Análisis Funcional y Teoría de la Medida en Matemática Financiera:

Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos

escrito por

DANIEL ARRIETA RODRÍGUEZ

Tutor: Dr. D. Alejandro Balbás de la Corte

Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Trabajo presentado para la obtención del título de
Máster Universitario en Matemáticas Avanzadas de la UNED.
Especialidad de Análisis Matemático.

OCTUBRE 2016

Abstract

Abstract en español:
El fin del presente Trabajo de Fin de Máster es analizar los principales resultados de Análisis Funcional y de Teoría de la Medida que se vienen utilizando en la literatura de Matemática Financiera en las últimas décadas. En concreto se abordarán los denominados Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos, en cuyos enunciados y demostraciones se utilizan resultados bien conocidos como los teorema de Hanh-Banach o Radon-Nykodim o los límites proyectivos de medidas de Radon. También es muy habitual el uso de herramientas de teoría de martingalas y semimartingalas.

Abstract in English:
Thesis goal is to analyze the main results of Functional Analysis and Measure Theory that have been used in the literature of Financial Mathematics in recent decades. Specifically those used in the so called Fundamental Theorems of Asset Pricing. Their statement and demonstrations use classic tools like Hanh-Banach or Radon-Nykodim theorems, Radon measures projective limits and also martingale and semimartingale theory concepts and results.

Keywords: Funcional, Medida, Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

A mi abuelita Pepa y a quién está por llegar.

Agradecimientos.
Quiero agradecer especialmente la ayuda y apoyo de mi tutor Dr. D. Alejandro Balbás de la Corte quién es además uno de los padres del enfoque proyectivo en los teoremas fundamentales de valoración. Imposible tener un mejor tutor para este trabajo.
Asimismo quería agradecer especialmente a los profesores Fidel José Férnandez y Férnandez-Arroyo y Beatriz Hernando Boto, también directora del Máster, por toda la asistencia y soporte que me han facilitado durante el Máster.

Tabla de Contenidos

Página

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Mi motivación para cursar el Máster tenía dos objetivos principales. El primero de ellos era adquirir los conocimientos necesarios para la completa comprensión de los denominados Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos. Y, en segundo lugar, realizar una primera aproximación a la investigación matemática.

Para lograr el primer objetivo era necesario cursar las asignaturas de Análisis Funcional y de Teoría de la Medida. Por otra parte, la introducción a la investigación parecía lógico que siguiera la trayectoria iniciada por los primeros Teoremas Fundamentales de Valoración y por ello escogí como tema para el presente Trabajo de Fin de Máster, TFM de ahora en adelante, el estudio de dichos teoremas, desde los primeros publicados a finales de los años setenta hasta las últimas extensiones en las dos primeras décadas del presente siglo.

1.2. Literatura y Estructura del TFM

La estructura del TFM se compone de tres grandes bloques. El primero de ellos consta de los capítulos 2, 3 y 4. En ellos se exponen los resultados más estándar y clásicos iniciados por Harrison y Kreps [HK79], Harrison y Pliska [HP81] y por Kreps [Kre81]. Estos trabajos seminales comienzan con modelos basados en espacios finitos de probabilidad y se van generalizando a tiempo continuo. Esta última generalización dará lugar al uso de conceptos como el de *free lunch* de Clark [Cla93], que aunque matemáticamente tienen sentido, su interpretación financiera no es clara. Para finalizar se trata el teorema fundamental de Delbaen y Schachermayer [DS94], basado en la modelización mediante semimartingalas localmente acotadas y proceso predecibles.

Este primera parte adopta principalmente la estructura expuesta en los capítulos 2, 5, 8 y 9 del texto de Delbaen y Schachermayer [DS06].

La segunda parte del trabajo se basa en las versiones del teorema fundamental para el caso de infinitos activos. Este bloque se basa en los trabajos de Balbás et al. [BMM02] y Balbás y Downarowicz [BD07].

El tercer y último bloque se compone de los anexos, que resumen los elementos de Análisis Funcional, Teoría de la Medida y Teoría de Martingalas utilizados a lo largo del TFM. Las fuentes principales del anexo sobre Análisis Funcional son el primer tomo de Valdivia [Val88], y los textos clásicos en la materia de Conway [Con90] y Rudin [Rud91]. Para el segundo anexo se han utilizado principalmente el segundo tomo de Valdivia [Val88] y los textos clásicos sobre martingalas e integración estocástica de Williams [Wil91] y de Chung y Williams [CW90].

1.3. Definiciones Financieras Previas

Un activo según la R.A.E. es un bien o derecho con valor monetario que es propiedad de una empresa, institución o individuo, y que se reflejan en su contabilidad. Los instrumentos o activos financieros son aquellos activos de naturaleza financiera, esto es, tienen como fin la inversión o la financiación.

Por tanto, vamos a definir activo financiero como aquel bien o derecho que genera o puede generar una serie flujos de efectivo. Estos flujos son capitales financieros, y un capital financiero es un vector bidimensional (C,t) cuya primera componente se denomina cuantía y está medida en unidades monetarias, y la segunda se denomina vencimiento y está medida en unidades temporales, es decir, es una fecha o un momento del tiempo concreto. Al conjunto de los capitales financieros asociados a un activo financiero los denominamos *cashflows*[1] o flujos de caja.

La siguiente definición es la de *pay-off* de un instrumento financiero. El *pay-off* es una regla unívoca de calcular los *cashflows* de dicho instrumento.

El próximo concepto que vamos a delimitar es el de instrumento financiero derivado o simplemente derivado. Un instrumento financiero derivado es aquel cuyo *pay-off* es dependiente del precio de otro activo que se denomina subyacente del derivado.

[1] El mundo financiero es mayoritariamente de habla inglesa, por ello, y por no admitir una traducción clara y unívoca, muchos términos que son utilizados en el presente trabajo están en dicho idioma. Como signo distintivo todos ellos están en letra cursiva.

CAPÍTULO 2

TEOREMA FUNDAMENTAL EN ESPACIOS FINITOS

2.1. Modelo y Definiciones Básicas

El punto de partida es un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, con $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ y $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ para cada i. Este espacio viene dotado de una filtración $(\mathscr{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ y de un proceso estocástico adaptado de dimensión $d+1$ denotado por $S = \left(S_t^{(0)}, \ldots, S_t^{(d)}\right)_{t=0,\ldots,T}$ siendo T un entero positivo. Por defecto supondremos que $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$. Las componentes de S serán los precios de $d+1$ activos financieros diferentes medidos en relación con el precio del 0-ésimo activo, llamado *numerario*, i.e. $S_t^{(0)} = 1$ para todo t.

Definición. Cartera y Valor de la Cartera.
Una *cartera* es un proceso predecible $(d+1)$-dimensional. El proceso *valor de la cartera* viene dado por

$$V_0 = \sum_{i=0}^{d} \varphi_1^i S_0^{(i)} \qquad V_t = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^{(i)}, \quad t \geq 1 \tag{2.1}$$

Es evidente que V es un proceso adaptado. El valor V_0 se llama el valor inicial de la cartera.

Un papel especial será interpretado por las cartera que no implican inyecciones o retiradas de dinero después del momento inicial.

Definición 2.1.1. Cartera Autofinanciada.
Una cartera φ se dice que es *autofinanciada* si su proceso de valor asociado V_t verifica

$$V_t - V_{t-1} = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i \left(S_t^{(i)} - S_{t-1}^{(i)}\right)$$

para todo $t \geq 1$.

Será utilizada la notación habitual $\Delta f(t) = f(t) - f(t-1)$, tanto para funciones escalares como vectoriales, siendo el dominio de la función f el conjunto de los números enteros. Por otra parte, $\langle v, \omega \rangle$ denotará el producto interior euclídeo de dos vectores en $\mathbb{R}^d$. Usando esta notación entonces

$$\Delta V_t = \langle \varphi_t, \Delta S_t \rangle$$

y una cartera autofinanciada satisface la relación

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \langle \varphi_k, \Delta S_k \rangle$$

Si definimos el proceso $\varphi \cdot S$ por $(\varphi \cdot S)_0 = 0$ y $(\varphi \cdot S)_t = \sum_{s=1}^{t} \langle \varphi_s, \Delta S_s \rangle$ para $t \geq 1$, entonces una cartera autofinanciada viene dada por

$$V_t = V_0 + (\varphi \cdot S)_t$$

Si comparamos la definición de cartera autofinanciada con la expresión (2.1) vemos que una cartera de este tipo verifica

$$\varphi_1^{(0)} = V_0 - \sum_{i=1}^{d} \varphi_1^{(i)} S_0^{(i)}$$

y

$$\Delta \varphi_t^{(0)} = - \sum_{i=1}^{d} \Delta \varphi_t^{(i)} S_{t-1}^{(i)}, \qquad t \geq 2$$

Por lo tanto, si especificamos el valor inicial V_0 y $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(d)})$, el proceso φ_0, i.e. la cantidad de activo numerario, está completamente determinada por el requisito de que la cartera sea autofinanciada.

2.2. Primer Teorema Fundamental

El siguiente concepto a definir, y que es fundamental en la Matemática Financiera y en los mercados financieros, es el de arbitraje.

Definición 2.2.1. Oportunidad de Arbitraje.
Una oportunidad de arbitraje es una cartera autofinanciada cuyo proceso de valor satisface $V_0 = 0$, $V_T \geq 0$ y $\mathbb{P}(V_T > 0) > 0$.

Asimismo, será útil formular este último concepto en términos más geométricos. Para ello se define la colección de variables aleatorias siguiente

$$K \stackrel{\text{def}}{=} K(S) = \{(\varphi \cdot S)_T : \varphi \text{ predecible}\}$$

K es el conjunto de todos los posibles *pay-offs* de carteras autofinanciadas cuyo valor inicial es igual a cero. Si Denotamos por L_+^∞ el conjunto de todas las variables aleatorias no negativas e integrables en $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, entonces la ausencia de arbitraje es equivalente a que se verifique que $K\cap L_{+}^{\infty}=0$. Al considerar un espacio finito de probabilidad, podemos identificar las familias de variables aleatorias con subconjuntos de de $\mathbb{R}^n$. Para ello identificamos una variable aleatoria X con el vector de posibles realizaciones para los distintos estados de la naturaleza $\big(X(\omega_1),\dots,X(\omega_n)\big)$. Por ejemplo, L_{+}^{∞} corresponde al conjunto $\big\{(x_1,\dots,x_n): x_1\geq 0,\dots,x_n\geq 0\big\}$. De esta manera el requisito $K\cap L_{+}^{\infty}=0$ de no arbitraje se traduce en un requisito geométrico sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Por L^{∞} denotamos el conjunto de todas las variables aleatorias acotadas. Ya que Ω es finito, acotado simplemente indica que las variables aleatorias consideradas tienen valores finitos, de modo que L^{∞} se puede identificar con todo $\mathbb{R}^n$.

Se demostrará que la ausencia de arbitraje es equivalente a la existencia de una medida martingala equivalente, este último concepto será definido a continuación.

Definición 2.2.2. Medida Martingala Equivalente.
Una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ en $(\Omega,\mathscr{F})$ se dice que es una *medida martingala equivalente* a $\mathbb{P}$, i.e. verifica que $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}\ll\mathbb{Q}$, y además S es una martingala d-dimensional con respecto a $\mathbb{Q}$. La colección de medidas martingala equivalentes será denotada por $\mathscr{M}^e=\mathscr{M}^e(S)$.

Teorema 2.2.3. ***Primer Teorema Fundamental de Valoración de Activos.***
No existen oportunidades de arbitraje en este modelo de mercado financiero si y sólo si existe una medida martingala equivalente.

Demostración. Supongamos en primer lugar que existe una medida martingala $\mathbb{Q}$ y sea φ una cartera autofinanciada cuyo proceso de valor V satisface $V_0=0$ y $V_T\geq 0$. Como Ω es finito y φ es acotada, entonces $V=V_0+\varphi\cdot S$ es una $\mathbb{Q}$-martingala. En particular $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T]=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_0]=0$ por lo que $V_T=0$ con $\mathbb{Q}$-probabilidad uno, pero también $\mathbb{P}$-casi seguro.

Recíprocamente, supongamos que no existen oportunidades de arbitraje, de modo que $K\cap L_{+}^{\infty}=0$. Sea A la envoltura convexa de los elementos $1_{\{\omega_1\}},\cdots,1_{\{\omega_n\}}$ en L^{∞}. Éste es un subconjunto convexo y compacto de L^{∞}, y disjunto de K por hipótesis. Puesto que éste último es un subespacio lineal es cerrado y convexo, y por lo tanto podemos aplicar el teorema del hiperplano separador. Esto da lugar a un vector $q\in\mathbb{R}^n$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, tales que para cada $f\in K$ y $h\in A$ se verifica

$$\langle q,f\rangle\leq\alpha<\beta<\langle q,h\rangle \tag{2.2}$$

Ya que K es un espacio lineal, para cada $f\in K$ y $h\in A$ podemos tomar $\alpha=0$, dando lugar a

$$\langle q,f\rangle\leq 0<\beta<\langle q,h\rangle$$

De ello se deduce que para cada i tenemos $q_i=\langle q,1_{\{\omega_i\}}\rangle\geq\beta>0$. Por lo que podemos renormalizar q tal que se convierte en un vector de probabilidades estrictamente positivas cuya suma es 1. La última desigualdad sigue siendo cierta, pero con β convenientemente normalizado. La medida de probabilidad $\mathbb{Q}$, dada por $\mathbb{Q}\big(\{\omega_i\}\big)=q_i$, es equivalente a $\mathbb{P}$ y satisface $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]\leq 0$ para cada $f\in K$.

Pero ya que K es un espacio lineal entonces $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$ para cada $f \in K$, y por tanto S es una $\mathbb{Q}$-martingala. ■

2.3. Modelo Multiperiodo

De nuevo tomamos como punto de partida un espacio de probabilidad finita $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ en la que tenemos una filtración $(\mathscr{F}_t)_{t=0,\cdots,T}$ y $S = \left(S_t^{(1)}, \cdots, S_t^{(d)}\right)_{t=0,\cdots,T}$ denota el proceso estocástico adaptado d-dimensional de los precios descontados. i.e. los precios sobre el precio del activo numerario. Si $T \geq 2$ entonces se dice que este modelo de mercado financiero es de varios períodos o multiperiodo. Como verememos a continuación, la ausencia de arbitraje en modelos multiperiodo es equivalente a la ausencia de arbitraje en todos los modelos de un solo periodo contenidos en él.

Lema 2.3.1. *Sean $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}^e$, $Z_t = \mathbb{E}[d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}|\mathscr{F}_t]$ y $L_t = Z_t/Z_0$. Supongamos que no hay arbitraje entonces la medida $\mathbb{Q}^*$ definida por $d\mathbb{Q}^* = L_T d\mathbb{P}$ pertenece a $\mathscr{M}^e$ y verifica que $\mathbb{Q}^*|_{\mathscr{F}_0} = \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_0}$.*

Demostración. Como Z es una martingala entonces $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T|\mathscr{F}_t] = Z_t$ para cada $t \leq T$. De aquí que, dado $A \in \mathscr{F}_t$ y $t \leq T$ se verifique

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P} = \int_A Z_t d\mathbb{P}$$

Se sigue entonces que $Z_t = (d\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_t})/(d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t})$. El hecho que que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ sean equivalentes implica que $Z_t > 0$ para cada t, y en particular que el proceso L está bien definido. Puesto que Z es una $\mathbb{P}$-martingala positiva y Z_0 es $\mathscr{F}_0$-medible, L es también una $\mathbb{P}$-martingala positiva. Por tanto, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_0] = 1$ y $\mathbb{Q}^*$ es una medida de probabilidad equivalente a $\mathbb{P}$. El hecho de que S es una $\mathbb{Q}$-martingala implica que SZ es una $\mathbb{P}$-martingala. Como Z_0 es $\mathscr{F}_0$-medible, SL es también una $\mathbb{P}$-martingala. Teniendo en cuenta que $L_t = (d\mathbb{Q}^*|_{\mathscr{F}_t})/(d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t})$ se deduce que S es una $\mathbb{Q}^*$-martingala, y por tanto $\mathbb{Q}^* \in \mathscr{M}^e$. Por último, $L_0 = 1$ implica que $\mathbb{Q}^*|_{\mathscr{F}_0} = \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_0}$. ■

Teorema 2.3.2. *No hay oportunidades de arbitraje en el modelo multiperiodo completo y si sólo si el modelo de un período (S_t, S_{t+1}), con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t, \mathscr{F}_{t+1})$, no admite oportunidades de arbitraje para cada t.*

Demostración. Supongamos que todos los modelos de un solo período están libres de arbitraje. Entonces, por el teorema fundamental existen medidas de probabilidad de $\mathbb{Q}_t$ en $(\Omega, \mathscr{F}_{t+1})$ tal que $\mathbb{Q}_t$ es equivalente a $\mathbb{P}$ en $\mathscr{F}_{t+1}$ y $\mathbb{E}[S_{t+1}|\mathscr{F}_t]$. Por último, por el lema anterior, se puede suponer que $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_t} = \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}$. Ahora es posible definir el proceso L, tal que $L_0 = 1$, y

$$L_t = \frac{d\mathbb{Q}_0}{d\mathbb{P}} \cdots \frac{d\mathbb{Q}_{t-1}}{d\mathbb{P}}$$

y la medida $\mathbb{Q}$ por $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$. Entonces $\mathbb{Q} \in M^e$, y por lo tanto, el modelo completo está libre de arbitraje por el teorema fundamental. ■

2.4. Completitud

El primer teorema fundamental de valoración no dice cuantas medidas martingala equivalentes existen en el caso de que no haya arbitraje. A continuación veremos que esta cuestión está relacionada con el concepto de *completitud*.

