

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A  
DISTANCIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**



**MÁSTER EN FÍSICA DE SISTEMAS COMPLEJOS**

**Trabajo de Fin de Máster**



# TRABAJO FIN DE MÁSTER

## Inestabilidad termoconductiva en un flujo de Couette

Javier Sanz García

Máster en Física de los sistemas complejos, UNED

Tutores:

Emilia Crespo del Arco (UNED)

Jose Joaquín Sánchez (UPM)

Facultad de ciencias, Universidad nacional de educación a distancia 2017

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Descripción del modelo físico</b>	<b>6</b>
2.1. Ecuaciones fundamentales del modelo . . . . .	7
2.2. Variables adimensionales . . . . .	11
2.3. Condiciones de contorno . . . . .	13
2.4. Ecuaciones finales del problema . . . . .	15
2.5. Método de resolución . . . . .	16
<b>3. Resultados y conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>4. Referencias</b>	<b>35</b>

## Abstract

Gravity waves and instability are ubiquitous phenomena of a major importance in atmosphere and oceans. They play a central role in the transport of momentum and energy balance at a wide range of scales in both space and time. The most common type of gravity waves is the internal gravity wave (IGW), which occur in the interior of a stable stratified fluid.

As examples of instability we can mention baroclinic and barotropic instabilities, being both responsible of cyclogenesis in mid-latitudes and tropics.

The characteristic properties of IGWs are usually studied by using the linear Taylor-Goldstein equation, which is obtained by neglecting the thermal conductivity and the viscosity of the fluid. In this study we are going to incorporate these effects.

In order to obtain some useful results, we must simplify the non-linear equations of motion, so some approximations are carried out. First we will apply the Boussinesq approximation, and second, we will linearize it by introducing small perturbations. In order to solve these equations we will use Galerkin method.

We will analyze the conditions under which the instability arises, as well as its dependence with characteristic parameters like Prandtl number, Rayleigh number and the shear rate of the basic flow.

# 1. Introducción

El estudio de las ondas en fluidos tiene una importancia fundamental tanto práctica como teórica. Estas ondas tienen escalas y manifestaciones muy diversas, desde la escala planetaria, como es el caso de las ondas de Rossby, responsables en una primera etapa de la formación de borrascas y frentes en la atmósfera; a la microescala como pueden ser las ondas sonoras, con poco impacto en la dinámica de la atmósfera o el océano. La aparición de ondas en fluidos geofísicos es un fenómeno ubicuo, y los mecanismos que las generan son muy diversos. Podemos citar como ejemplos las ondas de Rossby y las ondas de gravedad en todas sus variantes, las cuales constituyen los modos normales de oscilación atmosféricos [1]. Los fluidos geofísicos se encuentran en unas condiciones que son las de rotación terrestre y sometidos a una estratificación que es normalmente estable. Por estabilidad entendemos que el fluido experimentará una restauración a la posición de equilibrio cuando se produce una perturbación.

Centraremos nuestro interés, debido a su ubicuidad, en las llamadas ondas internas de gravedad. Este tipo de ondas aparecen en una estratificación estable. Esta es quizás la forma más familiar de oscilación, y se produce de manera habitual en la atmósfera y el océano, donde las condiciones de estabilidad suelen ser habituales, amortiguándose la onda conforme se propaga esta. Otra oscilación de interés para nosotros es la de las ondas debidas a la cizalladura. Estas se producen cuando sobre una capa estable, existe un flujo de cizalla. Ejemplos de estas oscilaciones son las ondas de Kelvin-Helmholtz o las ondas que se producen cerca de las corrientes en chorro de la alta troposfera. Además de las anteriores, otra importante forma de oscilación que se produce en fluidos geofísicos, son las ondas internas de inercia-gravedad, consecuencia de la acción de la rotación terrestre sobre un fluido en equilibrio.

Las ondas internas de gravedad se producen en un fluido en el que existe estratificación estable, y que son las principales responsables del transporte de momento de los niveles inferiores de la atmósfera a los niveles altos [1],[2]. Como ejemplo paradigmático podemos citar las ondas dispersivas que se producen por forzamiento orográfico (ondas de montaña) y también aquellas provocadas por la convección o las generadas como consecuencia del ajuste geostrófico en la cercanía de chorros y frentes. Respecto a la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, se ha demostrado [3] de manera teórica, que un perfil de velocidad de Helmholtz

con estratificación estable podría generar ondas internas de gravedad.

Teniendo en cuenta lo anterior, tiene un gran interés práctico el estudio de las inestabilidades hidrodinámicas.

Como ejemplos de inestabilidad, podemos citar la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, responsable principalmente de la turbulencia en aire claro; la inestabilidad baroclina, responsable del crecimiento de los ciclones en latitudes medias; la inestabilidad barotrópica, causante principal de las perturbaciones tropicales y la ruptura de las ondas de montaña en niveles altos de la atmósfera, responsable también de la turbulencia en niveles altos.

El interés de estudiar estos fenómenos, reside en sus aplicaciones prácticas en meteorología, oceanografía y climatología a distintas escalas espaciales y temporales, puesto que nuestro conocimiento actual sobre la transferencia de energía entre escalas se encuentra en una etapa todavía primaria.

Las ecuaciones que rigen los fenómenos descritos anteriormente no son lineales, y no tienen una solución analítica exacta salvo en unos pocos casos muy limitados.

Dada la dificultad de observar y estudiar en la atmósfera éstas inestabilidades, se suele recurrir a simulaciones experimentales en laboratorio, así como a simulaciones numéricas. Uno de los modelos experimentales más habituales para abordar el estudio de inestabilidades en latitudes medias, es el del anillo baroclino (Hide 1958). Este consiste en una cavidad con simetría cilíndrica, confinada entre dos paredes en rotación. El fluido contenido entre las paredes es sometido a un gradiente de temperatura [4]. Obviamente, el estudio del anillo baroclino tiene una semejanza muy somera con la atmósfera y el océano, sistemas éstos mucho más complejos y con muchas más variables y escalas que interactúan entre ellas. Además, las escalas espaciales y temporales en un anillo baroclino son mucho menores que las que nos podemos encontrar en los fluidos geofísicos, si bien, por otra parte, tenemos que las condiciones de hidrostática y geostrofia dependen de la relación entre las variables, y no de la magnitud absoluta de estas. Por tanto, las simulaciones experimentales en un anillo baroclino tienen enormes limitaciones, pero ciertos comportamientos que se dan en la atmósfera y océano son reproducibles también en el laboratorio, como es el caso de la aparición de ondas de gravedad y el de la inestabilidad baroclina.

Otro método de estudio diferente al experimental, es la resolución de las ecuaciones fundamentales simplificadas, y es el método que se va a abordar en adelante mediante un análisis

de estabilidad lineal.

Esto se hace necesario en nuestro caso, puesto que los términos advectivos que aparecerán en las ecuaciones, impiden el análisis de la relación de dispersión directamente.

El objetivo de este trabajo es el de estudiar la inestabilidad que se produce en un fluido sometido a cizalladura, estudiando los casos con calentamiento desde abajo y desde arriba [5]. En el estudio del comportamiento del fluido, incluiremos los efectos viscosos y termoconductivos y despreciaremos los producidos por la rotación terrestre [6].

Analizaremos la inestabilidad que se produce en el sistema, al variar ciertos parámetros característicos, como pueden ser la viscosidad, la conductividad, la cizalladura o el gradiente térmico.

El siguiente apartado de este trabajo está dedicado a la introducción del modelo físico, así como a la explicación de las ecuaciones que lo gobiernan. En los siguientes tres capítulos (2.2, 2.3, 2.4) se desarrollan las ideas presentadas anteriormente, reescribiéndose las ecuaciones de manera adimensional e imponiendo las condiciones de contorno. En el apartado 2.5 se desarrolla el método matemático aplicado a nuestras ecuaciones, para ya en la sección 3, presentar los resultados gráficamente, así como su discusión.



## 2. Descripción del modelo físico

El modelo que vamos a proponer es el de un fluido incompresible, térmicamente conductor y viscoso que se encuentra confinado entre dos fronteras horizontales, además de estar sometido a una cizalladura vertical en la velocidad (figura 1).

Como primera aproximación, realizaremos el estudio omitiendo la rotación, esto es, supondremos que el factor de Coriolis  $f = 2\Omega \sin\phi$  (siendo  $\Omega$  la frecuencia de rotación terrestre y  $\phi$  la latitud) es nulo. Podemos dar un argumento físico para despreciar la rotación terrestre, y éste es que siempre y cuando la frecuencia de Brunt-Väisälä sea mayor que el parámetro de Coriolis, no es de esperar que la rotación terrestre juegue un papel relevante [1].

Asumiremos por último que el movimiento se produce en el plano x-z, por lo que por simetría podemos reducir a dos dimensiones el problema.

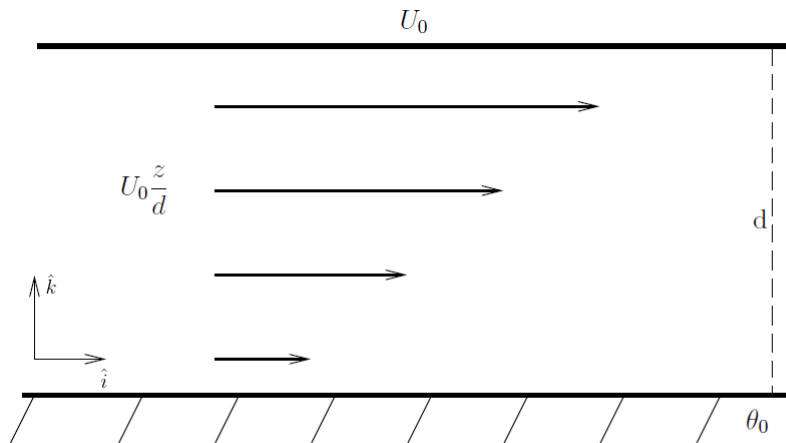


Figura 1: Representación esquemática del modelo físico estudiado

## 2.1. Ecuaciones fundamentales del modelo

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica de nuestro problema son las ecuaciones del movimiento, de conservación de la masa y de conservación de la energía.

Como sabemos, éstas ecuaciones son no lineales, por lo que deberemos aplicar un método perturbativo para linealizarlas.

Las expresiones que obtendremos se fundamentan en las que rigen la convección de Rayleigh-Benard [7]; [8], pero generalizaremos el problema añadiendo un flujo de cizalladura.

El objetivo del cálculo que vamos a desarrollar es el de evaluar las inestabilidades que se producen en el fluido bajo las condiciones descritas anteriormente, cuando este es perturbado infinitesimalmente.

