413	-0.000170414	-0.0139495	-1.39496E-005
60	-0.301385	-0.000301386	-0.00511055	-5.11056E-006
70	-0.117472	-0.000117473	0.000897454	8.97455E-007
80	-0.058542	-5.85429E-005	0.00543667	5.43667E-006
90	-0.207509	-0.00020751	0.0152410	1.52411E-005
100	-0.0307678	-3.07679E-005	-0.00787067	-7.87068E-006

Tabla 6. Comparación entre las componentes del vector de desplazamientos

Nodo/Fuerza (N)	$F_x(*10^4)$	F_x (ABAQUS)	$F_y(*10^4)$	F_y (ABAQUS)
9	0.607246	6072.46	-0.191978	-1919.79
10	0.606495	6064.95	0.189332	1893.32
13	0.960629	9606.30	-0.0828235	-828.236
14	0.931748	9317.49	-0.0302947	-302.948
15	0.932123	9321.24	0.0304790	304.79
16	0.961756	9617.57	0.0852859	852.86

Tabla 7. Comparación entre las componentes del vector de fuerzas

De nuevo la coincidencia entre ambos sets de resultados es casi completa hasta la quinta cifra significativa.

Presentaremos a continuación un set de ocho figuras que corresponden a las tres componentes del tensor de deformaciones, las tres del tensor de tensiones y las dos componentes del vector de desplazamientos.