Definición 2.4.1. Derivado Alcanzable y Mercado Completo.
Se dice que un *derivado* $f \in L^\infty$ es *alcanzable* si $f = a + (\varphi \cdot S)_T$ para algún $a \in \mathbb{R}$ y proceso predecible φ. Un modelo, de mercado financiero, se dice que es *completo* si cada $f \in L^\infty$ es alcanzable. Por tanto un derivado alcanzable f es un *pay-off* aleatorio en tiempo T que puede ser replicado mediante un capital inicial a y una cartera autofinanciada φ.

Para la demostración del teorema siguiente, será útil añadir al conjunto K, el conjunto de variables aleatorias

$$C = \{f \in L^\infty : \text{ existe } g \in K \text{ tal que } g \geq f\}$$

Este conjunto es un cono que contiene K, y es fácil ver que $K \cap L^\infty_+ = \{0\}$ si y sólo si $C \cap L^\infty_+ = \{0\}$. Es más, $K = C \cap (-C)$.

Lema 2.4.2. *Para cada medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ se tiene que S es una $\mathbb{Q}$-martingala si y sólo si $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[g] \leq 0$ para cada $g \in C$.*

Demostración. Sea $g \in C$ tal que $g \leq f$ para $f \in K$. Entonces si S es una $\mathbb{Q}$-martingala $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[f] = 0$ y por tanto $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[g] \leq 0$. Si $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[g] \leq 0$ para todo $g \in C$ entonces para todo $f \in K$ se verifica que $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[f] = 0$, puesto que $f \in C$ y $-f \in C$ para $f \in K$ y por tanto S es una $\mathbb{Q}$-martingala. ■

Teorema 2.4.3. *Si no hay oportunidades de arbitraje entonces*

$$K = \{f \in L^\infty : \mathbb{E}_\mathbb{Q}[f] = 0 \textit{ para cada } \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e\}$$

Demostración. El conjunto C es convexo y cerrado y por el teorema bipolar es igual a su propio bipolar C^{00}. Puesto que C es cerrado bajo multiplicación por escalares positivos se tiene que[2]

$$C^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle f, x \rangle \leq 0 \text{ para cada } f \in C\}$$

Por tanto, de acuerdo al último lema enunciado, la familia $\mathcal{M}^a$ de medidas de probabilidad $\mathbb{Q}$ está contenida en C^0, y por tanto cono$(\mathcal{M}^a) \subseteq C^0$. Tomando los elementos $-1_{\{\omega_i\}} \in C$ vemos que cada $q \in C^0$ tiene coordenadas no negativas y por tanto es un múltiplo no negativo de una distribución de probabilidad. De nuevo por el último lema enunciado, esta distribución de probabilidad pertenece a $\mathcal{M}^a$ por lo que se concluye que cono$(\mathcal{M}^a) = C^0$. Ahora bien C^0 es cerrado bajo multiplicación por escalares positivos y por tanto $C = C^{00} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle f, x \rangle \leq 0 \text{ para cada } f \in C\}$.

[2] Ver Apéndice A

Esto unido a lo que acabamos de ver da lugar a que $C = \{h \in \mathbb{R}^n : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h] \leq 0$ para cada $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}^a\}$ y como $\mathscr{M}^e$ es denso en $\mathscr{M}^a$

$$C = \left\{h \in \mathbb{R}^n : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h] \leq 0 \text{ para cada } \mathbb{Q} \in \mathscr{M}^e\right\} \tag{2.3}$$

La prueba se completa teniendo en consideración que $K = C \cap (-C)$. ■

2.5. Cambio de Numerario

Recordemos que en nuestra modelización de mercado financiero tenemos $d+1$ activos negociados cuyos procesos de precio, respecto del activo 0-ésimo, son denotados por $S^{(0)}, \cdots, S^{(d)}$. Mencionemos también que el activo 0-ésimo usado de referencia se denominaba numerario. Intuitivamente, la ausencia o no de arbitraje no debería de depender de la elección de dicho numerario, en esta sección comprobaremos que esto es efectivamente así.

Cualquier activo cuyo precio sea positivo en cualquier tiempo puede ser tomado como numerario. Sin pérdida de generalidad, permitiremos también cualquier cartera autofinanciada cuyo valor sea siempre positivo. Sea φ un proceso predecible y consideremos el proceso $V = 1 + \varphi \cdot S$. Asumamos que $V_t > 0$ casi seguro para todo t. Podemos considerar esta cartera como un activo negociado más y utilizarlo para expresar el valor de los $d+1$ activos originalmente. El proceso valor del nuevo activo denotado por $\tilde{S} = (\tilde{S}^{(0)}, \cdots, \tilde{S}^{(d)})$, viene dado por

$$\tilde{S}^{(i)} = \frac{S^{(i)}}{V}, \quad i = 0, \ldots, d. \tag{2.4}$$

Lema 2.5.1. *Sea f un elemento $\mathscr{F}_t$-medible de $K(S)$ y $t \leq T$, se verifica que $\left(\frac{V_T}{V_t}\right) f \in K(S)$.*

Demostración. Puesto que

$$\frac{V_T}{V_t} f = f + \sum_{s=t+1}^{T} \frac{f}{V_t} \Delta V_s = f + (\psi \cdot S)_T$$

donde

$$\psi_s = \frac{f}{V_t} \varphi_s 1_{\{s \geq t\}}$$

Y puesto que f es $\mathscr{F}_t$-medible el proceso φ es predecible, de donde se sigue que $\left(\frac{V_T}{V_t}\right) f \in K(S)$. ■

Teorema 2.5.2. ***Cambio de numerario.***
Supongamos que el modelo S no admite oportunidades de arbitraje entonces $\tilde{S}$ tampoco las admite. Además se cumple que $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}^e(S)$ si y sólo si la medida $\tilde{\mathbb{Q}}$ dada por $d\tilde{\mathbb{Q}} = V_T d\mathbb{Q}$ pertenece a $\mathscr{M}^e(\tilde{S})$.

Demostración. Se desea probar que $K(\tilde{S}) = V_T^{-1} K(S)$. Partiendo de que para cada i, se cumple que

$$\Delta \tilde{S}_t^{(i)} = \frac{1}{V_t} \left(\Delta S_t^{(i)} - \tilde{S}_{t-1}^{(i)} \Delta V_t\right)$$

De aquí se sigue que para cada proceso predecible ψ, se tiene que

$$(\psi \cdot \tilde{S})_T = \sum_t \frac{f_t}{V_t}$$

Con f_t siendo un elemento $\mathscr{F}_t$-medible de $K(S)$ para cada t. Por el lema anterior se verifica que $f_t/V_t = g_t/V_T$ para algún $g_t \in K(S)$, de aquí que $K(\tilde{S}) \subseteq V_T^{-1}K(S)$.

La inclusión recíproca se deduce por simetría tomando el modelo $\tilde{S}$ y $1/V$ como numerario. Por definición de ausencia de arbitraje S está libre de arbitraje si sólo si $\tilde{S}$ lo está. Para completar la prueba, tomemos una medida de probabilidad equivalente $\mathbb{Q}$. Por el lema 2.4.2 se verifica que $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}^e(S)$ si y sólo si $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$ para cada $f \in K(S)$. Tal y como acabamos de ver en la primera parte de esta demostración, esto se cumple si y sólo si $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T f]$ para cada $f \in K(\tilde{S})$, que es lo mismo que la medida $\tilde{\mathbb{Q}}$ dada por $d\tilde{\mathbb{Q}} = V_T d\mathbb{Q}$ pertenezca a $\mathscr{M}^e(\tilde{S})$. ■

2.6. Valoración por Ausencia de Arbitraje

Supongamos que en el mercado considerado es posible adquirir el derivado $f \in L^\infty$ al precio a en tiempo $t = 0$. Entonces la familia de todos los derivados que son alcanzables con precio inicial igual a cero, pasa de ser K a

$$K^{f,a} = \text{Envoltura Lineal}\{K \cup \{f - a\}\}$$

En el caso de ausencia de arbitraje, tal y como ocurría antes, debe ser $K^{f,a} \cap L_+^\infty = \{0\}$. Esta última observación nos lleva a la definición siguiente.

Definición 2.6.1. Precio libre de arbitraje.
Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un *precio libre de arbitraje* para el derivado $f \in L^\infty$ si $K^{f,a} \cap L_+^\infty = \{0\}$.

Si el derivado $f \in L^\infty$ es alcanzable a precio a, i.e. $f - a \in K$, entonces $K^{f,a} = K$. En ausencia de arbitraje $K \cap L_+^\infty = \{0\}$ y por tanto a es un precio libre de arbitraje para f. Es más, cualquier otro $b \neq a$ no es un precio libre de arbitraje para f.

Teorema 2.6.2. ***Valoración por ausencia de arbitraje.***
Supongamos que no existen arbitrajes y sea $f \in L^\infty$. Sea $I = \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathscr{M}^e\}$ este conjunto es la familia de todos los precios libres de arbitraje de f. Entonces o bien, $I = \{p\}$, en cuyo caso f es alcanzable a precio p, o bien I es un intervalo abierto acotado, siendo f no alcanzable en este último caso.

Demostración. Denotamos por

$$\underline{\pi}(f) = \text{ínf}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathscr{M}^e\}, \qquad \bar{\pi}(f) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathscr{M}^e\}$$

Supongamos que $p = \underline{\pi}(f) = \bar{\pi}(f)$. Entonces por el teorema 2.4.3, $f - p \in K$, lo que implica que f es alcanzable a precio p y tal y como vimos antes p es el único precio libre de arbitraje para f. Supongamos ahora que $\underline{\pi}(f) < \bar{\pi}(f)$. Como f is acotada y $\mathcal{M}^e$ es convexo, $I = \left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e\right\}$ es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Sea $p \in I$. Entonces existe $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e$ tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f - p] = 0$. Esto implica que $K^{f,p} \cap L^\infty_+ = \{0\}$. Y por tanto, p es un precio libre de arbitraje de f.

Recíprocamente, supongamos que $K^{f,p} \cap L^\infty_+ = \{0\}$. Entonces por analogía con la demostración del Teorema 2.2.3, i.e. tomando $K^{f,p}$ en lugar de K, es posible hallar $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e$ tal que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] = 0$ para cada $g \in K^{f,p}$. En particular, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f - p] = 0$, de aquí que $p \in I$. Resta por probar que I es un intervalo abierto. Sea $p = \bar{\pi}(f)$, el extremo derecho de I, y tomemos $f - p$. Por definición $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f - p] \leq 0$ para cada $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e$. Y puesto que tenemos la representación dada por 2.3 para el conjunto C, se deduce que $f - p \in C$. De aquí que exista un $g \in K$ tal que $g \geq f - p$. Supongamos ahora que $p \in I$. Entonces existe una $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}^e$ tal que $E_{\mathbb{Q}^*}[f] = p$ y por tanto $E_{\mathbb{Q}^*}[g - (f - p)] = 0$ y $g = f - p$. Pero esto significa que $f - p \in K$, i.e. f es alcanzable a precio p. El el Teorema 2.4.3 implica que I se reduce a un elemento lo que es una contradicción. Se concluye por tanto que el punto derecho final de I no pertenece a I. El análisis del caso izquierdo es análogo tomando $-f$. ∎

CAPÍTULO 3

EXTENSIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

3.1. Modelo y Definiciones Básicas

Sea $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ un proceso estocástico $(d+1)$-dimensional, adaptado, localmente acotado y *cadlag*[3] , donde $T > 0$ es un horizonte temporal fijo. Este proceso está definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dotado de una filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ que satisface las propiedades habituales. Como en el capítulo anterior $S = (S^{(0)}, \cdots, S^{(d)})$ serán los precios de $d+1$ activos financieros diferentes medidos en relación con el precio del 0-ésimo activo, i.e. el *numerario*. En particular supondremos que $S^{(0)} \equiv 1$.

Por los teoremas clásicos sobre regularidad de martingalas en tiempo continuo, las condiciones habituales en la filtración implican que las martingalas locales tienen variaciones *cadlag*. Puesto que los teoremas básicos de teoría de martingalas son válidos para martingalas continuas por la derecha, las condiciones habituales aseguran que podemos aplicar los teoremas clásicos a las martingalas que nos encontraremos.

Por tanto, esta nueva modelización incluye el caso de tiempo discreto, para ello basta con tomar el proceso S y su correspondiente filtración como constante en el intervalo $[t-1, t)$ para cada entero t. Si el espacio de probabilidad subyacente es finito el proceso S es necesariamente uniformemente acotado, y por lo tanto este modelo incluye los utilizados en los capítulos anteriores como casos particulares.

Una cuestión importante es la que se refiere al tipo de carteras admisibles en esta modelización de mercado financiero. Al menos vamos a permitir estrategias en las que la cartera sea reajustada en un número finito de tiempos de parada de una manera predecible.

[3]Ver Anexo B

Definición 3.1.1. Estrategia simple admisible.
Se dice que un proceso $d-$dimensional φ es una *estrategia simple* si es de la forma

$$\varphi_t = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i 1_{(\tau_{i-1},\tau_i]}(t)$$

donde $0 = \tau_0 \leq \cdots \leq \tau_n \leq T$ son tiempos de parada finitos y los φ_i son variables aleatorias $d-$dimensionales $\mathscr{F}_{\tau_{i-1}}$-medibles. Se dice que la estrategia es *admisible* si, además, el proceso detenido S^{τ_n} y las variables aleatorias $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son uniformemente acotadas.

La interpretación de la definición es clara: $\varphi_i^{(j)}$ es el número de activos de tipo j en la cartera entre los tiempos τ_{i-1} y τ_i. Al igual que en el capítulo anterior, definimos el proceso estocástico $\varphi \cdot S$ mediante

$$\left(\varphi \cdot S\right)_t = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \varphi_i, S_{\tau_i \wedge t} - S_{\tau_{i-1} \wedge t} \right\rangle \qquad t \in [0,T]$$

Análogamente a lo expuesto anteriormente, $\varphi \cdot S$ debe ser interpretado como el proceso de valor de una cartera autofinanciada con cero capital inicial y siguiendo la estrategia φ, los ajustes de las posiciones en los activos 1 a d se financian mediante la adopción de la cantidad apropiada de la cuenta bancaria, modelada por el activo $0-$ésimo, i.e. el numerario.

Nuestra primera noción de ausencia de arbitraje en este contexto es la exigencia de que no se puede obtener una ganancia libre de riesgo siguiendo una estrategia simple y admisible. De forma análoga al caso finito vamos definir el espacio

$$K^s = \left\{ \left(\varphi \cdot S\right)_T : \varphi \text{ simple admisible } \right\}$$

de los *pay-offs* que pueden ser alcanzados con capital inicial nulo y siguiendo una estrategia simple, admisible y autofinanciada.

Definición 3.1.2. Ausencia de arbitraje mediante estrategias simples.
Se dice que S que satisface la condición de *ausencia de arbitraje mediante estrategias simples* si $K^s \cap L^\infty_+(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$.

Una condición suficiente para la ausencia de arbitraje con estrategias simples es la existencia de una medida martingala local equivalente. Esto es, por definición, una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a la medida *objetiva* $\mathbb{P}$ tal que S es una martingala local bajo $\mathbb{Q}$.

