



TRABAJO DE FIN DE MASTER

Ondas de gravedad internas en fluidos viscosos y termoconductivos

Autor:

Pablo E. Carracedo García

Supervisores:

Emilia Crespo del Arco

José Joaquín Sánchez-Alvarez

16 de octubre de 2015

Índice

1. Introducción	7
2. Dinámica de las ondas de gravedad	11
2.1. Ecuaciones para las perturbaciones	11
2.2. Caso no viscoso y no conductor	15
2.3. Ecuaciones adimensionales	16
2.4. Condiciones de contorno	18
2.5. Derivación de la relación de dispersión	19
3. Resultados y discusión	23
3.1. Ondas de inercia-gravedad en una cavidad baroclina	28
4. Conclusiones	35

Abstract

Internal gravity waves are waves that generate and propagate inside a fluid that is stable stratified. Waves are, in general, a very efficient way of energy transport other than mean fluid flow. Energy balance at several scales must take into account the contribution of internal gravity waves.

In this work, classical theory of internal gravity waves is extended to a model that takes into account for the viscosity and thermal conductivity of fluids, properties that are shown to be the key to understand several observed new phenomena in atmosphere-like and ocean-like fluids as well. The model discussed is achieved under several approximations and using linear stability theory. Additionally, boundary conditions are presented and discussed. The resulting model has the important feature of having analytical solution.

Dispersion relation of internal gravity waves in case of viscous and thermal conductive flow, as well as a comparison to classical non viscous flow dispersion relation are discussed and some results are presented.

Introducción

La atmósfera y el océano son dos ejemplos de fluidos geofísicos cuya dinámica puede ser tratada a muy diferentes escalas, desde la escala sinóptica hasta la escala típica de la disipación turbulenta. En cada una de estas escalas son típicos distintos tipos de fenómenos ondulatorios, desde las ondas sonoras que tienen su origen en la compresibilidad del medio hasta las ondas planetarias de Rossby, originadas debido a la diferencia de vorticidad planetaria entre latitudes.

Las ondas internas son ondas de gravedad que oscilan en el interior de un medio fluido. Para su generación y propagación, el medio fluido perturbado debe presentar una estratificación estable, es decir, la densidad debe decrecer con la altura debido a diferencias en la temperatura y/o salinidad del fluido. Es precisamente la naturaleza de la estratificación la que marcará el comportamiento de las ondas internas, de tal forma que si la estratificación presenta cambios abruptos debido a la presencia de un fuerte gradiente vertical de densidad, las ondas internas tenderán a propagarse casi horizontalmente a una frecuencia típica denominada frecuencia de *Brunt-Väisälä* como veremos. Si por el contrario la densidad varía de forma continua, las ondas internas pueden propagarse tanto vertical y horizontalmente a través del fluido. Existe una gran variedad de ondas internas, pero una primera clasificación puede ser establecida atendiendo a la estratificación, al mecanismo de generación y/o la influencia de alguna fuerza externa. Ejemplos de ondas internas son las mareas internas producidas por las corrientes de marea sobre regiones abruptas en la plataforma continental o las ondas de montaña (u ondas de Lee) que se producen por efecto del viento sobre una topografía irregular. Excepto en la capa límite planetaria (PBL, del inglés *Planetary Boundary Layer*) la atmósfera, por ejemplo, presenta casi siempre una estratificación estable, siendo esperable la aparición de este fenómeno de forma mas o menos ubicua. En ésta, la estratificación está controlada por la temperatura. Matemáticamente, una estratificación estable se define como aquella en

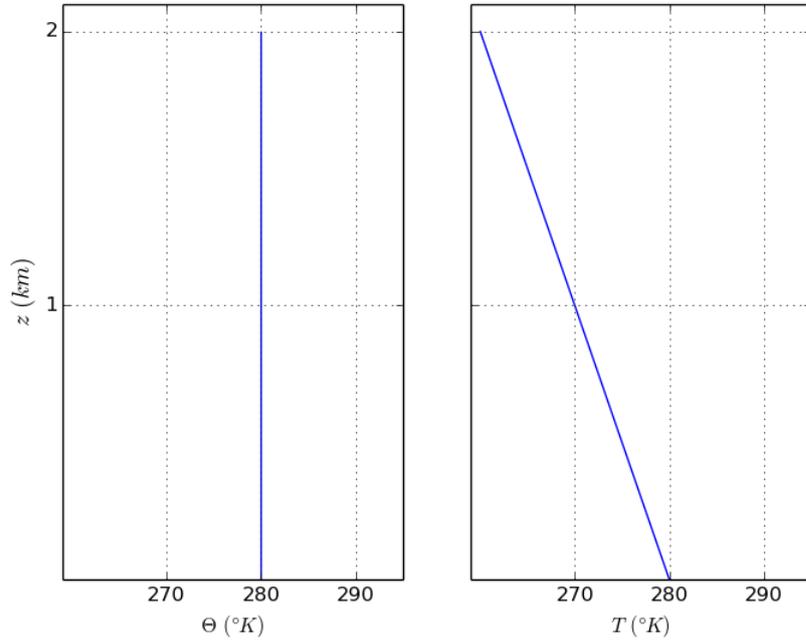


Figura 1.1: *Temperatura potencial θ_p (panel izquierdo) y temperatura T (panel derecho) correspondiente a la adiabática seca en la atmósfera estándar, caso extremo para la estratificación estable.*

la que la temperatura potencial θ_p es monótona creciente con la altura. El caso extremo es una atmósfera con $\partial\theta_p/\partial z = 0$, denominado gradiente vertical (*lapse rate*) de temperatura en la adiabática seca o Γ_d , y se corresponde con un valor aproximado de $\Gamma_d = g/c_p = 10^\circ K/km$, valor que marcará el límite de la estabilidad (figura 1.1). En el otro extremo se sitúa el caso de una atmósfera isoterma. La estratificación sigue siendo estable por el hecho de que la temperatura potencial sigue siendo monótona creciente. Por lo tanto, este caso límite ha de suponer una frecuencia máxima. En el océano, la densidad es prácticamente controlada por la salinidad. Teniendo esto en cuenta, es posible desarrollar argumentos que conducen a resultados similares al anterior. Una característica importante de cualquier fenómeno ondulatorio es el transporte de energía. Las ondas de gravedad transportan energía lejos del escenario donde éstas fueron generadas, y por lo tanto causan cierta redistribución de la energía en la atmósfera y el océano. En este sentido, las ondas en general son un mecanismo mucho más eficiente de transporte de

energía de lo que lo es el *flujo medio*. Cálculos de los balances energéticos, bien a la escala de la circulación general bien a escalas mas pequeñas características de la PBL, incluyen la contribución de las ondas internas de gravedad. Los mecanismos de transferencia de energía a diferentes escalas entre las ondas de gravedad y el medio en el que se propagan está siendo activamente investigado (Staquet and Sommeria [2002]) y desde luego, dista bastante de ser un problema resuelto. Es por ello que en los últimos años se haya venido prestando gran atención al papel jugado por estos fenómenos en, por ejemplo, los modelos numéricos de predicción del tiempo (NWP, del inglés *Numerical Weather Prediction*) (Preusse et al. [2014]) o en los modelos climáticos (Stephan and Alexander [2014]) de distintas organizaciones, donde las resoluciones espaciales alcanzadas no permiten a día de hoy resolver explícitamente su generación y posterior propagación, pero donde el efecto sobre el flujo resuelto puede ser relevante.

Es de destacar el importante papel que el océano juega en los modelos climáticos. El primer intento de entender el papel desempeñado por las ondas internas en la circulación oceánica se debe a Walter Munk que en un artículo clásico (Munk [1966]) estima el valor promedio del coeficiente de difusión turbulenta en el océano profundo del orden de $K_v = 10^{-4} m^2 s^{-1}$, varios órdenes de magnitud superior a la difusividad molecular $\kappa = 10^{-7} m^2 s^{-1}$. En ese mismo artículo, Munk promueve la hipótesis de que uno de los procesos mas importantes en la producción de mezclado turbulento es precisamente la rotura de ondas internas. Mediciones experimentales realizadas desde entonces, han llegado a varias conclusiones:

- Los valores del coeficiente de difusión turbulenta medidos experimentalmente son, en general, un orden de magnitud inferior al propuesto por Munk, aunque los coeficientes medidos cerca de estructuras submarinas y topografías abruptas del fondo oceánico han arrojado valores mucho mas altos.
- El papel de las ondas internas excitadas a partir de la circulación mareal puede ser lo suficientemente importante en los procesos de mezclado turbulento.