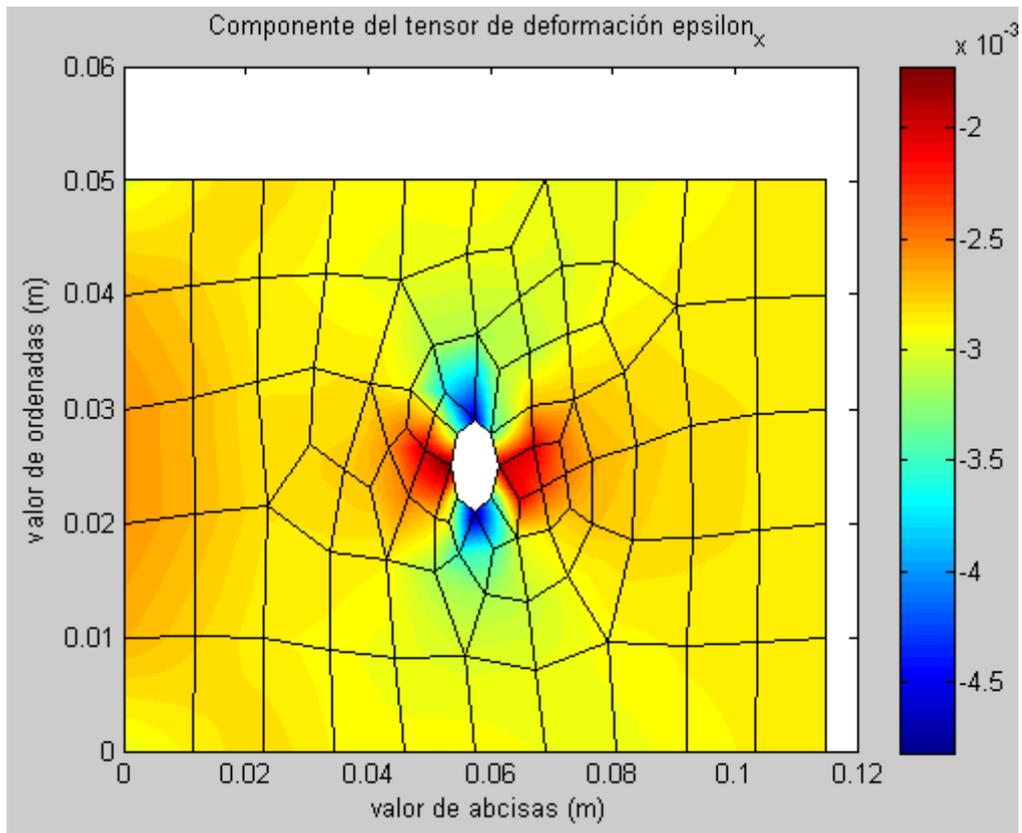


Figura 20. Componente ϵ_x del campo de deformaciones

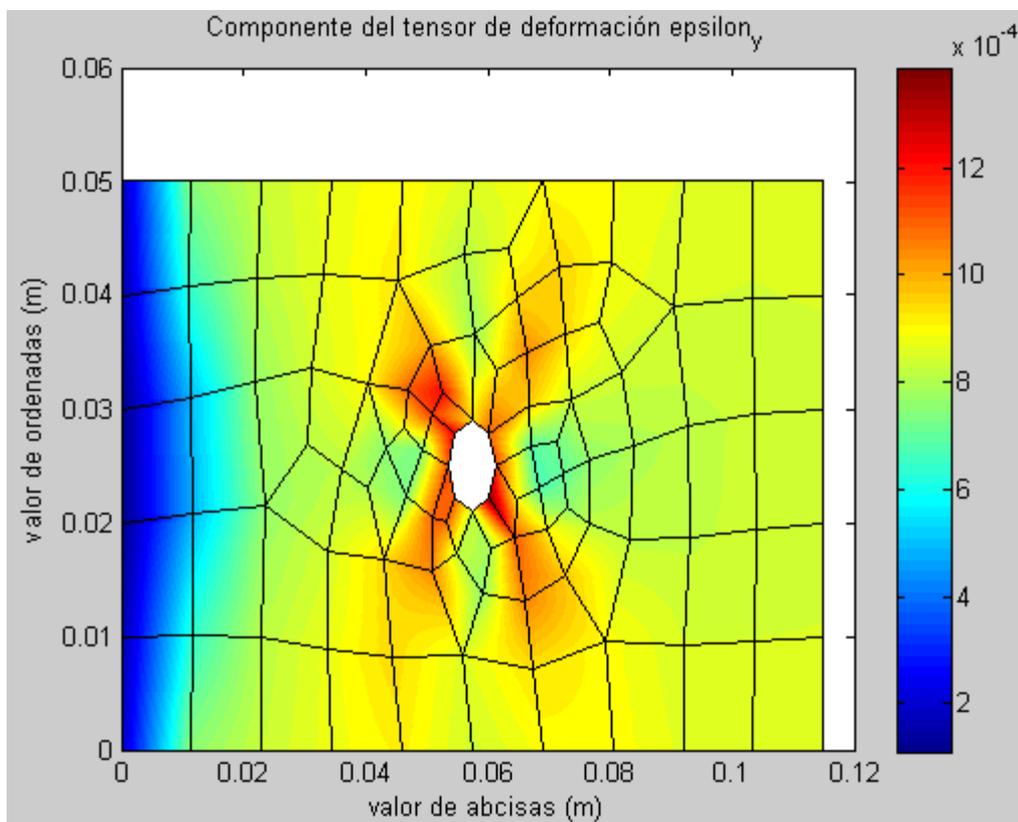


Figura 21. Componente ϵ_y del campo de deformaciones

