



*Trabajo Fin de Máster en
Física de Sistemas Complejos*

Ondas inerciales de gravedad

Autor
MARTÍN PRIEGO WOOD

Tutora
EMILIA CRESPO DEL ARCO

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Educación a Distancia
2015

Abstract

Inertial gravity waves (IGWs) play a fundamental role in many atmospheric and oceanic processes and appear spontaneously during the development of the baroclinic instability, which has a dominant influence on large-scale meteorology. While IGWs have recently been detected in numerical simulations of the baroclinic annulus filled with water or high-Prandtl-number liquids, they have not been found in analogous simulations for low-Prandtl-number fluids, such as air. Hence, it has been suggested that the Prandtl number may affect the occurrence IGWs.

In this work, the existence and characteristics of IGWs are studied in a simple model for a thermally stratified rotating fluid that incorporates the effects of viscosity and thermal conductivity. The model is derived in full detail, starting from the basic equations of compressible flow, passing through the Boussinesq approximation and the perturbation equations, and finally arriving at a characteristic cubic dimensionless equation that determines the growth rate of perturbations.

The discussion of the solutions to the characteristic equation with respect to the Prandtl P , Rayleigh R , Taylor T , and wave numbers is greatly facilitated by a transformation that reduces the number of parameters from five to two. The analysis of the real part of the growth rate confirms the stability of the equilibrium state and reveals that perturbations are generally more damped the smaller the P . The analysis of the imaginary part corroborates the known results for the inertial limit, where rotation is dominant and oscillations exist for any T , and for the gravitational limit, where stratification prevails and oscillations only appear above a critical R . The main result is however that IGWs only exist in a specific infinite region of the two-dimensional parameter space. This theoretical finding supports the experimental and numerical evidence that, in addition to R and T , P plays a role in the appearance of IGWs.

By condensing the dependencies with respect to the P , R , T , and wave numbers in just two parameters, the developed framework also eases the calculation, visualisation, and comparison of the damping and frequency characteristics of IGWs. For example, for two well-documented numerical studies of the baroclinic annulus with $P = 0.7$ and 16 , the model predicts that, far away from the exclusion regions of IGWs, the oscillations for the lower P should be faster and more damped.

Índice

1	Introducción	7
2	Modelo	11
2.1	Ecuaciones básicas	11
2.2	Aproximación de Boussinesq	12
2.3	Ecuaciones de las perturbaciones	13
2.4	Ecuaciones adimensionales y característica	15
3	Resultados	19
3.1	Transformación de variables	19
3.2	Estabilidad	20
3.3	Oscilaciones	21
3.3.1	Existencia	21
3.3.2	Límites inercial y gravitacional	22
3.3.3	Ondas inerciales de gravedad	24
4	Conclusión	33
	Bibliografía	35

Capítulo 1

Introducción

Las ondas inerciales de gravedad (OIG) abundan en la atmósfera y los océanos y juegan un papel fundamental en una amplia variedad de procesos transportando importantes cantidades de energía y momento (Nappo, 2003). Las OIG contribuyen, por ejemplo, en la iniciación y organización de la convección, en la inducción y modulación de la turbulencia e incluso en la modificación de la circulación media y la estructura térmica (Müller *et al.*, 1986; Fritts y Alexander, 2003). A pesar de su relevancia, las OIG suelen ser de escala demasiado pequeña para ser resueltas por los actuales modelos meteorológicos y climáticos. La comprensión de sus mecanismos de generación, propagación e interacción con las escalas grandes resulta por tanto imprescindible para poder incluir de manera aproximada sus efectos en los modelos mediante esquemas paramétricos (Randriamampianina y del Arco, 2015).

En general, las OIG aparecen en flujos en rotación con estratificación estable, donde las fuerzas de Coriolis y empuje actúan como fuerzas restauradoras y sirven de soporte para oscilaciones gravitacionales y rotacionales. Las principales fuentes de OIG incluyen el flujo sobre topografía, los esfuerzos e inestabilidades de cizalla, la convección y los ajustes del equilibrio geostrófico (Lindzen, 1984). En particular, las OIG aparecen espontáneamente en el desarrollo de la inestabilidad baroclínica, que es uno de los procesos energéticos dominantes en la atmósfera y los océanos (Pierrehumbert y Swanson, 1995; Orlandi y Cox, 1973). Su forma plenamente desarrollada, conocida como convección inclinada, es fuertemente no lineal y tiene gran influencia sobre la predictibilidad de la atmósfera y la variabilidad caótica de la meteorología global.

Dadas las dificultades y limitaciones de las observaciones atmosféricas directas, la inestabilidad baroclínica y algunos fenómenos relacionados, como la emisión de OIG, se han venido estudiando de manera sistemática y controlada por medio de experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas. Desde los trabajos pioneros de Hide (1958), en anillo cilíndrico en rotación con diferencial térmico ha sido la herramienta habitual para el análisis detallado de la inestabilidad baroclínica. La

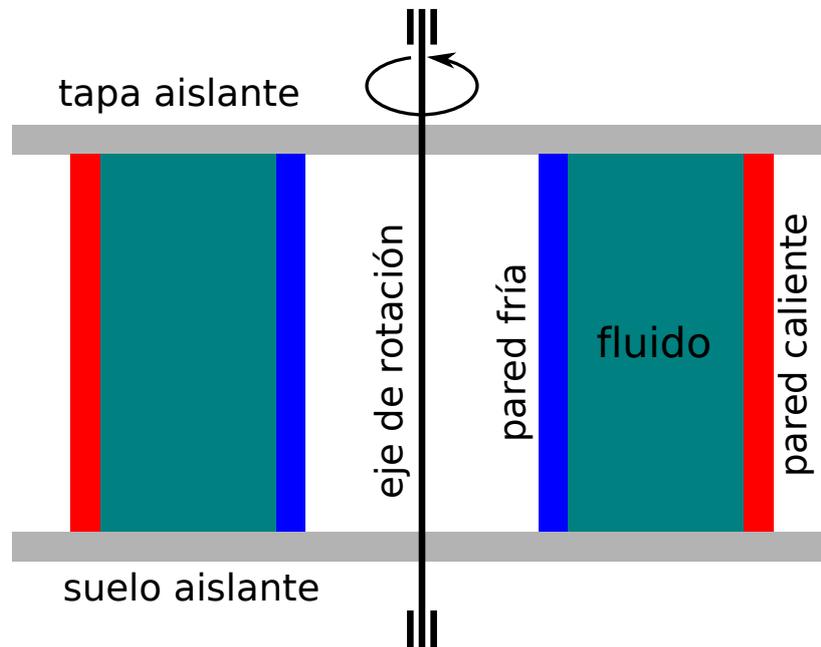


Figura 1.1: *Esquema del montaje experimental del anillo baroclínico.*

figura 1.1 muestra el montaje experimental del anillo baroclínico, que consiste en una cavidad cilíndrica vertical en rotación uniforme y constante alrededor de su eje de simetría. La cavidad está rellena de fluido y sometida a un gradiente térmico axisimétrico entre sus paredes interior y exterior, normalmente fría y caliente en correspondencia con los polos y las latitudes medias de la atmósfera. La cavidad está cerrada arriba y abajo por placas horizontales rígidas térmicamente aislantes.

El anillo baroclínico exhibe gran variedad de regímenes en función del fluido así como de la velocidad angular y el diferencial térmico, que pasan por el estacionario, las circulaciones axisimétricas, las ondulaciones regulares y la turbulencia geostrofica plenamente desarrollada (Hide y Mason, 1975). El calor entra siempre por conducción a través de la pared caliente y sale de igual modo por la pared fría. Sin embargo, salvo en el régimen estacionario, la mayor parte del transporte de calor dentro de fluido tiene lugar por convección, es decir, por movimientos de fluido caliente hacia la pared fría y de fluido frío hacia la pared caliente. En el régimen axisimétrico, la circulación meridional se encarga del transporte convectivo y de la extracción de la energía potencial asociada a la gravedad y la densidad variable del fluido. El fluido más caliente y ligero sube a la vez que el más frío y pesado baja, generándose así una estratificación térmica estable. A medida que aumenta la velocidad angular, la fuerza de Coriolis inhibe progresivamente la circulación meridional y, llegado el régimen no axisimétrico por acción de la inestabilidad baroclínica, el transporte y la extracción de energía tienen lugar por convección

inclinada. Las partículas del fluido van entonces desde la pared caliente a la fría y viceversa por superficies menos inclinadas con respecto a la horizontal que las isoterms, convirtiendo así energía potencial en cinética.

Los avances computacionales de las últimas décadas han permitido que hoy en día también se pueda investigar el comportamiento del anillo baroclínico a través de simulaciones numéricas directas (véase, p.ej., Hignett *et al.*, 1985; Randriamampianina *et al.*, 2006). Aunque todavía no es posible reproducir todo tipo de condiciones debido a las diminutas escalas que se generan cuando la viscosidad o la difusividad térmica son muy pequeñas, en los casos resolubles la simulación da acceso íntegro al campo fluidodinámico. Gracias a esto, además de reproducir los diversos regímenes, las simulaciones numéricas facilitan el estudio de detalles de la estructura espaciotemporal del flujo, como la presencia de OIG. La simulación facilita asimismo experimentar con fluidos con diferentes propiedades siempre que los flujos resultantes sean resolubles. En particular, permite escoger el número de Prandtl P , que se define como el cociente entre la viscosidad cinemática ν y difusividad térmica κ y puede influir sobre la aparición de la inestabilidad baroclínica y las transiciones entre regímenes (Randriamampianina *et al.*, 2006).