El presente trabajo introduce brevemente la teoría clásica de las ondas internas de gravedad que puede ser encontrada en cualquier libro de texto (Drazin [2002], Tritton [1988]), planteando una extensión de la teoría cuando se consideran fluidos viscosos y conductores del calor y analizando las soluciones que se obtienen del nuevo modelo en aproximación

lineal. Para ello, se plantean las ecuaciones de la dinámica de las ondas de gravedad que, bajo ciertos supuestos, son idénticas a las obtenidas en el estudio de la inestabilidad convectiva de Rayleigh-Bénard pero en presencia de una estratificación estable. En el desarrollo planteado no se han tenido en cuenta los efectos de la rotación terrestre. Formalmente, los efectos de la rotación terrestre sobre las ondas de gravedad dependen del número de Rossby $R_o = U/(Lf)$, donde U y L son respectivamente una velocidad y una escala espacial típica del flujo considerado y $f = 2\Omega \sin \phi$ es la frecuencia de Coriolis que depende de la latitud, siendo cero en el ecuador e igual a 2Ω en los polos. Por lo tanto, los efectos de la rotación terrestre serán despreciados en el caso en que $R_o \geq O(1)$, es decir, la evolución de las ondas es suficientemente rápida con respecto a la frecuencia de rotación de la Tierra de tal forma que su dinámica no está influenciada por las fuerza de inercia y de Coriolis, condición que marcará el rango de validez de este trabajo. En caso contrario, los efectos de la rotación no pueden ser despreciados y las ondas internas se denominan ondas de inercia-gravedad o simplemente ondas inerciales. Adicionalmente, se exponen las condiciones de contorno necesarias para obtener la solución analítica y un conjunto de resultados que incluyen la relación de dispersión, la comparación con la teoría no viscosa y las curvas de estabilidad.

En el último apartado de la memoria se ha incluido una pequeña comparación de los resultados de un trabajo de simulación de un fluido con un alto número de *Prandtl* en la cavidad baroclina ([Randriamampianina and Crespo del Arco \[2015\]](#)) en el que se detecta la presencia de ondas de inercia-gravedad. Inicialmente, se expone a grandes rasgos en que consiste la cavidad baroclina y su relación con el estudio de la inestabilidad baroclina, pasando posteriormente a comparar los valores característicos de las ondas obtenidos experimentalmente con los predichos por la teoría presentada. Por último, se presenta un breve resumen con las conclusiones del trabajo.

Dinámica de las ondas de gravedad

Las ecuaciones que rigen la dinámica de las ondas de gravedad cuando se consideran medios viscosos y conductores del calor con un flujo básico en reposo son idénticas a las utilizadas en el estudio de la inestabilidad convectiva de Rayleigh-Bénard pero en presencia de una estratificación estable. En este capítulo obtendremos las ecuaciones que rigen el comportamiento de un flujo básico para luego obtener las ecuaciones que rigen el comportamiento de las perturbaciones de éste. El conjunto de ecuaciones obtenido será tratado por el método de la estabilidad lineal, es decir, las ecuaciones para las perturbaciones serán linealizadas y términos de orden superior en las perturbaciones serán despreciados para, por último, encontrar soluciones en forma de modos normales que verifiquen un conjunto apropiado de condiciones de contorno. En vez de analizar la estabilidad de los modos normales al igual que en el problema de Rayleigh-Bénard, nos centraremos en encontrar bajo que condiciones estos modos presenta un carácter oscilatorio.

2.1. Ecuaciones para las perturbaciones

Partiremos de las ecuaciones de movimiento para un fluido incompresible, viscoso y conductor del calor pero supondremos que las variaciones de densidad (ρ) y otros coeficientes (como los calores específicos c_p , c_v) son únicamente debidos a pequeñas variaciones en la temperatura. Para variaciones de ésta del orden de los 10° , el orden del coeficiente de expansión térmico α esta comprendido entre 10^{-3} y 10^{-4} por lo que las variaciones en la densidad son del orden del 1%. Estas variaciones pueden ser ignoradas con la excepción de los términos donde la densidad esta multiplicada por g que puede producir aceleraciones importantes (Chandrasekhar [1961], Drazin [2002]). Esta es la base que fundamenta la aproximación de Boussinesq. De esta forma, supondremos que las propiedades físicas

del fluido no varían con la presión y la temperatura salvo en términos multiplicados por g . Por lo tanto, la ecuación de continuidad que en su forma completa es:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

se reduce a la condición de divergencia nula del campo de velocidades:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

Estamos interesados en el caso en el que la estratificación sea estable, es decir, el caso en el que la densidad del fluido decrece con la altura. Matemáticamente, un fluido presentará una estratificación estable cuando el perfil de temperatura potencial sea monótonamente creciente con la altura. Concretamente, la diferencia de densidad será la producida por un perfil vertical de temperatura que varía linealmente con la coordenada vertical. De esta forma, podemos aproximar la densidad (ecuación de estado) por la expresión lineal $\rho = \rho_0[1 + \alpha(\theta_0 - \theta)]$, donde α es el coeficiente de expansión térmico. Introducimos esta expresión en la ecuación de Navier-Stokes, únicamente en el término debido a la gravedad $-\rho g \delta_{i3}$ en virtud de la aproximación de Boussinesq, obteniéndose:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) - \frac{\rho}{\rho_0} g \delta_{i3} + \nu \Delta u_i \quad (2.3)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho_0} + gz \right) - \alpha g (\theta_0 - \theta) \delta_{i3} + \nu \Delta u_i \quad (2.4)$$

La ecuación anterior junto con la ecuación de continuidad no son suficientes para cerrar el sistema dinámico. Necesitamos una forma de la ecuación de la conservación de la energía interna dada por el primer principio de la termodinámica, que en su forma mas general se puede expresar como:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + k \Delta \theta$$

donde hemos supuesto que el calor disipado por las fuerzas viscosas es despreciable y que no existen fuentes internas de calor que actúan sobre el volumen. Es posible obtener una expresión mas compacta si introducimos en la ecuación la entropía específica s :

$$\theta \frac{Ds}{Dt} = \frac{k}{\rho} \Delta \theta$$

La eliminación de la entropía específica de la ecuación anterior necesita de la prescripción de una ecuación de estado. En el caso mas simple en el que podemos considerar agua pura o aire seco, la ecuación de estado $s = s(P, T)$ es únicamente función de la presión y la temperatura. Podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$c_p \frac{D\theta}{Dt} + \theta \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\theta \frac{Dp}{Dt} = \frac{k}{\rho} \Delta\theta$$

que puede ser transformada utilizando la relación:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\theta = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_p$$

en la siguiente expresión:

$$c_p \frac{D\theta}{Dt} - \frac{\theta}{\rho} \alpha \frac{Dp}{Dt} = \frac{k}{\rho} \Delta\theta$$

El segundo término de la izquierda está relacionado con el coeficiente de expansión térmica α . Este término puede ser simplificado a $w \Gamma_d$ donde Γ_d es el *lapse rate* en la adiabática seca. Es importante resaltar que este término puede ser significativo en la atmósfera donde, como se indicó en la introducción, $\Gamma_d = g/c_p = 10^\circ K/km$. En este estudio no hemos retenido este término, obteniéndose la forma final de la ecuación de conservación de la energía interna como:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \kappa \Delta\theta \quad (2.5)$$

donde $\kappa = k/\rho c_p$ es el coeficiente de difusividad térmica. Introducimos ahora las perturbaciones del flujo básico:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_* &= \mathbf{u}'_*(\mathbf{x}_*, t_*) \\ \theta_* &= \Theta_*(z_*) + \theta'_*(\mathbf{x}_*, t_*) \\ p_* &= P_*(z_*) + p'_*(\mathbf{x}_*, t_*) \end{aligned}$$

El estado básico al que hacen referencia las ecuaciones anteriores es el de fluido en reposo con un perfil de temperatura que varía linealmente con la coordenada vertical. Es decir:

$$\mathbf{U}_* = 0 \quad \Theta_* = \theta_0 - \beta z_* \quad (2.6)$$

$$P_* = p_0 - g\rho_0 \left(z_* + \frac{1}{2}\alpha\beta z_*^2 \right) \quad 0 \leq z_* \leq d \quad (2.7)$$

donde $\beta = (\theta_0 - \theta)/d$, que es el gradiente adverso de temperatura, valor que en el caso del aire seco es igual al *lapse rate* Γ_d en la adiabática seca. Es importante destacar que el perfil de presión obtenido no es exactamente hidrostático, si no que existe una dependencia cuadrática con la altura. Por otra parte, la ecuación de continuidad no plantea ningún problema, puesto que es lineal todos sus argumentos:

$$\frac{\partial u'_{i*}}{\partial x_{i*}} = 0 \quad (2.8)$$

En la ecuación de Navier-Stokes (ec. 2.4), el término debido al gradiente de presiones puede descomponerse en los siguientes términos:

$$-\frac{\partial}{\partial x_{i*}} \left(\frac{p_*}{\rho_0} + gz_* \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_*}{\partial x_{i*}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'_*}{\partial x_{i*}} - g\delta_{i3}$$

y el término debido a la gravedad queda reducido a:

$$-\alpha g(\theta_0 - \theta_*)\delta_{i3} = (\alpha g\theta'_* - \alpha\beta g z_*)\delta_{i3}$$