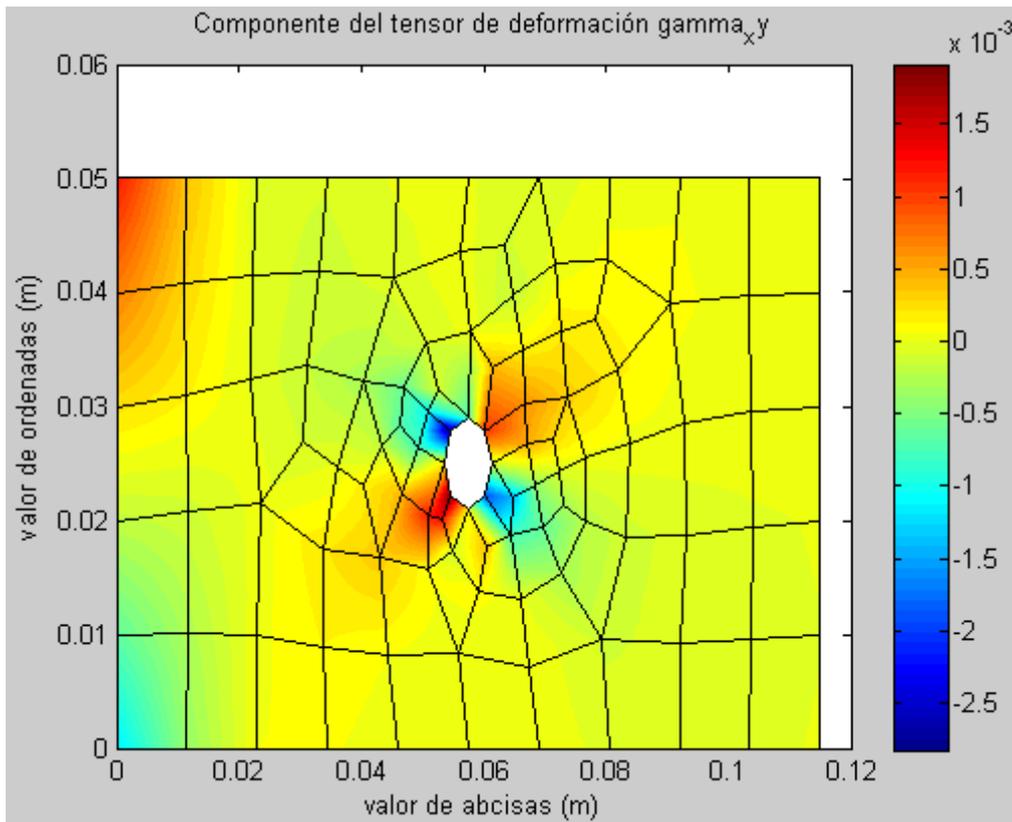


Figura 22. Componente γ_{xy} del campo de deformaciones

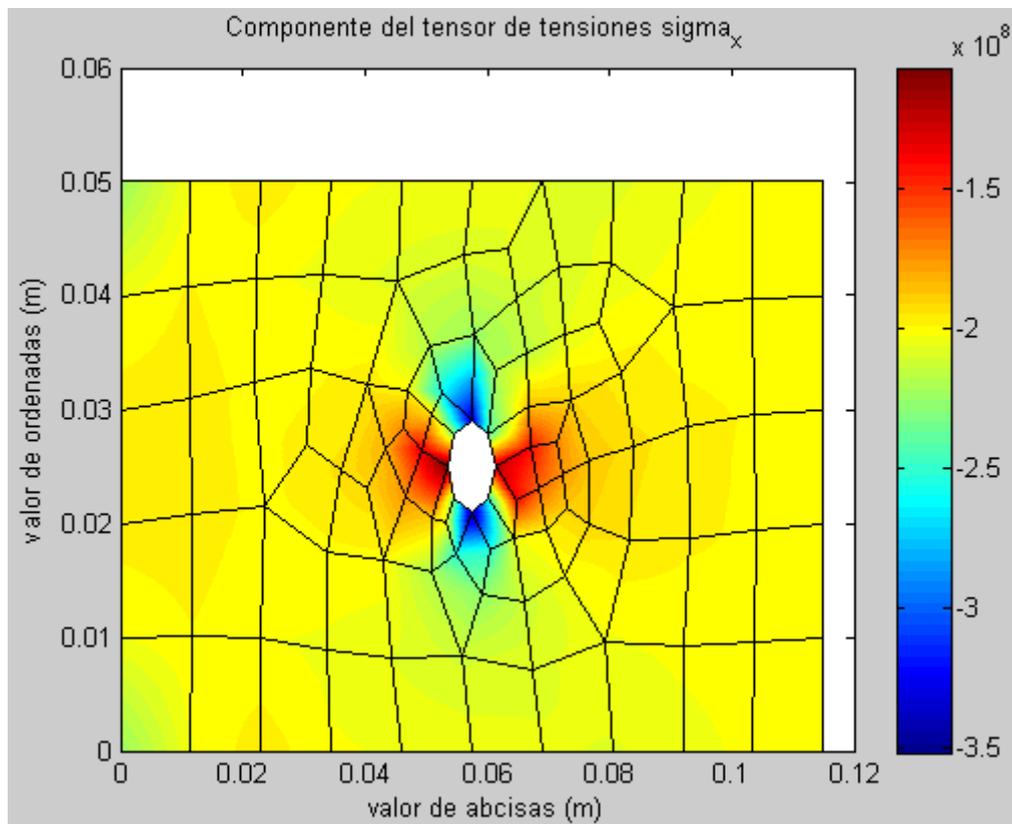


Figura 23. Componente $\sigma_x \left(\frac{N}{m^2} \right)$ del campo de tensiones