Recientemente, se han detectado OIG en varios estudios computacionales del anillo baroclínico. En sus simulaciones para un fluido con alto número de $P = 24$, Jacoby *et al.* (2011) encontraron paquetes de ondas de escala pequeña y período corto cerca del cilindro interior, que identificaron como OIG y atribuyeron a una inestabilidad de la capa límite térmica. Borchert *et al.* (2014) tomaron en cambio el agua como fluido, con $P = 7$, y detectaron, además de las OIG asociadas a la capa límite, otras emitidas espontáneamente desde las ondas propias de la inestabilidad baroclínica. Randriamampianina y del Arco (2015) también encontraron OIG asociadas a las ondas baroclínicas en sus simulaciones para un fluido con $P = 16$. Al no haber detectado OIG en simulaciones análogas para el aire, con $P = 0.7$ (Randriamampianina *et al.*, 2006; Read *et al.*, 2008), y dada la importancia del P en la convección y la inestabilidad baroclínica (véanse, p.ej., Gill y Davey, 1969; Fein y Pfeffer, 1976; Jonas, 1981), dichos autores sugirieron que el P podría influir asimismo sobre la aparición y las características de las OIG.

El objetivo de este trabajo es determinar las condiciones de existencia de OIG en un modelo de fluido en rotación con estratificación térmica estable que incluya efectos viscosos y termoconductivos y por tanto dependa del número de Prandtl. La estructura del trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 se desarrolla a partir de las ecuaciones del flujo compresible un simple modelo lineal para la evolución temporal de las perturbaciones sobre el estado de equilibrio. En el capítulo 3 se analizan la estabilidad y el carácter de las perturbaciones y se descubren los rangos de números adimensionales y de onda en los que pueden aparecer OIG. El capítulo 4 cierra el trabajo con un resumen de los desarrollos y resultados más importantes.

Capítulo 2

Modelo

En este capítulo desarrollamos el modelo matemático que utilizaremos para estudiar la aparición de ondas inerciales de gravedad en fluidos en rotación uniforme con estratificación térmica estable, como son de manera aproximada la atmósfera y el experimento del anillo baroclínico. Partiremos de las ecuaciones básicas del flujo compresible y llegaremos a las ecuaciones de las perturbaciones aplicando la aproximación de Boussinesq y linealizando con respecto al estado de equilibrio. Finalmente, adimensionalizaremos las ecuaciones de las perturbaciones y las especializaremos para los modos normales a fin de obtener la ecuación característica.

2.1. Ecuaciones básicas

Consideramos un fluido Newtoniano con densidad ρ y temperatura T variables sometido a rotación uniforme con velocidad angular constante $\boldsymbol{\Omega}$. Escribiremos las ecuaciones básicas del flujo directamente en el sistema de referencia en rotación, denotando por $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ la velocidad relativa en el instante t en el punto con vector de posición \mathbf{r} en dicho sistema de referencia (véase, p.ej., Chandrasekhar, 1961).

Las ecuación de continuidad o conservación de la masa es simplemente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

mientras que la ecuación de movimiento o conservación del momento lineal toma la forma

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = & -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \mathbf{u}) \\ & + \rho [\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}], \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde p es la presión mecánica, μ es la viscosidad dinámica y $\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\gamma}$ es la aceleración de la gravedad, con módulo g y sentido opuesto al vector unitario $\boldsymbol{\gamma}$.

Los dos últimos términos en la segunda línea son las aceleraciones centrífuga y de Coriolis, que resultan de la rotación uniforme y constante del sistema de referencia.

La tercera ecuación básica del flujo compresible es la ecuación de conservación de la energía, que para estudios de fenómenos relacionados con la convección puede transformarse convenientemente en la ecuación de conducción del calor

$$\rho \left(\frac{\partial(c_v T)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(c_v T) \right) = \nabla \cdot (\varsigma \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + \Phi, \quad (2.3)$$

donde c_v es el calor específico a volumen constante, ς es la conductividad térmica y

$$\Phi = \frac{1}{2} \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) : (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \quad (2.4)$$

es la disipación viscosa.

Las tres ecuaciones básicas (2.1)–(2.3) han de ser suplementadas por una ecuación de estado que relacione la densidad del fluido con su presión y temperatura. Para estudios simplificados de flujos prácticamente incompresibles, como el presente, puede tomarse la siguiente relación lineal entre densidad y temperatura,

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)], \quad (2.5)$$

en la cual α es el coeficiente de expansión volumétrica, T_0 es la temperatura de referencia y ρ_0 es la densidad correspondiente.

2.2. Aproximación de Boussinesq

Las ecuaciones fundamentales presentadas en la sección anterior son bastante generales y a menudo pueden simplificarse de manera considerable. Así sucede, por ejemplo, cuando las variaciones de densidad y de los diversos coeficientes debidas a cambios de temperatura son relativamente pequeñas. Entonces, las variaciones pueden ser ignoradas a excepción de aquellas que multiplican a fuerzas externas, como la gravitacional o la centrífuga, que pueden generar aceleraciones significativas. La aproximación de Boussinesq consiste precisamente en tomar la densidad y los coeficientes como constantes salvo en los términos que involucran a las fuerzas externas (véase Chandrasekhar, 1961, § I.8).

Así pues, en la aproximación de Boussinesq la ecuación de continuidad (2.1) se traduce en la condición de incompresibilidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.6)$$

mientras que la ecuación de movimiento (2.2) se transforma en

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho}{\rho_0} [\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.7)$$

donde la viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho_0$ es también constante. Para hacer nuestro estudio de las ondas de gravedad más manejable, despreciaremos asimismo el efecto de las variaciones de densidad sobre la fuerza centrífuga. Justificaremos esta aproximación suponiendo que la aceleración centrífuga es mucho menor que la gravitacional, es decir, que $\Omega^2 r/g \ll 1$ para los radios r de interés con respecto al eje de rotación. Aplicando esta aproximación y sustituyendo también la ecuación de estado (2.5), llegamos a la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + [1 - \alpha(T - T_0)]\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Por último, bajo la aproximación de Boussinesq, la ecuación de conducción del calor (2.3) se simplifica considerando los coeficientes c_v y ζ constantes y eliminando el término de divergencia de velocidad de acuerdo con la condición de incompresibilidad (2.6). El término de disipación viscosa se puede despreciar también por ser cuadrático en las velocidades y deberse éstas a su vez a variaciones de temperatura. De esta manera, la ecuación de conducción del calor se reduce a

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.9)$$

donde la difusividad térmica $\kappa = \zeta/\rho_0 c_v$ es asimismo constante.

2.3. Ecuaciones de las perturbaciones

Las ecuaciones de Boussinesq describen con bastante aproximación la dinámica del sistema objeto de nuestro estudio, que es un fluido en rotación térmicamente estratificado. En concreto, consideramos una capa horizontal de fluido de espesor d sometido a un gradiente de temperatura vertical $\beta > 0$ perfectamente opuesto a la aceleración gravitacional \mathbf{g} y alineado con la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de la rotación. En estas condiciones de estratificación estable, existe un estado de equilibrio con

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{y} \quad T = T(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}). \quad (2.10)$$

De acuerdo con la ecuación de movimiento (2.8), la presión mecánica de equilibrio ha de satisfacer

$$\nabla(p/\rho_0) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla\left(p/\rho_0 - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2\right) = [1 - \alpha(T - T_0)]\mathbf{g}, \quad (2.11)$$

mientras que, según la ecuación de conducción del calor (2.9), el campo térmico de equilibrio ha de ser armónico,

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.12)$$

Es evidente que perfil lineal de temperatura con gradiente vertical β , dado por

$$T = T_0 + \beta(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.13)$$

satisface dicha condición a la vez que define la temperatura de referencia T_0 como la correspondiente al plano horizontal $z = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r} = 0$. Sustituyendo este perfil en la condición hidrostática (2.11) e integrando a continuación, obtenemos la presión de equilibrio

$$p = p_0 + \rho_0 \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 - g[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \alpha \beta (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r})^2] \right). \quad (2.14)$$

Consideramos ahora una perturbación sobre el estado de equilibrio en la que la velocidad es \mathbf{u} mientras que la temperatura y la presión vienen dadas por

$$T = T_0 + \beta(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}) + \theta, \quad (2.15)$$

$$p = p_0 + \rho_0 \left(|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 - g[(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \alpha \beta (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r})^2] \right) + \psi. \quad (2.16)$$

Sustituyendo estas formas en las ecuaciones de Boussinesq (2.8) y (2.9) y desarrollándolas desechando los términos de orden superior a uno en las perturbaciones \mathbf{u} , θ y ψ , obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\nabla \psi}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha \theta \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta w = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (2.18)$$

donde $w = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u}$ es la componente vertical de la velocidad. Puesto que el campo de velocidad es adivergente en la aproximación de Boussinesq (2.6), procedemos a eliminar la perturbación de presión de la ecuación de movimiento (2.17) tomando el rotacional y deduciendo así la siguiente ecuación para la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \alpha \mathbf{g} \times \nabla \theta + 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (2.19)$$

En este desarrollo hemos tenido en cuenta también la uniformidad de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ y la irrotacionalidad del campo gravitacional. Tomando de nuevo el rotacional y haciendo uso de la identidad $\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla^2 \mathbf{u}$ deducimos también

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \mathbf{u}}{\partial t} &= \nu \nabla^4 \mathbf{u} - \alpha \nabla \times (\mathbf{g} \times \nabla \theta) - 2\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \\ &= \nu \nabla^4 \mathbf{u} - \alpha [\mathbf{g} \nabla^2 \theta - \nabla(\mathbf{g} \cdot \nabla \theta)] - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Las proyecciones verticales de las dos últimas ecuaciones,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \nu \nabla^2 \zeta + 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla w, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial t} = \nu \nabla^4 w + g\alpha [\nabla^2 \theta - \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla(\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \theta)] - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \zeta, \quad (2.22)$$

donde $\zeta = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\omega}$ denota la componente vertical de la vorticidad, prescriben junto con la ecuación de conducción del calor (2.18) la dinámica de las perturbaciones.