Por otro lado, es fácil comprobar a partir de la ecuación 2.7 que define la presión del flujo básico que se verifica:

$$-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_*}{\partial z_*} - g - \alpha\beta g z_* = 0$$

Introduciendo todo ello en la ecuación de Navier-Stokes, obtenemos:

$$\frac{\partial u'_{i*}}{\partial t_*} + \mathbf{u}'_* \cdot \vec{\nabla}'_* u'_{i*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'_*}{\partial x_{i*}} + \alpha g\theta'_* \delta_{i3} + \nu \Delta_* u_{i*}$$

Dada la naturaleza de las perturbaciones, la aproximación lineal implica que $\mathbf{u}'_* \cdot \vec{\nabla}'_* u'_{i*} \approx 0$, quedando:

$$\frac{\partial u'_{i*}}{\partial t_*} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'_*}{\partial x_{i*}} + \alpha g\theta'_* \delta_{i3} + \nu \Delta_* u_{i*} \quad (2.9)$$

Para la ecuación de la conservación de la energía es fácil llegar a la expresión:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t_*} + \mathbf{u}'_* \cdot \vec{\nabla}'_* \Theta_* + \mathbf{u}'_* \cdot \vec{\nabla}'_* \theta'_* = \kappa \Delta_* \theta'_*$$

De esta expresión, retendremos los términos siguientes por la misma razón que fue justificada anteriormente:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t_*} + \mathbf{u}'_* \cdot \vec{\nabla}'_* \Theta_* = \kappa \Delta_* \theta'_*$$

de donde utilizando la ecuación 2.6, es inmediato obtener:

$$\frac{\partial \theta'_*}{\partial t_*} - \beta w'_* = \kappa \Delta_* \theta'_* \quad (2.10)$$

2.2. Caso no viscoso y no conductor

Las ecuaciones anteriores, pueden ser resueltas muy fácilmente para el caso no viscoso y no conductor (Drazin [2002], Tritton [1988]) ya que se simplifican notablemente sin más que tomar la derivada temporal de la ecuación de Navier-Stokes (ec. 2.9) y sustituyendo en el resultado la ecuación de conservación de la energía (ec. 2.10):

$$\frac{\partial^2 u'_{i*}}{\partial t_*^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'_*}{\partial t_* \partial x_{i*}} + \alpha g \beta w'_* \delta_{i3}$$

donde podemos identificar la frecuencia de Brunt-Väisälä $\omega_0^2 = g\alpha\beta$ en el último término de la ecuación. Tomando el rotacional dos veces de la ecuación anterior y haciendo uso de la ecuación de continuidad para las perturbaciones (ec. 2.8) obtenemos una ecuación vectorial en donde la ecuación para la perturbación de la componente vertical de la velocidad w'_* es:

$$\frac{\partial^2 \Delta w'_*}{\partial t_*^2} + \omega_0^2 \left(\frac{\partial^2 w'_*}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 w'_*}{\partial y_*^2} \right) = 0$$

que admite soluciones en ondas planas de la forma $w'_* = W e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$. Sustituyendo en la ecuación anterior, la relación de dispersión es:

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \right)^{1/2} = \omega_0 |\sin \delta| \quad (2.11)$$

siendo δ el ángulo formado por el vector de onda \mathbf{k} y la dirección vertical z (fig. 2.1). Por lo tanto, la frecuencia de las ondas planas varía entre cero en el caso en que $|\mathbf{k}| = k_z$ y la frecuencia de Brunt-Väisälä ω_0 en el caso en que $k_z = 0$.

Una magnitud de gran importancia es la velocidad de grupo C_g que indica la dirección de propagación de la energía cinética y potencial a través del fluido. Si consideramos la propagación de una onda interna en el plano xz esquematizada en la figura 2.1, la

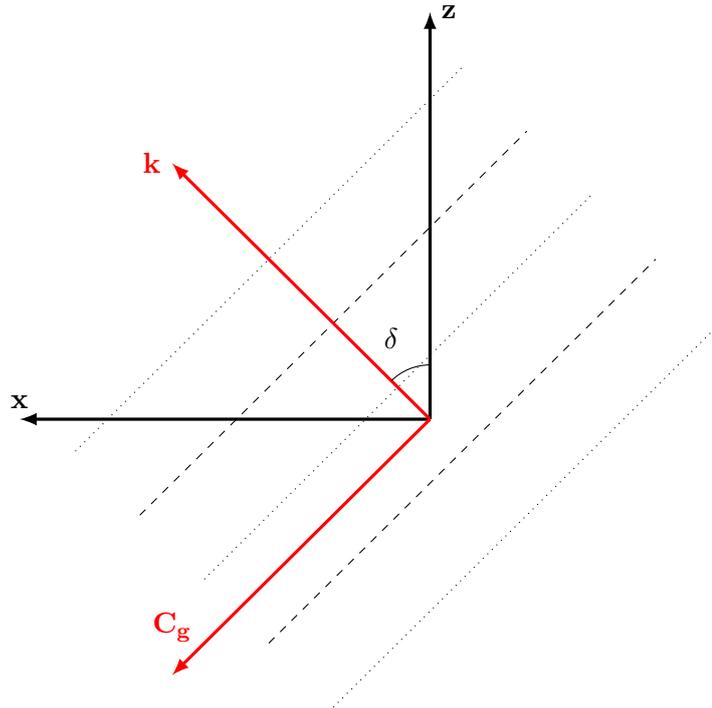


Figura 2.1: Secuencia de nodos (línea punteada) y valles (línea discontinua) de una onda interna propagándose con un ángulo δ respecto de la vertical. Adicionalmente se muestra el vector de onda \mathbf{k} y la velocidad de grupo \mathbf{C}_g .

velocidad de grupo es:

$$\mathbf{C}_g = \frac{\partial \omega}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \mathbf{z}$$

Aplicando la expresión anterior a la relación de dispersión no viscosa 2.11 obtenemos:

$$\mathbf{C}_g = \frac{\omega_0 \cos \delta}{k} (\mathbf{x} \cos \delta - \mathbf{z} \sin \delta)$$

que es un vector perpendicular al vector de onda \mathbf{k} por lo que la energía es transmitida perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda y paralelamente a las líneas que constituyen el frente de onda.

2.3. Ecuaciones adimensionales

A partir de la forma de las ecuaciones de continuidad (ec. 2.8), Navier-Stokes (ec. 2.9) y conservación de la energía interna (ec. 2.10) desarrolladas en la sección anterior, in-

Introducimos las siguientes variables adimensionales utilizando parámetros característicos del flujo básico, como la separación d entre las fronteras superior e inferior, y la escala de tiempo característico d^2/κ que se obtiene a partir de la difusividad térmica:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_*/d; \quad t = t_*\kappa/d^2; \quad \mathbf{u} = d\mathbf{u}'/\kappa;$$

$$\theta = \theta'/\beta d; \quad p = d^2 p'/\rho_0 \kappa^2;$$

Nótese que en la elección de la escala temporal, hemos utilizado κ en vez de ν . Otros autores ([Chandrasekhar \[1961\]](#)) introducen una escala temporal basada en la viscosidad y no en la conductividad, es decir $t = t_*\nu/d^2$. Esto tendrá consecuencias en la forma adimensional de las ecuaciones como se verá posteriormente. Además de las expresiones anteriores, introducimos también las derivadas respecto de las variables adimensionales, que se obtienen por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial t_*} = \frac{\partial t}{\partial t_*} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i*}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{i*}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

A partir de la ecuación 2.10 de conservación de la energía interna y sustituyendo las nuevas definiciones:

$$\frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta d \theta) - \frac{\beta \kappa}{d} w = \frac{\kappa}{d^2} \Delta (\beta d \theta)$$

lo que resulta:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \Delta \theta \quad (2.12)$$

A partir de la ecuación 2.9 de Navier-Stokes:

$$\frac{\kappa}{d^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\kappa}{d} u_i \right) = - \frac{1}{\rho_0 d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho_0 \kappa^2}{d^2} p \right) + \alpha g \beta d \theta \delta_{i3} + \nu \frac{1}{d^2} \Delta \left(\frac{\kappa}{d} u_i \right)$$

y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\alpha \beta g d^4}{\kappa^2} \theta \delta_{i3} + \frac{\nu}{\kappa} \Delta u_i$$

en donde podemos introducir las definiciones de los números de *Rayleigh* y *Prandtl*:

$$Ra = \frac{\alpha \beta g d^4}{\kappa \nu}; \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

para obtener:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + PrRa\theta\delta_{i3} + Pr\Delta u_i \quad (2.13)$$