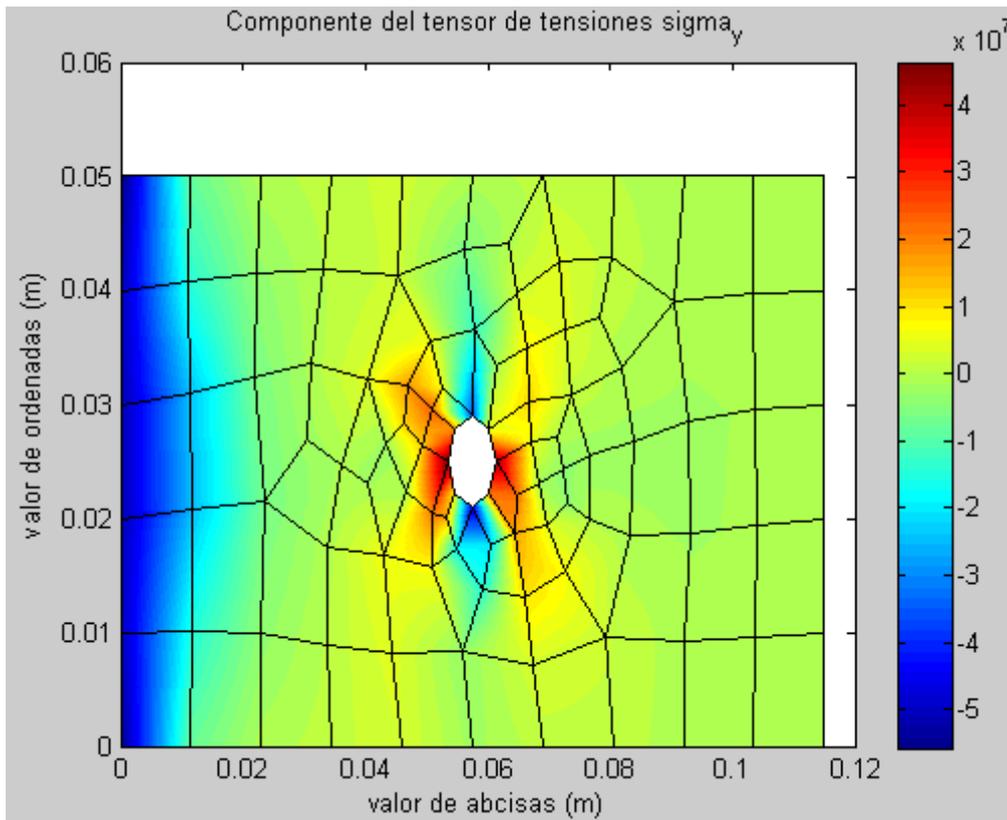


Figura 24. Componente $\sigma_y \left(\frac{N}{m^2} \right)$ del campo de tensiones