2.4. Ecuaciones adimensionales y característica

Con el fin de facilitar la comparación de los resultados de nuestro estudio con otros experimentales o teóricos, adimensionalizaremos ahora las ecuaciones de las perturbaciones. Al igual que en los análisis de estabilidad con gradiente de temperatura adverso de Chandrasekhar (1961) y Gershuni y Zhukhovitskii (1976), adoptaremos como unidad de longitud el espesor d , como unidad de tiempo la viscosa d^2/ν y como unidad de temperatura la diferencia βd . Al expresar las perturbaciones y sus coordenadas en estas unidades y sus derivadas, las ecuaciones dinámicas (2.18), (2.21) y (2.22) pasan a ser

$$\frac{\nu\beta}{d} \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\kappa\beta}{d} \nabla^2\theta - \frac{\nu\beta}{d} w, \quad (2.23)$$

$$\frac{\nu^2}{d^4} \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\nu^2}{d^4} \nabla^2\zeta + \frac{2\Omega\nu}{d^2} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\nu^2}{d^5} \frac{\partial\nabla^2 w}{\partial t} = \frac{\nu^2}{d^5} \nabla^4 w + \frac{g\alpha\beta}{d} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right) - \frac{2\Omega\nu}{d^3} \frac{\partial\zeta}{\partial z}. \quad (2.25)$$

Definiendo pues los números de Prandtl, Rayleigh y Taylor respectivamente como

$$P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R = \frac{g\alpha\beta d^4}{\kappa\nu} \quad \text{y} \quad T = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}, \quad (2.26)$$

podemos reexpresar las ecuaciones de las perturbaciones en la forma adimensional

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = P^{-1} \nabla^2\theta - w, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \nabla^2\zeta + T^{1/2} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial\nabla^2 w}{\partial t} = \nabla^4 w + \frac{R}{P} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right) - T^{1/2} \frac{\partial\zeta}{\partial z}. \quad (2.29)$$

Como es habitual en los estudios de estabilidad, estudiaremos la dinámica de las perturbaciones aplicando la descomposición en modos normales. Habida cuenta de la homogeneidad horizontal de la capa, por haberse ignorado todos sus detalles geométricos salvo su espesor, las perturbaciones pueden descomponerse en ondas bidimensionales periódicas. Siendo la coordenada temporal asimismo homogénea, bastará con considerar perturbaciones de temperatura, vorticidad y velocidad de

la forma

$$\theta = \Theta(z) \exp[\lambda t + i(\ell x + my)], \quad (2.30)$$

$$\zeta = Z(z) \exp[\lambda t + i(\ell x + my)], \quad (2.31)$$

$$w = W(z) \exp[\lambda t + i(\ell x + my)], \quad (2.32)$$

donde los números de onda ℓ y m son reales y la tasa de crecimiento λ es por lo general compleja. Introduciendo la notación $k = (\ell^2 + m^2)^{1/2}$ para el número de onda horizontal y $D = d/dz$ para la derivada vertical y sustituyendo las perturbaciones anteriores en las ecuaciones dinámicas adimensionales obtenemos el sistema

$$\lambda\theta = P^{-1}(D^2 - k^2)\Theta - W, \quad (2.33)$$

$$\lambda Z = (D^2 - k^2)Z + T^{1/2}DW, \quad (2.34)$$

$$\lambda(D^2 - k^2)W = (D^2 - k^2)^2W - RP^{-1}k^2\Theta - T^{1/2}DZ, \quad (2.35)$$

que equivale a

$$(D^2 - k^2 - P\lambda)\Theta = PW, \quad (2.36)$$

$$(D^2 - k^2 - \lambda)Z = -T^{1/2}DW, \quad (2.37)$$

$$(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - \lambda)W = RP^{-1}k^2\Theta + T^{1/2}DZ. \quad (2.38)$$

Para resolver este sistema, o al menos determinar la tasa de crecimiento, operamos sobre la tercera ecuación con $(D^2 - k^2 - P\lambda)(D^2 - k^2 - \lambda)$ y sustituimos acto seguido las dos primeras en su lado derecho, obteniendo así

$$(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - P\lambda)(D^2 - k^2 - \lambda)^2W = Rk^2(D^2 - k^2 - \lambda)W - TD^2(D^2 - k^2 - P\lambda)W, \quad (2.39)$$

o de forma más compacta,

$$(D^2 - k^2 - P\lambda)[(D^2 - k^2 - \lambda)^2(D^2 - k^2) + TD^2]W = Rk^2(D^2 - k^2 - \lambda)W. \quad (2.40)$$

Llegado a este punto, debemos especificar las condiciones de contorno de las perturbaciones, que derivan de las de los propios campos fluidodinámicos. Puesto que las fronteras superior e inferior de la capa de fluido se suponen impermeables e isotermas, la velocidad vertical y la perturbación de temperatura han de anularse en ellas,

$$w = \theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad z = 1. \quad (2.41)$$

Las restantes condiciones de contorno dependen de si las fronteras se consideran rígidas o libres. En una frontera rígida se anulan todas las velocidades y por tanto también la componente normal de la vorticidad, en nuestro caso ζ . El hecho de que se anulen las velocidades tangenciales combinado con la condición de incompresibilidad implica que la derivada normal de la velocidad normal, en nuestro caso

$\partial w/\partial z$, es nula también. En cambio, en una frontera libre se anulan los esfuerzos tangenciales, lo que combinado con la impermeabilidad de la frontera implica la nulidad de las derivadas normales de las velocidades tangenciales. De ello se sigue que la derivada normal de la vorticidad normal, en nuestro caso $\partial\zeta/\partial z$, es nula también. Además, tomando la derivada normal de la condición de incompresibilidad se deduce que la segunda derivada normal de la velocidad normal, en nuestro caso $\partial^2 w/\partial z^2$, ha de anularse asimismo. En resumen, si considerásemos las fronteras rígidas tendríamos

$$\zeta = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{y } z = 1, \quad (2.42)$$

mientras que si las considerásemos libres tendríamos

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{y } z = 1. \quad (2.43)$$

Si bien las condiciones de frontera rígida podrían ajustarse más al experimento del anillo baroclínico, adoptaremos las condiciones de frontera libre para nuestro análisis, puesto que lo harán manejable analíticamente sin alterar las conclusiones de carácter cualitativo. Bajo estas condiciones, las funciones Θ , Z y W que determinan los modos normales tienen simples formas trigonométricas,

$$\Theta = \Theta_0 \sin(n\pi z), \quad Z = Z_0 \cos(n\pi z) \quad \text{y} \quad W = W_0 \sin(n\pi z), \quad (2.44)$$

compatibles para todo número entero positivo n con las ecuaciones dinámicas y las condiciones de contorno. Sustituyendo la expresión para W en la ecuación (2.40), llegamos por fin a la ecuación característica

$$(n^2\pi^2 + k^2 + P\lambda)[(n^2\pi^2 + k^2 + \lambda)^2(n^2\pi^2 + k^2) + n^2\pi^2 T] = -k^2(n^2\pi^2 + k^2 + \lambda)R, \quad (2.45)$$

que determina la tasa de crecimiento de la perturbación en función de sus números de onda y los parámetros adimensionales del flujo.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo estudiamos la estabilidad y las perturbaciones oscilatorias en el modelo de fluido en rotación uniforme con estratificación térmica estable. Primero transformaremos las variables de la ecuación característica con el fin de facilitar el análisis paramétrico. A continuación, examinaremos las partes real e imaginaria de la tasa de crecimiento y sus dependencias con respecto a las variables transformadas. Confirmaremos así la estabilidad del estado de equilibrio y descubriremos los rangos de números adimensionales y de onda en los que pueden aparecer ondas inerciales de gravedad. Asimismo, discutiremos los resultados en relación con otros estudios experimentales y numéricos del anillo baroclínico.

3.1. Transformación de variables

Como se explicó en el capítulo anterior, la tasa de crecimiento es la solución de la ecuación característica (2.45) para números adimensionales y de onda concretos. Para analizar las propiedades de la tasa de crecimiento es conveniente expresar la ecuación característica en su forma polinómica

$$P(n^2\pi^2 + k^2)\lambda^3 + (2P + 1)(n^2\pi^2 + k^2)^2\lambda^2 + [Pn^2\pi^2T + k^2R + (P + 2)(n^2\pi^2 + k^2)^3]\lambda + [n^2\pi^2T + k^2R + (n^2\pi^2 + k^2)^3](n^2\pi^2 + k^2) = 0. \quad (3.1)$$

No obstante, simplificaremos considerablemente los estudios de estabilidad y sobre todo de oscilaciones condensando algunas de las dependencias paramétricas de la ecuación característica en las variables

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{k^2}{n^2\pi^2}, & R &= \frac{k^2(1 - P^{-1})^{-2}P^{-1}R}{(n^2\pi^2 + k^2)^3} = \frac{\chi(1 - P^{-1})^{-2}P^{-1}R}{n^4\pi^4(1 + \chi)^3}, \\ \sigma &= \frac{n^2\pi^2 + k^2 + \lambda}{(n^2\pi^2 + k^2)(P^{-1} - 1)}, & T &= \frac{n^2\pi^2(1 - P^{-1})^{-2}T}{(n^2\pi^2 + k^2)^3} = \frac{(1 - P^{-1})^{-2}T}{n^4\pi^4(1 + \chi)^3}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Bajo esta reparametrización, la ecuación característica se convierte en

$$(1 + \sigma)(1 - P)^3 P^{-2} (\sigma^2 + T) = -(1 - P)^3 P^{-2} R \sigma, \quad (3.3)$$

de modo que la tasa de crecimiento σ es raíz del polinomio cúbico

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \sigma^3 + a\sigma^2 + b\sigma + c \quad \text{con} \\ a &= 1, \quad b = R + T \quad \text{y} \quad c = T. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La transformación de variables (3.2) elimina así tanto los números de onda como el P , incorporándolos en las variables σ , R y T asociadas a la tasa de crecimiento λ y los números adimensionales R y T . Esto nos permitirá analizar las propiedades cualitativas de la ecuación característica el espacio bidimensional (R, T) y referir luego las conclusiones a los parámetros originales invirtiendo la transformación.