La principal aproximación que vamos a imponer en nuestro problema es la conocida como aproximación de Boussinesq. Esta consiste en considerar la densidad del fluido como constante salvo en el término de la ecuación del movimiento en que se acopla con la gravedad. Las variaciones de densidad del fluido, únicamente se tendrán en cuenta cuando sean debidas a cambios de temperatura y a su vez originen fuerzas de flotación. Estas fuerzas no pueden ser despreciadas de manera general al poder alcanzar un orden de magnitud relevante.

Supondremos que las variaciones de ciertos coeficientes como el calor específico, viscosidad y conductividad son despreciables, por lo que los consideraremos constantes. Esto se justifica por la pequeña dependencia con la temperatura de dichos coeficientes característicos del fluido.

A continuación, planteamos las ecuaciones generales del problema, que posteriormente linealizaremos con el método perturbativo.

En primer lugar, la ecuación que expresa la conservación de la masa, es la ecuación de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

Siendo  $\rho$  la densidad y  $\mathbf{u}$  la velocidad.

Para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad se reduce simplemente a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

representando  $x_i$  las coordenadas cartesianas  $x, y, z$ .

Como se ha mencionado antes, solo tendremos en cuenta cambios de densidad con la temperatura cuando estos originan fuerzas de flotación.

Para un flujo como el que estamos tratando, podemos aproximar esta dependencia con la temperatura mediante la ecuación de estado

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(\theta - \theta_0)] \quad (2.3)$$

siendo  $\alpha$  el coeficiente de expansión térmica,  $\rho_0$  la densidad de referencia en  $z=0$ , y  $\theta_0$  la temperatura en la cual  $\rho = \rho_0$ .

La aproximación de incompresibilidad se justifica en la práctica, puesto que el coeficiente de expansión  $\alpha$  varía entre  $10^{-3}K^{-1}$  y  $10^{-4}K^{-1}$  con una variación de temperatura de unos  $10^\circ C$ , lo que hace a su vez que la densidad varíe solo un 1 %.

Cabe también aclarar que el hecho de estudiar un fluido compresible o incompresible tiene una consecuencia importante respecto al estudio de la distribución de la temperatura. En un fluido incompresible, los cambios de temperatura son no adiabáticos, mientras que, en un fluido compresible, pueden darse procesos sin intercambio de calor, como es el caso de la expansión adiabática de una masa que asciende.

Como se mencionó anteriormente, vamos a aplicar la aproximación de Boussinesq, por lo que las variaciones de la densidad serán ignoradas salvo cuando se acopla con el término de la gravedad en la ecuación del movimiento.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido, son las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales, bajo la aproximación de Boussinesq y la ecuación de estado anterior ec. 2.3 son:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho_0} \right) - \frac{\rho}{\rho_0} g \delta_{i3} + \nu \nabla^2 u_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho_0} + gz \right) + \alpha g (\theta - \theta_0) \delta_{i3} + \nu \nabla^2 u_i \quad (2.4)$$

Por último, la ecuación de conservación de la energía queda simplificada como:

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa \nabla^2 \theta \quad (2.5)$$

siendo  $\kappa$  el coeficiente de conductividad térmica.

Vamos a suponer que el fluido se encuentra en un estado básico, sobre el cual se superponen perturbaciones infinitesimales. Por supuesto, el estado básico debe cumplir igualmente las ecuaciones de conservación anteriores. Para la velocidad, suponemos un flujo estacionario

con cizalladura, cuyo perfil vertical viene dado por  $U_0 \frac{z}{d} \hat{i}$ , donde  $U_0$  es la velocidad de la placa superior y  $d$  la distancia entre fronteras verticales del fluido.

Respecto a la temperatura, tenemos un fluido confinado entre fronteras rígidas e isothermas, que está sometido a una diferencia de temperatura entre las fronteras de la forma  $\Theta = \theta_0 - \beta z$  siendo  $\beta$  el gradiente vertical. Este perfil de temperatura es consistente con la ecuación estacionaria de conservación de la energía  $\nabla^2 \theta = 0$ . Para una estratificación estable, la densidad disminuye con la altura y la temperatura aumenta, luego  $\beta < 0$ . Si invertimos el signo de  $\beta$  haciendo que sea  $\beta > 0$ , estamos imponiendo un calentamiento del fluido desde abajo.

En cuanto a la presión, también hemos supuesto que en el estado básico la podemos aproximar como  $P = p_0 - g\rho_0(z + \frac{1}{2}\alpha\beta z^2)$ , el cual no es un perfil estrictamente hidrostático pues tenemos una dependencia no lineal con  $z$ .

Introducimos las perturbaciones del flujo básico:

$$\vec{u} = \vec{u}'(\mathbf{x}, t) + U(z)\hat{i} \quad (2.6)$$

$$\theta = \Theta(z) + \theta'(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

$$p = P(z) + p'(\mathbf{x}, t) \quad (2.8)$$

El objetivo de modificar el flujo básico introduciendo unas perturbaciones infinitesimales, es el de realizar un análisis de estabilidad del sistema, y evaluar bajo que condiciones las perturbaciones introducidas crecerán con el tiempo dando lugar a la inestabilidad, o se amortiguarán restableciéndose el flujo básico.

Con las magnitudes anteriores, podemos obtener las ecuaciones para la perturbación de nuestro problema.

La ecuación de continuidad para  $\vec{u}'$  queda reducida simplemente a:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.9)$$

La ecuación del movimiento ec. 2.4 se ve modificada bajo estas aproximaciones de la siguiente manera:

i) el término del gradiente de presión podemos reescribirlo como:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho_0} + gz \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - g\delta_{i3}$$

ii) el término de la gravedad queda como:

$$\alpha g(\theta - \theta_0)\delta_{i3} = (\alpha g\theta' - \alpha\beta g z)\delta_{i3}$$

Por último y teniendo en cuenta  $-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z} = g + \alpha\beta g z$ , la ecuación para la perturbación de la velocidad se reescribe como:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \vec{u}\vec{\nabla}\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \alpha g\theta'\delta_{i3} + v\nabla^2 u'_i \quad (2.10)$$

Supondremos que los productos entre perturbaciones, así como los productos de perturbaciones y derivadas, pueden ser despreciados, es decir  $u'\nabla u' \approx 0$  y  $u'\nabla\theta' \approx 0$

En nuestro caso el flujo es:

$$\vec{u} = [U_0\frac{z}{d} + u'(x)]\hat{i} + w'\hat{k} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}$$

Por lo que el elemento  $\vec{u}\vec{\nabla}\vec{u}$  es, despreciando los productos entre perturbaciones:

$$\vec{u}\vec{\nabla}\vec{u} = (U_0\frac{z}{d}\frac{\partial u'}{\partial x} + w'\frac{U_0}{d})\hat{i} + U_0\frac{z}{d}\frac{\partial w'}{\partial x}\hat{k} \quad (2.12)$$

La ecuación de perturbación del movimiento es entonces:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_0\frac{z}{d}\frac{\partial w'}{\partial x}\delta_{i3} + (U_0\frac{z}{d}\frac{\partial u'}{\partial x} + w'\frac{U_0}{d})\delta_{i1} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \alpha g\theta'\delta_{i3} + v\nabla^2 u'_i \quad (2.13)$$

Por el mismo procedimiento

$$\vec{u}\vec{\nabla}\theta = (U_0\frac{z}{d}\frac{\partial}{\partial x} + u'\frac{\partial}{\partial x})\theta + w'\frac{\partial\theta}{\partial z} \quad (2.14)$$

La ecuación de perturbación para la energía es:

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t} + (U_0\frac{z}{d}\frac{\partial}{\partial x} + u'\frac{\partial}{\partial x})\theta + w'\frac{\partial\theta}{\partial z} = \kappa\nabla^2\theta' \quad (2.15)$$

que recordando que  $\theta = \theta_0 - \beta z + \theta'(x, t)$  y teniendo en cuenta la aproximación en ec. 2.14

$$(U_0\frac{z}{d}\frac{\partial}{\partial x} + u'\frac{\partial}{\partial x})\theta + w'\frac{\partial\theta}{\partial z} \simeq U_0\frac{z}{d}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - \beta w'$$

la reescribimos finalmente como:

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t} + U_0\frac{z}{d}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - \kappa\nabla^2\theta' = \beta w' \quad (2.16)$$

## 2.2. Variables adimensionales

Para simplificar el modelo, así como para extender su utilidad vamos a adimensionalizar las ecuaciones, introduciendo nuevas variables adimensionales.

Estas variables van a ser combinación de parámetros característicos de nuestro problema [7].

Como escala de longitud, simplemente utilizamos la distancia  $d/\pi$  entre las fronteras superior e inferior. La escala de velocidad viene dada por  $U_0$ , la de temperatura por el parámetro  $\beta d$ , el tiempo por el cociente  $d/U_0$  y la presión por  $\rho U_0^2$

$$\text{Longitud: } x_* = x\pi/d$$

$$\text{Tiempo: } t_* = tU_0/d$$

$$\text{Velocidad: } u_* = u/U_0$$

$$\text{Temperatura: } \theta_* = \theta/\beta d$$

$$\text{Presión: } p_* = p/\rho U_0^2$$

Igualmente debemos tener en cuenta que las derivadas respecto a las nuevas variables van a cambiar de forma.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t_*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_*} = \frac{U_0}{d} \frac{\partial}{\partial t_*} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial x_{i*}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{i*}} = \frac{\pi}{d} \frac{\partial}{\partial x_{i*}} \end{aligned}$$

Y de manera sucesiva podemos obtener las derivadas de órdenes superiores.

Podemos ya escribir las ecuaciones 2.13 y 2.16 adimensionalmente:

$$\frac{\partial u'_{i*}}{\partial t_*} + z_* \frac{\partial u'_{i*}}{\partial x_*} + w'_* \delta_{i1} = -\frac{U_0 d}{\pi \nu} \frac{\partial p'_*}{\partial x_{i*}} + \frac{\alpha \beta g d^2}{U_0^2} \theta'_* \delta_{i3} + \frac{\pi^2 \nu}{d U_0} \nabla'^2 u'_{i*} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \theta'_*}{\partial t_*} - w'_* + z_* \frac{\partial \theta'_*}{\partial x_*} = \frac{\pi^2 \kappa}{d U_0} \nabla'^2 \theta'_* \quad (2.18)$$

A continuación, definimos los números de Rayleigh, Prandtl y Reynolds:

$$Ra \equiv \frac{\alpha \beta g d^4}{\nu \kappa} \quad ; \quad Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} \quad ; \quad Re \equiv \frac{U_0 d}{\nu}$$

respectivamente.