Por otro lado, es trivial obtener la nueva ecuación de continuidad para las perturbaciones de la velocidad:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.14)$$

2.4. Condiciones de contorno

En el caso de las ecuaciones adimensionales, supondremos que nuestro sistema tiene una frontera rígida en $z = 0$ y una frontera libre en $z = 1$. Estas condiciones parecen adecuadas cuando se buscan soluciones para medios como la atmósfera y el océano, con una frontera rígida (superficie terrestre y fondo oceánico) y una libre (estratopausa y superficie del océano) Las condiciones de contorno para la perturbación de la temperatura es bastante obvia, ya que se supone que la temperatura está perfectamente definida sobre las fronteras, de tal forma que:

$$\theta = 0; \quad \text{en } z = 0, 1$$

En el caso de la perturbación de la velocidad, en la frontera rígida impondremos la condición de no deslizamiento, o lo que es lo mismo, $u = v = 0 \forall x, y$ en $z = 0$. Por otro lado, la condición de frontera impermeable impone $w = 0$ en $z = 0$. La primea condición combinada con la ecuación de continuidad (ec. 2.14) produce la condición de contorno siguiente:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad \text{en } z = 0$$

En la frontera libre, el problema se resuelve suponiendo que ésta es estacionaria, y que las componentes tangenciales de las perturbaciones del tensor de tensiones son nulas. Estas componentes son las siguientes:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

De éstas, solo las dos primeras involucran a w . La inexistencia de flujo de materia a través de la frontera libre, implica la anulación de la velocidad normal a ésta, lo que se conoce con el nombre de *condición cinemática*. Teniendo en cuenta que esta frontera

es estacionaria, la condición es expresada matemáticamente mediante $w = 0$ en $z = 1$, obteniendo entonces las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Combinando este resultado con la ecuación de continuidad (ec. 2.14) y suponiendo que u, v, w son continuas y derivables por lo menos hasta segundo orden, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

resultando por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0; \quad \text{en } z = 1$$

2.5. Derivación de la relación de dispersión

A partir de la ecuación 2.13, aplicando de nuevo el rotacional dos veces y combinando con la ecuación de continuidad (ec. 2.14) al igual que se hizo para el caso no viscoso y no conductor, se obtiene la siguiente ecuación para la velocidad vertical w :

$$\frac{\partial(\Delta w)}{\partial t} = RaPr\Delta_1\theta + Pr\Delta^2 w \quad (2.15)$$

donde $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el Laplaciano horizontal. Esta ecuación en combinación con la ecuación 2.12 nos permite eliminar la dependencia en θ de la ecuación anterior, obteniendo:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Delta w = Ra\Delta_1 w \quad (2.16)$$

Introduciendo ahora la descomposición en modos normales, separando las dependencias en las variables espaciales x e y , de z , y teniendo t por otra parte:

$$\theta = T(z)f(x, y)e^{st}; \quad w = W(z)f(x, y)e^{st};$$

De esta forma, obtenemos a partir de la ecuación 2.12, dos ecuaciones diferentes fruto de la separación de variables de la siguiente forma:

$$sT(z)f(x, y)e^{st} - W(z)f(x, y)e^{st} = T(z)e^{st}\Delta_1 f(x, y) + f(x, y)e^{st}D^2T(z)$$

donde $D = d/dz$. Simplificando el factor e^{st} y agrupando las dependencias en las variables espaciales, obtenemos:

$$\frac{(sT(z) - W(z) - D^2T(z))}{T(z)} = \frac{\Delta_1 f(x, y)}{f(x, y)}$$

Claramente, ambos miembros de la igualdad han de ser iguales a una constante, que podemos elegir convenientemente como $-a^2$, obteniéndose las dos ecuaciones siguientes:

$$\Delta_1 f + a^2 f = 0; \quad (D^2 - a^2 - s)T = -W; \quad (2.17)$$

De la ecuación 2.15 se obtiene de forma idéntica y por separación de variables:

$$sf\partial_z^2 W + sW\Delta_1 f - Prf\partial_z^4 W = \\ RaPrT\Delta_1 f + Prf\partial_z^4 W - sW\Delta_1 f + 2Pr\Delta_1 f\partial_z^2 W - a^2 PrW\Delta_1 f$$

donde hemos utilizado la ecuación $\Delta_1^2 f = -a^2 \Delta_1 f$. Agrupando nuevamente las dependencias en las variables espaciales:

$$\frac{sD^2W(z) - PrD^4W(z)}{RaPrT(z) - sW(z) + 2PrD^2W(z) - a^2PrW(z)} = \frac{\Delta_1 f(x, y)}{f(x, y)}$$

de donde se sigue:

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = a^2 Ra T \quad (2.18)$$

Utilizando esta última ecuación y la que se obtuvo anteriormente a partir de la ecuación 2.12, es posible eliminar la dependencia en T :

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2 - s/Pr)W = -a^2 Ra W$$

Esta última ecuación junto con las condiciones de contorno $T = 0$ y $W = 0$ ya que se tiene que tanto la temperatura como la velocidad está perfectamente determinada en $z = 0, 1$ y por lo tanto las perturbaciones son nulas, $DW = 0$ en la frontera rígida y $D^2W = 0$ en la frontera libre, definen completamente el problema de autovalores.

Nótese que las ecuaciones 2.17 y 2.18 tomarán la siguiente forma:

$$(D^2 - a^2 - Prs)T = -W;$$

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s)W = a^2 Ra T$$

en el caso de que el tiempo adimensional sea escogido como $t = t_*\nu/d^2$, es decir introduciendo una escala temporal basada en la viscosidad y no en la conductividad, y por lo tanto:

$$(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2 - Pr s)W = -a^2 Ra W$$

que es la forma escogida por algunos autores en algunos textos ([Chandrasekhar \[1961\]](#)). Resolver la ecuación anterior es particularmente sencillo en el caso de fronteras libres y paredes perfectamente conductoras. En este caso, podemos establecer como solución de prueba $W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi z)$ que claramente verifica las condiciones de contorno en $z = 0, 1$. Por otro lado, es posible obtener una ecuación para cada modo, haciendo uso de la propiedad de ortogonalidad siguiente:

$$\int_0^1 \sin(m\pi z) \sin(n\pi z) dz = 0$$

si $m \neq n$. De esta forma, obtenemos:

$$(n^2\pi^2 + a^2)(n^2\pi^2 + a^2 + s_n)(n^2\pi^2 + a^2 + Pr s_n) = a^2 Ra$$

que es cuadrático en s_n cuyos coeficientes son:

$$\begin{aligned} A &= (n^2\pi^2 + a^2)Pr \\ B &= (n^2\pi^2 + a^2)^2(1 + Pr) \\ C &= (n^2\pi^2 + a^2)^3 - a^2 Ra \end{aligned} \quad (2.19)$$

y cuyas raíces son simplemente:

$$s_n = -\frac{1 + Pr}{2Pr}(n^2\pi^2 + a^2) \pm \left[\left(\frac{1 - Pr}{2Pr} \right)^2 (n^2\pi^2 + a^2)^2 + \frac{a^2 Ra}{(n^2\pi^2 + a^2)Pr} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

Resultados y discusión

A continuación, discutiremos algunas predicciones a partir de los resultados obtenidos en las secciones precedentes y que terminaron con la derivación de la relación de dispersión de las ondas internas de gravedad (ecuación 2.20) para un medio viscoso y conductor del calor. Inicialmente identificamos el autovalor a con el número de onda horizontal k para obtener la forma final de la relación de dispersión que se puede encontrar en el artículo [Giterman and Shteinberg \[1972\]](#). La justificación de esta correspondencia se puede obtener a partir de la primera de las ecuaciones 2.17 para la función $f(x, y)$ que agrupa la dependencia de w con x e y . Esta ecuación admite soluciones triviales en forma de ondas planas del tipo $f(x, y) = Ce^{i(k_x x + k_y y)}$ y por lo tanto, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Como primer resultado, si definimos:

$$\omega_n = \omega_0 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{k^2} \right)^{-3/2} \quad (3.1)$$

siendo $\omega_0 = (-Ra/Pr)^{1/2}$ la frecuencia de Brunt-Väisälä adimensional, obtenemos un resultado interesante que conecta el resultado con el caso no viscoso y que fue introducido anteriormente en la sección 2.2. Si $k = 0$, la frecuencia $\omega_n = 0$, es decir, no hay ondas que se propaguen exclusivamente en la dirección vertical, y si $k_z = 0$ (solo para $n = 0$) entonces w_n es la frecuencia de Brunt-Väisälä ω_0 . Con todo ello, es fácil manipular la ecuación 2.20 para obtener la relación de dispersión:

$$s_n = -\frac{1 + Pr}{2Pr} (n^2 \pi^2 + k^2) \pm \frac{n^2 \pi^2 + k^2}{k^2} \left[k^4 \left(\frac{1 - Pr}{2Pr} \right)^2 - \omega_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