3.2. Estabilidad

De acuerdo con las formas funcionales (2.30)–(2.32) de las perturbaciones, su amplitud crecerá o decrecerá con el tiempo en función de que la parte real $\Re(\lambda)$ de la tasa de crecimiento sea positiva o negativa. Puesto que la transformación de λ en σ incluye un desplazamiento y un escalado no necesariamente positivo, el criterio de estabilidad no será el mismo para la tasa transformada. Sin embargo, veremos que bastará con analizar el polinomio característico transformado (3.4) para confirmar la estabilidad y comprender además el efecto del P sobre el amortiguamiento.

El polinomio f tendrá al menos una raíz real por ser mónico y de orden impar. Sus otras dos raíces serán, o bien ambas reales, con posibles repeticiones, o bien complejas conjugadas. Dado que todos los coeficientes del polinomio son positivos, toda raíz real habrá de ser negativa. Supongamos que f tuviera una raíz real ϕ y dos complejas $\varrho \pm i\varpi$, de manera que

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= (\sigma - \phi)(\sigma - \varrho - i\varpi)(\sigma - \varrho + i\varpi) \\ &= (\sigma - \phi)(\sigma^2 - 2\varrho\sigma + \varrho^2 + \varpi^2) \\ &= \sigma^3 - (2\varrho + \phi)\sigma^2 + (\varrho^2 + \varpi^2 + 2\varrho\phi)\sigma - (\varrho^2 + \varpi^2)\phi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Determinaremos el signo de ϱ de modo similar a Kloosterziel y Carnevale (2003), esto es, atendiendo al signo del discriminante

$$ab - c = (R + T) - T \geq 0, \quad (3.6)$$

que bajo el supuesto (3.5) también se puede calcular formalmente como

$$\begin{aligned} ab - c &= -(2\varrho + \phi)(\varrho^2 + \varpi^2 + 2\varrho\phi) + (\varrho^2 + \varpi^2)\phi \\ &= -2\varrho[\varpi^2 + (\varrho + \phi)^2]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Comparando los signos de ambas expresiones, vemos que necesariamente $\varrho \leq 0$.

Como la parte real de σ nunca es positiva y la tasa de crecimiento original tiene la expresión

$$\lambda = -(n^2\pi^2 + k^2)[1 - (P^{-1} - 1)\sigma], \quad (3.8)$$

las perturbaciones serán en general más amortiguadas cuanto menor sea el P , o en otras palabras, menos estables cuanto mayor sea el P . Analicemos por tanto la estabilidad de las perturbaciones cuando $P \rightarrow \infty$. De acuerdo con las definiciones (3.2) de las variables transformadas, en tal caso $R \rightarrow 0$, de modo que el polinomio característico (3.4) se reduce a

$$\sigma^3 + \sigma^2 + T\sigma + T = (\sigma + 1)(\sigma^2 + T) = (\sigma + 1)(\sigma + iT^{1/2})(\sigma - iT^{1/2}). \quad (3.9)$$

Siendo dos de las raíces del polinomio puramente imaginarias y la otra negativa, vemos que el estado de equilibrio es marginalmente estable en el límite $P \rightarrow \infty$. El razonamiento anterior lleva entonces a que el equilibrio es estable para todo P .

3.3. Oscilaciones

La evolución temporal de las perturbaciones (2.30)–(2.32) será oscilatoria cuando la parte imaginaria $\Im(\lambda)$ de la tasa de crecimiento, que representa la frecuencia, sea no nula. Dada la relación lineal (3.8) con coeficientes reales entre la tasa de crecimiento λ y su transformada σ , la condición que hará posible la aparición de oscilaciones será que σ tenga componente imaginaria para algún número de onda.

3.3.1. Existencia

El polinomio característico cúbico f tendrá una única raíz real cuando no tenga puntos críticos reales o tome valores de igual signo en ellos. Los puntos críticos serán las raíces σ_+ y σ_- de

$$f'(\sigma) = 3\sigma^2 + 2a\sigma + b = 3\left(\sigma^2 + \frac{2}{3}a\sigma + \frac{1}{3}b\right), \quad (3.10)$$

y por tanto verificarán

$$\sigma_+\sigma_- = \frac{1}{3}b \quad \text{y} \quad \sigma_+ + \sigma_- = -\frac{2}{3}a. \quad (3.11)$$

De acuerdo con la forma cuadrática de f' , no habrá puntos críticos reales cuando el discriminante

$$a^2 - 3b = 1 - 3(R + T) \quad (3.12)$$

sea negativo, esto es, cuando

$$\frac{1}{3} < R + T = \frac{(1 - P^{-1})^{-2}(T + \chi P^{-1}R)}{n^4\pi^4(1 + \chi)^3}. \quad (3.13)$$

Maximizando el lado derecho de esta desigualdad con respecto a los números de onda, representados por n y χ , deducimos que, dado un P , será suficiente con que

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4(1 - P^{-1})^2}{3} &< \max_{\chi \in [0, \infty), n \in \mathbb{Z}^+} \left\{ \frac{T + \chi P^{-1}R}{n^4(1 + \chi)^3} \right\} = \max_{\chi \in [0, \infty)} \left\{ \frac{T + \chi P^{-1}R}{(1 + \chi)^3} \right\} \\ &= \frac{T + P^{-1}R \max\left(0, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}PTR^{-1}\right)}{\left[1 + \max\left(0, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}PTR^{-1}\right)\right]^3} = \frac{\max\left(T, \frac{1}{2}(P^{-1}R - T)\right)}{\max\left[\left(1, \frac{3}{2}(1 - PTR^{-1})\right)\right]^3} \end{aligned} \quad (3.14)$$

para que existan perturbaciones oscilatorias. Bastará pues con que los números T o R sean suficientemente grandes para que el modelo soporte oscilaciones a ciertos números de onda. A continuación y en las próximas secciones, precisaremos mucho esta conclusión atendiendo a los valores de f en sus puntos críticos.

Tomando el cociente de $9f$ con f' obtenemos la expresión

$$9f(\sigma) = (3\sigma + a)f'(\sigma) + (6b - 2a^2)\sigma + 9c - ba, \quad (3.15)$$

que facilita el cálculo de

$$\begin{aligned} 81f(\sigma_+)f(\sigma_-) &= [(6b - 2a^2)\sigma_+ + 9c - ba][(6b - 2a^2)\sigma_- + 9c - ba] \\ &= \sigma_+\sigma_-(6b - 2a^2)^2 + (\sigma_+ + \sigma_-)(9c - ba)(6b - 2a^2) + (9c - ba)^2 \\ &= \frac{1}{3}b(6b - 2a^2)^2 - \frac{2}{3}a(9c - ba)(6b - 2a^2) + (9c - ba)^2 \\ &= -3(a^2b^2 + 18abc - 4a^3c - 4b^3 - 27c^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

En consecuencia, f tomará valores de igual signo en sus puntos críticos y tendrá un par de raíces complejas conjugadas cuando el discriminante

$$\Delta = a^2b^2 + 18abc - 4a^3c - 4b^3 - 27c^2 \quad (3.17)$$

sea negativo. Sustituyendo los coeficientes (3.4) del polinomio característico en esta expresión, encontramos

$$\begin{aligned} \Delta &= (R + T)^2 + 18(R + T)T - 4T - 4(R + T)^3 - 27T^2 \\ &= -4R^3 - 12R^2T - 12RT^2 - 4T^3 + R^2 + 20RT - 8T^2 - 4T. \end{aligned} \quad (3.18)$$

El signo de este discriminante determinará la existencia de oscilaciones en función de las variables transformadas. Antes de proceder al análisis general, estudiaremos algunos casos límite de interés.

3.3.2. Límites inercial y gravitacional

En situaciones en las que la rotación domina ampliamente sobre la estratificación térmica, $T \gg R$, el polinomio característico (3.4) puede aproximarse de la misma manera que cuando $P \rightarrow \infty$,

$$f(\sigma) \approx \sigma^3 + \sigma^2 + T\sigma + T = (\sigma + 1)(\sigma + iT^{1/2})(\sigma - iT^{1/2}). \quad (3.19)$$

En estas situaciones existen pues perturbaciones oscilatorias con amortiguamiento

$$\Re(\lambda) = -(n^2\pi^2 + k^2) \quad (3.20)$$

y frecuencia

$$|\Im(\lambda)| = |P^{-1} - 1|(n^2\pi^2 + k^2)T^{1/2} = [n^2\pi^2T/(n^2\pi^2 + k^2)]^{1/2} \quad (3.21)$$

para cualesquiera números de onda y $T > 0$. Estas oscilaciones debidas solamente a la rotación son conocidas como ondas inerciales. En vista de las definiciones (3.2) de las variables transformadas, esta conclusión no sólo es aplicable al límite $R \rightarrow 0$, sino también a $P \rightarrow \infty$ o $\chi \rightarrow 0$. Este último límite corresponde a longitudes de onda horizontales mucho mayores que las verticales.