Estos tres números adimensionales caracterizan nuestro sistema.

El número de Prandtl,  $Pr$ , es una propiedad característica de cada fluido (la dependencia de  $Pr$  con la temperatura no se tiene en consideración en este trabajo), por lo que fijando valores podemos estudiar distintos fluidos. Los casos que tienen un mayor interés en el contexto de este trabajo, son el aire y el del agua, los cuales a una temperatura en torno a  $20^\circ\text{C}$  tienen un valor del número de Prandtl de 0.7 y 7 respectivamente.

El número de Rayleigh representa el gradiente de temperatura al cual se encuentra sometido nuestro fluido.

Por último el número de Reynolds representa la velocidad de las paredes, y con ello a la cizalladura del fluido.

Con estas definiciones podemos escribir las ecuaciones anteriores como:

$$\frac{\partial u'_{i*}}{\partial t_*} + z_* \frac{\partial u'_{i*}}{\partial x_*} + w'_* \delta_{i1} = -\pi \frac{\partial p'_*}{\partial x_{i*}} + \frac{RaPr}{Re^2} \theta'_* \delta_{i3} + \frac{\pi^2}{Re} \nabla^2 u'_{i*} \quad (2.19)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_*} + z_* \frac{\partial}{\partial x_*} - \frac{\pi^2}{RePr} \nabla^2 \right) \theta'_* = w'_* \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u'_{i*}}{\partial x_{i*}} = 0 \quad (2.21)$$

### 2.3. Condiciones de contorno

En las ecuaciones de nuestro problema, debemos exigir que las soluciones cumplan una serie de condiciones de contorno.

Podemos distinguir dos tipos de fronteras, las rígidas y las libres.

Dadas las variables adimensionales introducidas en la sección anterior, nuestro sistema está acotado entre unas fronteras de distancia  $\pi$ .

Independientemente de si las fronteras son rígidas o libres, se deben cumplir las condiciones:

$$\theta = w = 0 \text{ en } z = 0 \text{ y } z = \pi \quad (2.22)$$

Esto es debido a que tanto las fronteras superior e inferior del fluido se suponen impermeables e isotermas, por lo que tanto la perturbación de la temperatura como la velocidad vertical deben anularse.

Respecto a las fronteras rígidas, en estas suponemos que no existe deslizamiento, es decir se anulan las velocidades tangenciales luego

$$u = w = 0 \text{ en } z = 0 \quad (2.23)$$

Como la condición debe satisfacerse para todo  $x$  e  $y$  en la superficie rígida, de la ecuación de continuidad tenemos que  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  por lo que en una frontera rígida se cumple la condición:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ y } z = \pi \quad (2.24)$$

En cambio, en una frontera libre, suponiendo que ésta es estacionaria, tenemos que las componentes tangenciales del tensor de tensiones, en otras palabras, los esfuerzos tangenciales, son nulos. Matemáticamente se expresa como:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Dado que  $w=0$  en  $z=\pi$ , para todo valor de  $x$  e  $y$  tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Si combinamos este resultado con la ecuación de continuidad obtendremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$



lo que se reduce a  $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$  en  $z=\pi$  Por ello la condición de frontera libre para  $z=\pi$  queda finalmente como:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.25)$$

En este trabajo utilizaremos las condiciones de frontera rígida a temperatura constante por lo que las condiciones de contorno son ec. 2.22 y ec. 2.24.

## 2.4. Ecuaciones finales del problema

Para simplificar la notación omitimos los asteriscos dando por hecho de ahora en adelante que trabajamos con variables adimensionales.

A la ecuación del movimiento ec. 2.19

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + z \frac{\partial u'_i}{\partial x} + w' \delta_{i1} = -\pi \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{RaPr}{Re^2} \theta' \delta_{i3} + \frac{\pi^2}{Re} \nabla^2 u'_i$$

vamos a aplicarle el rotacional dos veces, y a proyectar sobre el eje  $z$ , puesto que en nuestro estudio nos interesa la componente en ese eje de la velocidad, es decir  $w$ . Con ello conseguimos eliminar la variable de la presión dado que aparece bajo el operador gradiente.

Tras esta operación y aplicando la ecuación de continuidad (ec. 2.21) para eliminar el primer término del segundo miembro de la identidad:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla}^2 \vec{u}$$

tenemos que para  $w$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 w' - \frac{\pi^2}{Re} \nabla^4 w' = \frac{RaPr}{Re^2} \nabla_h^2 \theta' \quad (2.26)$$

siendo el operador  $\nabla_h^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  el laplaciano horizontal.

Respecto a la ecuación de la temperatura ec.2.20, esta queda simplemente como:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + z \frac{\partial \theta'}{\partial x} - \frac{\pi^2}{RePr} \nabla^2 \theta' = w' \quad (2.27)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones (2-23) y (2-24) para la temperatura  $\theta$  y la velocidad  $w$  con  $\theta = w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  en  $z=0$  y  $z=\pi$  obtendremos la solución del problema.

## 2.5. Método de resolución

Para abordar el problema supondremos que las funciones  $\theta$ ,  $w$  pueden escribirse como una combinación lineal de funciones propias. La ecuación 2.26 es una ecuación de cuarto orden, por lo que estas funciones propias podemos buscarlas a partir de la ecuación de autovalores  $\frac{d^4 Y}{dz^4} = \mu^4 Y$ , [9], bajo las condiciones de contorno de fronteras rígidas e isothermas descritas anteriormente (ec. 2.22, ec. 2.24, en  $z=0$  y en  $z=\pi$ ,  $Y = \frac{dY}{dz} = \theta = 0$  La solución general a esta ecuación es:

$$Y_n = [\cosh(\mu_n z) - \cos(\mu_n z)] - \beta_n [\sinh(\mu_n z) - \sin(\mu_n z)] \quad (2.28)$$

Donde

$$\beta_n = \frac{\cosh(\mu_n \pi) - \cos(\mu_n \pi)}{\sinh(\mu_n \pi) - \sin(\mu_n \pi)} \quad (2.29)$$

Los valores  $\mu_n$  son las distintas raíces de la ecuación

$$\cosh(\mu_n \pi) \cos(\mu_n \pi) = 1 \quad (2.30)$$

cuyos valores son  $\mu_1=1,50562$  ;  $\mu_2=2,49975$  ;  $\mu_3=3,50001$  y para  $n > 3$   $\mu_n$  se ajusta con bastante aproximación a la expresión  $\mu_n = \frac{2n+1}{2}$

La ecuación 2.30 es el producto de  $\cosh(\pi\mu)$  que diverge exponencialmente con  $\mu$  y una función acotada que oscila entre  $\pm 1$ . Como consecuencia tenemos variaciones muy bruscas de los valores de la función producto. En la figura 2 representamos las soluciones de dicha ecuación.

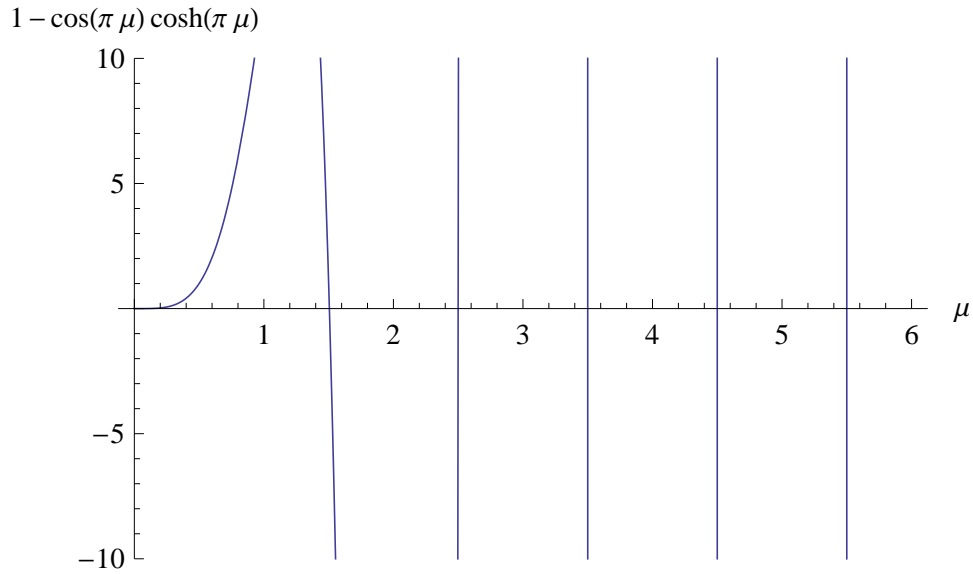


Figura 2: Gráfica de  $1 - \cosh(\mu_n\pi)\cos(\mu_n\pi)$

Para  $n=1$  y  $n=2$  conociendo los valores correspondientes  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , los valores de  $\beta_n$  son  $\beta_1=0,9825$  ;  $\beta_2=1,00078$  convergiendo a 1 al aumentar  $n$ .

En la figura 3 representamos las funciones  $Y_n$  y en la figura 4 las derivadas  $Y'_n$  (tres primeros modos)

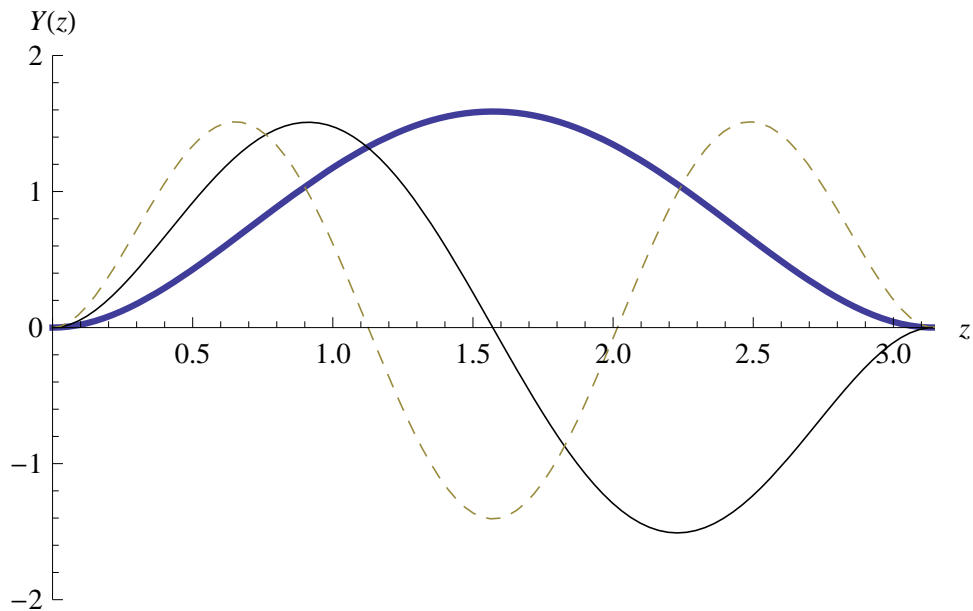


Figura 3: Funciones  $Y_1, Y_2, Y_3$  ,linea gruesa, continua y discontinua respectivamente