Proposición 3.1.3. *Si existe una medida martingala local equivalente, entonces S no admite arbitraje con estrategias simples.*

Demostración. Sea $\mathbb{Q}$ una medida martingala local equivalente. En primer lugar vemos que para cada estrategia simple admisible φ se verifica

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\varphi \cdot S\right)_T\right] = 0$$

Por la definición 3.1.1 es suficiente demostrar que si $0 \leq \sigma \leq \tau \leq T$ son tiempos de parada tales que S_τ es acotado y X es una variable aleatoria $d-$dimensional acotada $\mathscr{F}_\sigma$-medible, entonces

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\langle X, S_\tau - S_\sigma\rangle\right] = 0$$

Lo que se deduce del teorema de la parada opcional en el Anexo B.
Supongamos ahora que $f \in K^s$, $f \geq 0$ con $f = (\varphi \cdot S)_T$ para φ simple admisible. Entonces, por la primera parte de la prueba, tenemos que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$. Puesto que f es no negativa se deduce que f se anula $\mathbb{Q}-$c.s. y por lo tanto también $\mathbb{P}-$c.s., ya que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes. ■

Desafortunadamente el recíproco de esta proposición no es cierto. Para tener la existencia de una medida martingala local en este contexto general, en tiempo continuo, la ausencia de arbitrajes simples no es suficientemente fuerte.

Ejemplo 3.1.4. Consideremos un proceso $S = (S_t)_{t\in[0,1]}$ con $S_0 = 1$ y que es constante, excepto para los saltos en tiempos $t_n = 1-(n+1)^{-1}$ para $n = 1,2,\ldots$ En el momento t_n el proceso S tiene un salto de magnitud $3^{-n}Z_n$, donde $Z_1, Z_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(Z_n = 1) = 1-\mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/2+\varepsilon_n$ para ciertos $\varepsilon_n \in (-1/2, 1/2)$. Dado que el proceso S está uniformemente acotado, es una martingala bajo la medida $\mathbb{Q}$ si S es una martingala local.Pero sólo hay una medida de probabilidad para la cual S es una martingala que es $\mathbb{Q}$, bajo la que $\mathbb{Q}(Z_n = 1) = 1-\mathbb{Q}(Z_n = -1) = 1/2$. Por lo tanto, ver ejemplo B.2.4, no existe ninguna medida martingala local equivalente si tomamos los ε_n tal que $\sum \varepsilon_n^2 = \infty$. Sin embargo, este modelo no verifica la condición de ausencia de arbitraje con estrategias simples. Para comprobar esto, veamos que, si existe una estrategia simple admisible, entonces existe una estrategia simple de arbitraje de la forma $\varphi = h1_{(\sigma,\tau]}$, para una variable aleatoria h acotada y $\mathscr{F}_\sigma$-medible en los tiempos de parada $\sigma \leq \tau \leq 1$. Sólo tenemos que tener en cuenta los tiempos de parada que toman valores en el conjunto $(t_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$. Tal estrategia tiene *pay-off* $V = h(S_\tau - S_\sigma)$. Teniendo en cuenta que en el evento $A_n = \{\sigma = t_{n-1}, \tau \geq t_n\}$ se cumple que $signo(S_\tau - S_\sigma) = signo(Z_n) = Z_n$ y por tanto $signo(V) = signo(h)Z_n$. Por hipótesis, $signo(V) \geq 0$, por lo que

$$signo(h)1_{A_n}Z_n \geq 0$$

Puesto que $A_n \in \mathscr{F}_{t_{n-1}}$ y, por definición de $\mathscr{F}_\sigma$, $signo(h)1_{A_n}$ es $\mathscr{F}_{t_{n-1}}-$medible, entonces $signo(h)1_{A_n}$ y Z_n son independientes y en vista de lo anterior, se deduce $signo(h)1_{A_n} = 0$ c.s.Por lo tanto $h = 0$ para cada A_n y por lo tanto $h = 0$ en el evento $\{\tau > \sigma\} = \bigcup_n A_n$.

3.2. El Teorema de Kreps-Yan

Tal y como se hizo en el capítulo precedente, definimos el cono

$$C^S = \{f \in L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) : \text{ existe } g \in K^S \text{ tal que } g \geq f\}$$

Entonces, de lo visto en el capítulo anterior, la ausencia de arbitraje con integrandos simples es equivalente a $C^S \cap L^\infty_+(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}) = \{0\}$. Pero, tal y como muestra el último ejemplo, esta condición no es lo suficientemente fuerte como para garantizar la existencia de una medida martingala equivalente. Resulta que tenemos que reemplazar C^S por su cierre $\overline{C}$ en la topología débil* en $L^\infty(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, siendo este último espacio el dual de $L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$.

De forma análoga a lo que se acaba de exponer, Back y Pliska en [BP91] muestran, mediante un contraejemplo, que la ausencia de arbitraje no es suficiente para construir medidas martingala si el conjunto de fechas de *trading* consideradas no es finito. Para solucionar este problema, Clark en [Cla93] definió el concepto de *free lunch* que será expuesto a continuación.

Definición 3.2.1. ***Free lunch.***
Se dice que S verifica la condición de estar libre de *free lunch* si $\overline{C} \cap L^\infty_+(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P}) = \{0\}$

Es evidente que esta condición es más fuerte que la condición de no arbitraje con estrategias simples. Esto dará lugar a la siguiente versión del teorema fundamental de la valoración de activos.

Teorema 3.2.2. ***Segundo Teorema Fundamental de Valoración de Activos.***
El proceso S está libre de free lunch si y sólo si existe una medida martingala local equivalente.

Demostración. Supongamos en primer lugar que existe $\mathbb{Q}$ medida martingala-local equivalente. De la primera parte de la demostración de la proposición 3.1.3 se cumple que $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[f] \leq 0$ para cada $f \in C^S$. Y puesto que la aplicación $f :\to \mathbb{E}_\mathbb{Q}[f]$ es continua para en la topología débil*,entonces $E_\mathbb{Q}[f] \leq 0$ para cada $f \in \overline{C}$. Se deduce por tanto que si $f \in \overline{C}, f \geq 0$ entonces $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[f] = 0$ y f se anula $\mathbb{Q}-$c.s. y por tanto también se anula $\mathbb{P}-$c.s.

Recíprocamente, supongamos que S está libre de *free lunch*. Dado $\delta \in (0,1)$, sea $B_\delta = \{f \in L^\infty : 0 \leq f \leq 1, \mathbb{E}[f] \geq \delta\}$. El conjunto B_δ es un subconjunto de cerrado de la bola unidad de L^∞ en la topología débil*, considerando L^∞ como el dual de L^1. Por tanto, de acuerdo con el teorema de Alaoglu es débil*$-$Compacto. Como además es convexo, por el teorema de separación existe una $g_\delta \in L^1$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{f\in\overline{C}} \mathbb{E}[g_\delta f] \leq \alpha < \beta \leq \inf_{h\in B_\delta} \mathbb{E}[g_\delta h]$$

Puesto que $0 \in C$ se tiene que $\alpha \geq 0$, y ya que $\overline{C}$ es un cono, se sigue que $\mathbb{E}[g_\delta f] \leq 0$ para cada $f \in \overline{C}$, por tanto

$$\sup_{f\in\overline{C}} \mathbb{E}[g_\delta f] \leq 0 < \inf_{h\in B_\delta} \mathbb{E}[g_\delta h]$$

Puesto que C contiene todas las funciones negativas en L^∞ entonces $g_\delta \geq 0$ c.s. Como $1 \in B_\delta$ entonces $\mathbb{E}[g_\delta] > 0$ y por lo tanto g_δ no se anula casi seguro. Normalizamos g_δ tal que $\mathbb{E}[g_\delta] = 1$. Para cada entero positivo n definimos la medida de probabilidad $\mathbb{Q}_n$ por $d\mathbb{Q}_n = g2^{-n} d\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q} = \sum_n a_n \mathbb{Q}_n$, siendo (a_n) una sucesión de números positivos tales que $\sum_n a_n = 1$. Nótese que si $\mathbb{P}(A) > 2^{-n}$ entonces $1_A \in B_{2^{-n}}$ y por lo tanto $\mathbb{Q}_n(A) > 0$. Se deduce que $\mathbb{P}$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{Q}$. El hecho de que $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}$ es inmediato, y por lo tanto $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes. Para completar la demostración basta observar que si $f \in C$, entonces $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \sum_n a_n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[f] = \sum_n a_n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g 2^{-n} f] \leq 0$. Esto implica que S es una martingala local bajo $\mathbb{Q}$. ■

3.3. Consideraciones Finales

Vimos en este capítulo que en modelos en tiempo continuo, la ausencia de arbitraje con estrategias simples no es suficiente para garantizar la existencia de una medida martingala local. La colección de *pay-offs* que se puede conseguir con estrategias simples es de alguna manera demasiado restrictiva, y resultó necesario tomar el cierre en la topología débil* de dicho conjunto. Si bien tomar el cierre de un conjunto es natural desde un punto de vista puramente matemático, se debe observar que destruye el significado financiero del Teorema 3.2.2, puesto que tomar el cierre en la topología débil* de una familia de *pay-offs* no es una operación muy intuitiva, y no debe interpretarse como una familia más amplia de *pay-offs* más complejos.

Para obtener un resultado financieramente interpretable, se debería reemplazar el cierre en la topología débil* por otro concepto más intuitivo. Resulta que una posible solución es limitarnos a procesos de precios de los activos que sean semimartingalas. De este modo, la familia de estrategias simples se puede ampliar de forma natural utilizando herramientas de teoría de la integración respecto a semimartingalas. En este caso el cierre con respecto a la topología débil* puede ser reemplazado por el cierre en la topología engendrada por la norma de L^∞, que es mucho más interpretable desde el punto de vista financiero.

CAPÍTULO 4

SEGUNDA EXTENSIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

4.1. Preliminares: integración estocástica

En este capítulo vamos a suponer que el proceso de precios de los activos S es una semimartingala unidimensional, definida en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ que satisface las condiciones habituales detalladas en el Anexo B. Vamos a considerar todos los procesos en un intervalo finito de tiempo $[0, T]$, cuyo extremo superior $T > 0$ es fijo. Como antes, S se interpreta como el valor de un activo en relación con un activo numerario. Como es habitual, el activo numerario tiene el valor constante 1.

Interpretaremos un proceso predecible φ como una estrategia de *trading*, i.e. de compra-venta de los activos. φ_t indica la cantidad del activo distinto del numerario que define la estrategia de *trading* en tiempo t. Si φ es un proceso simple de la forma

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$$

donde $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ es una partición determinista de $[0, T]$. Si φ_i es acotado y $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$−medible, entonces, tal y como se vio en anteriormente, el proceso de

$$\left(\varphi \cdot S\right)_t = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \left(S_{t_i \wedge t} - S_{t_{i-1} \wedge t}\right) \qquad t \in [0, T]$$

Puede ser interpretado como el proceso valor de una cartera autofinanciada que comienza con cero capital inicial y que sigue la estrategia de *trading* dada por φ. Los ajustes en la posición en activos distintos al numerario son financiados mediante la cantidad de efectivo en la cuenta bancaria, i.e. cantidad de activo numerario.

$\varphi \cdot S$ es la integral estocástica del proceso localmente acotado y predecible φ respecto de la semimartingala S. Por lo que, utilizando herramientas habituales de teoría de la integración estocástica, ver por ejemplo [CW90] y [Wil91], será posible no limitarnos al uso de estrategias simples. No obstante, para conservar una interpretación financiera razonable, se ha de verificar que los procesos predecibles no simples utilizados $\varphi \cdot S$ puedan ser todavía interpretados como el proceso valor de la estrategia de *trading*. Dado que estamos considerando ahora estrategias en tiempo continuo, parece natural considerar aproximaciones para hacer este concepto preciso. Para una partición suficientemente fina $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ de $[0,T]$, la estrategia φ está bien aproximada por la estrategia simple

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_{t_{i-1}} 1_{(t_{i-1},t_i]}$$

y cuyo proceso de valor asociado es igual a

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i \left(S_{t_i \wedge t} - S_{t_{i-1} \wedge t} \right)$$

Por lo tanto, este último proceso debe de ser una buena aproximación del proceso integral $\varphi \cdot S$. Como veremos a continuación, efectivamente es así gracias a la continuidad de la integral estocástica.

Lema 4.1.1. *Sea φ un proceso continuo por la izquierda. Si $0 = t_0^n < \cdots < t_{k_n}^n = T$ es una sucesión de particiones de $[0,T]$ cuyas amplitudes tienden a 0, entonces*

$$\sup_{t \in [0,T]} \left| \sum_{\substack{i=0 \\ n \in \mathbb{N}}}^{k_n} \varphi_{t_{i-1}^n} \left(S_{t_i^n \wedge t} - S_{t_{i-1}^n \wedge t} \right) - \left(\varphi \cdot S \right)_t \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el proceso por φ^n por

$$\varphi^n = \sum_{i=0}^{k_n} \varphi_{t_{i-1}^n} 1_{(t_{i-1}^n, t_i^n]}$$

Entonces φ^n es continuo por la izquierda y adaptado, y por lo tanto localmente acotado y predecible. Al ser φ continuo por la izquierda se verifica que $\varphi^n \to \varphi$ en $[0,T] \times \Omega$ y que

$$\left| \varphi_t^n \right| \leq \sup_{s \leq t} \left| \varphi_s \right|$$

El proceso del lado derecho de la desigualdad es adaptado y continuo por la izquierda, por lo tanto, predecible y localmente acotado. La conclusión se sigue del Lema B.2.6. ■

Desafortunadamente, la definición de integral estocástica para procesos predecibles localmente acotados respecto de semimartingalas todavía no es lo suficientemente general para la próxima versión del Teorema Fundamental. Para extender la integral, en primer lugar es necesario dotar al espacio de semimartingalas de una topología. Denotaremos por $\mathscr{S}(\mathbb{P})$ el espacio de todas las $\mathbb{P}$−semimartingalas en nuestro espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. Para $X \in \mathscr{S}(\mathbb{P})$ definimos

$$\|X\|_{\mathscr{S}(\mathbb{P}))} = \sup_{|H| \leq 1} \mathbb{E}\left[\left| (H \cdot X)_T \right| \wedge 1 \right]$$

donde el supremo se toma sobre todos los procesos H que son predecibles y uniformemente acotados por la unidad. Es fácil ver que $\|\cdot\|_{\mathscr{S}(\mathbb{P}))}$ satisface la desigualdad triangular. De ello se desprende que podemos definir una métrica d en $\mathscr{S}(\mathbb{P})$ mediante el establecimiento de $d(X,Y) = \|X - Y\|_{\mathscr{S}(\mathbb{P}))}$. La topología enegendrada por esta métrica en $\mathscr{S}(\mathbb{P})$ se llama topología semimartingala. Hay que destacar que $X^n \to X$ en esta topología si y sólo si

$$\left(H \cdot X^n\right)_T \xrightarrow{\mathbb{P}} \left(H \cdot X\right)_T$$

Para todo proceso H predecible y uniformemente acotado.

Ahora podemos usar la topología semimartingala para extender la definición de la integral estocástica. Para un proceso predecible H y un número entero positivo n el proceso $H1_{\{|H| \leq n\}}$ es acotado y predecible. Por tanto, si X es un semimartingala el proceso de la integral estocástica dado por $H1_{\{|H| \leq n\}} \cdot X$ está bien definido en el sentido de integración sobre procesos predecibles localmente acotados.Si $X \in \mathscr{S}(\mathbb{P})$, la sucesión de procesos $\left(H1_{\{|H| \leq n\}} \cdot X\right)_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$ pertenece también a $\mathscr{S}(\mathbb{P})$. Si la sucesión tiene límite en $\mathscr{S}(\mathbb{P})$, respecto de la topología semimartingala, decimos que H es $X-$integrable y se denota el límite por $H \cdot X$. Por el Lema B.2.6, la nueva definición de $H \cdot X$ coincide con la que vimos anteriormente si H está localmente acotada.