En cambio, cuando la estratificación térmica domina sobre la rotación, $R \gg T$, el polinomio característico puede aproximarse como

$$f(\sigma) \approx \sigma^3 + \sigma^2 + R\sigma = \sigma \left[\sigma + \frac{1}{2} - i \left(R - \frac{1}{4} \right)^{1/2} \right] \left[\sigma + \frac{1}{2} + i \left(R - \frac{1}{4} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.22)$$

Por tanto, en estas condiciones existen oscilaciones, llamadas ondas internas de gravedad, con amortiguamiento

$$\Re(\lambda) = -(n^2\pi^2 + k^2) \left(1 + \frac{1}{2}(P^{-1} - 1) \right) = -\frac{1}{2}(1 + P^{-1})(n^2\pi^2 + k^2) \quad (3.23)$$

y frecuencia

$$|\Im(\lambda)| = |P^{-1} - 1|(n^2\pi^2 + k^2) \left(R - \frac{1}{4} \right)^{1/2} = \left(\frac{k^2 P^{-1} R}{n^2\pi^2 + k^2} - \frac{(P - 1)^2 (n^2\pi^2 + k^2)^2}{4P^2} \right)^{1/2} \quad (3.24)$$

para números P , R y de onda tales que

$$\frac{1}{4} < R = \frac{\chi(1 - P^{-1})^{-2}P^{-1}R}{n^4\pi^4(1 + \chi)^3}. \quad (3.25)$$

En reciprocidad con el caso inercial, esta conclusión es válida para los límites $T \rightarrow 0$, $P \rightarrow 0$ y $\chi \rightarrow \infty$, correspondiendo el último a longitudes de onda horizontales mucho menores que las verticales. La desigualdad (3.25) lleva a que la condición absoluta de existencia de oscilaciones sea

$$\frac{\pi^4(P - 1)^2}{4PR} < \max_{\chi \in [0, \infty), n \in \mathbb{Z}^+} \left\{ \frac{\chi}{n^4(1 + \chi)^3} \right\} = \max_{\chi \in [0, \infty)} \left\{ \frac{\chi}{(1 + \chi)^3} \right\} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{4}{27}, \quad (3.26)$$

lo que significa que sólo pueden aparecer oscilaciones a R superiores al crítico

$$\frac{27\pi^4(P - 1)^2}{16P}. \quad (3.27)$$

Estos resultados para ondas internas de gravedad coinciden, por supuesto, con los obtenidos previamente por Giterman y Shteinberg (1972) y Carracedo (2015).

3.3.3. Ondas inerciales de gravedad

Habiendo examinado las ondas inerciales y de gravedad que aparecen en los límites inercial, $T \gg R$, y gravitacional, $T \ll R$, pasamos a analizar la existencia de ondas inerciales de gravedad (OIG) para cualesquiera R y T positivos. En vista de la aparente singularidad de la transformación (3.2) para $P = 1$, comenzaremos estudiando este sencillo caso particular. Para dicho P , la ecuación característica (2.45) se reduce a

$$(n^2\pi^2 + k^2 + \lambda)[(n^2\pi^2 + k^2 + \lambda)^2(n^2\pi^2 + k^2) + n^2\pi^2T + k^2R] = 0, \quad (3.28)$$

que tiene las soluciones real y complejas

$$\lambda = -(n^2\pi^2 + k^2) \quad \text{y} \quad \lambda = -(n^2\pi^2 + k^2) \pm i \left(\frac{n^2\pi^2T + k^2R}{n^2\pi^2 + k^2} \right)^{1/2}. \quad (3.29)$$

Por tanto, existen OIG con amortiguamiento

$$\Re(\lambda) = -(n^2\pi^2 + k^2) \quad (3.30)$$

y frecuencia

$$|\Im(\lambda)| = \left(\frac{n^2\pi^2T + k^2R}{n^2\pi^2 + k^2} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

para todos números R , T y de onda. Estas características concuerdan, claro está, con las obtenidas para los límites inercial y gravitacional en la sección anterior.

Analizaremos ahora el caso general intentando primeramente determinar las regiones del espacio (R, T) en las que el discriminante (3.18) es negativo. Para ello, tomaremos a Δ como función de R parametrizada en T , esto es, reescribiremos el discriminante como

$$\Delta(R) = -4R^3 + (1 - 12T)R^2 + 4T(5 - 3T)R - 4T(T + 1)^2, \quad (3.32)$$

o lo que es lo mismo, como

$$\Delta(R) = -4h(R) \quad \text{con} \quad h(R) = R^3 + AR^2 + BR + C, \quad (3.33)$$

$$A = 3T - \frac{1}{4}, \quad B = (3T - 5)T \quad \text{y} \quad C = (T + 1)^2T.$$

El polinomio cúbico mónico h tendrá al menos una raíz real negativa por ser su término independiente C positivo. De ser sus otras dos raíces reales, éstas tendrán necesariamente un mismo signo por representar $-C$ el producto de las tres raíces. El polinomio h tendrá entonces dos raíces reales positivas cuando tenga un mínimo con abscisa positiva y ordenada negativa. Siendo su derivada

$$h'(R) = 3\left(R^2 + \frac{2}{3}AR + \frac{1}{3}B\right), \quad (3.34)$$

el polinomio h alcanzará su mínimo, cuando exista, en

$$R = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(A^2 - 3B)^{1/2}. \quad (3.35)$$

La existencia del mínimo requiere pues $A^2 - 3B \geq 0$ mientras que la positividad de la abscisa requiere $A < 0$ o $B < 0$. Sin embargo, para los coeficientes (3.33) la condición $A < 0$ implica $B < 0$ y ésta última garantiza siempre $A^2 - 3B \geq 0$. Por tanto, para que h tenga un mínimo real con abscisa positiva bastará con que

$$(3T - 5)T = B < 0, \quad \text{esto es,} \quad T < \frac{5}{3}. \quad (3.36)$$

Siendo la ordenada del máximo de h positiva por serlo el término independiente, el argumento de la sección 3.2 prueba que la ordenada del mínimo será negativa cuando el discriminante

$$A^2B^2 + 18ABC - 4A^3C - 4B^3 - 27C^2 = -16T(27T - 1)^3 \quad (3.37)$$

sea positivo, es decir, cuando

$$T < \frac{1}{27}. \quad (3.38)$$

Concluimos que para $T > \frac{1}{27}$ el discriminante Δ será siempre negativo y podrán aparecer OIG con cualquier R . En cambio, para $T < \frac{1}{27}$ existirá un intervalo positivo de R en el que Δ tendrá signo positivo y quedarán excluidas las OIG. Como se vio en la sección anterior, en el límite gravitacional $T \rightarrow 0$ el intervalo de exclusión será

$$0 \leq R \leq \frac{1}{4}. \quad (3.39)$$

Por otra parte, puesto que para $T = \frac{1}{27}$ el discriminante (3.32) se reduce a

$$-4R^3 + 5R^2/9 + 176R/243 - 3136R/19683 = -49(2R+1)(27R-8)^2/19683, \quad (3.40)$$

el intervalo de exclusión convergerá sobre

$$R = \frac{8}{27} \quad (3.41)$$

a medida que $T \rightarrow \frac{1}{27}$ por el lado izquierdo.

Las conclusiones anteriores se resumen en la figura 3.1, que muestra las regiones de existencia y exclusión de OIG en el plano TR . Las dos curvas que limitan dichas regiones pueden dibujarse más fácilmente introduciendo el cambio de variable

$$\begin{aligned} R &= \frac{2\eta - \xi}{3}, & \eta &= T + R, \\ T &= \frac{\eta + \xi}{3}, & \xi &= 2T - R. \end{aligned} \quad (3.42)$$

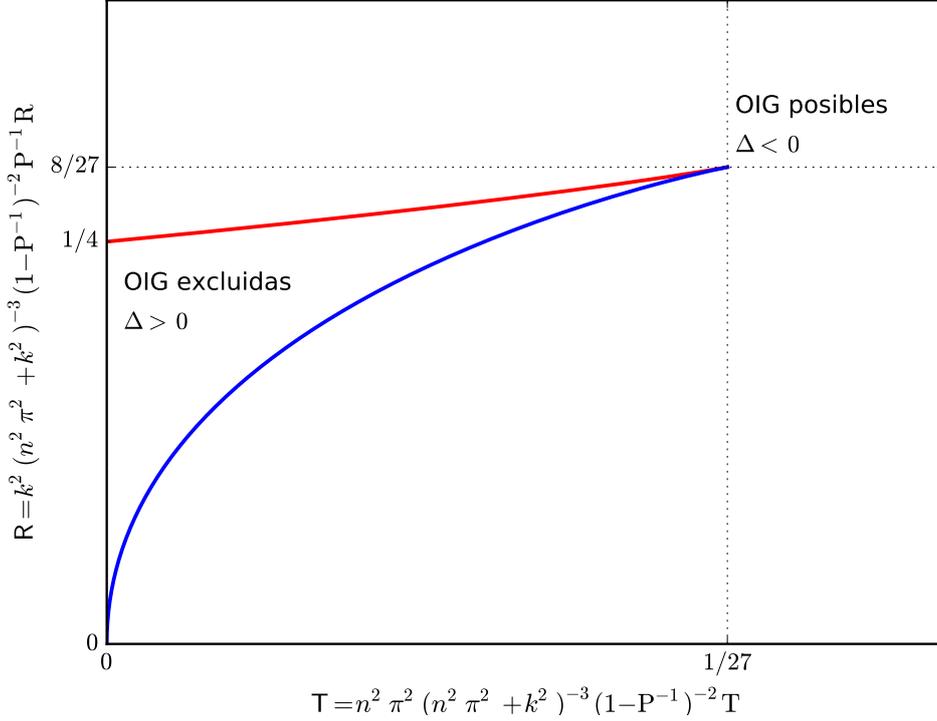


Figura 3.1: Diagrama de existencia de ondas inerciales de gravedad.