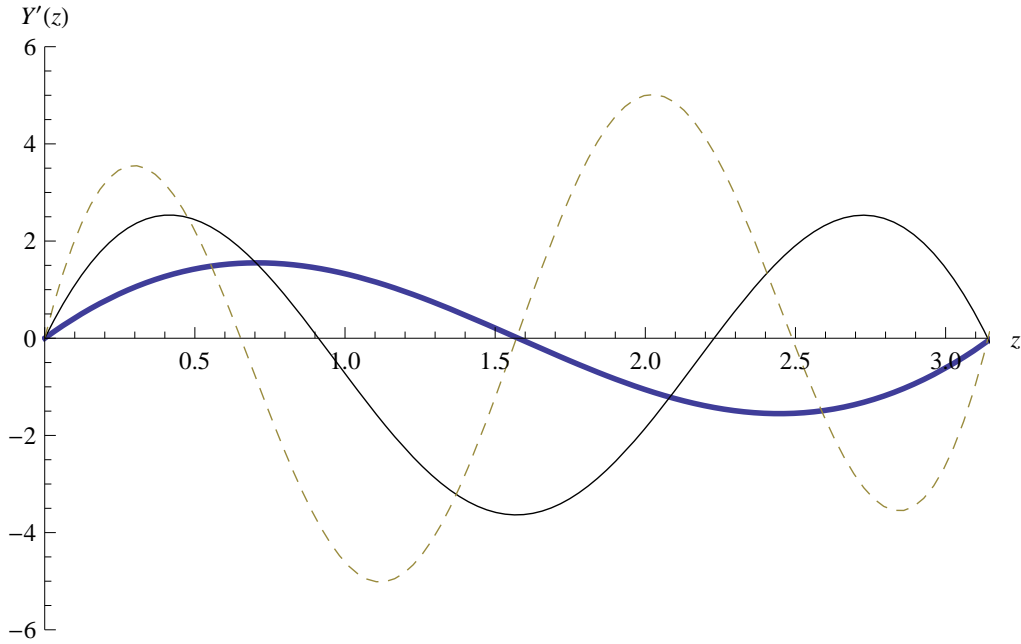


Figura 4: Funciones  $Y_1', Y_2', Y_3'$ , línea gruesa, continua y discontinua respectivamente

Para la temperatura tenemos una ecuación de segundo orden, por lo que propondremos una combinación lineal de funciones trigonométricas, las cuales cumplirán las condiciones de contorno exigidas.

Teniendo en cuenta todo lo anterior podemos plantear como soluciones funciones con la forma:

$$\theta = \bar{\theta}(z)e^{ik(x-\xi t)} \quad (2.31)$$

$$w = \bar{w}(z)e^{ik(x-\xi t)} \quad (2.32)$$

siendo  $\bar{\theta}(z) = \sum_{r=1} b_r \text{sen}(rz)$  y  $\bar{w}(z) = \sum_{r=1} a_r Y_r$

Siendo  $Y_n$  las funciones descritas anteriormente ec. 2.28. Los coeficientes del desarrollo pueden ser reales o complejos.

En la figura 5 representamos los dos primeros modos de  $w$ :

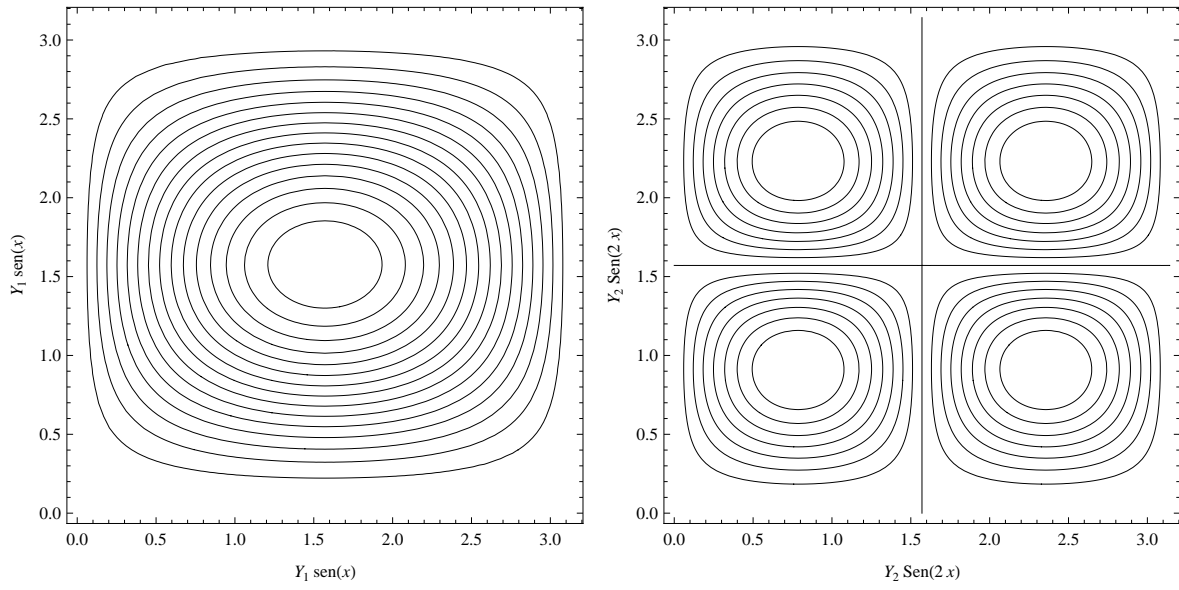


Figura 5: Primer modo  $Y_1(z)\text{sen}(x)$  (izquierda) y segundo modo  $Y_2(z)\text{sen}(2x)$  (derecha)

En la figura 6 representamos las líneas de corriente de las funciones  $w$ ,  $u$ .

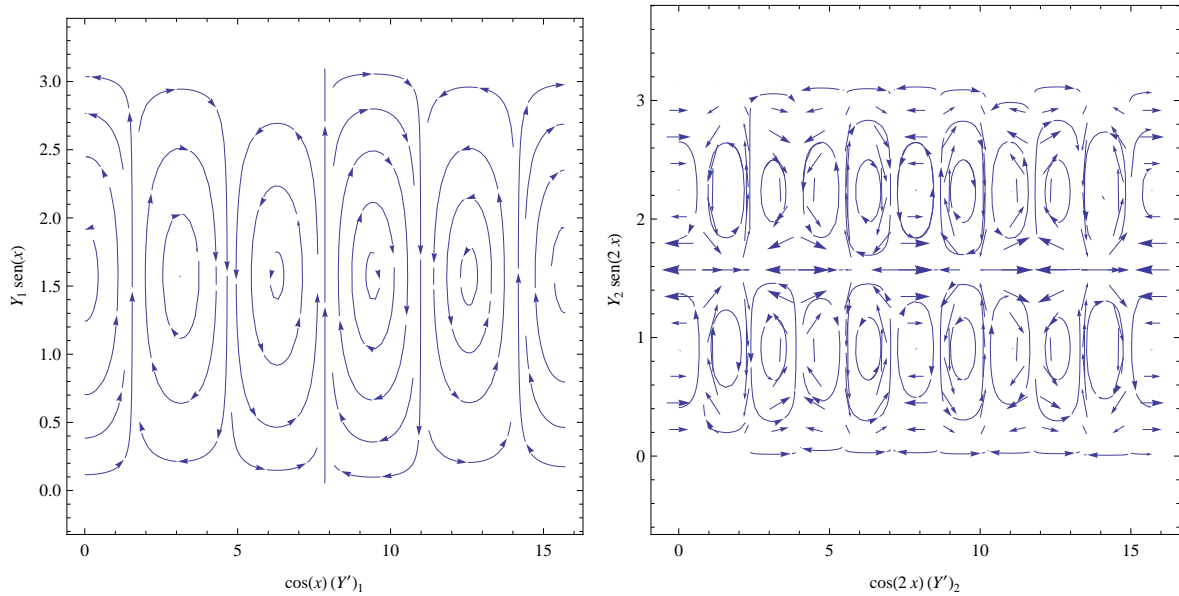


Figura 6: Líneas de corriente de la velocidad en el plano  $x$ - $z$  para el primer modo  $u = Y_1'(z)\cos(x)$ ,  $w = Y_1(z)\text{sen}(x)$  (izquierda) y para el segundo modo  $u = Y_2'(z)\cos(2x)$ ,  $w = Y_2(z)\text{sen}(2x)$  (derecha)

En las figuras 7 y 8 representamos las superposiciones de los dos primeros modos con un flujo de cizalladura.

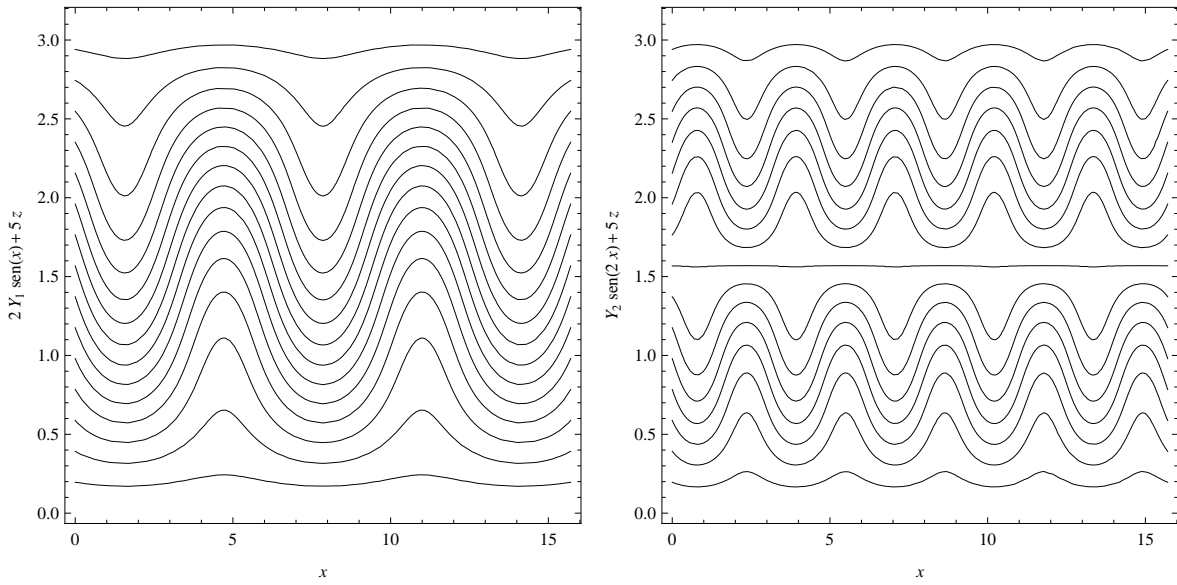


Figura 7: Superposición lineal de un flujo de cizalladura y los primeros modos de  $w$ . En este caso  $5z + 2\text{sen}(x)Y_1(z)$  (izquierda) y  $5z + \text{sen}(2x)Y_2(z)$  (derecha)