Puesto que los teoremas fundamentales que hemos visto hasta ahora implican cambios de medida, es útil analizar cómo estas integrales estocásticas dependen de la medida de probabilidad subyacente. Denotaremos $(H \cdot X)^{\mathbb{P}}$ si queremos hacer hincapié en la dependencia de la integral respecto de la medida de probabilidad $\mathbb{P}$. Para un proceso simple predecible, es evidente que la integral estocástica no dependerá de la medida considerada. Consideremos ahora un proceso H no negativo, acotado y predecible y una $\mathbb{P}-$semimartingala X un y sea $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$. Una versión general del teorema de Girsanov dice que para las medidas de probabilidad equivalents $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$, los espacios $\mathscr{S}(\mathbb{P})$ y $\mathscr{S}(\mathbb{Q})$ para $\mathbb{P}$ ó $\mathbb{Q}$-semimartingalas coinciden, por lo tanto, X es una $\mathbb{Q}$-semimartingala también. Por conceptos estándar en Teoría de la Medida, existe una sucesión (H_n) de procesos predecibles simples, independiente de $\mathbb{P}$, de manera que $H_n \uparrow H$ en $[0,1) \times \Omega$. Aplicando de nuevo el Lema B.2.6 se tiene que

$$\left(H \cdot X_n\right)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \left(H \cdot X\right)_t$$

para cada $t \geq 0$. Por lo tanto, existe una sucesión $k_n \to \infty$ tal que

$$\left(H \cdot X_{k_n}\right)_t \to \left(H \cdot X\right)_t^{\mathbb{P}}, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Repitiendo el argumento con $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{P}$ vemos que k_n tiene una subsucesión l_n tal que

$$\left(H \cdot X_{l_n}\right)_t \to \left(H \cdot X\right)_t^{\mathbb{Q}}, \quad \mathbb{Q}\text{-c.s.}$$

Pero $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes, por lo que $\left(H \cdot X\right)_t^{\mathbb{P}} = \left(H \cdot X\right)_t^{\mathbb{Q}}$ casi seguro respecto de $\mathbb{P}$ ó $\mathbb{Q}$. Llegamos a la conclusión de que para H acotada predecible y $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ equivalentes, $\left(H \cdot X\right)^{\mathbb{P}}$ y $\left(H \cdot X\right)^{\mathbb{Q}}$ son indistinguibles. Se puede demostrar que si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes, las topologías semimartingala inducidas en $\mathscr{S}(\mathbb{P}) = \mathscr{S}(\mathbb{Q})$ por $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ coinciden. Para un proceso predecible H se acaba de ver que $H1_{\{|H|\leq n\}} \cdot X$ no depende de la medida de probabilidad. Por tanto, que un proceso predecible H, sea o no $X-$integrable, sólo depende de la clase de equivalencia de la medida de probabilidad subyacente $\mathbb{P}$. Y lo mismo se aplica para los procesos integrales de la forma $H \cdot X$.

En el caso de integrandos que no estén localmente acotados se debe extremar la precaución, puesto que puede ocurrir que la integral con respecto a una martingala local no sea una martingala local tal y como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.2. Partiendo de dos variables aleatorias independientes, dónde una de ellas τ sigue una ley exponencial estándar, y la otra B sigue una ley binomial, i.e. $\mathbb{P}(B = 1) = \mathbb{P}(B = -1) = 1/2$. Se define el proceso M por $M_t = B1_{\{t\geq\tau\}}$. Entonces M es una martingala respecto de su filtración natural $(\mathscr{F}_t)$.Ahora definimos el proceso determinista H por $H_t = 1/t$ para cada $t > 0$. Entonces se verifica que

$$\left(H1_{\{|H|\leq n\}} \cdot M\right)_t = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{B}{\tau} 1_{\{\tau\geq 1/n\}} & t \geq \tau \end{cases}$$

De ello se desprende que $H1_{\{|H|\leq n\}}$ converge en la topología semimartingala al proceso X dado por

$$X_t = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{B}{\tau} & t \geq \tau \end{cases}$$

Por otra parte, $X = H \cdot M$ por definición, pero sin embargo

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t\right|\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\tau} 1_{\{t\geq\tau\}}\right] = \int_0^t \frac{1}{x} e^{-x} dx = \infty$$

por lo tanto, X no es una martingala. Se puede demostrar que X tampoco es una martingala local.

4.2. Ausencia de *free lunch with vanishing risk*

La sustitución del proceso que modelizaba el precio de los activos por una semimartingala permitirá reemplazar la condición de ausencia de *free lunch* por la condición de ausencia *free lunch with vanishing risk*.

Seguiremos, tal y como se viene haciendo hasta ahora, consideramos procesos predecibles para modelizar la estrategia de *trading* autofinanciada. Vamos a suponer que el *trader* ó agente financiero considerado puede ponerse *corto*, i.e. pedir prestado efectivo, de forma arbitraria pero finita. Esto se formaliza mediante la siguiente definición.

Definición 4.2.1. Estrategia a-admisible.
Una *estrategia a-admisible* es un proceso φ predecible y S-integrable que satisface $(\varphi \cdot S) \geq -a$. Se dice que una estrategia es *admisible* si es un proceso predecible que es *a-admisible* para algún $a > 0$.

Para formular la condición de ausencia de *free lunch with vanishing risk*, se definen los conjuntos

$$K = \left\{ (\varphi \cdot S)_T : \varphi \text{ admisible} \right\}$$

Que es un cono convexo en el espacio de las variables aleatorias con valores finitos, que en general no es un espacio lineal, ya que la admisibilidad es una restricción unilateral. Y también el conjunto

$$C = \left\{ f \in L^\infty : \text{existe } g \in K \text{ tal que } g \geq f \right\}$$

Denotaremos en este capítulo por $\overline{C}$ el cierre de C respecto de la topología de la norma en L^∞.

Definición 4.2.2. Ausencia de *free lunch with vanishing risk*.
Se dice que S satisface la condición de *ausencia de free lunch with vanishing risk* si $\overline{C} \cap L^\infty_+ = 0$.

Esta condición tiene una interpretación financiera clara. Si S no satisface la condición, entonces existe, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, una estrategia admisible φ, que depende de ε, tal que que tiene *pay-off* $(\varphi \cdot S)_T \geq -\varepsilon$ y $\mathbb{P}\left((\varphi \cdot S)_T > 0\right) > 0$.

Por lo tanto, si estamos dispuestos a admitir una pérdida arbitrariamente pequeña, pero no nula, tenemos una probabilidad mayor que cero de recibir un *pay-off* estrictamente positivo. Ahora se está en condiciones de enunciar las siguientes versiones del teorema fundamental.

4.3. Tercer y Cuarto Teorema Fundamental

Teorema 4.3.1. *Tercer Teorema Fundamental de Valoración de Activos.*
Si $S = (S_t)_{t \in [0,T]}$ es una semimartingala acotada de valor real, entonces existe una medida martingala equivalente si y sólo si S satisface la condición de ausencia de free lunch with vanishing risk.
Si S es localmente acotado, entonces la medida martingala tiene que ser reemplazada por una medida martingala local.

Al ser la demostración de este último teorema bastante larga y elaborada vamos a esquematizarla en dos partes. Las demostraciones detalladas se pueden ver en [DS94], [DS98] y [DS06].

4.3.1. Demostración del Tercer Teorema Fundamental I

Ya hemos señalado anteriormente que si M es una martingala local y H es M-integrable, entonces $H \cdot M$ no es necesariamente una martingala local. La prueba de que la existencia de una medida martingala es suficiente para satisfacer la condición de ausencia de *free lunch with vanishing risk* utiliza una caracterización de la *martingalidad* de $H \cdot M$. Para explicar esta caracterización es útil partir del hecho de que una martingala local M es localmente uniformemente integrable. De hecho, sea τ_n una sucesión de localización de M, i.e. $\tau_n \uparrow \infty$ c.s. y cada M^{τ_n} una martingala. Entonces $\sigma_n = \tau_n \wedge n$ también satisface $\sigma_n \uparrow \infty$ casi seguro y cada M^{σ_n} es una martingala uniformemente integrable. Por otra parte, si ahora consideramos el tiempo de parada $\pi_n = \sigma_n \wedge \text{ínf}\{t : |M_t| > n\}$ tenemos que

$$\sup_{t\leq\tau_n}|M_t| \leq n + |M_{\pi_n}|$$

Como $\pi_n \leq \sigma_n$ y M^{σ_n} es uniformemente integrable, el miembro derecho de esta última desigualdad es integrable. De este modo se ha probado el siguiente lema.

Lema 4.3.2. *Una martingala local M es localmente uniformemente integrable. Por otra parte, existe una sucesión de localización τ_n de tal manera que, para cada n, se verifica*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\leq\tau_n}|M_t|] < \infty$$

Consideremos ahora una martingala local M y un proceso predecible H que es M-integrable. Supongamos también que $H \cdot M$ es una martingala local. Para una sucesión de localización τ_n tal que $\mathbb{E}[\sup_{t\leq\tau_n}|(H\cdot M)_t|] < \infty$ se tiene que tiene $\sup_t|\Delta(H\cdot M)_t^{\tau_n}| \leq 2\sup_{t\leq\tau_n}|(H\cdot M)_t|$, por tanto $\Delta(H\cdot M)^{\tau_n} \geq Z_n$ donde $Zn = -2\sup_{t\leq\tau_n}|(H\cdot M)_t|$. Así vemos que existe una sucesión de localización τ_n y unas variables aleatorias integrables Z_n tal que $\Delta(H\cdot M)^{\tau_n} \geq Z_n$ para todo n. Además, el recíproco es cierto también.

Teorema 4.3.3. *Sea M una martingala local y H un proceso predecible M-integrable. Entonces $H\cdot M$ es una martingala local si y sólo si existen una sucesión de localización τ_n y unas variables aleatorias integrables Z_n tales que $\Delta(H\cdot M)^{\tau_n} \geq Z_n$ para todo n.*

Ahora podemos demostrar que la existencia de una medida martingala equivalente implica ausencia de *free lunch with vanishing risk*. Supongamos que existe una medida martingala equivalente $\mathbb{Q}$ y sea φ una estrategia a-admisible. Tal y como se expuso anteriormente, el proceso integral $\varphi\cdot S$ no depende de la medida de considerada. Bajo $\mathbb{Q}$ el proceso S es una martingala local. Consideremos ahora los tiempos de parada $\tau_n = \text{ínf}\{t : (\varphi\cdot S)_t \geq n\}$. Entonces $\tau_n \to \infty$ y por la admisibilidad de φ se tiene

$$\Delta(\varphi\cdot S)_t^{\tau_n} = (\varphi\cdot S)_t^{\tau_n} - (\varphi\cdot S)_{t^-}^{\tau_n} \geq -(n+a)$$

Por el teorema anterior se verifica que $\varphi\cdot S$ es una $\mathbb{Q}$-martingala local. Junto con la a-admisibilidad esto implica que $\varphi\cdot S$ es de hecho una $\mathbb{Q}$-supermartingala. De ello se deduce que para cada $f \in C$ tenemos $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0$ y luego también $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0$ para cada $f \in \overline{C}$. Esto implica que cada $f \in \overline{C} \cap L_+^\infty$ se anula $\mathbb{Q}$-c.s., y por tanto también $\mathbb{P}$-c.s..

4.3.2. Demostración del Tercer Teorema Fundamental II

El paso esencial en la prueba de que la ausencia de *free lunch with vanishing risk* es suficiente para la existencia de una medida martingala equivalente es el teorema enunciado a continuación.

Teorema 4.3.4. *Si la semimartingala acotada S verifica la ausencia de free lunch with vanishing risk, entonces el cono C es cerrado en la topología débil*.*

A partir de lo enunciado por este último teorema, se puede argumentar, tal y como se hizo en la demostración del Teorema 3.2.2, que existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que el $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0$ para todo $f \in C$. De esto se deduce, puesto que S es acotado e integrable, que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0$ para todo $f \in K$. Por otra parte, para $s \leq t$ y $A \in \mathscr{F}_s$ el proceso predecible $\varphi = 1_{A\times(s,t]}$ es admisible, por lo que $(\varphi \cdot S)_T \in K$ y, por tanto,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[1_A(S_t - S_t)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\varphi \cdot S\right)_T\right] = 0$$

Lo que demuestra que S es una $\mathbb{Q}$-martingala.

La demostración del Teorema 4.3.4 es larga y difícil. La primera dificultad que se plantea es que topología débil* es en general no metrizable. Esto implica que para mostrar que un conjunto es cerrado en ella, no es suficiente con considerar sucesiones convergentes (de hecho se debe considerar redes). Sin embargo, resulta que en el presente contexto, la situación no es tan complicada, ya que podemos utilizar la siguiente consecuencia del llamado teorema de Krein-Smulian, que puede verse por ejemplo en [Gro54].

Teorema 4.3.5. *Sea (E, ε, μ) un espacio de medida finito y $C \subseteq L^\infty(\mu)$ un cono convexo. Supongamos que para cada sucesión uniformemente acotada f_n en C que converge en medida a una función f, se cumple que $f \in C$. Entonces C es débil*-cerrado.*

Para demostrar el Teorema 4.3.4 es suficiente considerar una sucesión de $h_n \in C$ tal que $|h_n| \leq 1$ para todo n y $h_n \xrightarrow{c.s.} h$ para algún $h \in L^\infty$, y mostrar que h pertenece a C. Para demostrar que $h \in C$ tenemos que encontrar un $f \in K$ tal que $h \leq f_0$. A tal fin, resulta útil tener en cuenta el conjunto siguiente

$$D = \left\{f : \exists\, \varphi_n \text{ 1-admisible tal que } \left(\varphi_n \cdot S\right)_T \xrightarrow{c.s.} f, f \geq h\right\}$$

Se puede demostrar que este conjunto contiene un elemento maximal f_0. Por lo que la variable aleatoria f_0 domina h, y es el límite casi seguro de los elementos $\left(\varphi_n \cdot S\right)_T$ de K, donde los φ_n son 1-admisibles.

La tarea restante es mostrar que f_0 pertenece a K. El primer paso es la observación de que la convergencia de $\varphi_n \cdot S$ en el momento final T, implica la convergencia para todos los puntos de tiempo. Para ver esto primero vemos que, si $n, m \to \infty$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\left(\varphi_n \cdot S\right)_t - \left(\varphi_m \cdot S\right)_t\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \tag{4.1}$$

La prueba de este hecho usa la 1-admisibilidad de la φ_n la maximalidad de f_0. Ahora vamos a aplicar algunos resultados de la topología semimartingala pero lo que se acaba de ver no implica que $\varphi_n \cdot S$ sea una sucesión de Cauchy en la topología semimartingala. Se demuestra sin embargo, que para cada n existe ψ_n en la envoltura convexa de los procesos $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$ de modo que $\psi_n \cdot S$ es una sucesión de Cauchy en la topología semimartingala. Se demuestra que la topología semimartingala es completa, por lo que $\psi_n \cdot S \to Z$ para alguna semimartingala Z. Por otra parte, por el teorema de *Mémin*, [Mem80], muestra que la semimartingala Z debe ser necesariamente de la forma $Z = \psi \cdot S$ para algún proceso S-integrable ψ.

Puesto que ψ_n es una combinación convexa de $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$, el proceso ψ_n es 1-admisible. Dado que la convergencia en la topología semimartingala implica que

$$\left(\psi_n \cdot S\right)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} \left(\psi \cdot S\right)_t$$

para todo $t \in [0, T]$, se deduce que ψ es 1-admisible también. El hecho de que ψ_n es una combinación convexa de $\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots$, también implica que el límite casi seguro de $\left(\psi_n \cdot S\right)_T$ es igual al límite casi seguro de $\left(\varphi_n \cdot S\right)_T$, que es f_0. Por lo que se concluye que $f_0 = \left(\psi \cdot S\right)_T$ y por tanto $f_0 \in K$.

4.3.3. Cuarto Teorema Fundamental

Teorema 4.3.6. ***Cuarto Teorema Fundamental de Valoración de Activos***
Si $S = (S_t)_{t \in [0,T]}$ es una semimartingala localmente acotada de valor real, entonces existe una medida martingala equivalente local si y sólo si S satisface la condición de ausencia de free lunch with vanishing risk.

Demostración. La suficiencia de la de ausencia de *free lunch with vanishing risk* se sigue del Teorema 4.3.4. En efecto, supongamos que se verifica la hipótesis y sean $\tau_n \uparrow \infty$ tiempos de parada tales que $|S^{\tau_n}| \leq K_n$, siendo K_n números deterministas. Definimos el nuevo proceso $\tilde{S}$ por

$$\tilde{S} = S 1_{[0,\tau_1]} + \sum_{n \geq 2} 2^{-n} \frac{1}{K_n} 1_{[\tau_{n-1}, \tau_n]} \cdot S$$

Entonces $\tilde{S}$ es un semimartingala acotada. Además, se satisface la condición ausencia de *free lunch with vanishing risk*. Por lo tanto, existe una medida de probabilidad equivalente $\mathbb{Q}$ tal que $\tilde{S}$ es un $\mathbb{Q}$-martingala. Pero entonces el proceso original S es una $\mathbb{Q}$-martingala local. El recíproco se prueba de forma análoga al Teorema 4.3.4. ■

CAPÍTULO 5

TEOREMA FUNDAMENTAL E INFINITOS ACTIVOS

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores vimos las primeras versiones del Teorema Fundamental a partir de los trabajos iniciales de Harrison y Kreps [HK79], Harrison y Pliska [HP81] y Kreps [Kre81]. Posteriormente se expusieron las extensiones y generalizaciones del Teorema Fundamental realizadas por Delbaen y Schachermayer en [DS94] y en [DS06]. En estas últimas extensiones vimos que la ausencia de arbitraje no era suficiente para construir medidas martingala y se hubo de utilizar el concepto de ausencia de *free lunch*, introducido por Clark [Cla93], para solucionar este problema.