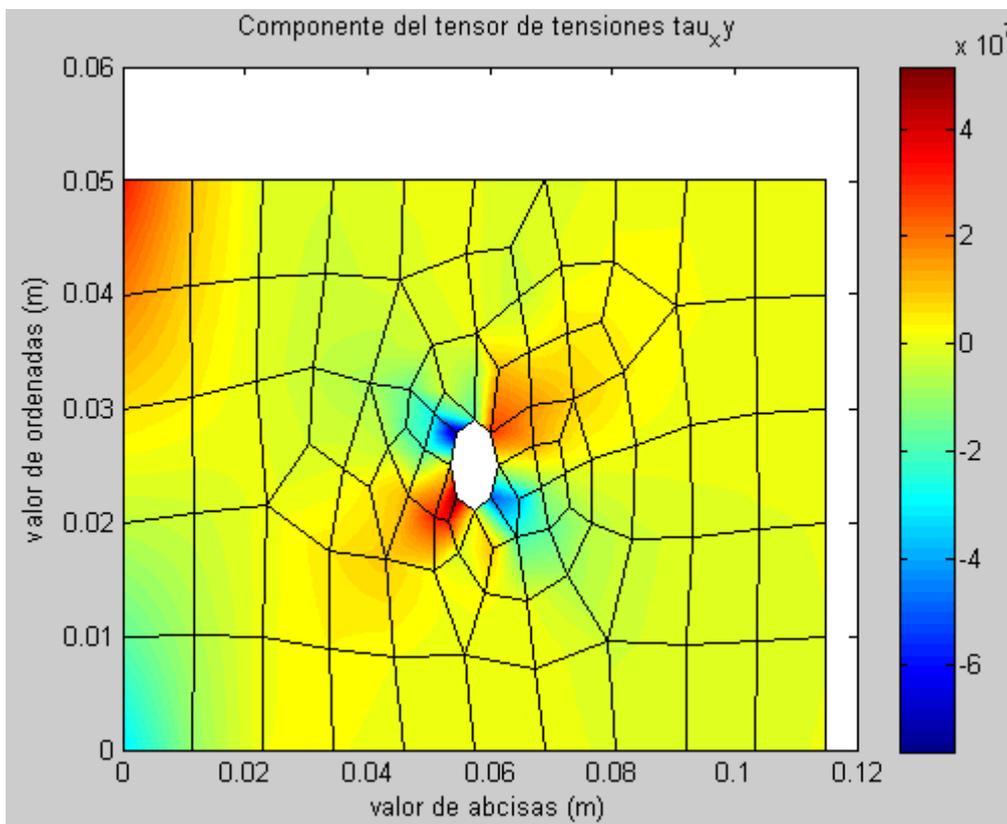


Figura 25. Componente $\tau_{xy} \left(\frac{N}{m^2} \right)$ del campo de tensiones