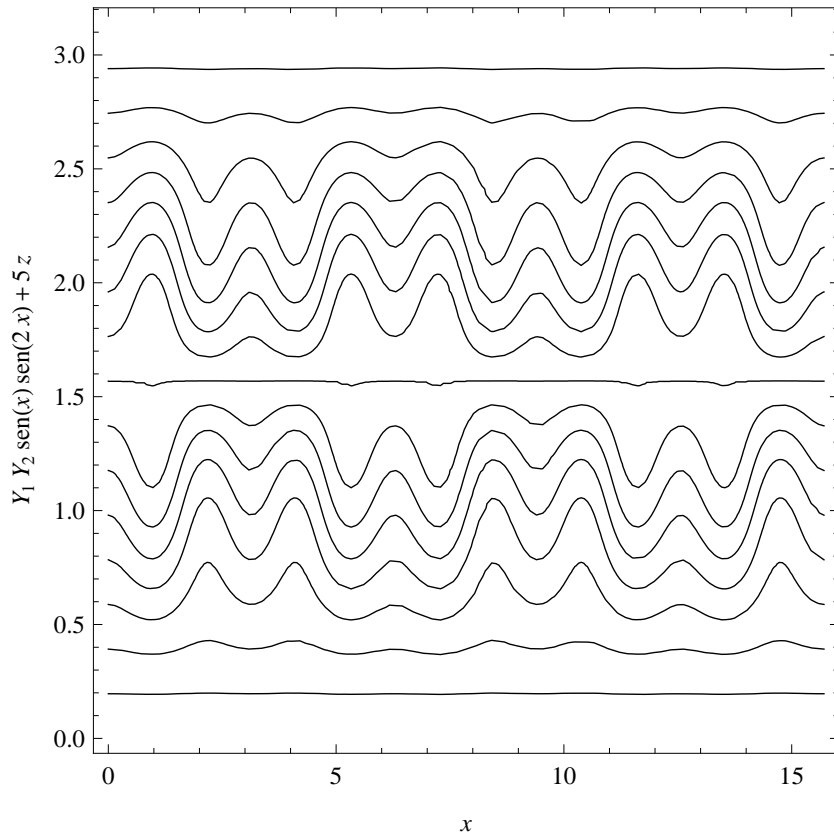


Figura 8: Superposición de un flujo de cizalladura y el producto de los dos primeros modos.  $5z + \text{sen}(x)Y_1(z)\text{sen}(2x)Y_2(z)$

La aparición de la inestabilidad en nuestro sistema, se dará cuando para algún  $k$ , el conjunto de parámetros  $Pr, Ra, Re$  tenga soluciones con valores positivos de la parte imaginaria de  $\omega$ , lo que deviene en un crecimiento exponencial con el tiempo.

Así pues, analizaremos la estabilidad de la solución en función de los parámetros que caracterizan al problema. Para resolver las ecuaciones (ec. 2,26 y ec. 2,27), recurriremos al método de Galerkin, el cual se desarrolla en el Anexo I 3.

En las ecuaciones de nuestro modelo (ec. 2,26 y ec. 2,27), sustituiremos  $\theta$  y  $w$  por las funciones 2.31 y 2.32 por lo que obtenemos:

$$[ik\xi - ikz + \frac{\pi^2}{Re}(D^2 - k^2)](D^2 - k^2)\bar{w} = \frac{RaPr}{Re^2}k^2\bar{\theta} \quad (2.33)$$

$$- ik\xi\bar{\theta} + ikz\bar{\theta} - \frac{\pi^2}{RePr}(D^2 - k^2)\bar{\theta} = \bar{w} \quad (2.34)$$

Siendo  $D$  el operador  $D \equiv \frac{d}{dz}$

Podemos escribirlas de una manera más compacta:

$$[(D^2 - k^2) + ib\xi - ibz](D^2 - k^2)\bar{w} = h\theta_1 \quad (2.35)$$

$$[(D^2 - k^2) + ibPr\xi - ibzPr]\theta_1 = -\bar{w} \quad (2.36)$$

Donde hemos definido:

$$\theta_1 \equiv \frac{\bar{\theta}\pi^2}{PrRe} \quad ; \quad b \equiv \frac{Rek}{\pi^2} \quad ; \quad h \equiv \frac{RaPr^2k^2}{\pi^4}$$

La ec. 2.35 aplicada a  $\bar{w}$  da como resultado:

$$\sum_{r=1} [Y_r\mu_r^4 - 2k^2Y_r'' + k^4Y_r + ib\xi Y_r'' - ib\xi k^2Y_r + ibzk^2Y_r - ibzY_r''] = h \sum_{r=1} b_r \text{sen}(rz) \quad (2.37)$$

Del mismo modo, la ec. 2.36 actuando sobre  $\bar{\theta}$ :

$$\sum_{r=1} b_r [-n^2\varphi_r - k^2\varphi_r + ibPr\xi\varphi_r - ibzPr\varphi_r] = - \sum_{r=1} a_r Y_r \quad (2.38)$$

Aplicamos a continuación el método de Galerkin descrito anteriormente, esto es, la primera ec. 2.37 la multiplicamos por la función  $Y_n$  y la segunda ec. 2.38 por  $\varphi_n \equiv \text{sen}(nz)$  e integramos por partes de 0 a  $\pi$ .

$$\sum_{r=1} [\mu_r^4 I_{rn}^{(0)} + 2k^2 I_{rn}^{(2)} + k^4 I_{rn}^{(0)} - ib\xi I_{rn}^{(2)} - ib\xi k^2 I_{rn}^{(0)} + ibk^2 J_{rn}^{(0)} + ibJ_{rn}^{(2)} + ibI_{rn}^{(1)}] a_r = h \sum_{r=1} L_{rn} b_r \quad (2.39)$$



$$\sum_{r=1} [-(n^2 + k^2)\frac{\pi}{2}\delta_{rn} + ibPr\xi\frac{\pi}{2}\delta_{rn} - ibPrK_{rn}]b_r = -\sum_{r=1} L_{nr}a_r \quad (2.40)$$

Donde hemos definido las siguientes integrales de funciones [10]:

$$\begin{aligned} I_{rn}^{(0)} &\equiv \int_0^\pi Y_r Y_n dz = \pi \delta_{rn} \\ I_{rn}^{(1)} &\equiv \int_0^\pi Y_r' Y_n dz \\ I_{rn}^{(2)} &\equiv \int_0^\pi Y_r' Y_n' dz \\ J_{rn}^{(0)} &\equiv \int_0^\pi z Y_r Y_n dz \\ J_{rn}^{(2)} &\equiv \int_0^\pi z Y_r' Y_n' dz \\ K_{rn} &\equiv \int_0^\pi z \text{sen}(rz) \text{sen}(nz) dz \\ L_{rn} &\equiv \int_0^\pi Y_n \text{sen}(rz) dz \end{aligned}$$

En el anexo II 3 se dan las expresiones que permiten la evaluación numérica de estas integrales.

En el desarrollo de las integrales anteriores se han utilizado las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Y_n'' Y_r dz &= Y_n' Y_r \Big|_0^\pi - \int_0^\pi Y_n' Y_r' dz = -I_{nr}^{(2)} \\ \int_0^\pi z Y_n'' Y_r dz &= z Y_n' Y_r \Big|_0^\pi - \int_0^\pi z Y_n' Y_r' dz - \int_0^\pi Y_n' Y_r dz = -J_{nr}^{(2)} - I_{nr}^{(1)} \end{aligned}$$

Así pues, utilizando el método de Galerkin, conseguimos transformar un sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas.

Reagrupando términos tenemos que

$$\sum_{r=1} [(\mu_r^4 + k^4 - ibk^2\xi)I_{rn}^{(0)} + (2k^2 - ib\xi)I_{rn}^{(2)} + ibk^2 J_{rn}^{(0)} + ibJ_{rn}^{(2)} + ibI_{rn}^{(1)}]a_r = h \sum_{r=1} L_{rn}b_r \quad (2.41)$$

$$\sum_{r=1} [(n^2 + k^2)\frac{\pi}{2}\delta_{rn} - ibPr\xi\frac{\pi}{2}\delta_{rn} + ibPrK_{rn}]b_r = \sum_{r=1} L_{nr}a_r \quad (2.42)$$

A medida que aumentan  $r$  y  $n$ , algunos de los términos de la matriz aumentan polinomialmente, por lo que divergen. Para evitar esto, dividiremos la primera ecuación por  $\mu_r^4$  y la segunda por  $n^2$ .

De nuevo las reagruparemos en matrices reales y matrices multiplicadas por  $\xi$ , quedando el sistema de ecuaciones como:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

El problema queda entonces reducido a un problema de autovalores generalizado donde hemos definido:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(\mu_r^4 + k^4)I_{rn}^{(0)} + 2k^2 I_{rn}^{(2)} + ibk^2 J_{rn}^{(0)} + ibJ_{rn}^{(2)} + ibI_{rn}^{(1)}}{\mu_r^4} \\ A_2 &= -\frac{L_{rn}}{n^2} \\ B_1 &= -\frac{hL_{nr}}{\mu_r^4} \\ B_2 &= \frac{(n^2 + k^2)\frac{\pi}{2}\delta_{rn} + ibPrK_{rn}}{n^2} \\ C_1 &= \frac{ibk^2\xi I_{rn}^{(0)} + ib\xi I_{rn}^{(2)}}{\mu_r^4} \\ C_2 &= \frac{ibPr\xi\frac{\pi}{2}\delta_{rn}}{n^2} \end{aligned}$$

y si cambiamos de variable mediante  $\lambda = ib\xi$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

siendo ahora:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k^2 I_{rn}^{(0)} + I_{rn}^{(2)}}{\mu_r^4} \\ C_2 &= \frac{Pr\frac{\pi}{2}\delta_{rn}}{n^2} \end{aligned}$$

Puesto que hemos introducido la nueva variable  $\lambda = ib\xi$ , en el problema de autovalores anterior debemos, para identificar la inestabilidad, buscar regiones con  $Re(\lambda) < 0$ .