La existencia de soluciones oscilatorias se traduce en que el radical de esta ecuación ha de ser negativo, condición que se escribe de la siguiente forma:

$$\omega_n^2 - k^4 \left(\frac{1 - Pr}{2Pr} \right)^2 > 0 \quad (3.3)$$

A partir de esta expresión podemos obtener la relación límite entre la estratificación vía frecuencia de Brunt-Väisälä adimensional ω_0 y la aparición de los distintos modos:

$$\omega_0^2 = \gamma_0(k) \left(\frac{1 - Pr}{2Pr} \right)^2 \quad (3.4)$$

donde $\gamma_0(k) = (n^2\pi^2 + k^2)^3 k^{-2}$ es una función que contiene la dependencia en las componentes vertical ($n\pi$) y horizontal (k) del vector de onda. Esta relación se muestra

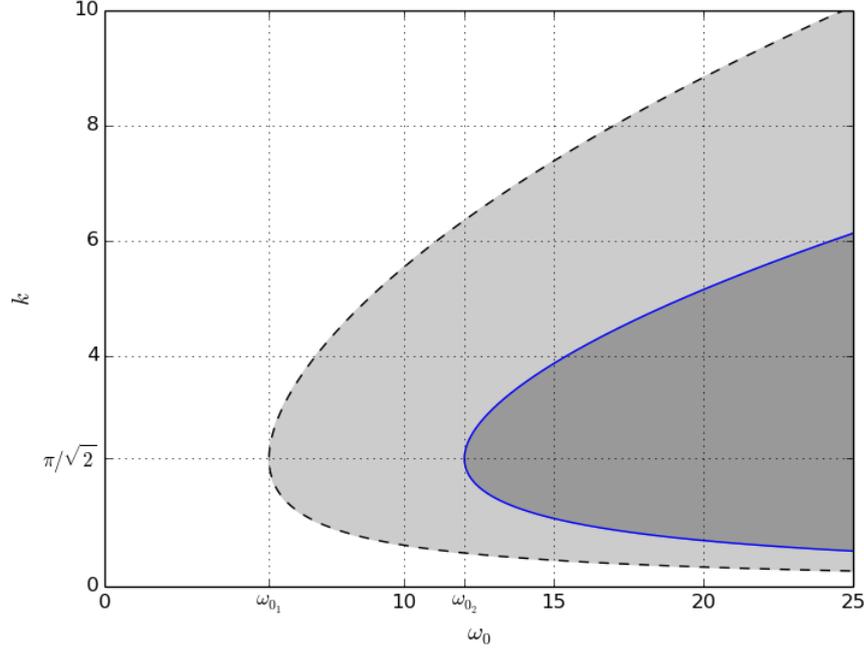


Figura 3.1: Número de onda k frente a frecuencia ω_0 para distintos valores del número de Pr para $n = 1$. $Pr=0.7$ (línea discontinua) y $Pr=16$ (línea continua). El rango de posibles valores del número de onda k se corresponde con las regiones sombreadas. Se muestran adicionalmente los valores críticos de ω_0 por debajo de los cuales no existen modos oscilatorios.

gráficamente en la figura 3.1 para $n = 1$. Se puede observar la existencia de un valor crítico del número de onda que ocurre en $k = \pi/\sqrt{2}$, y que se produce a una frecuencia crítica ω_{0_c} dada por la expresión:

$$\omega_{0_c}^2 = \frac{27\pi^4}{4} \left(\frac{1 - Pr}{2Pr} \right)^2$$

Para estratificaciones con frecuencia de Brunt-Väisälä ω_0 por encima del valor crítico existen soluciones oscilatorias cuyo rango válido de números de onda horizontal k viene dado por la expresión 3.4 y que se esquematiza gráficamente en la figura 3.1 como la región sombreada. Cuanto mayor es la estratificación, mayor es el rango de longitudes de onda que se pueden presentar. Por debajo del valor crítico no existen soluciones oscilatorias. La figura 3.2 muestra la dependencia de la frecuencia de las oscilaciones $\sigma = \Im(s_n)$ con la estratificación para una longitud de onda determinada igual a $k = \pi$. La frecuencia de oscilación es menor de $\omega/\sqrt{2}$ (indicado por la línea roja). Este valor es precisamente el límite superior al que se aproximará la frecuencia de oscilación cuando la estratificación es infinitamente grande. Cabe destacar que en el caso de que el número de onda

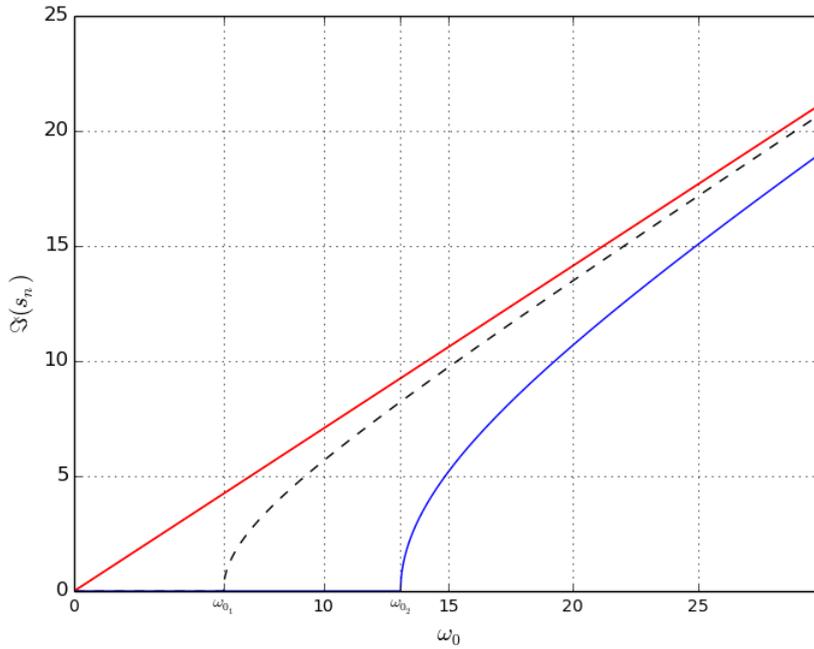
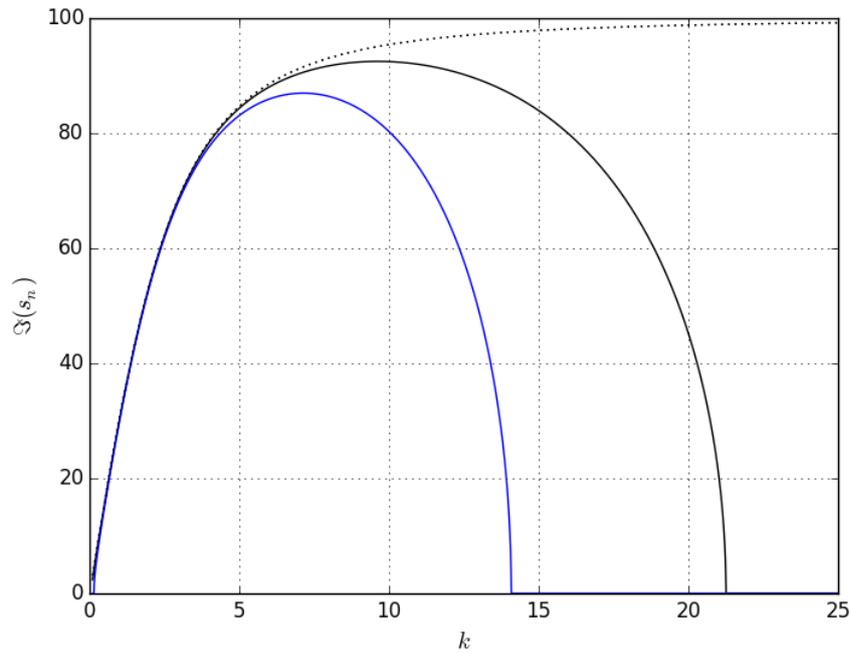
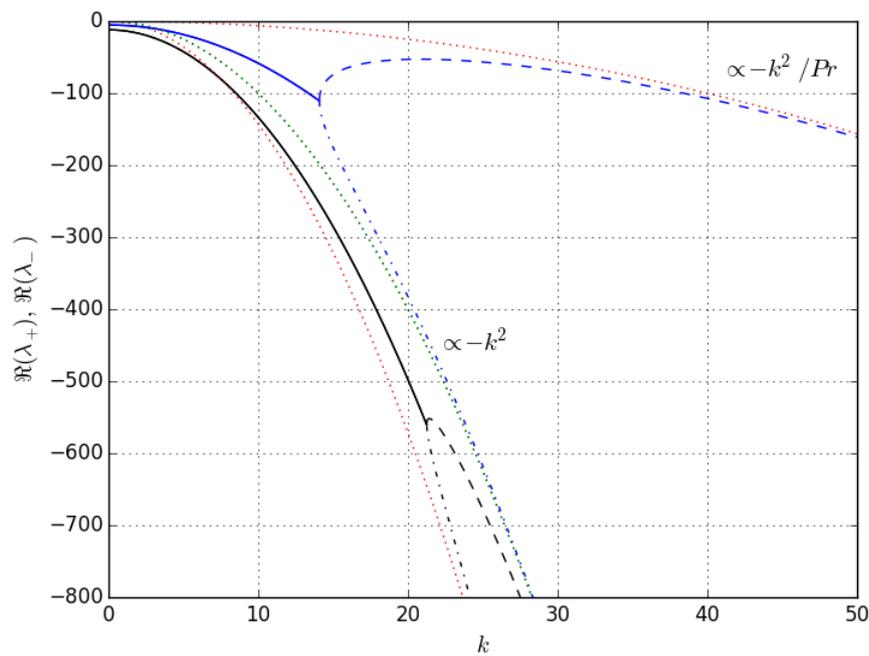