Balbás et al. en [BMM02] han probado que es posible abordar la resolución de esta problemática, sin utilizar el *free lunch*, caracterizando la ausencia de arbitraje mediante un sistema proyectivo de medidas perfectas de probabilidad que son *risk-neutral* para cada subconjunto finito de fechas de *trading*. Asimismo demuestran que el límite proyectivo es *risk-neutral* para todo el conjunto de las fechas de *trading*, i.e., el conjunto de los estados de naturaleza y el proceso de precios se puede extender de tal manera que el nuevo proceso de precios sea una martingala con respecto a este sistema proyectivo. La medida de probabilidad inicial y la medida *risk-neutral* no pueden ser equivalentes, como ha sido ilustrado en Back y Pliska [BP91]. Sin embargo, para cada subconjunto finito de fechas de *trading* se pueden encontrar proyecciones de ambas medidas de tal manera que éstas sean equivalentes, y que existan las derivadas de Radon-Nikodym en ambas direcciones. Por último, los autores utilizan esta propiedad para introducir el concepto de *equivalencia proyectiva* de las medidas de probabilidad.

Un problema parecido al analizado en Balbás et al. en [BMM02] aparece a la hora de caracterizar la ausencia de arbitraje con infinitos activos. Schachermayer en [Sch92] lo ha ilustrado claramente mediante un ejemplo con un número contable de activos. Como en el caso de tiempo infinito, es imposible extender el Teorema Fundamental bajo diversos supuestos. Además, es interesante considerar, por ejemplo, un mercado de derivados donde están disponibles las opciones de compra con un número infinito de precios de ejercicio. Por otra parte, como se verá a lo largo del presente capítulo, un modelo dinámico puede ser interpretado como un modelo de infinitos activos, i.e. cada pareja de un activo y una fecha se puede considerar un nuevo activo. Por todo ello, es interesante analizar los modelos libres de arbitraje con infinitos activos. Para ello, seguiremos en el presente capítulo el camino dado por Balbás y Downarowicz en [BD07] para modelos perfectos con un único periodo y con infinito de activos. En este análisis, la existencia de probabilidades martingala se establece a través de límites proyectivos de sistemas proyectivos de medidas de Radon. Estos sistemas proyectivos permiten extender el concepto de la equivalencia proyectiva y ampliar el conjunto de los estados de naturaleza.

5.2. Definiciones Previas y Notación

Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad compuesto por el conjunto Ω, la σ-álgebra $\mathscr{F}$ y la medida de probabilidad μ. Se denotará por $(S_i)_{i\in I}$ el conjunto de todos los activos disponibles y por $(f_i)_{i\in I} \subset L^2(\mu)$ el conjunto de variables aleatorias que definen los pagos en una fecha futura T de S_i para cada $i \in I$. Por $(p_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}$ se designará a la familia de los precios actuales.

Además, se asumirá que $0 \in I$, y como viene siendo habitual, S_0 será el activo numerario, i.e., $p_0 = 1$ y $f_0 = 1$, μ-c.s.

El conjunto de todas carteras factibles, que es un espacio vectorial, viene dado por

$$E_\infty = \{(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R} : \text{existe } J \subset I, J \text{ finito y } x_i = 0 \text{ para cada } i \notin J\}$$

El precio actual y el *pay-off* de $x = (x_i)_{i\in I} \in E_\infty$ están dados respectivamente por

$$\lambda(x) = \sum_{i\in I} x_i p_i \in \mathbb{R}$$

y

$$\Lambda(x) = \sum_{i\in I} x_i f_i \in L^2(\mu)$$

Al igual que en los capítulos anteriores una cartera de arbitraje es aquella que permite obtener un beneficio sin riesgo. A continuación delimitaremos este concepto en el contexto del presente capítulo.

Definición 5.2.1. Cartera de arbitraje.
Se dice que una cartera $x \in E_\infty$ es un *arbitraje* si

$$\lambda(x) \leq 0,\ \Lambda(x) \geq 0\ \mu\text{-c.s.}$$

y

$$\mu\big(\omega \in \Omega : \Lambda(x)(\omega) - \lambda(x) > 0\big) > 0$$

Es importante destacar que los beneficios de arbitraje obtenidos en la fecha actual se pueden reinvertir en el activo libre de riesgo S_0. Entonces la existencia de arbitraje es equivalente a la existencia de un arbitraje autofinanciado para el que se cumple $\lambda(x) = 0$.

Definición 5.2.2. Medida *risk-neutral*.
Se dice que la medida σ-aditiva $\nu : F \to [0,1]$ es una medida *risk-neutral* o medida martingala si

(i) μ y ν son equivalentes, es decir, $\mu(A) = 0 \iff \nu(A) = 0$

(ii) para cada $i \in I$ se verifica que

$$p_i = \int_\Omega f_i d\nu \tag{5.1}$$

Tal y como se expuso en el segundo capítulo, la ausencia de arbitraje y la versión del Teorema Fundamental en espacios finitos, garantizan la existencia de la medida de probabilidad *risk-neutral*. A este respecto también pueden consultarse Dalang et al. [DMW90], Schachermayer [Sch92] o Jacod y Shiryaev [JS98].

De aquí en adelante se denotará por $\mathscr{P}_F(I)$ al conjunto de los subconjuntos finitos de I que contienen el 0.

Teorema 5.2.3. *El modelo está libre de arbitraje si y solo si existe una red $(\tilde{\nu}_J)_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ de medidas de probabilidad σ-aditivas en $\mathscr{F}$ tales que μ y $\tilde{\nu}_J$ sean equivalentes para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$ y*

$$p_i = \int_\Omega f_i d\tilde{\nu}_J \tag{5.2}$$

siempre que $J \in \mathscr{P}_F(I)$ e $i \in J$.

Como hemos visto anteriormente en el presente trabajo, la medida *risk-neutral* $\tilde{\nu}_J$ depende de J, es decir, en general, no es posible encontrar $\nu : F \to [0,1]$ que verifique las condiciones de la Definición 5.2.2.

A continuación se van a presentar las herramientas que nos permitirán resolver esta cuestión sin tener que utilizar el concepto de *free lunch* tal y como se expuso en el capítulo tercero.

5.3. Enfoque de Sistemas Proyectivos

Dado un conjunto C vamos a denotar por $\mathbb{R}^C$ el conjunto de funciones con valores en $\mathbb{R}$ sobre C dotado con la topología producto usual y la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}_C$.

Sea $J \in \mathscr{P}_F(I)$, y sea el espacio de probabilidad

$$\left(\mathbb{R}_J, \mathscr{B}_J, \mu_J\right) \tag{5.3}$$

donde μ_J es la medida de probabilidad $f_J(\mu)$ dada por

$$\mu_J(B) = \mu\left[f_J^{-1}(B)\right]$$

para cada $B \in \mathscr{B}_J$, siendo f_J la función medible

$$\Omega \ni \omega \to f_J(\omega) = \left(f_i(\omega)\right)_{i \in J} \in \mathbb{R}^J \tag{5.4}$$

Entonces, $(\mu_J)_{J \in \mathscr{P}_F(I)}$ es un sistema proyectivo de medidas de probabilidad de Radon, ver apéndice B, por lo que, denotando las proyecciones canónicas por

$$\pi_{J,K} : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^J$$

se tiene que

$$\mu_J(B) = \pi_{J,K}(\mu_K)$$

siempre que $J,K \in \mathscr{P}_F(I)$ y $J \subset K$.

Para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$ se puede considerar el modelo de valoración de un periodo definido en el espacio de probabilidad (5.3) y generado por las familias finitas de activos cuyos precios actuales son $(p_i)_{i \in J}$ y cuyos pagos están dados por las proyecciones canónicas

$$\pi_{\{i\},K} : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$$

para cada $i \in J$. Se va a llamar a este nuevo modelo de mercado financiero el *mercado J-ésimo*.

Proposición 5.3.1. *El modelo inicial está libre de arbitraje si y sólo si el mercado J-ésimo está libre de arbitraje para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$.*

Demostración. El mercado J-ésimo no está libre de arbitraje si y sólo si existe una cartera autofinanciada $(x_i)_{i \in J}$ tal que

$$\mu_J\left[(\alpha_i)_{i \in J} : \sum_{i \in J} \alpha_i x_i \geq 0\right] = 1 \quad \text{y} \quad \mu_J\left[(\alpha_i)_{i \in J} : \sum_{i \in J} \alpha_i x_i > 0\right] > 0$$

que equivale a

$$\mu\left[\omega \in \Omega : \sum_{i \in J} x_i f_i(\omega) \geq 0\right] = 1 \quad \text{y} \quad \mu\left[\omega \in \Omega : \sum_{i \in J} x_i f_i(\omega) > 0\right] > 0$$

lo que implica que el modelo inicial no está libre de arbitraje. ■

Para lo que resta de capítulo vamos a suponer que $(f_i)_{i \in I} \subset L^\infty(\mu)$. Esta asunción simplifica de forma significativa la exposición. De todas formas, la mayor parte de lo expuesto seguiría siendo válido si el supuesto no se cumpliese. En tal caso, el uso del Teorema de Prokhorov, ver anexo B, debe de ser substituido por el Teorema de Daniel-Kolmogorov tal y como se apunta en [BD07]. El cumplimiento del supuesto implica que μ_J tiene un soporte compacto incluido en el conjunto compacto

$$\prod_{i \in J} [-\|f_i\|_\infty, \|f_i\|_\infty] \subset \mathbb{R}^J \tag{5.5}$$

para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$. Entonces el Teorema de Prokhorov, teorema B.1.1, garantiza la existencia de una única medida de probabilidad de Radon μ_I sobre un espacio medible $\left(\mathbb{R}^I, \mathscr{B}_I\right)$ que es un límite proyectivo del sistema $(\mu_J)_{J \in \mathscr{P}_F(I)}$, i.e., se verifica que

$$\mu_J = \pi_{J,I}(\mu_I)$$

para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$. Además μ_I tiene un soporte compacto incluido en el compacto

$$\prod_{i \in I} \left[-\|f_i\|_\infty, \|f_i\|_\infty \right] \subset \mathbb{R}^I \tag{5.6}$$

Es importante remarcar que $\left[-\|f_0\|_\infty, \|f_0\|_\infty \right] = [-1,1]$ en la expresión (5.5) puede ser reemplazado por $\{1\}$. Obviamente, un razonamiento similar puede ser aplicado también a (5.6).

Definición 5.3.2. Medida Martingala Proyectivamente Equivalente.
Una medida de probabilidad de Radon ν_I sobre un espacio medible $\left(\mathbb{R}^I, \mathscr{B}_I\right)$ se dice que es una *medida martingala proyectivamente equivalente* o una medida de probabilidad *risk-neutral* proyectivamente equivalente si

(i) μ_I y ν_I son proyectivamente equivalentes, es decir, μ_J y $\nu_J = \pi_{J,I}(\nu_I)$ son equivalentes para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$.

(ii) dado $J \in \mathscr{P}_F(I)$ se tiene que ν_J es una medida martingala para el mercado J-ésimo.

La última condición implica que se verifica

$$p_i = \int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J} \, d\nu_J = \int_{\mathbb{R}^I} \pi_{\{i\},I} \, d\nu_I$$

para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$ y cada $i \in J$.

Aunque μ_I y ν_I no tienen necesariamente que ser equivalentes, la primera condición de la definición anterior, garantiza que existen densidades positivas entre ambas proyecciones. Se deduce por tanto que, tanto los soportes compactos de ν_I como sus proyecciones, estarían recogidas en (5.6) y (5.5) respectivamente.

Cabe destacar que Ω puede ser interpretado como un subconjunto de $\mathbb{R}^I$ con la *inmersión* dada por (5.4) reemplazando J por I. Cabe reseñar, tal y como se hace en [BD07] que esta *inmersión* no tiene por qué ser medible, siendo esto resoluble si se considera una σ-álgebra cilíndrica en $\mathbb{R}^I$ en lugar de la de Borel.

En resumen, el enfoque de sistemas proyectivos que se acaba de presentar, permitirá ampliar el conjunto de estados de naturaleza e identificarlo con el conjunto de los precios reales.

Proposición 5.3.3. *Las afirmaciones siguientes verifican las implicaciones:*

$$(i) \Rightarrow (ii) \iff (iii) \Rightarrow (iv).$$

(i) Existe una medida martingala ν.

(ii) *Existe un sistema proyectivo* $[\nu_J]_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ *de medidas de Radon tal que* ν_J *es una medida martingala para el mercado* J*-ésimo.*

(iii) *Existe una medida martingala proyectivamente equivalente* ν_I.

(iv) *En el modelo inicial se verifica la ausencia de arbitraje.*

Demostración. En primer lugar veamos que (i) ⇒ (ii). Dado $J \in \mathscr{P}_F(I)$ sea $\nu_J = f_J(\nu)$, donde f_J está representado en (5.4). Como μ y ν son equivalentes entonces μ_J y ν_J también lo son, y además, teniendo en cuenta (5.1), se verifica que

$$p_i = \int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J} d\nu_J$$

para cada $i \in J$. Por último, si $J,K \in \mathscr{P}_F(I)$ siendo $J \subset K$, entonces $\nu_J = f_J(\nu) = \pi_{J,K} f_K(\nu) = \pi_{J,K}(\nu_K)$.

Para comprobar que (ii) ⇒ (iii) partimos del hecho de que cualquier ν_J es equivalente a μ_J y por tanto, sus soportes están incluidos en los compactos dados por (5.5). Entonces por el Teorema de Prokhorov se asegura la existencia del límite proyectivo ν_I.

La prueba de que (iii) ⇒ (ii) se obtiene de definir $\nu_J = \pi_{J,I}(\nu_I)$ para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$.

Por último, (ii) ⇒ (iv) puesto que el Teorema 5.2.3 garantiza la ausencia de arbitraje del mercado J-ésimo, y por tanto (iv) se deduce de la Proposición 5.3.1. ■

A continuación veremos dos contraejemplos que muestran que (ii) $\not\Rightarrow$ (i) y que (iv) $\not\Rightarrow$ (ii) y/o (iii) en la Proposición 5.3.3 que se acaba de probar.

Ejemplo 5.3.4. Sean $I = \mathbb{N}$, $\Omega = \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathscr{F}$ una σ-álgebra discreta de Ω y $\mu(\omega) > 0$ para cada $\omega \in \Omega$. Sea $p_i = 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y

$$f_i(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega^2+2\omega+2}{2^\omega} & \omega \le i \\ \frac{1}{2^i} & \omega > i \end{cases}$$

para cada $\omega = 1,2,\ldots$ La matriz infinita, donde cada columna recoge los *pay-offs* asociados a cada $S_i, i \in \mathbb{N}$, viene dada por

$$\mathscr{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 5/2 & 5/2 & 5/2 & \cdots \\ 1 & 1/2 & 5/2 & 5/2 & 5/2 & \cdots \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 17/8 & 17/8 & \cdots \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 13/8 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Tomemos $i,\omega \in \Omega$ siendo $\omega > i$ y definamos $\nu_{i,\omega} > 0$ tal que verifique

$$\sum_{\omega=i+1}^{\infty} \nu_{i,\omega} = 1 - \sum_{\omega=1}^{i} \frac{1}{2\omega(\omega+1)} = \frac{i+2}{2i+2} \tag{5.7}$$

Obviamente, la existencia de $\left(\nu_{n,\omega}\right)_{\omega=n+1}^{\infty}$ está asegurada para cada $n \in \Omega = \mathbb{N} - \{0\}$.
Sea $J_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ para cada $n \in \Omega$, y definamos

$$\tilde{\nu}_n(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega(\omega+1)} & \omega \leq n \\ \nu_{n,\omega} & \omega > n \end{cases}$$

Es fácil ver que, para cada $n \in \Omega$, μ y $\tilde{\nu}_n$ son equivalentes además, se verifica (5.2) para cada $i \in J_n$. Por lo que el Teorema 5.2.3 garantiza la ausencia de arbitraje. No obstante, una medida *risk-neutral* ν que cumpla lo requerido en la Definición 5.2.2 no existe. En caso de que tal medida existiera, mediante inducción se tendría

$$\nu(\omega) = \frac{1}{2\omega(\omega+1)} \tag{5.8}$$

lo que implicaría que

$$\sum_{\omega=1}^{\infty} \nu(\omega) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{\omega=1}^{\infty} f_i(\omega)\nu(\omega) < 1$$

para cada $i \in \mathbb{N}$.