En cuanto a la parte imaginaria de  $\lambda$ , esta corresponde a la frecuencia a la que se propaga la onda.

### 3. Resultados y conclusiones

Para evaluar la validez de nuestro modelo, podemos comparar algunos resultados con la literatura ya existente [10] , [11] El método utilizado por los citados autores, es análogo al del presente trabajo, si bien la configuración del problema, así como las relaciones entre algunas magnitudes difieren.

Los valores del número de Rayleigh equivalentes para hacer la comparación son  $Ra = 6008$  y  $Ra = 30043$ , fijando  $k = 4/\pi$ ,  $Pr = 1$ , y corresponden a un calentamiento desde abajo. Los resultados obtenidos se representan en las siguientes gráficas 9.

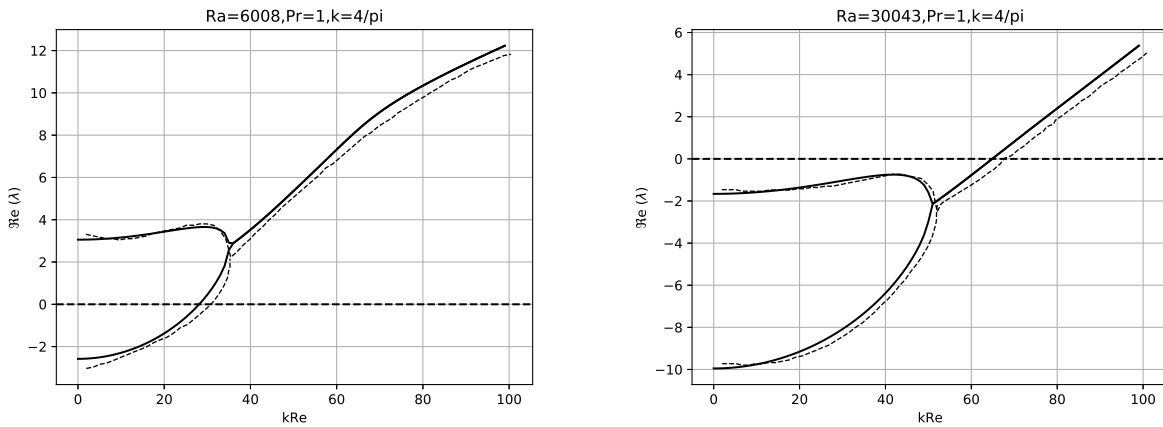


Figura 9: Comparación entre los resultados obtenidos por Gallagher y Mercer (línea discontinua) y los obtenidos con el modelo expuesto en este trabajo (línea continua) para dos valores distintos del número de Rayleigh.

Como se ha indicado, si hacemos que  $\beta > 0$ , el número de Rayleigh es positivo, lo cual indica un calentamiento del fluido desde abajo. Esta configuración reproduce el problema de Rayleigh-Benard con cizalladura vertical, y es el que vamos a analizar en primer lugar.

Invirtiendo simplemente el signo de  $\beta$ , podemos estudiar la estabilidad del fluido calentando desde su parte superior.

#### -Caso con $Ra > 0$

Podemos estudiar en primer lugar, el caso del numero de Prandtl correspondiente al aire, que toma aproximadamente el valor de  $Pr = 0,7$

Si representamos la parte real de los autovalores  $\lambda$  de la ecuación 2.44 en función del producto  $kRe$  para distintos valores del numero de Rayleigh tenemos:

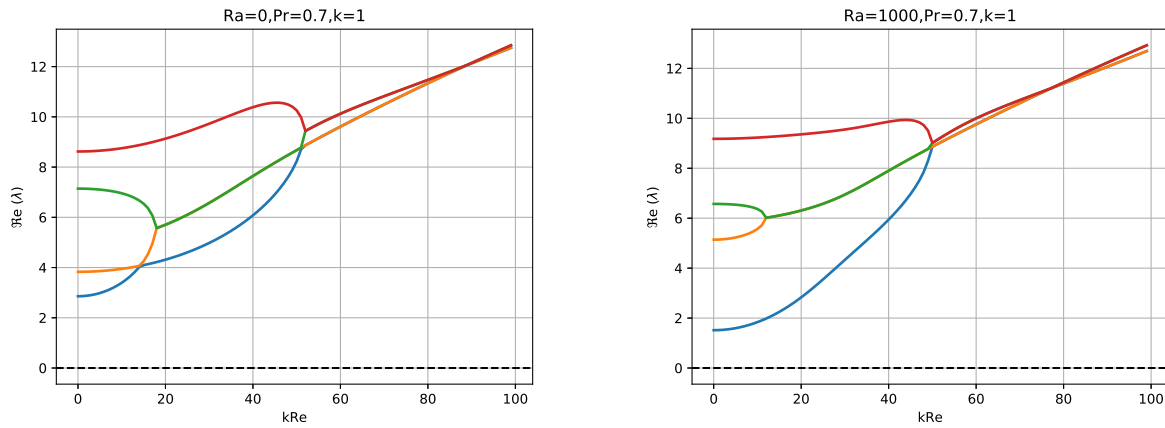


Figura 10: *Parte real de los primeros autovalores para  $Ra=0$  (izquierda) y  $Ra=1000$  (derecha).  $Pr=0.7$*

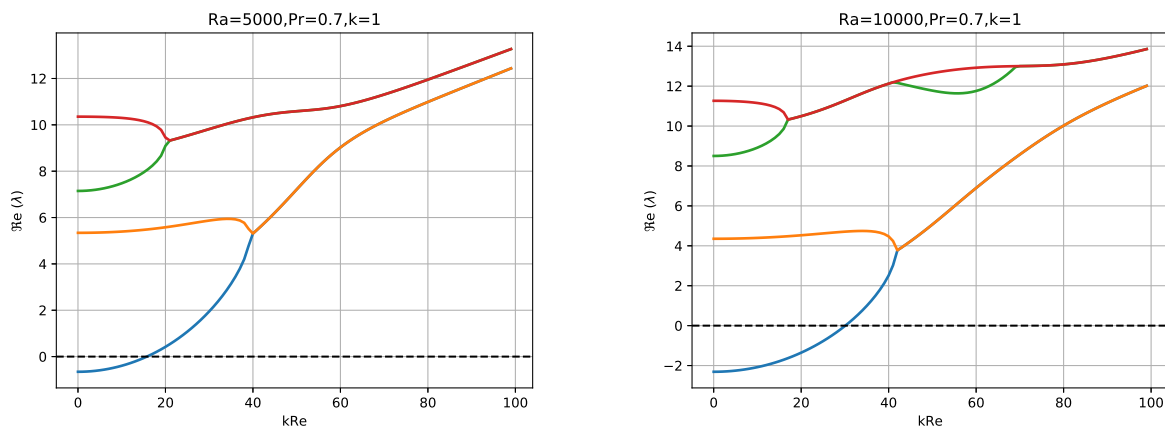


Figura 11: *Parte real de los primeros autovalores para  $Ra=5000$  (izquierda) y  $Ra=10000$  (derecha).  $Pr=0.7$*

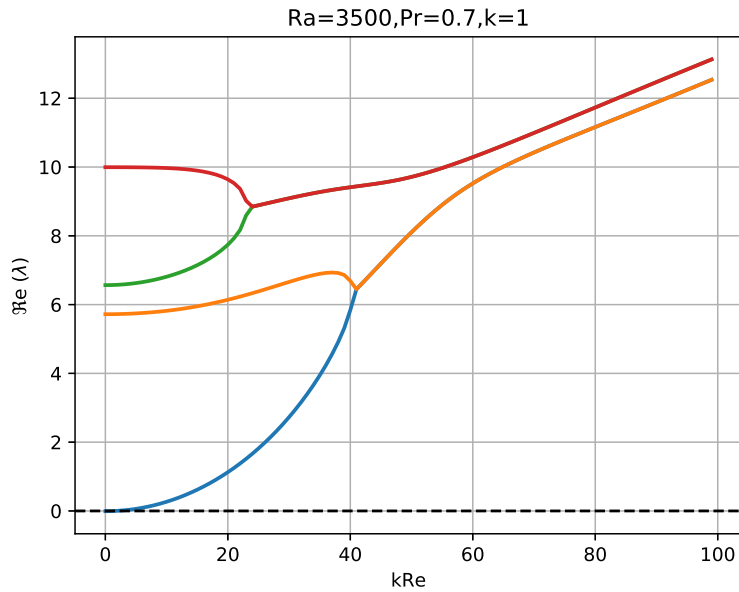


Figura 12: Parte real de los primeros autovalores para el valor crítico del número de Rayleigh.

En las gráficas de las figuras 10, 11 y 12 se han representado las partes reales de los autovalores más pequeños para distintos casos. Cuando la parte real de estos sea negativa se producirá la inestabilidad, siendo suficiente con que el menor de los autovalores cumpla esta condición.

Para realizar los cálculos se ha elegido truncar las matrices en  $n=50$ . En cuanto al valor de  $k$ , se ha optado por fijar el número entero mas pequeño posible,  $k=1$ .

Cabe notar que  $Ra = 0$  representa el caso en el cual no existe gradiente de temperatura, por lo que tendríamos un flujo con cizalladura únicamente.

Podemos observar según los resultados de las figuras 10 y 11 que, tal y como cabía esperar, se obtiene la inestabilidad cuando el número de Rayleigh es lo suficientemente grande. También observamos que al aumentar el valor del número de Reynolds, se restaura la estabilidad. Es decir, dada una situación de inestabilidad debida al calentamiento puede llegar a ser inhibida por la cizalladura vertical. El valor del número de Reynolds necesario para restablecer la estabilidad, es mayor cuanto mayor sea el número de Rayleigh.

De acuerdo con los resultados representados en la figura 12, el valor crítico de  $Ra$  para el cual empezamos a observar inestabilidad es aproximadamente  $Ra \sim 3500$ , si bien esta se daría para un valor prácticamente nulo de  $Re$ .

En las figuras anteriores, observamos que existen bifurcaciones para ciertos valores de  $kRe$ . La interpretación física es, que por debajo del valor de  $kRe$  donde se produce la bifurcación tenemos dos autovalores distintos en la parte real, que representan ondas estacionarias, y por encima de ese valor, nos encontramos con un par de autovalores complejos conjugados que representan ondas viajando en direcciones contrarias.