Figura 3.2: Frecuencia de oscilación para $Pr=0.7$ (línea discontinua) y $Pr=16$ (línea continua). $n = 1$ y $k = \pi$. La línea roja es una recta de pendiente $1/\sqrt{2}$.

horizontal k sea muy grande, el límite superior será la frecuencia de Brunt-Väisälä ω_0 .



(a)



(b)

Figura 3.3: 3.3a: Frecuencia de oscilación $\sigma = \Im(s_n)$ frente al número de onda k . Línea punteada, relación de dispersión no viscosa, ecuación 2.11. 3.3b: Amortiguamiento de las perturbaciones. Parte real de las raíces de la ecuación 3.2, $\Re(\lambda_+)$, $\Re(\lambda_-)$, en trazo discontinuo cuando no existen soluciones oscilatorias. Las líneas punteadas representan los comportamientos asintóticos. En ambas figuras $Pr = 0.7$ (en negro) y $Pr = 16$ (en azul), frecuencia de Brunt-Väisälä adimensional $\omega_0 = 100$ y $n = 1$.

Las figuras 3.3 representan la parte imaginaria (frecuencia de oscilación) y real (atenuación) de la relación de dispersión frente a distintos valores de k para una estratificación correspondiente a $\omega_0 = 100$ y con $n = 1$. En la figura 3.3a, se muestran las frecuencias de oscilación $\sigma = \Im(s_n)$ para los números de Prandtl $Pr = 0.7$ (en negro) y $Pr = 16$ (en azul), así como las frecuencias que se obtienen de la relación de dispersión del fluido sin viscosidad y conductividad térmica de la ecuación 2.11 (trazo punteado) obtenida en la sección 2.2. En particular, esta última se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{k^2}{k^2 + n^2\pi^2} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

En este último caso, a medida que la onda se hace mas *horizontal*, es decir, k aumenta, la frecuencia tiende a la de Brunt-Väisälä que es la frecuencia máxima. Esto no sucede en el caso viscoso/termoconductor donde las longitudes de onda corta se corresponden con valores de k dentro del rango prohibido y para una estratificación determinada existe un k mínimo y máximo y su separación depende de Pr . Es interesante destacar que en el rango de longitudes de onda largas, las frecuencias de los casos con y sin viscosidad/conductividad térmica coinciden en los valores de la frecuencia, siempre teniendo en cuenta la atenuación que está presente en el caso viscoso.

En la figura 3.3b y con trazo continuo, se representa la atenuación de las oscilaciones cuando k está dentro del rango permitido de longitudes de onda. Las partes reales de las raíces de la ecuación 3.2, $\Re(\lambda_+)$ y $\Re(\lambda_-)$, son iguales ya que las raíces son complejo conjugadas. La atenuación es mayor cuando $Pr < 1$ ya que el factor $(1 + Pr)/2Pr$ crece muy rápido cuando Pr es pequeño siendo del orden de $1/2Pr$. Sin embargo, cuando $Pr \gg 1$ el factor queda reducido a un valor constante $1/2$ independiente de Pr . Tenemos por lo tanto dos situaciones:

- Si $Pr \ll 1$: Los procesos de difusión térmica dominan sobre los efectos viscosos. Se produce una atenuación termoconductor de forma exponencial:

$$s_n = -\frac{n^2\pi^2 + k^2}{2Pr}$$

- Si $Pr \gg 1$: Los efectos viscosos dominan sobre la difusión térmica. Se produce una atenuación viscosa de forma exponencial que es independiente del número de

Prandtl.

$$s_n = -\frac{n^2\pi^2 + k^2}{2}$$

Por otro lado, se representan con trazos discontinuos las raíces de la ecuación 3.2 cuando k está fuera del rango permitido de longitudes de onda. En esta ocasión, las raíces $\Re(\lambda_+)$ y $\Re(\lambda_-)$ son reales y distintas, siendo una de ellas mayor que la otra. El comportamiento asintótico en longitudes de onda cortas (k alto) es tal que la atenuación termoconductiva tiende a $-k^2$ y la viscosa a $-k^2/Pr$. Es decir, la atenuación termoconductiva es independiente de Pr mientras que la viscosa no. Estos resultados sugieren un comportamiento muy diferente de las perturbaciones al flujo básico si el fluido estratificado es la atmósfera o el océano, ya que los valores del número de Prandtl típicos para el aire son $Pr \in [0.7, 0.8]$ y para el agua marina oscila entre $Pr = 7.2$ a $20^\circ C$ y $Pr = 13.4$ a $0^\circ C$ (tabla 3.1).

Propiedad	Agua	Aire
Coefficiente de expansión térmica (α)	$2.6 \cdot 10^{-4} /^\circ C$	$3.5 \cdot 10^{-3} /^\circ C$
Viscosidad cinemática (ν)	$1.3 \cdot 10^{-6} m^2/s$	$1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$
Difusividad térmica (κ)	$1.4 \cdot 10^{-7} m^2/s$	$2.2 \cdot 10^{-5} m^2/s$

Tabla 3.1: Valores para las propiedades físicas del agua pura a $10^\circ C$ y del aire a $15^\circ C$ en condiciones de presión estándar.

3.1. Ondas de inercia-gravedad en una cavidad baroclina

Recientes experimentos realizados en la cavidad baroclina han detectado la presencia de ondas de gravedad únicamente en ciertas configuraciones de la cavidad para estudiar y simular la inestabilidad baroclina que está presente en la atmósfera y en el océano a diferentes escalas. En la atmósfera, la inestabilidad baroclina se deriva de la existencia de un gradiente de temperatura meridional, y por tanto existencia de cizalladura vertical y un perfil de viento térmico, resultado de una situación de equilibrio dinámico ya que las superficies de densidad constante, están inclinadas con respecto al horizonte en equilibrio dinámico debido a la rotación (figura 3.4). Esta situación de equilibrio dinámico

introduce una estratificación que eventualmente puede dar lugar a la aparición de ondas de gravedad.

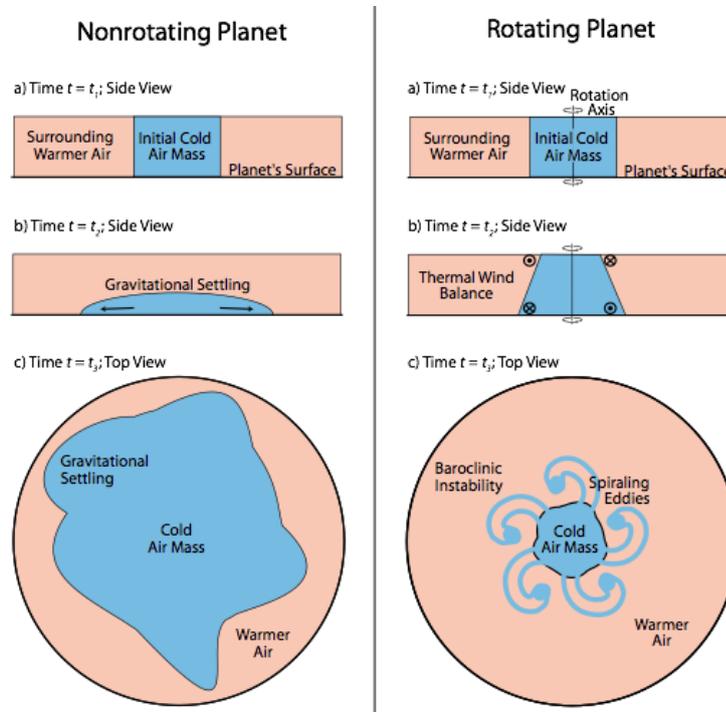


Figura 3.4: Inestabilidad baroclina: Esquema simplificado del comportamiento de una masa de fluido frío (en color azul) rodeado de una masa caliente para un sistema sometido únicamente a la acción de la gravedad (izq.) y para un sistema rotante (der.). En el caso en rotación, la masa fría no continua su expansión, si no que se alcanza una situación de equilibrio dinámico a través del establecimiento de un perfil de viento térmico.