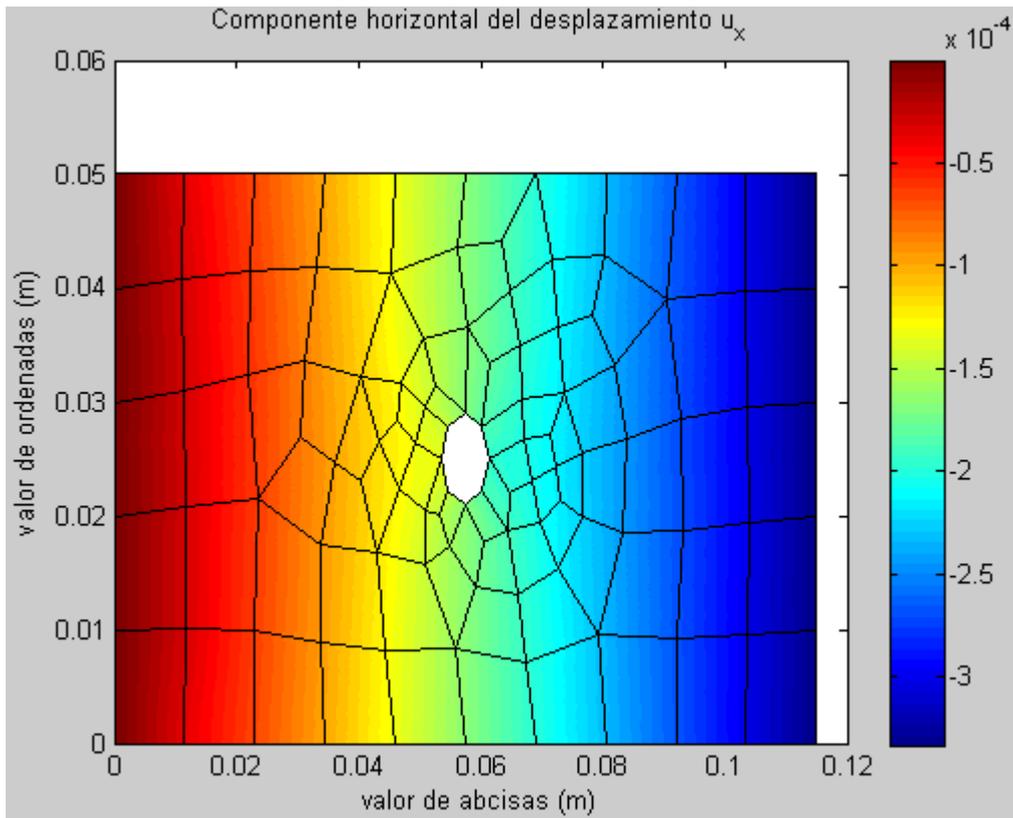


Figura 26. Componente $u_x(m)$ del campo de desplazamiento

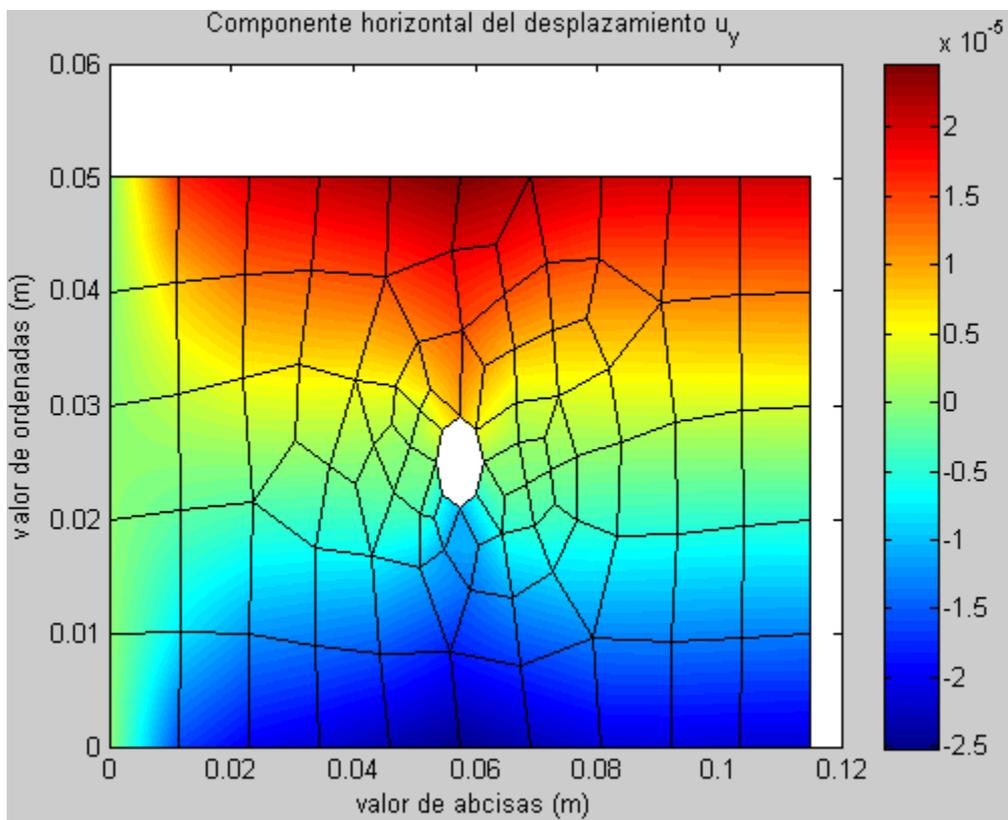


Figura 27. Componente $u_y(m)$ del campo de desplazamiento

En primer lugar, volvemos a encontrar que los órdenes de magnitud de deformaciones, tensiones y desplazamientos y también los signos de las tensiones y deformaciones son cualitativamente correctos.

En segundo lugar, vemos, en la Figura 24, como la presencia del empotramiento en el lado izquierdo produce fuertes tensiones de componente σ_y de compresión y, en la Figura 21, fuertes deformaciones de componente ε_y también de compresión.

Adicionalmente existe un aspecto que merece especial atención de la solución que se ha obtenido. En concreto, nos referimos al estado tensional cerca del agujero que se encuentra en la parte central de la geometría.

Conviene recordar la solución de un problema, del que se conoce su solución analítica, parecido al que se ha resuelto, que si bien no es igual es suficientemente parecido para poder sacar conclusiones aplicables al nuestro.

Este problema es el de una placa delgada infinita¹⁴ con un agujero practicado, de material isótropo y sometido a un esfuerzo uniaxial de compresión uniforme $-q_t$ (medido en unidades de $\frac{N}{m^2}$) en régimen de tensión plana. Un esquema del problema se recoge en la siguiente figura:

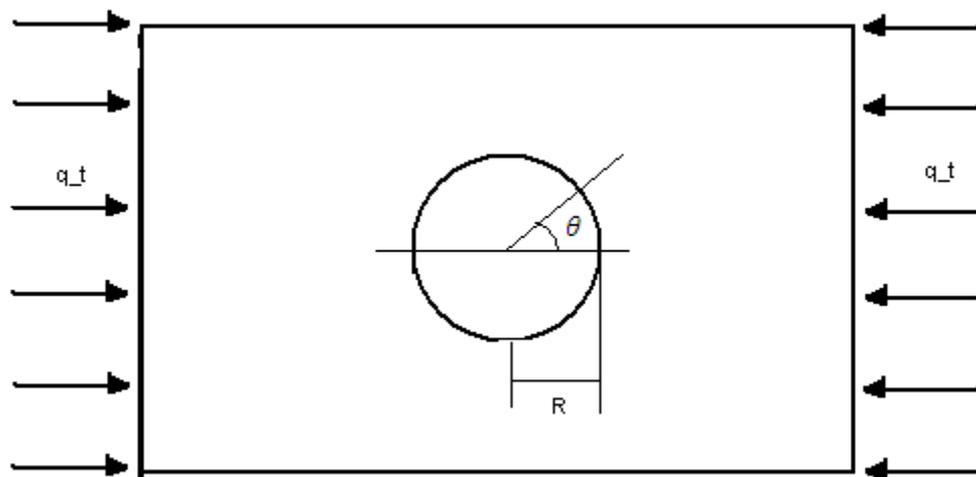


Figura 28. Esquema de una placa delgada con agujero sometida a un estado de compresión uniaxial

Aunque no incluiremos los detalles de la resolución, la expresión de las componentes del tensor de tensiones para tensión plana, en coordenadas polares es bien conocida y se recoge a continuación (solución extraída de (Carballo, 2000)):

$$\sigma_r = -\frac{q_t}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{q_t}{2} \left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2\theta)$$

¹⁴ O al menos de dimensiones mucho más grandes que las dimensiones del orificio que tiene practicado.

$$\sigma_{\theta} = -\frac{q_t}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{q_t}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{q_t}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin(2\theta)$$

Donde R es el radio del agujero, r es la coordenada radial polar medida desde el centro del agujero y θ es la coordenada angular medida positiva en sentido antihorario. Las componentes del tensor de tensiones cumplen las siguientes condiciones de contorno:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \text{ cuando } r = R$$

$$\sigma_r = -q_t \text{ cuando } \theta = 0 \text{ y } r \rightarrow \infty$$

Si evaluamos las componentes en $\theta = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ y $r = R$ obtenemos que:

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_{\theta} = -3q_t$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Y, por el contrario, si hacemos $\theta = 0, \pi$ y $r = R$:

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_{\theta} = q_t$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

Estos resultados nos indican dos aspectos importantes que trataremos de identificar en las soluciones obtenidas para nuestro problema original. En primer lugar, observamos que existen dos puntos ($\theta = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ y $r = R$) en el borde interior del agujero donde la tensión σ_{θ} tiene un valor que triplica la tensión de compresión aplicada en los bordes de la placa. Por este motivo, decimos que la presencia del agujero produce que la tensión llegue a triplicarse en algunos puntos del dominio en relación a la tensión que se tendría en ausencia del agujero.

Otro aspecto interesante es que existen otros dos puntos ($\theta = 0, \pi$ y $r = R$) en el borde interior del agujero donde la tensión se vuelve de tracción produciendo gradientes muy importantes de tensión en las inmediaciones del agujero.

Estos dos efectos llevan a considerar que los agujeros en los dominios del tipo de los que estamos considerando actúan como *concentradores de tensión* y por ello es importante tenerlos en cuenta a la hora de estudiar la integridad estructural de elementos que los contengan.

Aunque nuestro problema no es el mismo (ya que nuestra placa se encuentra empotrada por el lado izquierdo) las soluciones que hemos obtenido en las inmediaciones del agujero deberían ajustarse razonablemente bien a las soluciones analíticas que hemos expuesto del problema representado en la Figura 28. Esto es así porque la distribución de tensiones en las

cercanías del agujero está suficientemente alejada de las condiciones de contorno aplicadas en los bordes de la placa.

Volviendo a nuestro problema trataremos de reconocer el efecto del agujero tratando de ver si actúa como concentrador de tensión.

Dado que la Figura 23, la Figura 24 y la Figura 25 representan las componentes del tensor de tensiones en cartesianas, tendremos que usar la relación entre las componentes del tensor en ambos sistemas de coordenadas. Estas son:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tau_{xy} + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \tau_{xy} + \sigma_y \cos^2 \theta \\ \tau_{r\theta} &= (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \tau_{xy} + \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\sigma_y - \sigma_x)\end{aligned}$$

De esta manera, en los puntos $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = 3\frac{\pi}{2}$, se tendrá que según las soluciones para la placa mostradas anteriormente:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_y \approx 0 \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \approx -3q_t \\ \tau_{r\theta} &= -\tau_{xy} \approx 0\end{aligned}$$

Mientras que en los puntos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \approx 0 \\ \sigma_\theta &= \sigma_y \approx q_t \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{xy} \approx 0\end{aligned}$$

Lo que quiere decir que en la superficie interior del agujero para la componente σ_x en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = 3\frac{\pi}{2}$ deberemos encontrar los mayores valores de tensión de compresión de todo el dominio mientras que en las posiciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ deberemos encontrar los valores más pequeños. En la Figura 23 podemos observar que efectivamente esto es así.