Puesto que en las nuevas variables el discriminante (3.18) toma la forma

$$3\Delta = -12\eta^3 + 12\eta^2 - 4\eta - 9\xi^2 - 4\xi, \quad (3.43)$$

las curvas de frontera admiten la parametrización

$$\xi = \frac{1}{9}[-2 \pm 2(1 - 3\eta)^{3/2}] \quad (3.44)$$

con $\eta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ para la rama positiva y $\eta \in [0, \frac{1}{3}]$ para la rama negativa.

El diagrama 3.1 de existencia de oscilaciones incorpora a través de las variables agregadas R y T las dependencias con respecto a los números P, R, T y de onda. De esta manera, el diagrama demuestra, por ejemplo, que además del R y el T, el P también influye en la aparición de OIG, como indican algunos estudios experimentales y numéricos del anillo baroclínico. En dichos estudios se detectan OIG en fluidos con alto P (Jacoby *et al.*, 2011; Borchert *et al.*, 2014; Randriamampianina y del Arco, 2015), como el agua, con $P \sim 7$, pero no en fluidos con bajo P (Randriamampianina *et al.*, 2006; Read *et al.*, 2008), como el aire, con $P \sim 0.7$. Si bien no se puede atribuir directamente esas observaciones a los resultados de existencia de este simple modelo, la teoría lineal desarrollada puede ayudar a comprender ciertas características de las oscilaciones y su variación con los parámetros adimensionales.

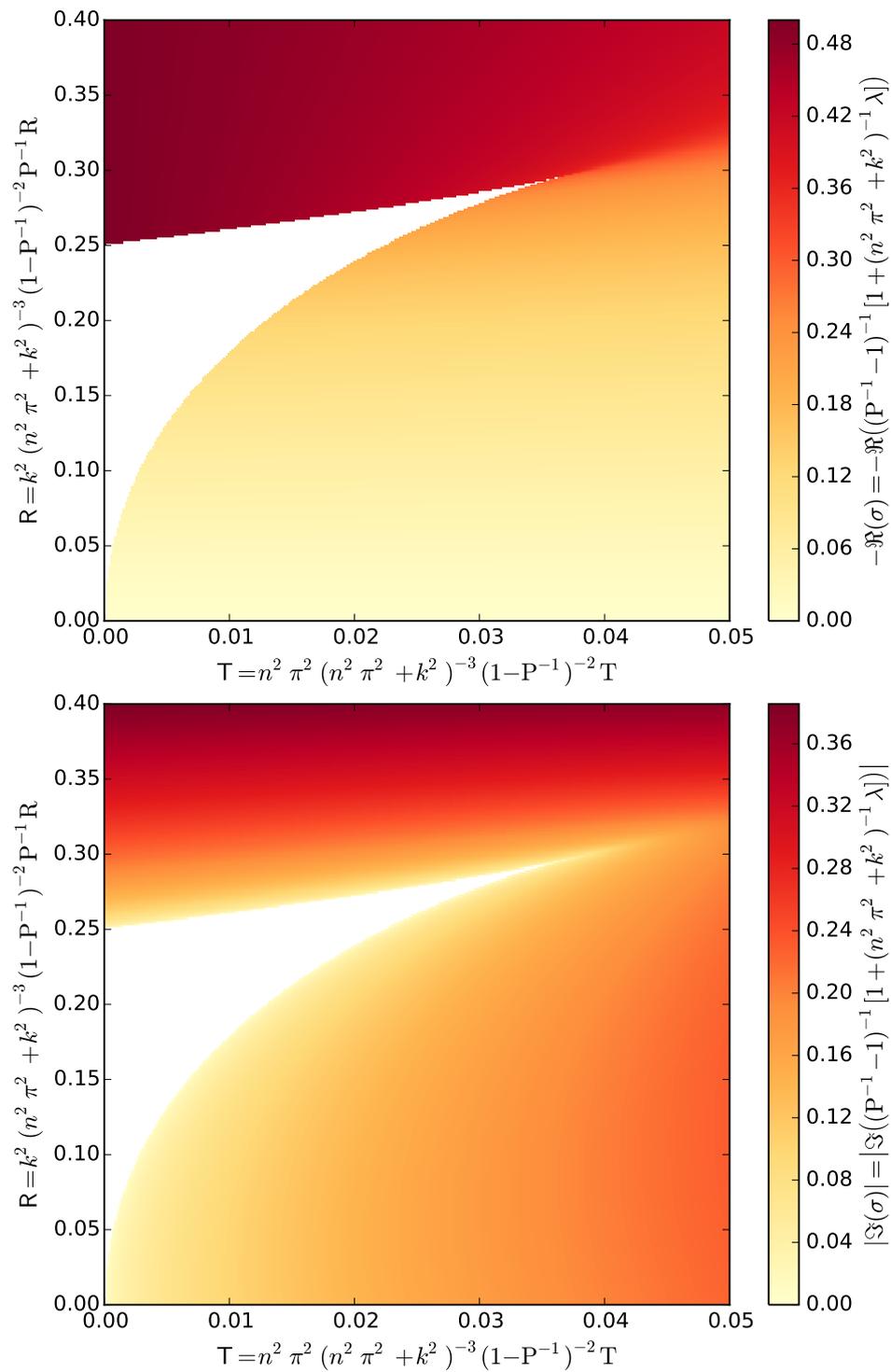


Figura 3.2: Partes real negada (superior) e imaginaria absoluta (inferior) de la tasa de crecimiento transformada en escala lineal.

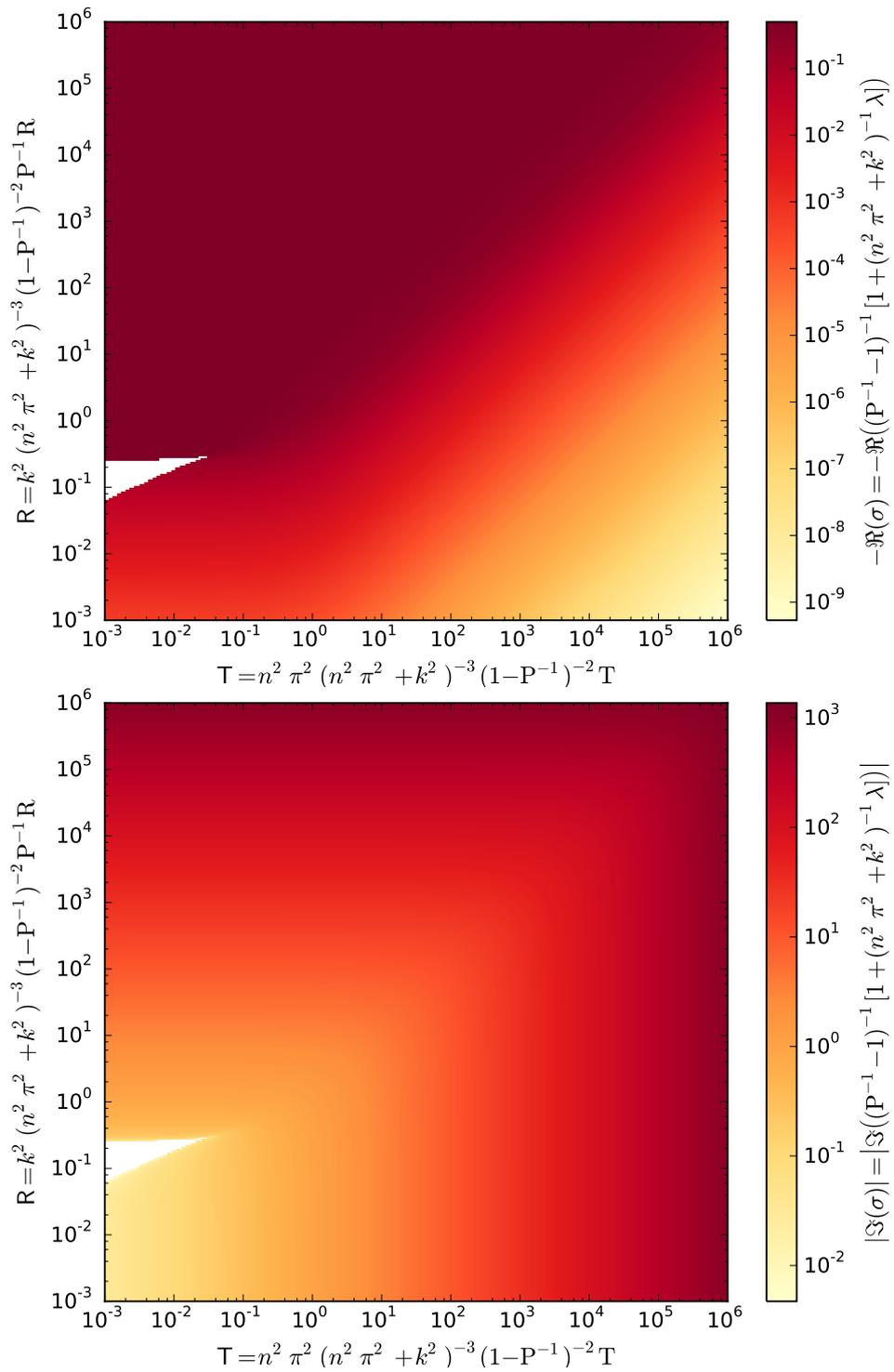


Figura 3.3: Partes real negada (superior) e imaginaria absoluta (inferior) de la tasa de crecimiento transformada en escala logarítmica.