En el laboratorio, es posible estudiar la inestabilidad baroclina por medio de un anillo rotante calentado de forma diferencial desde su radio interior al exterior (figura 3.5) de altura d , de longitud $L = b - a$ que va desde un radio interior a hasta un radio exterior b (un factor de forma $A = d/L$). El gradiente de temperatura aproximado por $(T_b - T_a)/L$ se asume positivo. El gráfico 3.6 introduce de forma gráfica el símil atmosférico correspondiente a este sistema, de tal forma que la pared interior está en contacto con un foco frío (por analogía con las masas de aire polares) y la exterior con uno a temperatura mas alta (por analogía con las masas de aire subtropicales).

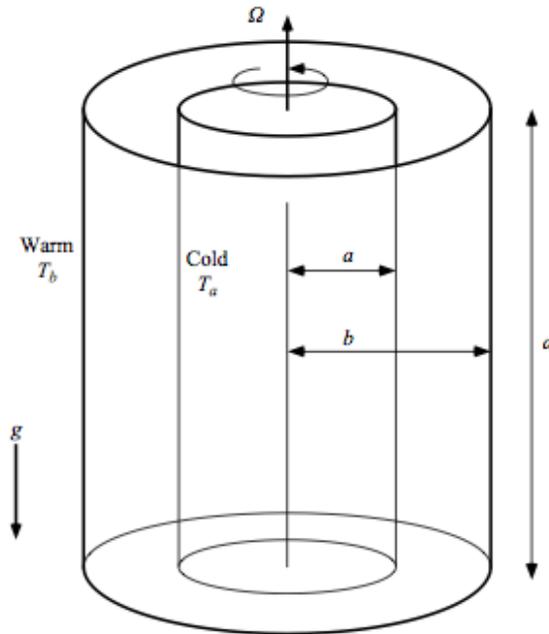


Figura 3.5: Esquema de la cavidad cilíndrica rotante (cavidad baroclina). El fluido está confinado entre dos cilindros de altura d , uno interior de radio a y uno exterior de radio b . Las paredes horizontales se suponen aislantes, y las caras interior y exterior se mantienen a temperaturas constantes T_a y T_b respectivamente, teniendo que $T_a < T_b$. La cavidad rota a una velocidad angular Ω .

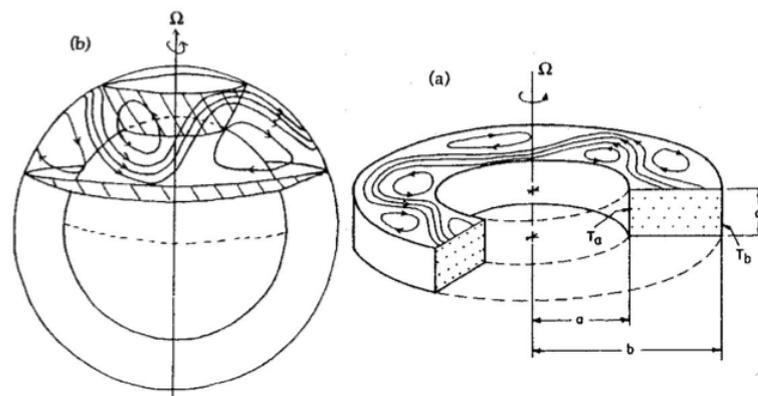


Figura 3.6: Símil entre la circulación general atmosférica en latitudes medias y el sistema anular rotante o cavidad baroclina.

La aparición de ondas de gravedad está ligada a la cara fría interior del cilindro, pero se manifiestan únicamente para ciertos valores del número de *Prandtl* y de la velocidad de rotación de la cavidad Ω , que es el parámetro que controla la estratificación de forma dinámica. Uno de los resultados expuestos hasta ahora establece que, en efecto, existe una cierta estratificación crítica a partir de la cual son posibles las soluciones oscilatorias en un rango permitido de longitudes de onda (figura 3.1). En [Randriamampianina and Crespo del Arco \[2015\]](#) se discute la aparición de ondas de gravedad en simulaciones *DNS* (*Direct Numerical Simulation*) de una cavidad baroclina que contiene un fluido con un alto número de *Prandtl*, $Pr \approx 16$, en el que solo se detecta la signatura de ondas de gravedad para valores de $\Omega = 0.5125 \text{ rad/s}$. La tabla 3.2 resume los principales parámetros de las perturbaciones observadas en el experimento.

Radio interior (a)	4.5 <i>cm</i>
Radio exterior (b)	15. <i>cm</i>
Altura (d)	26. <i>cm</i>
$\Delta T = T_b - T_a$	2 °C
$\Delta T/\Delta z$	0.1 °C
Frec. de Brunt-Väisälä (ω_{0e}^*)	0.17 <i>rad/s</i>
Frecuencia de las oscilaciones (ω_e^*)	0.107 <i>rad/s</i>
$k_{z_e}^*$	1.45 / <i>cm</i>
k_e^*	7.54 / <i>cm</i>

Tabla 3.2: Principales parámetros de la cavidad baroclina y de las ondas de gravedad obtenidas en [Randriamampianina and Crespo del Arco \[2015\]](#) para $\Omega = 0.5125 \text{ rad/s}$.

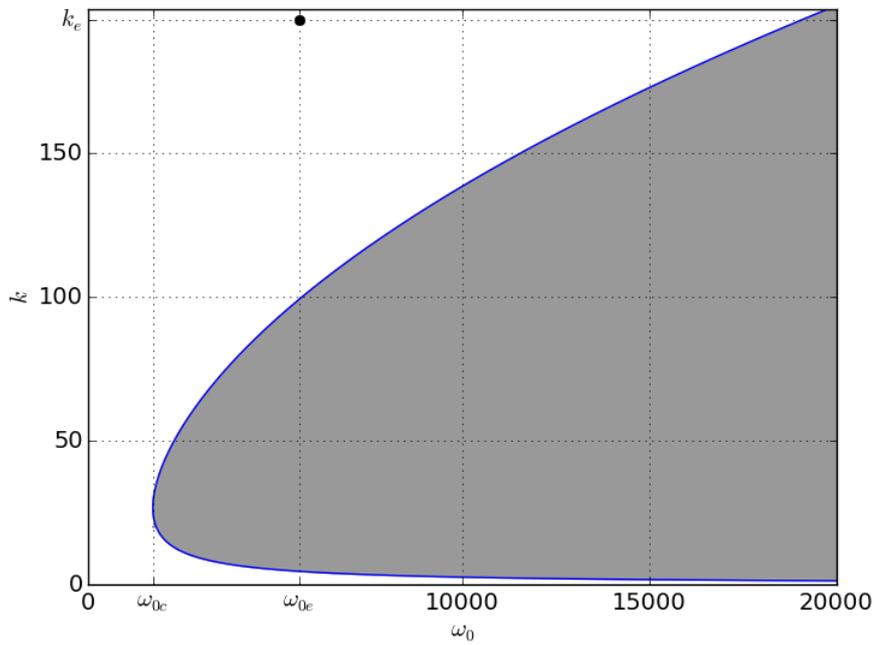
Aunque la naturaleza del experimento queda fuera del rango de aplicación del modelo (numero de Rossby $R_o < O(1)$, flujo básico distinto del reposo y diferentes condiciones de contorno verticales), es interesante comprobar a grandes rasgos si los resultados experimentales son coherentes con las predicciones. A partir de los datos presentados en la tabla 3.2 y utilizando la altura de la cavidad como longitud de escala vertical característica, es posible obtener $n = k_{z_e}^* d/\pi = 12$ y $k_e = k_e^* d \approx 196.04$. La frecuencia de Brunt-Väisälä adimensional experimental $\omega_{0e} = \omega_{0e}^* d^2/\nu \approx 5634.1$ está muy por encima

del valor crítico que se obtiene del modelo:

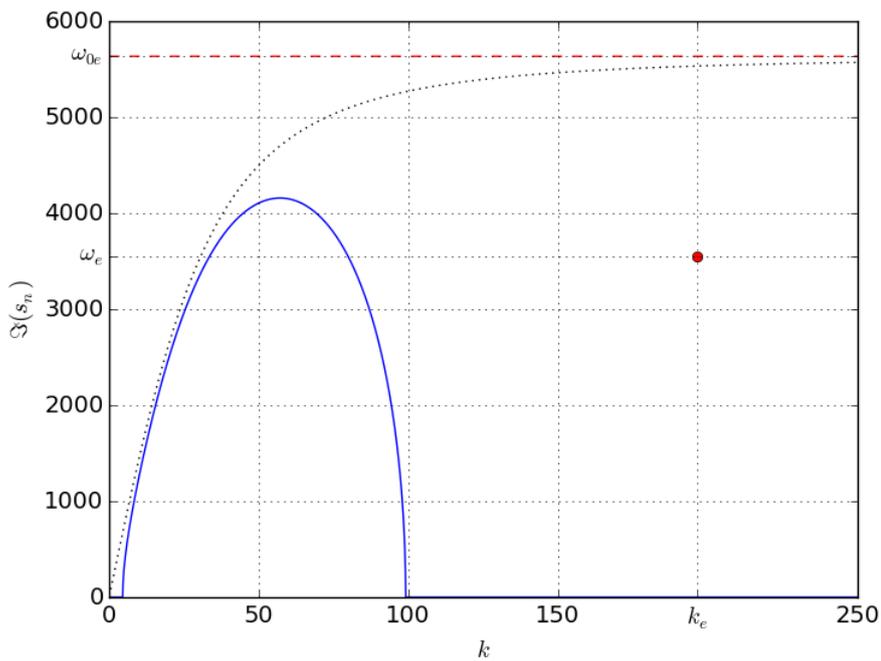
$$\omega_{0c}^2 = \frac{27n^4\pi^4}{4} \left(\frac{1 - Pr}{2Pr} \right)^2$$

que para $n = 12$ es $\omega_{0c} = 1730.8$. En este sentido, el modelo aquí presentado predice la aparición de ondas de gravedad para cierto rango de valores permitidos del número de onda k , sin embargo, el valor del número de onda obtenido experimentalmente k_e queda excluido de este rango. La figura 3.7a resume gráficamente estos resultados donde se representan los valores crítico y experimental de la frecuencia de Brunt-Väisälä adimensional, ω_{0c} y ω_{0e} respectivamente, así como el número de onda adimensional k_e . Adicionalmente, es de utilidad comprobar si la frecuencia de las oscilaciones medidas está de acuerdo con la relación de dispersión obtenida. La figura 3.7b muestra la frecuencia de las oscilaciones ω frente a k para $n = 12$, $\omega_{0e} = 5634.1$ y $Pr = 16$. El punto representado se corresponde con $k_e = 196.04$ y $\omega_e = 3546.2$.

Es interesante destacar que la elección de la longitud de escala vertical característica ha sido identificada de forma mas o menos arbitraria con la altura de la cavidad baroclina. Sin embargo, las conclusiones aquí expuestas son igualmente válidas cuando la longitud vertical característica se escoge en el rango comprendido entre la longitud de onda obtenida experimentalmente λ_e y la altura de la cavidad. Todos los valores explorados para d conducen a frecuencias de Brunt-Väisälä adimensional experimental ω_{0e} por encima del valor crítico ω_{0c} pero con el número de onda adimensional k_e en el rango prohibido de longitudes de onda y con una frecuencia ω_e que no está de acuerdo con la relación de dispersión obtenida en este trabajo. Este resultado sugiere la ampliación de las soluciones analíticas obtenidas en este trabajo a casos de estudio que introduzcan la rotación y que contemplen otros estados del flujo básico.



(a)



(b)

Figura 3.7: 3.7a: Número de onda k frente a frecuencia ω_0 . El rango de posibles valores del número de onda k se corresponde con las regiones sombreadas. Se muestra el punto (ω_{0e}, k_e) . 3.7b: Frecuencia de oscilación $\sigma = \mathfrak{S}(s_n)$ frente al número de onda k para el caso no viscoso (ec. 3.5, en trazo punteado) y para $Pr = 16$ (en azul) con $n = 12$. Se muestra el punto de coordenadas (k_e, ω_e) . Datos de *Randriamampianina and Crespo del Arco [2015]*.

Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un modelo sencillo para las ondas de gravedad, desarrollando el formalismo para medios viscosos y conductores del calor. Se han obtenido las ecuaciones que rigen la dinámica del flujo básico y de las perturbaciones en aproximación lineal que bajo ciertas aproximaciones (fluido sin rotación o con un número de Rossby que verifica $R_o \geq O(1)$, flujo básico en reposo, estratificación estable y constante) ha permitido la obtención de una expresión analítica de la relación de dispersión.

A pesar de la simplicidad y de la gran cantidad de limitaciones del modelo presentado, éste es todavía útil en cuanto que permite explorar cualitativamente los fenómenos relacionados con las ondas de gravedad y la importancia que los efectos de la viscosidad y conductividad tienen sobre su generación y propagación por medio de la supresión viscosa o termoconductiva, permitiendo a su vez establecer límites para la propagación y generación resaltando su dependencia en el tipo de fluido a través del número de Prandtl (Pr) y de la estratificación del medio a través de la frecuencia de Brunt-Väisälä. De esta forma, el modelo ha permitido establecer que cuando se toman en consideración la viscosidad y conductividad térmica del fluido existe un valor umbral de la frecuencia de Brunt-Väisälä y que cuando nos encontramos por encima de éste, solo es posible un cierto rango de longitudes de onda. Por último, el modelo indica que el número de *Prandtl* establece una diferencia de comportamiento que se refleja en la relación de dispersión. Si $Pr \ll 1$, los procesos de difusión térmica dominan sobre los efectos viscosos mientras que si $Pr \gg 1$ los efectos viscosos dominan sobre la difusión térmica y que para cualquier longitud de onda la atenuación termoconductiva es siempre mayor que la atenuación viscosa, resultado que sugiere un comportamiento muy diferente de las perturbaciones al flujo básico si el fluido estratificado es la atmósfera o el océano. En este sentido, se ha presentado un caso de estudio de los resultados obtenidos en la cavidad baroclina

que sugieren un comportamiento de las ondas de gravedad muy similar al predicho por el modelo presentado, todo ello a pesar de que este ejemplo queda fuera del rango de validez del estudio.

Una extensión lógica de este trabajo debe explorar tanto fluidos en rotación como otras configuraciones de flujos básicos. En este sentido, la extensión puede resultar en la aparición de nuevos problemas no triviales como por ejemplo la aparición de un *nivel crítico* singular cuando la velocidad de fase de la onda iguala a la velocidad del flujo básico en el caso no viscoso ([Booker and Bretherton \[1967\]](#)) y como la viscosidad tiene un papel importante en la estabilización ([Fritts and Geller \[1976\]](#)).

Bibliografía

- C. Staquet and J. Sommeria. INTERNAL GRAVITY WAVES: From Instabilities to Turbulence. January 2002. URL <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.34.090601.130953>.
- Peter Preusse, Stephen Eckermann, Manfred Ern, and Martin Riese. Characteristic of gravity waves resolved in ECMWF. *40th COSPAR Scientific Assembly. Held 2-10 August 2014, in Moscow, Russia, Abstract A1.1-49-14.*, 40:2622, 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014cosp...40E2622P>.
- Claudia Stephan and M. Joan Alexander. Summer Season Squall-Line Simulations: Sensitivity of Gravity Waves to Physics Parameterization and Implications for Their Parameterization in Global Climate Models. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 71(9):3376–3391, September 2014. ISSN 0022-4928. doi: 10.1175/JAS-D-13-0380.1. URL <http://journals.ametsoc.org/doi/abs/10.1175/JAS-D-13-0380.1>.
- Walter H. Munk. Abyssal recipes. *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 13 (January):707–730, 1966. ISSN 00117471. doi: 10.1016/0011-7471(66)90602-4.
- P.G. Drazin. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002. ISBN 9780521009652. URL <http://books.google.es/books?id=1eR51Gt7hAcC>.
- D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publ. Clarendon Press, 1988. ISBN 9780198544937. URL https://books.google.es/books?id=reP_xhqZb2QC.
- A. Randriamampianina and E. Crespo del Arco. Inertia–gravity waves in a liquid-filled, differentially heated, rotating annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, 782:144–177, 11 2015. ISSN 1469-7645. doi: 10.1017/jfm.2015.522. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112015005224.

- Subrahmanyan Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1961. ISBN 9780486640716. URL http://books.google.es/books?id=oU_-6ikmidoC.
- M. Sh. Giterman and V. A. Shteinberg. Internal gravitational waves and convectional instability in liquids. *Fluid Dynamics*, 7(2):238–243, March 1972. ISSN 0015-4628. doi: 10.1007/BF01186464. URL <http://link.springer.com/10.1007/BF01186464>.
- J. R. Booker and F. P. Bretherton. The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, 27:513–539, 1967.
- D. C. Fritts and M. A. Geller. Viscous stabilization gravity wave critical level flows. *J. Atmos. Sci.*, 33:2276–2284, 1976.