Por otro lado, para la componente σ_y en el borde interior del agujero tendremos, en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, tensiones positivas de tracción mientras que en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = 3\frac{\pi}{2}$ se tendrán tensiones de compresión produciéndose un gradiente de tensiones importante. En la Figura 24 podemos observar precisamente esto.

En cuanto a las tensiones de cortadura tendremos que, tanto en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = 3\frac{\pi}{2}$, como en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ deberemos tener tensiones τ_{xy} nulas. En la Figura 25 pueden observarse en la superficie interior del agujero estos valores nulos de las componentes de la tensión.

5. Tareas futuras

Tras haber mostrado en el capítulo anterior, algunos resultados obtenidos usando las rutinas desarrolladas, indicaremos en este apartado algunas modificaciones que se pueden hacer para poder analizar geometrías más complejas y asumir hipótesis que permitirán abarcar un abanico de problemas mayor. Las mejoras pueden ir en líneas diferenciadas que pueden agruparse en tres bloques. Estos bloques son en relación al tipo de elementos utilizados, en relación al tipo de ley de comportamiento utilizada o en relación a la visualización de los datos.

En cuanto al tipo de elementos:

- La elección de elementos tipo cuadrilátero nos permite abordar un gran número de problemas gracias a la capacidad de adaptación de este tipo de elemento a muchos tipos diferentes de geometrías. Sin embargo, pueden existir determinadas zonas de geometrías concretas que requieran del uso puntual de elementos tipo triangular. El desarrollo, por tanto, de funciones de forma que implementen este tipo de elementos puede ser una línea futura. Habría que introducir otras funciones de forma distintas a las mostradas en 2.29, 2.30, 2.31 y 2.32.
- Otra línea de mejora consiste en incluir nodos en los puntos medios de los lados de los elementos planos o en otros lugares del elemento. De esta manera, las funciones de forma irían adquiriendo grados mayores.
- Para implementar problemas tridimensionales se hace necesario considerar elementos tetraédricos o paralelepípedicos (tipo *ladrillo*) y considerar grados de libertad adicionales en cada nodo.

En cuanto a la ley de comportamiento:

- Una mejora inmediata consistiría en adaptar las rutinas para poder estudiar problemas de elasticidad tridimensional lineal utilizando una ley de comportamiento caracterizada por un tensor como el explicitado en 2.1.
- Otro mejora interesante orientada a estudiar el endurecimiento del material y el fallo posterior del mismo consistiría en introducir leyes de comportamiento de la forma:

$$\delta\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\epsilon_{kl})\delta\epsilon_{kl}$$

La consideración de este tipo de leyes de comportamiento dará origen a sistemas con la forma $F_{ext} = K(d) d$ de manera que el sistema a resolver ya no será lineal y habrá que recurrir a métodos numéricos adicionales (tipo Newton-Raphson) para resolver los sistemas implícitos que aparecerán. Esta línea de mejora permitirá abordar problemas elasto-plásticos.

En cuanto a la visualización de resultados:

- Los resultados que se han mostrado en el capítulo 4 se han obtenido utilizando el comando de matlab *fill* que permite construir gráficos de colores sobre dominios bidimensionales. Esta herramienta cuyo uso ha sido satisfactorio en el estudio de problemas de elasticidad plana no permite representar campos de tensiones y deformaciones en geometrías tridimensionales. Existen, sin embargo, herramientas libres que permiten graficar este tipo de campos sobre geometrías tridimensionales cuyo conocimiento es deseable.

Bibliografía

Atas, A. (2015). Open Hole Compressive Strength and Damage Mechanisms: Maximum Stress Versus Hashin Criteria. *Plastics, Rubber and Composites, Vol 44, Nº7, 282.*

Carballo, F. P. (2000). *Capítulo 7, Problema 7.3. Teoría de la Elasticidad.*

M.M. Moure, S. S. (2014). Analysis of damage localization in composite laminates using a discrete damage model. *Composites: Part B, 227.*

Zienkiewicz, O. C. (1994). *El Método de los Elementos Finitos.* Mc Graw Hill.