Las figuras 3.2 y 3.3 muestran en escalas lineal y logarítmica las partes real e imaginaria de la tasa de crecimiento transformada, que determinan el amortiguamiento y la frecuencia de las oscilaciones. Dichos gráficos se obtienen calculando numéricamente las raíces complejas del polinomio característico (3.4) en una matriz de valores de las variables agregadas R y T . Los gráficos en escala lineal corroboran que la ecuación característica no tiene soluciones con parte imaginaria no nula en la región de exclusión obtenida en el análisis de existencia de oscilaciones. Por otra parte, los gráficos logarítmicos confirman las características de los límites inercial y gravitacional, en cuanto que $\Re(\sigma)$ converge a 0 y $-\frac{1}{2}$ para $T \rightarrow \infty$ y $R \rightarrow \infty$ a la vez que $\Im(\sigma)$ se acerca a $T^{1/2}$ y $(R - \frac{1}{4})^{1/2}$ respectivamente. De hecho, el comportamiento de σ en ambos límites puede explicarse conjuntamente teniendo en cuenta que cuando uno cualquiera de R o T sea muy alto, el polinomio característico (3.4) tendrá una raíz real cercana a $-T/(R+T)$. En consecuencia, el polinomio admitirá la factorización aproximada

$$\begin{aligned} & \sigma^3 + \sigma^2 + (R+T)\sigma + T \\ & \approx \left(\sigma + \frac{T}{R+T} \right) \left[\sigma^2 + \left(1 - \frac{T}{R+T} \right) \sigma + R+T - \frac{T}{R+T} \left(1 - \frac{T}{R+T} \right) \right] \\ & = \left(\sigma + \frac{T}{R+T} \right) \left(\sigma^2 + \frac{R}{R+T} \sigma + R+T - \frac{RT}{(R+T)^2} \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

de la que se deduce que sus raíces complejas conjugadas serán aproximadamente

$$\sigma \approx -\frac{1}{2} \frac{R}{R+T} \pm i \left(R+T - \frac{R(R+4T)}{4(R+T)^2} \right)^{1/2}. \quad (3.46)$$

El amortiguamiento y la frecuencia de oscilación dados por esta expresión, además de ser consistentes con los límites inercial y gravitacional discutidos anteriormente, son válidos para casos en los que $R \gg 1$ y $T \gg 1$ que son ciertamente comunes.

De manera análoga al diagrama de existencia, las figuras 3.2 y 3.3 contienen de forma condensada toda la información referida a la variación del amortiguamiento y la frecuencia con los números P , R , T y de onda. Dicha información puede extraerse sin más que aplicar la transformación de variables (3.2) en sentido inverso. Así, por ejemplo, las figuras 3.4 y 3.5 muestran en escala logarítmica las partes reales e imaginarias de las tasas de crecimiento parcialmente transformadas $(P^{-1} - 1)\sigma$ para $P = 0.7$ y 16, que son los valores utilizados en las simulaciones numéricas de Randriamampianina *et al.* (2006) y Randriamampianina y del Arco (2015). Aparte de evidenciar el cambio de signo de la parte real de $(P^{-1} - 1)\sigma$, que hace que las oscilaciones para $P = 0.7$ sean más amortiguadas, la figura 3.4 ilustra el desplazamiento y escalado sufridos por la región de exclusión al variar el P . Por su parte, la figura 3.5 muestra que lejos de las regiones de exclusión la frecuencias de

oscilación son mayores para $P = 0.7$. Estos efectos del P sobre el amortiguamiento y la frecuencia dentro del simple modelo teórico podrían influir también sobre la existencia y observabilidad de OIG en experimentos.

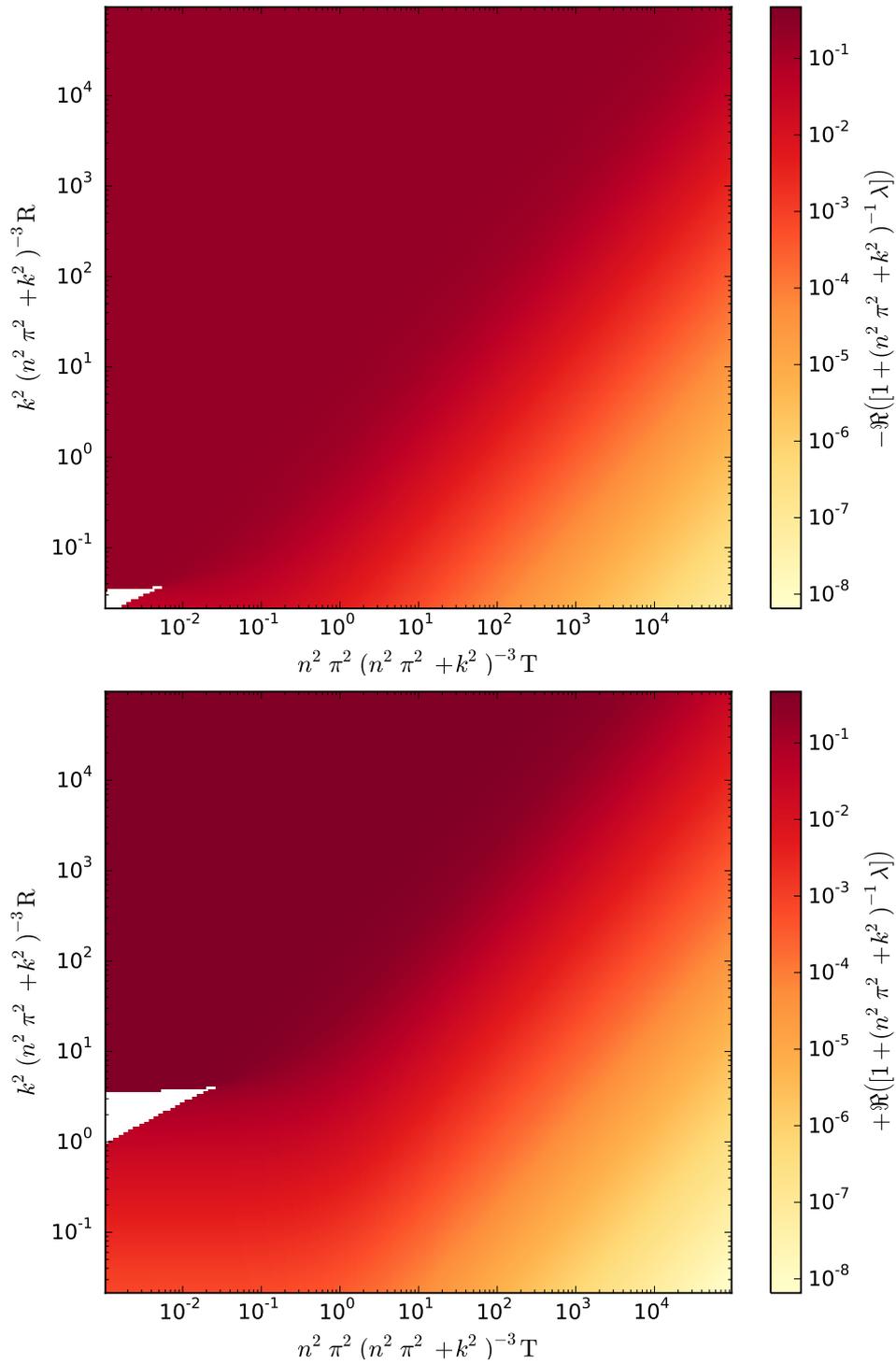


Figura 3.4: Partes real negada y real de las tasas de crecimiento parcialmente transformadas para $P = 0.7$ (superior) y $P = 16$ (inferior) en escala logarítmica.