Siguiendo con el ejemplo 5.3.4, continuamos con la construcción la medida martingala proyectivamente equivalente. Para ello, vemos que las filas de $\mathscr{M}_1$ proporcionan la medida μ_{J_n} asociada al mercado J_n-ésimo. Es sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} \mu_{J_n}\left(1, 5/2, 5/2, 5/2, \ldots, 5/2\right) &= \mu(1) \\ \mu_{J_n}\left(1, 1/2, 5/2, 5/2, \ldots, 5/2\right) &= \mu(2) \\ \mu_{J_n}\left(1, 1/2, 1/4, 17/8, \ldots, 17/8\right) &= \mu(3) \\ &\vdots \\ \mu_{J_n}\left(1, f_1(n), f_2(n), \ldots, f_n(n)\right) &= \mu(n) \\ \mu_{J_n}\left(1, f_1(n+1), f_2(n+1), \ldots, f_n(n+1)\right) &= \sum_{r=n+1}^{\infty} \mu(r) \end{aligned}$$

Puesto que existen $n+1$ activos independientes y el soporte de μ_{J_n} contiene $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^{J_n}$ lo que implica que el J_n-ésimo mercado es completo. Por tanto, la medida *risk-neutral* para este mercado es única y fácilmente se comprueba que viene dada por

$$\begin{aligned} \nu_{J_n}\left(1, 5/2, 5/2, 5/2, \ldots, 5/2\right) &= \nu(1) \\ \nu_{J_n}\left(1, 1/2, 5/2, 5/2, \ldots, 5/2\right) &= \nu(2) \\ \nu_{J_n}\left(1, 1/2, 1/4, 17/8, \ldots, 17/8\right) &= \nu(3) \\ &\vdots \\ \nu_{J_n}\left(1, f_1(n), f_2(n), \ldots, f_n(n)\right) &= \nu(n) \\ \nu_{J_n}\left(1, f_1(n+1), f_2(n+1), \ldots, f_n(n+1)\right) &= \sum_{\omega=n+1}^{\infty} \nu_{n,\omega} \end{aligned}$$

siendo ν y $\sum_{\omega=n+1}^{\infty} \nu_{n,\omega}$ determinados por (5.8) y por (5.3) respectivamente. Para ver que los puntos (ii) o (iii) de la Proposición 5.3.3 se verifican es suficiente ver que

$$\pi_{J_n,J_{n+1}} = (\nu_{J_{n+1}}) = \nu_{J_n}$$

para $n = 1,2,\dots$ lo que se verifica trivialmente a partir de las igualdades de la página anterior.

El sistema proyectivo anterior converge a la medida $\nu_{\mathbb{N}}$ cuyo soporte está recogido en la unión de las filas de $\mathscr{M}_1$ y la sucesión

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{5.9}$$

Asimismo, $\nu(\omega)$ coincide con $\nu_{\mathbb{N}}$ en la ω-ésima fila de $\mathscr{M}_1$, $\omega = 1,2,\dots$ y

$$\nu_{\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}$$

Tal y como se apuntó anteriormente, el enfoque de sistemas proyectivos permite extender el conjunto de estados de la naturaleza identificando dicho conjunto con el de los precios reales, puesto que (5.9) recoge la única trayectoria de precios que no está contenida en las columnas de $\mathscr{M}_1$.

Ahora se mostrará un segundo contraejemplo que también ilustra el hecho de que en la Proposición 5.3.3, (iv) $\not\Rightarrow$ (ii) o (iii).

Ejemplo 5.3.5. Partiendo de nuevo de los conjuntos $I = \mathbb{N}$, $\Omega = \mathbb{N} - \{0\}$, $\mathscr{F}$ la σ-álgebra discreta sobre Ω y $\mu(\omega) > 0$ para cada $\omega \in \Omega$. Sea $p_i = 0$, $i = 1,2,\dots$, y sean $f_i(i) = 1, f_i(i+1) = -1$ y $fi(\omega) = 0$ para cada $i,\omega \in \mathbb{N} - \{0\}$ con $\omega \notin \{i, i+1\}$. En este caso la matriz de *pay-offs* viene dada por

$$\mathscr{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Si se define

$$\tilde{\nu}_n(\omega) = \frac{1}{2(n+1)}$$

para $n = 1,2,\dots$ y $\omega = 1,2,\dots,n,n+1$, y

$$\tilde{\nu}_n(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\mu(\omega)}{\sum\limits_{\omega^*=n+2}^{\infty} \mu(\omega^*)}$$

para $n = 1,2,\dots$ y $\omega = n+1, n+2, \dots,$. Se demuestra fácilmente que el Teorema 5.2.3 se cumple por lo que el mercado está libre de arbitraje. Además, de acuerdo con (5.1) una medida *risk-neutral* ν debería satisfacer

$$0 < \nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = \cdots$$

lo que hace imposible que se cumpla que $\nu(1)+\nu(2)+\nu(3)+\cdots=1$. Tal y como ocurría en el Ejemplo 5.3.4, en las filas de la matriz $\mathscr{M}_2$ viene dada la medida μ_{J_n}

$$\begin{aligned}
\mu_{J_n}(1,1,1,\ldots,0) &= \mu(1)\\
\mu_{J_n}(1,-1,1,0,\ldots,0) &= \mu(2)\\
\mu_{J_n}(1,0,-1,1,0,\ldots,0) &= \mu(3)\\
\mu_{J_n}(1,0,0,-1,1,0,\ldots,0) &= \mu(4)\\
&\vdots\\
\mu_{J_n}(1,0,\ldots,0,-1) &= \mu(n+1)\\
\mu_{J_n}(1,0,\ldots,0) &= \sum_{r=n+2}^{\infty}\mu(r)
\end{aligned}$$

Llegados a este punto, es importante destacar que, a diferencia de lo que ocurría en el Ejemplo 5.3.4 anterior, en este caso el mercado J_n-ésimo no es completo. Esto se debe a que en este mercado J_n-ésimo hay $n+2$ estados de la naturaleza y $n+1$ activos. Por ello, hay infinitas medidas medidas *risk-neutral* en este mercado. Si se denota por Λ_n al conjunto de medidas *risk-neutral* entonces para cada elemento de Λ_n, existen λ y λ^* estrictamente positivos, caracterizando dicho elemento, tales que

$$(n+1)\lambda+\lambda^* = 1 \tag{5.10}$$

Y la correspondiente medida *risk-neutral* satisface

$$\begin{aligned}
\nu^{\lambda}_{J_n}(1,1,0,\ldots,0) &=\\
\nu^{\lambda}_{J_n}(1,-1,1,0,\ldots,0) &=\\
\nu^{\lambda}_{J_n}(1,0,0,-1,1,0,\ldots,0) &=\\
&\vdots\\
\nu^{\lambda}_{J_n}(1,0,\ldots,0) &= \lambda^*
\end{aligned}$$

Para mostrar que para este último ejemplo, la propiedad (ii) de la Proposición 5.3.3 no se cumple, procederemos por reducción al absurdo. Como punto de partida suponemos que $\left(\nu^{\lambda}_{J_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es un sistema proyectivo que verifica (ii) en dicha proposición. Fijemos un $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, se tiene que

$$\pi_{J_n,J_{n+m}}\left(\nu^{\lambda_{n+m}}_{J_n}\right)=\nu^{\lambda}_{J_{n+m}}$$

para cada $m\in\mathbb{N}$, de donde se llega a

$$\lambda_n=\nu^{\lambda_n}_{J_n}(1,1,0,\ldots,0)=\nu^{\lambda_{n+m}}_{J_{n+m}}(1,1,0,\ldots,0)=\lambda_{n+m}$$

Teniendo en cuenta (5.10) se tiene que

$$\lambda_n=\lambda_{n+m}<\frac{1}{n+m+1}$$

si $m\to\infty$ entonces $\lambda_n=0$, lo que contradice que μ_{J_n} y $\nu^{\lambda_n}_{J_n}$ sean equivalentes.

5.4. Existencia de Medidas Martingala Proyectivamente Equivalentes

En esta sección se van a exponer los resultados principales que explican el porqué de que el Enfoque de Sistemas Proyectivos solucione el Ejemplo 5.3.4. También, se va a ilustrar el uso de las medidas martingala proyectivamente equivalentes para valorar nuevos activos.

Teorema 5.4.1. *Sea un subconjunto cofinal $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}_F(I)$ tal que el mercado J-ésimo es completo para cada $J \in \mathscr{C}$. Entonces los enunciados (ii), (iii) e (iv) de la Proposición 5.3.3 son equivalentes. Si se verifican además se verifican:*

(i) La medida martingala proyectivamente equivalente ν_I es única.

(ii) Sean $J \in \mathscr{P}_F(I)$, $\nu_J = \pi_{J,I}(\nu_I)$, $\varphi \in L^\infty\left(\mathbb{R}^J, \mathscr{B}_J, \mu_J\right)$ y el nuevo activo S_φ siendo su pay-off en tiempo T determinado por

$$f_\varphi = \varphi \circ f_J \in L^\infty(\mu) \tag{5.11}$$

Dando lugar a que

$$p_\varphi = \int_{\mathbb{R}^I} \left(\varphi \circ \pi_{J,I}\right) d\nu_I \tag{5.12}$$

sea el único precio de S_φ que verifique la ausencia de arbitraje para el mercado $\left(S_i\right)_{i\in I} \bigcup S_\varphi$.

Demostración. Supongamos que se verifica (ii) en la Proposición 5.3.3 y sea $K \in \mathscr{C}$. La Proposición 5.3.1 y la completitud del mercado K-ésimo garantizan que existe una única medida martingala ν_K para dicho mercado. Si $J \notin \mathscr{C}$ se toma $K \in \mathscr{C}$ siendo $J \subset K$ y sea

$$\nu_J = \pi_{J,K}(\nu_K) \tag{5.13}$$

Obviamente ν_J no depende de K. De hecho, si $K \in \mathscr{C}$ y $J \subset K$, entonces tomando $K^* \supset K \cup K$ tal que $K \in \mathscr{C}$, se llega a

$$\nu_K = \pi_{K,K^*}(\nu_K^*) \tag{5.14}$$

que se verifica debido a

$$\nu_{K'} = \pi_{K',K^*}(\nu_K^*)$$

de donde

$$\pi_{J,K}(\nu_K) = \pi_{J,K}\pi_{K,K^*}(\nu_K^*) = \pi_{J,K^*}(\nu_K^*) = \pi_{J,K'}\pi_{K',K^*}(\nu_K^*) = \pi_{J,K'}(\nu_{K'})$$

Teniendo en cuenta (5.13) y (5.14) se comprueba que $\left(\nu_J\right)_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ es un un sistema proyectivo y por tanto, se verifica (ii) en la Proposición 5.3.3.

Para probar el enunciado (i) del teorema es basta con darse cuenta de que las proyecciones de ν_I son únicas en un conjunto cofinal $\mathscr{C}$. Por ello, las proyecciones son únicas para cada elemento de $\mathscr{P}_F(I)$, la unicidad de ν_I se obtiene trivialmente de la unicidad del límite proyectivo de sistemas de medidas de Radon (ver Anexo B).

Por último, para demostrar el enunciado (ii) del teorema, tomemos el activo S_φ. Tal y como se hizo en la prueba de la Proposición 5.3.1 se puede establecer que el mercado $\left(S_i\right)_{i\in I} \bigcup \left(S_\varphi\right)$ verifica la ausencia arbitraje si y sólo si para cada $K \in \mathscr{P}_F(I)$ con $\supset J$ el mercado

$$\left(\pi_{\{i\},K}\right)_{i\in K} \cup \left(\varphi \circ \pi_{J,K}\right) \tag{5.15}$$

está libre de arbitraje. Si se cumple esto último y $K \in \mathscr{C}$ la unicidad de $\pi_{K,I}(\nu_I)$ lleva a (5.12). Por otra parte, (5.12) garantiza que (5.15) verifica la ausencia de arbitraje para cada $K \in \mathscr{C}$ y, por consiguiente para cada $K\mathscr{P}_F(I)$. ■

El anterior teorema y (5.12) indican que las probabilidades *risk-neutral* proyectivamente equivalentes se pueden utilizar como reglas de valoración de nuevos activos en mercados completos. Pero esto no es siempre posible en el caso de los mercados incompletos. Como veremos a continuación, la incompletitud es una de las razones del fallo del Enfoque de Sistemas Proyectivos en el Ejemplo 5.3.5.

Observación 5.4.2. Vamos a considerar el mercado del Ejemplo 5.3.5 y el nuevo activo S_φ cuyo *pay-off* viene dado por

$$f_\varphi = \left(2f_1 - 1\right)^+ = \begin{cases} 1 & \omega = 1 \\ 0 & \omega \neq 1 \end{cases}$$

Este nuevo activo es una opción *call*, i.e. opción de compra, con vencimiento en T, y cuyo precio de ejercicio o *strike* es igual a una unidad monetaria y el activo subyacente son dos unidades de S_1. Además, es sencillo ver que

$$f_\varphi = \varphi \circ f_{\{0,1\}}$$

si

$$\varphi : \mathbb{R}^{\{0,1\}} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\varphi(x,y) = \left(2y-1\right)^+$$

lo que hace que S_φ sea de la forma dada por (5.11).

Probemos ahora que no es posible valorar el nuevo activo S_φ con un precio $p_\varphi \in \mathbb{R}$ al menos que se acepte la existencia de arbitraje. En primer lugar, $\mu\left(f_\varphi \geq 0\right) = 1$ y $\mu\left(f_\varphi > 0\right) > 0$, junto con la ausencia de arbitraje, implican que $p_\varphi > 0$. Segundo, si el mercado $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \cup (S_\varphi)$ verifica la ausencia de arbitraje, entonces, Definición 5.2.1, el mercado $\left\{S_0, S_1, \ldots, S_m, S_\varphi\right\}$ verifica la ausencia de arbitraje para cada $m \in \mathbb{N}$. Sea m tal que

$$\frac{1}{m+1} < p_\varphi$$

de aquí es fácil ver que cada medida *risk-neutral* para el mercado $\left\{S_0, S_1, \ldots, S_m,\right\}$ satisfará

$$\tilde{\nu}_m \leq \frac{1}{m+1}$$

De lo que se deduce que p_φ no evita la presencia de arbitraje.

A continuación se enunciará el Teorema 5.4.7 y se expondrá la Observación 5.4.6. Lo que dará lugar a algunos modelos generales tales que la implicación (iv)⇒(iii) en la Proposición 5.3.1 se cumple. Adicionalmente, esto probará que, en caso de que exista, la medida *risk-neutral* proyectivamente equivalente puede ser una herramienta de valoración en mercados incompletos. Para este fin, serán necesarios unos conceptos previos que se son el objeto de las definiciones siguientes.

Definición 5.4.3. Propiedad P.
Supongamos que el modelo inicial verifica la ausencia de arbitraje. Diremos que que la *propiedad* P se cumple si para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$ y cada $\varphi \in L^\infty\left(\mathbb{R}^J, \mathscr{B}_J, \mu_J\right)$ el nuevo activo S_φ cuyo *pay-off* en tiempo T es igual a $f_\varphi = \varphi \circ f_J \in L^\infty(\mu)$ tiene por lo menos un precio $p_\varphi \in \mathbb{R}$ tal que el mercado $\left(S_i\right)_{i\in I} \bigcup \left(S_\varphi\right)$ está libre de arbitraje.

Definición 5.4.4. Propiedad *.
Partimos de nuevo de un modelo inicial que verifica la ausencia de arbitraje. Para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$ sea $\mathscr{R}_J$ el conjunto de medidas martingala para el mercado J-ésimo. Por la Proposición 5.3.1 está garantizado que cada $\mathscr{R}_J$ es no vacío. Se dirá que la *propiedad* * se verifica si existe un conjunto cofinal $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}_F(I)$ tal que $\mathscr{R}_J$ es uniformemente μ_J-continuo para cada $J \in \mathscr{C}$, i.e., para cada $J \in \mathscr{C}$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que la implicación

$$B_J \in \mathscr{B}_J \text{ y } \mu_J(B_J) \leq \delta \Rightarrow \theta_J(B_J) \leq \varepsilon, \text{ para cada } \theta_J \in \mathscr{R}_J$$

se verifica.