Podemos extender el estudio variando el número de Prandtl, en este caso al valor del agua a unos  $20^\circ\text{C}$ ,  $Pr = 7$ . Los resultados obtenidos son:

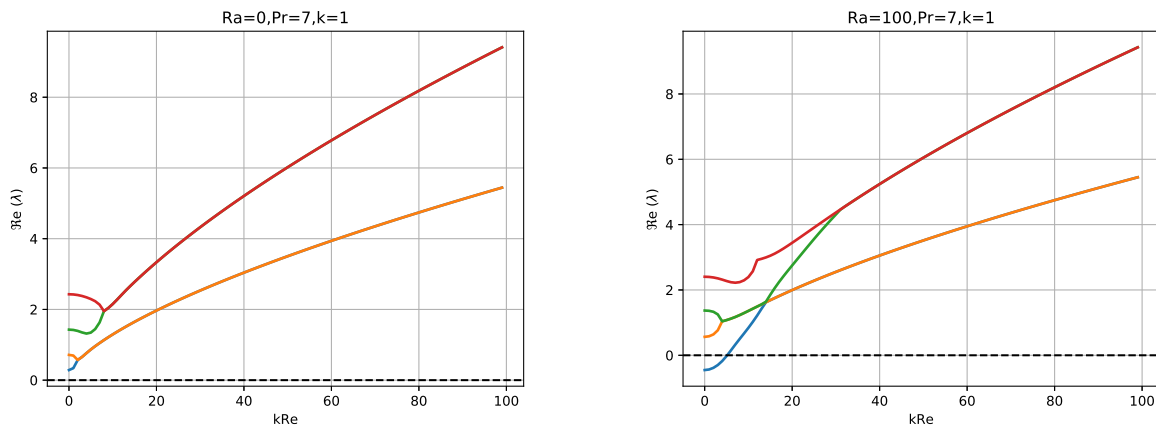


Figura 13: Parte real de los primeros autovalores  $Ra=0$  (izquierda) y  $Ra=100$  (derecha).  $Pr=7$

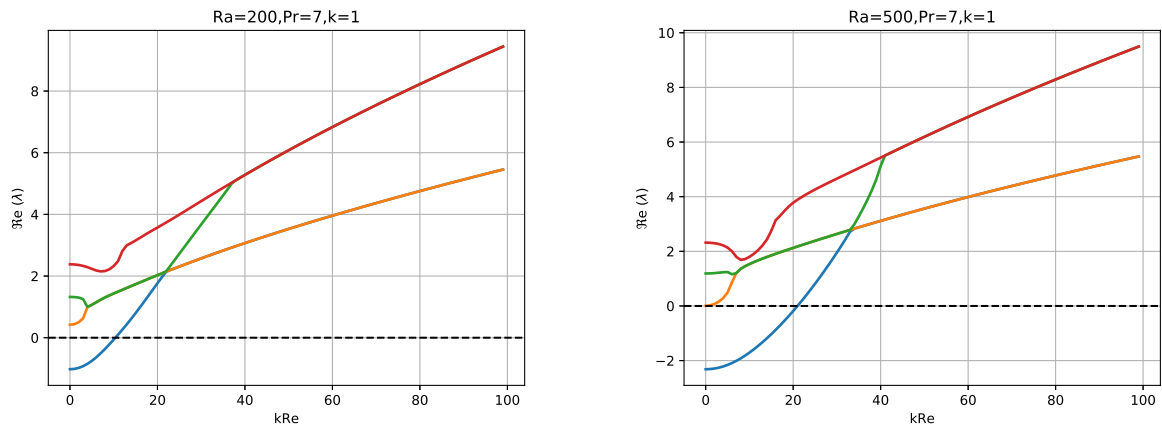


Figura 14: Parte real de los primeros autovalores para  $Ra=200$  (izquierda) y  $Ra=500$  (derecha).  $Pr=7$

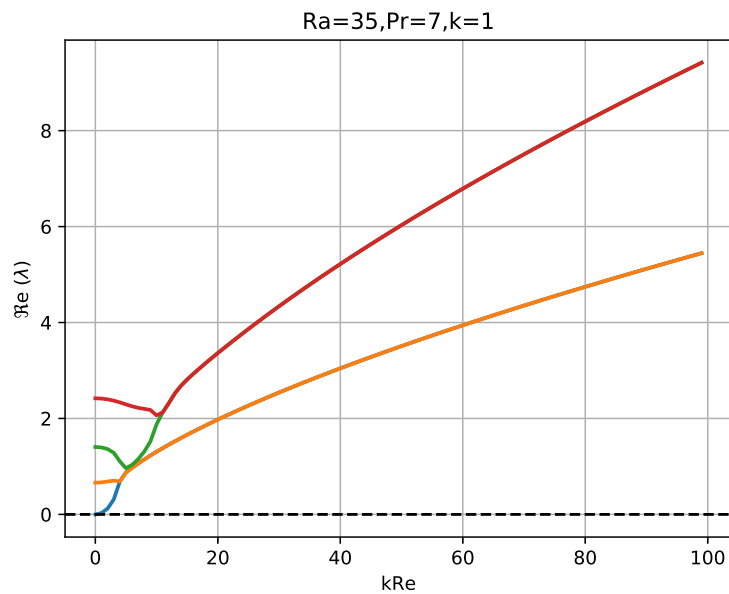


Figura 15: Parte real de los primeros autovalores para el valor crítico del número de Rayleigh.

Vemos que las inestabilidades se producen para valores del número de Reynolds bastante más bajos que para  $Pr = 0,7$  tal y como cabía esperar. De nuevo, la cizalladura puede restaurar la estabilidad, y el valor de esta debe ser mayor al aumentar el número de Rayleigh.

El caso de  $Ra = 0$  tiene un interés especial como se mencionó anteriormente, puesto que representa el caso de gradiente nulo de temperatura, esto es, nuestro problema se ve



reducido entonces al estudio de la estabilidad lineal para un fluido incompresible sometido a cizalladura (flujo de Couette). Como resultado, tenemos que bajo estas condiciones ( $Ra = 0$ ) la solución con  $k = 1$  es siempre estable para cualquier valor de  $Re$ , si bien es cierto que la parte real de los autovalores disminuye al aumentar  $Pr$ . Es decir, existe una tendencia a la inestabilidad al aumentar el número de Prandtl, pero esta no llega nunca a alcanzarse. Este resultado es consistente con los resultados obtenidos por (Gallagher, McD.Mercer, 1961) [9], los cuales demostraron que un flujo de Couette es siempre estable para todo  $Re$ .

Podemos extender el estudio anterior a la parte imaginaria de los autovalores, la cual no está directamente relacionada con la estabilidad, pero nos indicará la aparición de ondas en el fluido para los valores de  $kRe$  donde se producen las bifurcaciones en los autovalores.

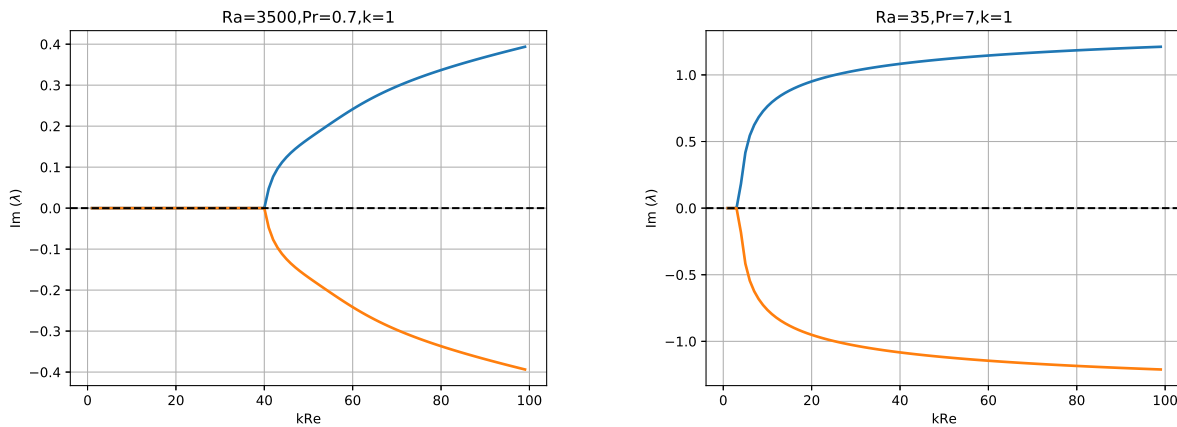


Figura 16: *Parte imaginaria de los dos primeros autovalores para los números críticos de Rayleigh con  $Pr=0.7$  (izquierda) y  $Pr=7$  (derecha)*

En la figura 16 se aprecia la bifurcación, en el mismo valor de  $kRe$  para el que se produce la bifurcación en las gráficas 12 y 15. A partir de un valor de  $kRe$ , se tiene que los autovalores pasan a ser un par de complejos conjugados, los cuales, como ya se ha comentado, representan ondas viajando en sentido contrario una respecto a la otra.

### -Caso con $Ra < 0$

A continuación podemos analizar una configuración con  $Ra < 0$ , es decir, de estabilidad térmica para  $Pr = 7$

Como se ha observado en los resultados anteriores, cuando no existe estratificación térmica

( $Ra = 0$ ), no existe inestabilidad, si bien si que se producen ondas de gravedad que se amortiguan al propagarse.