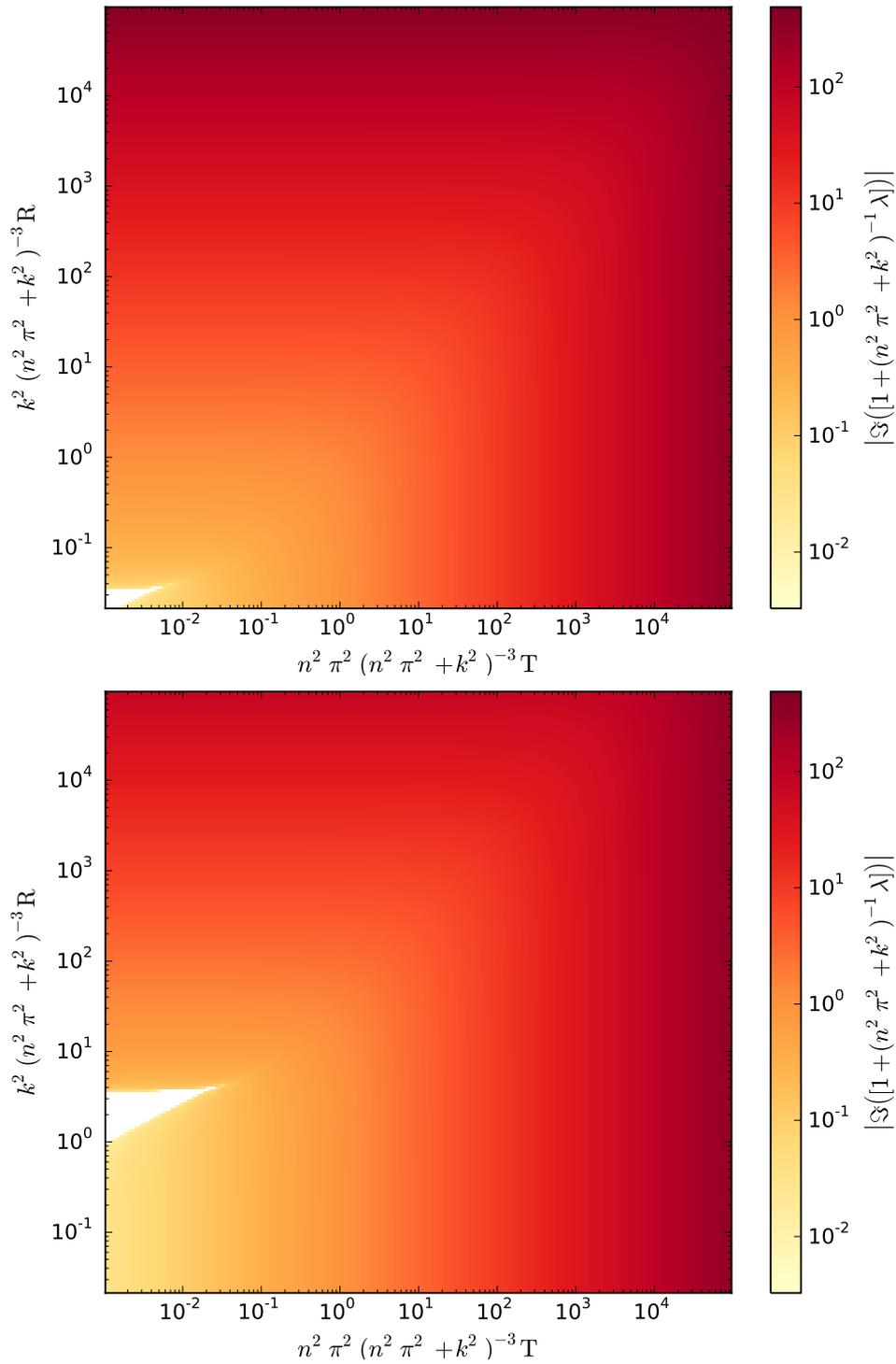


Figura 3.5: Partes imaginarias absolutas de las tasas de crecimiento parcialmente transformadas para $P = 0.7$ (superior) y $P = 16$ (inferior) en escala logarítmica.

Capítulo 4

Conclusión

En este trabajo, se han estudiado las condiciones de existencia y características de las ondas inerciales de gravedad (OIG) en un fluido en rotación uniforme con estratificación térmica estable. La investigación ha sido motivada por las recientes observaciones de OIG en simulaciones numéricas del anillo baroclínico, que es el experimento habitualmente utilizado para el estudio controlado de la inestabilidad baroclínica, de gran importancia en la meteorología global (Hide y Mason, 1975). Habiéndose detectado la emisión espontánea de OIG en fluidos con alto número de Prandtl, $P \gtrsim 7$ (Jacoby *et al.*, 2011; Borchert *et al.*, 2014; Randriamampianina y del Arco, 2015), pero no en fluidos con bajo $P \lesssim 0.7$ (Randriamampianina *et al.*, 2006; Read *et al.*, 2008), la investigación se ha enfocado hacia la determinación de la influencia del P sobre las OIG.

La investigación se ha basado en un modelo simplificado de fluido en rotación estratificado térmicamente que incluye los efectos de la viscosidad y la termoconductividad y por tanto depende del P . El modelo se ha desarrollado en detalle, tomando como punto de partida las ecuaciones básicas del flujo compresible y aplicando la aproximación de Boussinesq y linealizando con respecto al estado de equilibrio para llegar hasta las ecuaciones de las perturbaciones (Chandrasekhar, 1961). Las ecuaciones se han adimensionalizado utilizando las escalas viscosas y se han especializado para los modos normales de perturbación correspondientes a fronteras rígidas. De esta manera se ha obtenido una ecuación característica cúbica que determina las tasas de crecimiento de las perturbaciones en función de los números de onda, P , Rayleigh R y Taylor T .

La discusión de las soluciones de la ecuación característica se ha facilitado en gran medida al descubrirse una transformación de variables que, combinando los números adimensionales con los de onda, reduce el número de parámetros de cinco a dos. El análisis de la parte real de la tasa de crecimiento ha confirmado la estabilidad del equilibrio y ha revelado que las perturbaciones son en general más amortiguadas cuanto menor es el P , es decir, menos estables cuanto mayor el P .

El análisis de la parte imaginaria de la tasa de crecimiento ha corroborado la existencia de perturbaciones oscilatorias para cualesquiera números de onda y T en el límite inercial, en el que la rotación domina sobre la estratificación. También se han confirmado los resultados de Giterman y Shteinberg (1972) y Carracedo (2015) para el límite gravitacional, en el que domina la estratificación y solamente aparecen oscilaciones por encima de un R crítico y en un cierto rango de números de onda. Sin embargo, el resultado principal de este análisis, obtenido examinando el discriminante de la ecuación característica, ha sido la existencia de OIG en una región infinita pero selecta del espacio bidimensional transformado. Este hallazgo supone un soporte teórico para los indicios experimentales y numéricos de que, aparte del R y el T , el P puede tener influencia sobre la aparición de OIG.

Los resultados de existencia de OIG así como los referidos a su amortiguación y frecuencia se han resumido en gráficos que incorporan todas las dependencias con respecto a los números de onda, P , R y T a través de las variables transformadas. No obstante, para ilustrar de forma más clara el efecto del P sobre la existencia y características de las OIG, se han analizado los casos particulares $P = 0.7$ y 16 , correspondientes a las simulaciones numéricas de Randriamampianina *et al.* (2006) y Randriamampianina y del Arco (2015). Los resultados teóricos muestran el desplazamiento y escalado de la región de exclusión de OIG y predicen que, lejos de dicha región, la oscilaciones deberían ser más rápidas y atenuadas para $P = 0.7$. Si bien los resultados de este simple modelo no se pueden relacionar directamente con los de las simulaciones, donde no se detectan OIG para $P = 0.7$, la teoría lineal desarrollada aún puede ayudar a comprender algunas características de las OIG y su variación con los parámetros adimensionales.

Bibliografía

- S. Borchert, U. Achatz, y M. D. Fruman. Gravity wave emission in an atmosphere-like configuration of the differentially heated rotating annulus experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 758:287–311, 2014.
- P. E. Carracedo. *Ondas de gravedad en fluidos viscosos y termoconductivos*. Trabajo fin de máster, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid, 2015.
- S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon, Oxford, 1961.
- S. J. Fein y R. L. Pfeffer. An experimental study of the effects of prandtl number on thermal convection in a rotating, differentially heated cylindrical annulus of fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 75(1):81–112, 1976.
- D. C. Fritts y J. Alexander. Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Reviews of Geophysics*, 41(1):1003, 2003.
- G. Z. Gershuni y E. M. Zhukhovitskii. *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Keter, Jerusalem, 1976.
- A. E. Gill y A. Davey. Instabilities of a buoyancy-driven system. *Journal of Fluid Mechanics*, 35(4):775–798, 1969.
- M. S. Gitterman y V. A. Shteinberg. Internal gravitational waves and convective instability in liquids. *Fluid Dynamics*, 7(2):238–243, 1972.
- R. Hide. An experimental study of thermal convection in a rotating fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 250(983):441–478, 1958.
- R. Hide y P. J. Mason. Sloping convection in a rotating fluid. *Advances in Physics*, 24(1):47–100, 1975.

- P. Hignett, A. A. White, R. D. Carter, W. D. N. Jackson, y R. M. Small. A comparison of laboratory measurements and numerical simulations of baroclinic wave flows in a rotating cylindrical annulus. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 111(467):131–154, 1985.
- T. N. L. Jacoby, P. L. Read, P. D. Williams, y R. M. B. Young. Generation of inertia-gravity waves in the rotating thermal annulus by a localised boundary layer instability. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 105(2-3):161–181, 2011.
- P. R. Jonas. Some effects of boundary conditions and fluid properties on vacillation in thermally driven rotating flow in an annulus. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 18(1-2):1–23, 1981.
- R. C. Kloosterziel y G. F. Carnevale. Closed-form linear stability conditions for rotating Rayleigh-Bénard convection with rigid stress-free upper and lower boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 480:25–42, 2003.
- R. S. Lindzen. Gravity waves in the mesosphere. En J. R. Holton y T. Matsuno, editores, *Dynamics of the Middle Atmosphere*. Terra Scientific Publishing Company, Tokyo, 1984.
- P. Müller, G. Holloway, F. Henyey, y N. Pomphrey. Nonlinear interactions among internal gravity waves. *Reviews of Geophysics*, 24(3):493–536, 1986.
- C. Nappo. *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves*. Academic Press, Berlin, 2003. International Geophysics Series, Volume 85.
- I. Orlanski y M. D. Cox. Baroclinic instability in ocean currents. *Geophysical Fluid Dynamics*, 4(1):297–332, 1973.
- R. T. Pierrehumbert y K. L. Swanson. Baroclinic instability. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 27(1):419–467, 1995.
- A. Randriamampianina y E. C. del Arco. Inertia-gravity waves in a liquid-filled, differentially heated, rotating annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, 782:144–177, 2015.
- A. Randriamampianina, W.-G. Früh, P. L. Read, y P. Maubert. Direct numerical simulations of bifurcations in an air-filled rotating baroclinic annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, 561:359–389, 2006.
- P. L. Read, P. Maubert, A. Randriamampianina, y W.-G. Früh. Direct numerical simulation of transitions towards structural vacillation in an air-filled, rotating, baroclinic annulus. *Physics of Fluids*, 20(4):044107, 2008.