Definición 5.4.5. Propiedad **.
Se dice que el modelo inicial verifica la *propiedad* ** si existe un conjunto cofinal $\mathscr{C} \in \mathscr{P}_F(I)$ tal que para cada $J \in \mathscr{C}$ y cada compacto $X_J \subset \mathbb{R}^J$ con interior vacío y probabilidad positiva $\mu_J(X_J) > 0$, existe un μ_J-átomo Y_J con probabilidad positiva y tal que $Y_J \subset X_J$.

Observación 5.4.6. La propiedad * se verifica en varios casos. Un ejemplo es el caso de mercados completos ya que $\mathscr{R}_J$ es un conjunto unitario. De forma sencilla se comprueba que si para cualquier μ_J, o su familia cofinal, existe una familia finita y disjunta de μ_J-átomos

$$B_J^1, B_J^2, \ldots, B_J^r$$

donde r depende de J, tales que

$$\sum_{s=1}^{r} \mu_J\left(B_J^s\right)$$

En concreto, el Ejemplo 5.3.5 satisface la propiedad *.
Análogamente, la propiedad ** se cumple en numerosos casos de interés como mercados completos o el Ejemplo 5.3.5. En el caso general, se prueba fácilmente que la propiedad se cumple si cualquier $\mathbb{R}^J$, o su familia cofinal, se puede partir en una colección numerable y disjunta de μ_J-átomos.

Teorema 5.4.7.

(i) *Si existe un medida martingala proyectivamente equivalente ν_I, entonces el modelo inicial está libre de arbitraje y verifica la propiedad P. Además, (5.12) es un precio de la forma (5.11) que hace que el mercado $(S_i)_{i\in I} \cup (S_\varphi)$ esté libre de arbitraje.*

(ii) *Si I es numerable, el modelo inicial verifica la ausencia de arbitraje, cumple las propiedades P, * y **, entonces existe una medida martingala proyectivamente equivalente.*

Con el fin de demostrar el Teorema 5.4.7, serán necesarios algunos resultados técnicos que se expondrán a continuación. Algunos de ellos tienen un interés por sí mismos.

Lema 5.4.8. *Supongamos que el mercado está libre de arbitraje, entonces existe un sistema proyectivo $(\lambda_J)_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ de medidas de probabilidad de Radon tal que:*

(i) *El soporte de λ_J está contenido en (5.5) para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$.*

(ii) *Si $J \in \mathscr{P}_F(I)$ entonces $p_i = \int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J} d\lambda_J$ para cada $i \in J$.*

(iii) *Si el mercado satisface la propiedad P, $J \in \mathscr{P}_F(I)$ y $B_J \subset \mathbb{R}^J$ es un conjunto de Borel tal que $\mu_J(B_J) \neq 0$, entonces el sistema proyectivo $(\lambda_K)_{K\in\mathscr{P}_F(I)}$ se puede construir de tal manera que $\lambda_J(B_J) \neq 0$.*

(iv) *Si el mercado cumple la propiedad * entonces μ_J es μ_J-continua para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$.*

Demostración. Sea $J \in \mathscr{P}_F(I)$ y tomemos el compacto C_J dado en (5.5). Denotamos por $\mathscr{R}_J^*$ al conjunto de medidas de probabilidad de Radon sobre la σ-álgebra de Borel de C_J. Asimismo, denotaremos por $\mathscr{R}_J$ al conjunto compuesto por los elementos $\rho_J \in \mathscr{R}_J^*$ tales que ρ_J y μ_J son equivalentes y

$$p_i = \int_{C^J} \pi_{\{i\},J} d\rho_J \tag{5.16}$$

para cada $i \in J$. La Proposición 5.3.1 y el estar libre de arbitraje implican que $\mathscr{R}_J$ no es vacío.

Por otra parte, aplicando el Teorema de Representación de Riesz podemos identificar el espacio $\mathscr{C}^*(C_J)$ de medidas de Radon, que no tienen por que ser positivas, sobre C_J con el dual de $\mathscr{C}(C_J)$, espacio de funciones continuas sobre C_J. Además, el Teorema de Alaoglu asegura que $\mathscr{R}_J^*$ sea *-débilmente compacto ya que este conjunto es obviamente *-débilmente cerrado en la bola de unidad de $\mathscr{C}^*(C_J)$. Consecuentemente, el Teorema de Tychonoff, lleva a la compacidad de

$$\mathscr{R}^* = \prod_{J\in\mathscr{P}_F(I)} \mathscr{R}_J^*$$

Fijando ahora

$$(\rho_J)_{J\in\mathscr{P}_F(I)} \in \mathscr{R}^* \tag{5.17}$$

de tal forma que

$$\rho_J \in \mathscr{R}_J \tag{5.18}$$

para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$. Dados $H, J \in \mathscr{P}_F(I)$ sea $J^c = I - J$ y consideremos

$$\lambda_J^H = \pi_{J\cap H,J}(\rho_J) \otimes \mu_{J^c\cap H}$$

siendo $\otimes$ el producto tensorial de medidas de Radon, ver [Sch73]. Trivialmente se comprueba que $\lambda_J^H = \pi_{H,J}(\rho_J)$ siempre que $H \subset J$ y $\lambda_J^H = \mu_H$ si $H \subset J^c$. Por todo ello, es sencillo ver que λ_J^H y μ_H son equivalentes.

Para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$ sea el elemento

$$\Lambda_J = \left(\lambda_J^H\right)_{H\in\mathscr{P}_F(I)} \in \mathscr{R}^*$$

La compacidad de $\mathscr{R}^*$ implica que existe

$$(\lambda_J)_{J\in\mathscr{P}_F(I)} \in \mathscr{R}^*$$

que es un punto de acumulación de la red $(\Lambda_J)_{J\in\mathscr{P}_F(I)} \in \mathscr{R}^*$.

Para probar que $(\lambda_J)_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ es un sistema proyectivo, sean $J,K \in \mathscr{P}_F(I)$ con $J \subset K$. Entonces, se verifica que

$$(\lambda_J, \lambda_K) \in \mathscr{R}_J^* \times \mathscr{R}_K^* \tag{5.19}$$

es un punto de acumulación de la red

$$\left(\lambda_H^J, \lambda_H^K\right)_{H\supset K} = \left(\pi_{J,H}(\rho_H), \pi_{K,H}(\rho_H)\right)_{H\supset K} \subset \mathscr{R}_J^* \times \mathscr{R}_K^*$$

Y por consiguiente (5.19) es un punto de acumulación de

$$\left(\pi_{J,K}\pi_{K,H}(\rho_H), \pi_{K,H}(\rho_H)\right)_{H\supset K}$$

y la continuidad, con ambos espacios dotados de la topología débil*, de

$$\mathscr{R}_K^* \ni \alpha \to \pi_{J,K}(\alpha) \in \mathscr{R}_J^*$$

da lugar a

$$\lambda_J = \pi_{J,K}(\lambda_K) \tag{5.20}$$

Procedamos ahora a probar la afirmación (ii) del Lema 5.4.8. Sea $J \in \mathscr{P}_F(I)$ e $i \in J$. Es obvio que λ_J es un punto de acumulación de

$$\left(\lambda_H^J\right)_{H\supset J} = \left(\pi_{J,H}(\rho_H)\right)_{H\supset J}$$

y la continuidad de $\pi_{\{i\},J} : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^J} \pi_{\{i\},J}\, d\lambda_J = \int_{C_J} \pi_{\{i\},J}\, d\lambda_J$$

es un punto de acumulación de

$$\left(\int_{C_J} \pi_{\{i\},J}\, d\left(\pi_{J,H}(\rho_H)\right)\right)_{H\supset J} = \left(\int_{C_H} \pi_{\{i\},H}\, d\rho_H\right)_{H\supset J} = (p_i)_{H\supset J}$$

debido a (5.16) y (5.18).

Probemos ahora la afirmación (iii) del Lema 5.4.8. Sea $J \in \mathscr{P}_F(I)$ y el boreliano $B_J \subset \mathbb{R}^J$ tal que $\mu_j(B_J) > 0$. Al ser μ_j una medida de Radon con soporte en C_J, existe un conjunto compacto $\tilde{C}_J \subset B_J \cap C_J$ tal que $\mu_J(\tilde{C}_J) > 0$. Probaremos que $\lambda(\tilde{C}_J) > 0$. Para ello, consideremos un nuevo activo S_φ con *pay-off* igual a $f_J \circ 1_{\tilde{C}_J}$, donde, como es habitual

$$1_{\tilde{C}_J} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in \tilde{C}_J \\ 0 & \text{si } \omega \notin \tilde{C}_J \end{cases}$$

denota la función característica del conjunto $\tilde{C}_J$. El cumplimiento de la propiedad P conlleva la existencia de un precio $p_\varphi > 0$, que puede no ser único, que hace que el mercado esté libre de arbitraje. Por consiguiente, tal y como se hizo en la prueba de la Proposición 5.3.1, para cada $H \supset J$ el H-ésimo mercado verifica la ausencia de arbitraje si se añade el *pay-off*

$$1_{\pi^{-1}_{J,H}(\tilde{C}_J) \cap C_H}$$

con precio p_φ. Por tanto, existen medidas martingala para este nuevo mercado, i.e., se puede escoger (5.17) de tal manera que (5.18) y $\pi^{-1}_{J,H}(\tilde{C}_J) \cap C_H$ para cada $H \supset J$. Entonces

$$\lambda^J_H(\tilde{C}_J) = p_\varphi$$

ara cada $H \supset J$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $p_\varphi - \varepsilon > 0$. Al ser λ_J una medida de Radon existe un conjunto abierto G_J tal que

$$G_J \cap C_J \supset \tilde{C}_J$$

y

$$\lambda_J\big((G_J \cap C_J) - \tilde{C}_J\big) \le \varepsilon$$

Por Lema de Uryson se asegura la existencia de una aplicación continua $h : C_J \to [0,1]$ tal que $h(x) = 1$ para cada $x \in \tilde{C}_J$ y se anula en $C_J - G_J$. Si $H \supset J$,

$$\int_{C_J} h d\lambda^J_H \ge \lambda^J_H(\tilde{C}_J) = p_\varphi$$

De aquí que $\int_{C_J} h d\lambda_J$, punto de acumulación de $\left(\int_{C_J} h d\lambda^J_H\right)_{H \supset J}$, satisface

$$\int_{C_J} h d\lambda_J \ge p_\varphi$$

Por lo que

$$\lambda_J(\tilde{C}_J) = \int_{\tilde{C}_J} h d\lambda_J = \int_{C_J} h d\lambda_J - \int_{C_J - G_J} h d\lambda_J - \int_{\left((G_J \cap C_J) - \tilde{C}_J\right)} h d\lambda_J \ge p_\varphi - \varepsilon > 0$$

Por último, se probará (iv) en el Lema 5.4.8. Para ello, sea $\mathscr{C}$ el conjunto cofinal de $\mathscr{P}_F(I)$ cuya existencia está garantizada por la verificación de la propiedad *. Sean $J \in \mathscr{P}_F(I)$ y $B_J \subset \mathbb{R}^J$

un conjunto de Borel tal que $\mu_J(B_J) = 0$. Tenemos que probar que λ_J se anula en B_J pero al ser λ_J una medida de Radon podemos asumir que B_J es cerrado. Adicionalmente, (5.20) permite suponer que $J \in C$.

Sea un $\varepsilon > 0$. Puesto que $\pi_{J,H}(\rho_H)$, con $H \supset J$, son uniformemente regulares por (5.18) y por la propiedad *, es posible escoger un conjunto compacto $\tilde{C}_J \subset C_J - B_J$ tal que

$$\pi_{J,H}(\rho_H)\big((C_J - B_J) - \tilde{C}_J\big) \le \varepsilon$$

para cada $H \supset J$. Si $C_J \cap B_J \neq \varnothing$ entonces el Lema de Uryson garantiza la existencia de la aplicación continua $h : C_J \to [0,1]$ tal que h se anula en $\tilde{C}_J$ y es igual a uno en $C_J \cap B_J$. Para cada $H \supset J$ se tiene que

$$\pi_{J,H}(\rho_H)(C_J \cap B_J) = 0$$

Por tanto

$$0 \le \int_{C_J} h d\lambda_H^J = \int_{((C_J - B_J) - \tilde{C}_J)} h d\lambda_H^J + \int_{C_J \cap B_J} h d\lambda_H^J \le \varepsilon + \int_{(C_J \cap B_J)} h d\big(\pi_{J,H}(\rho_H)\big) = \varepsilon$$

y

$$0 \le \lambda_J(C_J \cap B_J) \le \int_{C_J} h d\lambda_H^J \le \varepsilon$$

ya que $\int_{C_J} h d\lambda_J$ es punto de acumulación de $\left(\int_{C_J} h d\lambda_H^J\right)_{H \supset J}$. Consiguientemente, $\lambda_J(C_J \cap B_J) = 0$ puesto que ε puede ser cualquier valor positivo. ■

Es interesante remarcar que el supuesto que se hizo al principio del presente capítulo, i.e. que $(f_i)_{i\in I} \subset L^\infty(\mu)$, no es necesariamente imprescindible en la demostración del anterior lema. De hecho, si no se cumpliese, el papel de $\mathscr{C}(C_J)$ y $\mathscr{C}^*(C_J)$ puede ser reemplazado por $L^\infty\left(\mathbb{R}_J, \mathscr{B}_J, \mu_J\right)$ y su dual $L^*_\infty\left(\mathbb{R}_J, \mathscr{B}_J, \mu_J\right)$, espacio de medidas de valor real sobre B_J finitamente aditivas con variación finita y que se anulan en cada conjunto μ_J-nulo.

Lema 5.4.9. *Sea un mercado libre de arbitraje y que verifica las propiedades P y *. Escojamos $K \in \mathscr{P}_F(I)$ y una familia numerable $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}_K$ tal que $\mu_K(B_n) \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces el sistema proyectivo $(\lambda)_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ del Lema 5.4.8 puede ser construido tal que $\lambda(B_n) \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Utilizando la misma notación que la utilizada en la prueba del Lema 5.4.8 y teniendo en cuenta (iii) en dicho lema, se considera el sistema proyectivo $\left(\lambda_J^n\right)_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ tal que

$$\lambda_K^n(B_n) > 0 \tag{5.21}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} = 1$$

Y tomemos para $J \in \mathscr{P}_F(I)$

$$\lambda_J = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n \lambda_J^n$$

La convergencia en norma y en la topología débil* de $\mathscr{C}^*(C_J)$ está garantizada por el criterio de Weierstrass. Y por tanto, es sencillo ver que $\left(\lambda_J\right)_{J\in\mathscr{P}_F(I)}$ es un sistema proyectivo que satisface (i) y (ii) en el Lema 5.4.8 y tal que λ_J es μ_J-continua para cada $J \in \mathscr{P}_F(I)$. Además, $\lambda_K(B_n) \neq 0$ se obtiene trivialmente de (5.21) y $\lambda_K \geq \varepsilon_n \lambda_K^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Observación 5.4.10. Sea (W, Σ, θ) un espacio medible positivo. Teniendo en cuenta el Lema de Saks, ver [Sak33], que garantiza que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición disjunta $W_1, W_2, \ldots, W_s, W_{s+1}, \ldots, Wr$ de W tal que $W_1, W_2, \ldots, W_s$ son θ-átomos y $\theta(W_i) \leq \varepsilon, i = s+1, \ldots, r$. Es posible aplicar este lema otra vez en cada $W_i, i = s+1, \ldots, r$, y para $\frac{\varepsilon}{2}$. Es sencillo ver mediante inducción, que existe una sucesión disjunta $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la restricción de θ a W_0 no es atómica y W_n es un sí es un átomo para $n = 1, 2, \ldots$.