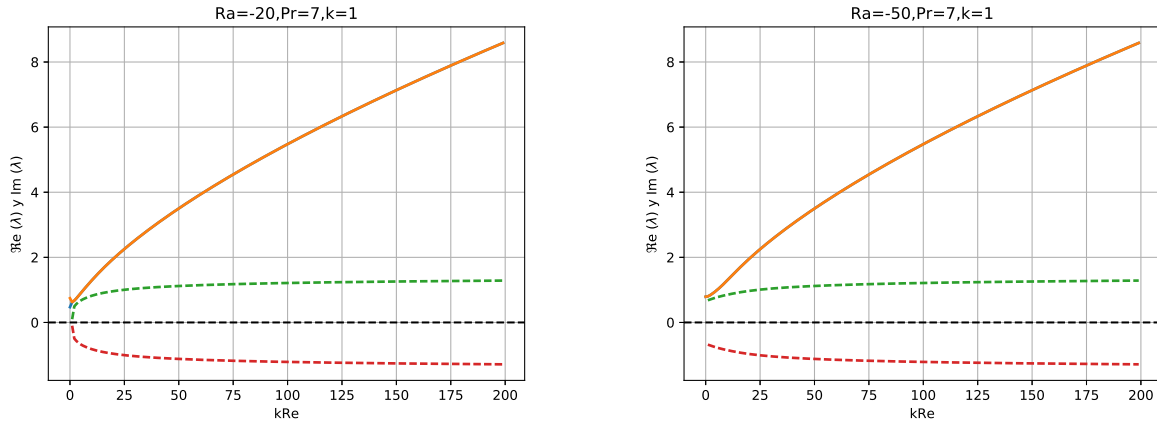


Figura 17: Partes real (linea continua) e imaginaria (discontinua) de los dos primeros autovalores,  $Pr = 7$

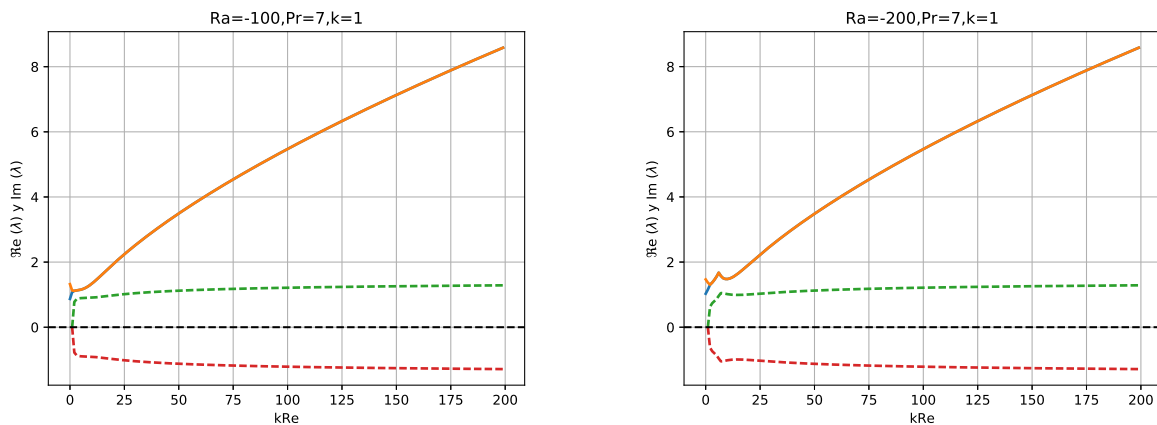


Figura 18: Partes real (linea continua) e imaginaria (discontinua) de los dos primeros autovalores,  $Pr = 7$

Se observa en las figuras que la parte real de los autovalores nunca llega a hacerse negativa, por lo en condiciones de estratificación estable no se produce inestabilidad independientemente de  $Re$ .

Respecto a la parte imaginaria, se observan, al igual que en la figura 16 bifurcaciones que representan ondas de gravedad propagándose en sentido contrario.

## Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un estudio de estabilidad lineal, en un fluido conductor del calor y viscoso, sometido a calentamiento y a cizalladura vertical.

Para llevarlo a cabo, hemos aplicado un método perturbativo para linealizar las ecuaciones, y con el fin de resolver estas, hemos recurrido al método de Galerkin.

Los resultados obtenidos son consistentes con los estudios previos, demostrándose en primer lugar, que un flujo de Couette sin gradiente de temperatura es siempre estable [10].

Se ha podido observar igualmente, que cuando se calienta el fluido desde abajo, este se inestabiliza si se supera un valor de Rayleigh crítico, y que es el número de Reynolds el que puede restaurar la estabilidad al superarse un valor umbral. Es decir, la cizalladura puede estabilizar un fluido que se inestabiliza por calentamiento. Al extender el estudio a diferentes fluidos, se ha podido demostrar que cuanto mayor es el número de Prandtl, mas pequeño debe ser el calentamiento ( $Ra$ ) para que se produzca inestabilidad. De nuevo estos resultados reproducen los obtenidos anteriormente [11]

En el análisis anterior, también hemos podido observar bifurcaciones, las cuales delimitan situaciones en las cuales se producen ondas estacionarias u ondas de gravedad.

Por último, se ha podido comprobar que en condiciones de estratificación térmica (calentamiento desde arriba), no se observa inestabilidad, pero si ondas internas de gravedad que se amortiguan al propagarse en el fluido.

## Anexo I

En este anexo desarrollamos brevemente el método de Galerkin utilizado para resolver de manera aproximada las ecuaciones 2.35 y 2.36

Supongamos que tenemos un espacio vectorial  $V$ , cuya base está formada por un conjunto de funciones independientes entre si  $\{\phi_i(x)\}_0^\infty$ .

Cualquier función del espacio  $V$ , puede desarrollarse como una combinación lineal de elementos de la base de la forma  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \phi_i(x)$

Si tenemos una ecuación diferencial del tipo  $\frac{df}{dx} + f(x) = 0$ , podemos proponer soluciones de la forma  $u(x) = \sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x)$  en la ecuación, reemplazando  $f$  por  $u$ , siendo  $\phi_i(x)$  un número finito de las funciones que forman base y que satisfacen las condiciones de contorno de nuestro problema y que denominaremos funciones de prueba, y  $c_i$  unos coeficientes desconocidos.

En general, la solución propuesta  $u(x)$  no cumplirá la ecuación diferencial original, sino que dará lo que se conoce como residuo, definido como:  $R \equiv \frac{du(x)}{dx} + u(x)$

El método de Galerkin establece la condición de ortogonalidad entre el residuo y las funciones de prueba  $\phi_i(x)$  por lo que

$$\int_a^b \phi_i(x) \left\{ \frac{d(\sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x))}{dx} + f(x) \right\} dx = 0$$

resultando  $N$  ecuaciones algebraicas lineales para los coeficientes  $c_i$ .

Exigir que el producto escalar entre el residuo y el conjunto de funciones de prueba sea nulo (o en otras palabras ortogonal), es equivalente a exigir que el error de la solución aproximada sea nulo en promedio.

Una vez resolvemos el sistema de ecuaciones para  $c_i$  obtendremos la solución aproximada de la ecuación diferencial  $u(x) = \sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x)$ .

En nuestro caso, tenemos dos ecuaciones 2.35 y 2.36, por lo que el sistema a resolver resulta en una matriz de dimensiones  $2N \times 2N$ .

## Anexo II

Los valores de las integrales que aparecen en la sección 2.5, y que hay que desarrollar en las ecuaciones 2.37 a 2.40 se obtienen con las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
 I_{rn}^{(0)} &= \int_0^\pi Y_r Y_n dz = \pi \delta_{rn} \\
 &\int_0^\pi \varphi_r \varphi_n dz = \frac{\pi}{2} \delta_{rn} \\
 I_{rn}^{(1)} &= \begin{cases} 0 & \text{si } r+n \text{ es par} \\ \frac{8\mu_r^2 \mu_n^2}{\mu_r^4 - \mu_n^4} & \text{si } r+n \text{ es impar} \end{cases} \\
 I_{rn}^{(2)} &= \begin{cases} \frac{-8\mu_r^2 \mu_n^2}{\mu_r^4 - \mu_n^4} (\mu_r \beta_r - \mu_n \beta_n) & \text{si } r+n \text{ es par y } r \neq n \\ 0 & \text{si } r+n \text{ es impar} \\ \pi \mu_n^2 \beta_n^2 - 2\mu_n \beta_n & \text{si } r=n \end{cases} \\
 J_{rn}^{(0)} &= \begin{cases} 0 & \text{si } r+n \text{ es par y } r \neq n \\ \frac{-32\mu_r^3 \mu_n^3 \beta_r \beta_n}{(\mu_r^4 - \mu_n^4)^2} & \text{si } r+n \text{ es impar} \\ \frac{\pi^2}{2} & \text{si } r=n \end{cases} \\
 J_{rn}^{(2)} &= \begin{cases} \frac{-4\pi \mu_r^2 \mu_n^2}{\mu_r^4 - \mu_n^4} (\mu_r \beta_r - \mu_n \beta_n) & \text{si } r+n \text{ es par y } r \neq n \\ \frac{4\pi \mu_r^2 \mu_n^2}{\mu_r^4 - \mu_n^4} (\mu_r \beta_r - \mu_n \beta_n) - \frac{16(\mu_r^4 + \mu_n^4)}{(\mu_r^4 - \mu_n^4)^2} \mu_r^2 \mu_n^2 & \text{si } r+n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2} \pi (\pi \mu_n^2 \beta_r^2 - 2\mu_n \beta_n) & \text{si } r=n \end{cases} \\
 K_{rn} &= \int_0^\pi y \text{sen}(ry) \text{sen}(ny) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } r+n \text{ es par y } r \neq n \\ \frac{-4rn}{(r^2 - n^2)^2} & \text{si } r+n \text{ es impar} \\ \frac{\pi^2}{4} & \text{si } r=n \end{cases} \\
 L_{rn} &= \int_0^\pi Y_n \text{sen}(ry) dy = \begin{cases} \frac{4r \mu_n^2}{\mu_n^4 - r^4} & \text{si } r+n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } r+n \text{ es impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

# Bibliografía

## 4. Referencias

- [1] HOLTON J: An introduction to dynamic meteorology *4ed., IGS 88, Elsevier, 2004*
- [2] C. NAPPO: An Introduction to Atmospheric Gravity Waves *Academic Press, Berlin, 2003. International Geophysics Series, Volume 85*
- [3] RICHARD. S. LINDZEN: Dynamics in atmospheric physics *Cambridge university press. 1990*
- [4] A. RANDRIAMAMPINANINA Y E. C. DEL ARCO: Inertia-gravity waves in a liquid-filled, differentially heated, rotating annulus., *Journal of Fluid Mechanics*, 782:144–177, 2015.
- [5] P. E. CARRACEDO: Ondas de gravedad en fluidos viscosos y termoconductivos., trabajo fin de máster, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid,2015
- [6] MARTIN PRIEGO WOOD: Ondas inerciales de gravedad., trabajo fin de máster, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid,2015.
- [7] P.G. DRAZIN: Introduction to Hydrodynamic Stability. *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521009652
- [8] S.CHANDRASEKHAR: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability *Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1961*, ISBN 9780486640716
- [9] S.CHANDRASEKHAR, W.H.REID: On the expansion of functions which satisfy four boundary conditions , 1957
- [10] A.P.GALLAGHER, A.MCD.MERCER: On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow A.P.Gallagher , 1961
- [11] A.P.GALLAGHER, A.MCD.MERCER: On the behaviour of small disturbances in plane Couette flow with a temperatura gradient, 1964
- [12] G.Z GERSHUNI, E.M. ZHUKHOVITSKII : Convective stability of incompresible fluids.

- [13] J. W. DEARDORFF: Gravitational Instability between Horizontal Plates with Shear, 1965.