Lema 5.4.11. *Supongamos que el mercado verifica la ausencia de arbitraje y también las propiedades P y *. Sea $K \in \mathscr{P}_F(I)$. Entonces el sistema proyectivo $(\lambda_J)_{j\in\mathscr{P}_F(I)}$ del Lema 5.4.8 se puede construir tal que $\lambda(B_K) \neq 0$ para cada boreliano $B_K \subset \mathbb{R}^K$ tal que $mu_K(B_K) > 0$ y B_K es abierto o un μ_K-átomo.*

Demostración. De acuerdo a la Observación 5.4.10, tomemos una partición $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^K$ tal que μ_K no es atómica en W_0 y $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ son μ_K-átomos. Consideremos también una base numerable $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ de la topología usual en $\mathbb{R}^K$. Entonces el Lema 5.4.9 garantiza que el sistema proyectivo se puede construir de tal manera que λ_K no se anula en aquellos elementos de

$$(W_n)_{n=1}^{\infty} \cup (G_n)_{n=1}^{\infty}$$

con medida μ_K positiva. Por consiguiente el lema es cierto. ■

Demostración del Teorema 5.4.7. Supongamos que existe medida *risk-neutral* proyectivamente equivalente ν_I y sea el mercado $(S_i)_{i\in I} \cup (S_\varphi)$ donde el precio p_φ de S_φ viene dado por (5.12). Entonces, trivialmente el mercado $(S_j)_{j\in H} \cup (S_\varphi)$ verifica la ausencia de arbitraje para cada $H \in \mathscr{P}_F(I)$ donde $H \supset J$. Se prueba que $(S_j)_{j\in H} \cup (S_\varphi)$ está libre de arbitraje de forma análoga a la demostración de la Proposición 5.3.1.

Para la prueba de (ii), consideramos $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ para $n = 1, 2, \ldots$, de acuerdo al lema anterior, para cada $m = 1, 2, \ldots$ se considera el sistema proyectivo

$$\left(\lambda_{J_n}^m\right)_{n=1}^{\infty}$$

tal que $\lambda_{J_m}^m(B_m) > 0$ si $\mu_{J_m}(B_m) > 0$ siendo B_m abierto o un μ_{J_m}-átomo. Finalmente escogemos una sucesión $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ como en la prueba del Lema 5.4.9, i.e, positiva, decreciente y que tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m = 1$$

Definimos ahora

$$\nu_{J_n} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \lambda_{J_n}^m$$

para $n = 1, 2, \ldots$. De nuevo, el criterio de Weierstrass asegura la convergencia en la topología de la norma. Únicamente resta por demostrar la implicación

$$\mu_{J_m}(B_m) > 0 \Rightarrow \nu_{J_m}(B_m) > 0$$

Al tratar con medidas de Radon podemos asumir que B_m es compacto e incluido en C_{J_m}. Si denotamos por $\mathring{B}_m$ el interior de B_m y $\mu_{J_m}(\mathring{B}_m) > 0$ entonces $\nu_{J_m}(\mathring{B}_m) > 0$. Por tanto, $B_m - \mathring{B}_m$ es un compacto cuyo interior es vacío y tiene medida μ_{J_m} positiva. La propiedad ** implica que $Bm - \mathring{B}_m$ contiene un μ_{Jm}-átomo con medida μ_{Jm} positiva. Finalmente, tenemos que $\nu_{J_m}(Bm - \mathring{B}_m) > 0$. ■

Observación 5.4.12. El Teorema 5.4.1 muestra que la completitud es una condición suficiente para asegurar la existencia de medidas *risk-neutral* proyectivamente equivalentes y que nuevos activos se puedan valorar en mercados que verifican la ausencia arbitraje. Sin embargo, es interesante señalar que la completitud no es necesaria. De hecho, pueden darse diversas alternativas para que la implicación (iv) ⇒ (iii) de la Proposición 5.3.3 se satisfaga.

Una de las más interesantes se obtiene al aplicar los resultados de Balbas et al. [BMM02]. En este caso, se puede considerar un modelo de precios en tiempo discreto

$$S(\omega,t) = \big(S_0(\omega,t), S1(\omega,t), \ldots, Sm(\omega,t)\big) : \Omega \times \{0 < t_1 < t_2 < \cdots\} \to \mathbb{R}^{m+1}$$

con un número finito $m+1 \in \mathbb{N}$ de activos y un número infinito $\{0 < t_1 < t_2 < \cdots\}$ fechas de *trading*. El proceso de precios debe ser adaptado, como es habitual, ante la llegada de nueva información. En este modelo de mercado, la verificación de la ausencia de arbitraje no implica la existencia de medidas martingala, tal y como muestran Back y Pliska [BP91]. Pero si pueden existir medidas martingala proyectivamente equivalentes, tal y como se muestra en Balbás et al. [BMM02] sin tener en consideración la completitud del modelo. Por tanto, si se considera un modelo de periodo único con infinitos activos tal que

$$I = \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0 < t_1 < t_2 < \cdots\}, \quad p_{(a,b)} = S_a(\omega, 0)$$

para cada $(a,b) \in I$ y

$$f_{(a,b)}(\omega) = S_a(\omega, b)$$

para cada $(a,b) \in I$ y casi todo $\omega \in \Omega$, entonces la equivalencia entre (iii) y (iv) en la Proposición 5.3.3 también se satisfará para mercados incompletos. Podríamos denominar este tipo de modelos *finitamente generados* y el Ejemplo 5.3.4 es un caso particular, para $m = 1$, del contraejemplo de Back y Pliska [BP91]. El Ejemplo 5.3.5 muestra que los modelos de un periodo con una cantidad infinto numerable de activos son, en alguna manera, más generales que los modelos dinámicos en tiempo discreto con un conjunto finito de activos.

CAPÍTULO 6

Conclusiones y Futuras Líneas de Investigación

6.1. Conclusiones

El fin del presente Trabajo de Fin de Máster era analizar la evolución de los Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos así como los principales resultados de Análisis Funcional y de Teoría de la Medida utilizados en ellos.

Comenzamos con el caso más sencillo que era el de mercado financiero modelizado mediante un espacio de probabilidad finito. En este primer caso, el Teorema Fundamental puede ser desarrollado de forma matemáticamente precisa y con pleno significado financiero basándose en el concepto de ausencia de arbitraje. La demostración de este primer Teorema Fundamental se apoya principalmente en el Teorema del Hiperplano Separador.

En el capítulo segundo, se aborda la primera extensión del Teorema Fundamental mediante el uso de modelos en tiempo continuo. La idea detrás de esta primera extensión es similar al caso finito. Sin embargo, puesto el problema es ahora de dimensión infinita, es técnicamente más complejo y es necesario utilizar conceptos topológicos en la nueva definición de ausencia de arbitraje. Para ello se define la ausencia de *free lunch* como nuevo requisito del modelo. Todo ello da lugar al Teorema de Kreps-Yan. En este último teorema resultó necesario tomar el cierre en la topología débil* de un conjunto de *pay-offs*. Si bien tomar el cierre de un conjunto es natural desde un punto de vista matemático, de algún modo se destruye el significado financiero del primer Teorema Fundamental, puesto que tomar el cierre en la topología débil* de una familia de *pay-offs* no es una operación muy intuitiva, y no debía interpretarse como una colección más amplia de *pay-offs* más complejos.

En el tercer capítulo, se trata una segunda extensión del Teorema Fundamental. En este caso los precios de los activos son modelado por martingalas localmente acotadas y las estrategias de *trading* mediante procesos predecibles. En este nuevo contexto vuelve a ser necesario redefinir la ausencia de arbitraje y para ello se reemplaza la ausencia de *free lunch* por el concepto de ausencia de *free lunch with vanishing risk*. El objetivo detrás de esta nueva definición es evitar el uso de topologías poco naturales, y volver a tener una interpretación financiera clara. Las demostraciones del tercer y cuarto Teorema Fundamental son muy técnicas y por ello sólo se esbozan los principales argumentos de las mismas.

En el último capítulo, se trata la cuestión de los mercados con infinitos activos. Mediante varios contraejemplos se muestra que la caracterización de ausencia de arbitraje a través de medidas martingala equivalentes falla en general para el caso de mercados con infinitos activos. Para resolver este problema se propone y utiliza el enfoque de sistemas proyectivos para establecer la equivalencia entre ausencia de arbitraje y existencia de medidas martingala proyectivamente equivalentes. Además, dichas medidas proporcionan un método de valoración que puede ser aplicado a nuevos activos. Este análisis es bastante general ya que no se hacen supuestos sobre el conjunto de activos o sobre determinadas propiedades del proceso de precios. Adicionalmente, la equivalencia se da en muchos casos interesantes como el de los mercados completos o *finitamente generados*. Es asimismo reseñable que el hecho de que los mercados *finitamente generados* pueden entenderse como una extensión de algunos modelos dinámicos de valoración.
Para finalizar, cabe destacar que la metodología de valoración proyectivamente equivalente es útil para el caso de mercados más complejos. Este enfoque permite extender el conjunto de estados de la naturaleza e identificarlo con el conjunto de precios que se dan en la realidad. Aunque, según vimos, una equivalencia completa entre la medida de probabilidad inicial y la medida martingala no se da en general. Sin embargo, la existencia de densidades entre las probabilidades iniciales o reales las *risk neutral* está asegurada mediante el concepto de *equivalencia proyectiva* que implica que ambas medidas generan proyecciones equivalentes.

6.2. Futuras Líneas de Investigación

Un primer paso que parece natural como extensión al presente trabajo es la inclusión en el análisis de los resultados de Bálbas et al. [BBM07]. En este artículo se estudia la extensión del Teorema Fundamental en los mercados con un cantidad infinita pero numerable de fechas de *trading*. Para abordar esta cuestión se caracteriza la ausencia de arbitraje mediante la construcción de un sistema proyectivo de medidas de probabilidad que son medidas martingala para cada subconjunto finito de fechas de *trading*. Es decir, se aplica el enfoque proyectivo analizado en el TFM pero para la *dimensión temporal*. Una diferencia interesante de este artículo es el uso del Teorema de Lyapunov con el objetivo de mostrar que la medida martingala equivalente es proyectivamente equivalente si el ratio de Sharpe es acotado superiormente y el mercado es completo. Además se muestra que ratios de Sharpe no acotados carecen de sentido financiero. Por todo ello, parece natural incluir estos resultados en un análisis que podría ser llamado Teorema Fundamental y Enfoque Proyectivo.

Otra futura línea de investigación en matemática financiera es el estudio de los mercados incompletos y la relación entre las medidas de probabilidad real y *risk neutral*. Sería muy interesante generealizar la metodología basada en entropía relativa tal y como se expone en Arrieta [Arr15] para toda tipología de *pay-offs* y no los concretos que son analizados en este artículo. ¿Podría esta generalización apoyarse en el enfoque proyectivo?, esta cuestión me parece de gran interés y una potencial línea de investigación futura.

APÉNDICE A

ELEMENTOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Aquí comienza el apéndice A.

A.1. Teorema del Hiperplano Separador

Sea $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea el conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle v, x \rangle = \alpha\}$. Para cada $x \in H$ se cumple que

$$\langle v, x - \left(\alpha/\|v\|^2\right) v \rangle = 0$$

y por tanto $H = v^{\perp} + \left(\alpha/\|v\|^2\right) v$, es el complemento de H se compone de dos conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle v, x \rangle < \alpha\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle v, x \rangle > \alpha\}$ que coinciden con cada uno de los lados del hiperplano.
El teorema que sigue a continuación afirma que dados dos conjuntos convexos disjuntos, siendo uno de ellos compacto y el otro cerrado, entonces existen dos hiperplanos *paralelos* tales que dichos conjuntos se sitúan estrictamente en diferentes lados de dichos hiperplanos.

Teorema A.1.1. ***Teorema del Hiperplano Separador.***
Sean K y C dos subconjuntos convexos y disjuntos de $\mathbb{R}^n$, siendo K compacto y C cerrado. Entonces existen $v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle v, x \rangle < \alpha_1 < \alpha_2 < \langle v, y \rangle$$

para cada $x \in K$ e $y \in C$.

Demostración. Tomemos la función $f : K \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$, i.e. $f(x)$ es la distancia de x a C. Se comprueba fácilmente que f es continua y dado que K es compacto, existe $x_0 \in K$ tal que f alcanza su mínimo en dicho punto x_0. Sea $y_n \in C$ tal que $\|y_n - x_0\| \to f(x_0)$. Por la ley del paralelogramo se cumple que

$$\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{y_n - x_0}{2} - \frac{y_m - x_0}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|y_n - x_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m - x_0\|^2 - \left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x_0\right\|^2$$

Por convexidad $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in C$, y por tanto, $\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x_0\right\| \geq f(x_0)$, dando lugar a

$$\left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y_n - x_0\|^2 + \frac{1}{2}\|y_m - x_0\|^2 - f^2(x_0)$$

El miembro derecho de esta última expresión converge a 0 cuando $n, m \to \infty$ y por tanto $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy y por consiguiente converge a algún $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Por ser C cerrado se tiene además que $y_0 \in C$. Sea $v = y_0 - x_0$, al ser disjuntos C y K entonces $v \neq 0$, y por tanto

$$0 < \|v\|^2 = \langle v, y_0 - x_0 \rangle = \langle v, y_0 \rangle - \langle v, x_0 \rangle$$

Por último queda probar que $\langle v, x \rangle \leq \langle v, x_0 \rangle$ y que $\langle v, y_0 \rangle \leq \langle v, y \rangle$ para cada $x \in K$ e $y \in C$.
Sea $y \in C$, puesto que C es convexo $y_0 + \lambda(y - y_0), \lambda \in [0,1]$, pertenece a C. Al minimizar y_0 la distancia a x_0, entonces para cada λ se verifica que

$$\|y_0 - x_0\| \leq \|y_0 - x_0 + \lambda(y - y_0)\|$$

Elevando ahora al cuadrado nos encontramos con que

$$0 \leq 2\lambda\langle y_0 - x_0, y - y_0 \rangle + \lambda^2 \|y - y_0\|^2$$

Dividiendo esta última expresión por λ y haciendo $\lambda \to 0$ resulta $\langle v, y - y_0 \rangle \geq 0$ tal y como queríamos. Por analogía se prueba que $\langle v, x \rangle \leq \langle v, x_0 \rangle$ para cada $x \in K$. ■

Definición. Conjunto Polar.
Dado $C \subseteq \mathbb{R}^n$ su conjunto polar, denotado C^0, viene dado por

$$C^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1, \forall x \in C\}$$

En el caso especial de que C es cerrado bajo multiplicación por escalares positivos, se tiene que $C^0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 0$ para cada $x \in C\}$. Para ilustrar el teorema bipolar geométricamente, consideremos un conjunto C en forma de V como dos rayos que salen del origen. Entonces se ve con facilidad que la polar de la polar de C es igual a la envoltura convexa de C. El caso general viene dado por el teorema siguiente.

Teorema A.1.2. *Teorema Bipolar.*
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ con $0 \in C$. Entonces el conjunto bipolar $C^{00} = (C^0)^0$ coincide con $\langle C \rangle$ la envoltura cerrada convexa de C.

Demostración. Está claro que C^{00} es un cerrado convexo que contiene a C, por lo que $\langle C\rangle$ la envoltura cerrada convexa de C es un subconjunto de C^{00}. Para probar la inclusión recíproca razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $C^{00} \not\subseteq \langle C\rangle$, entonces existe un $x_0 \in C^{00}$ que no está en $\langle C\rangle$. Por el teorema del hiperplano separador existen $v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\langle x_0, v\rangle > \alpha_1 > \alpha_2 > \langle y, v\rangle$ para cada $y \in \langle C\rangle$. Puesto que $0 \in C \subseteq \langle C\rangle$ entonces $\alpha_1 > 0$. Dividiendo por α_1 se llega a que existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle x_0, v\rangle > 1 > \langle y, v\rangle$ para cada $y \in \langle C\rangle$. La segunda desigualdad implica que $v \in C^0$, y la primera que $x_0 \notin C^{00}$, i.e. la contradicción buscada. ■

A.2. Espacios Vectoriales Topológicos

Un espacio vectorial E se dice que es un espacio vectorial topológico si está dotado de una topología que es tal que las operaciones de adición y multiplicación por escalares son continuas, Teorema 1.3.3 página 68 del primer tomo de [Val88]. Algunos autores, véase por ejemplo [Rud91] página 7, añaden además el requisito de que todos los puntos de E sean conjuntos cerrados.

En lo que sigue consideraremos sólo los espacios vectoriales topológicos que verifican tanto la continuidad de las aplicaciones adición y multiplicación por escalares como este último requisito de que los puntos del espacio sean conjuntos cerrados.

Es fácil ver que la traslación por un vector fijo y la multiplicación por un escalar distinto de cero son homeomorfismos en un espacio vectorial topológico. Esto implica que la topología es invariante por traslación, lo que significa que un conjunto $A \subseteq E$ es abierto si y sólo si cada una de sus traslaciones $x + A$ es un abierto.

Los espacios vectoriales topológicos tienen buenas propiedades de separación. Esto unido con el hecho de que los puntos son conjuntos cerrados, el siguiente teorema implica por ejemplo, que siempre son de Hausdorff.

Teorema A.2.1. *Sean K y C dos subconjuntos disjuntos de un espacio vectorial topológico E, siendo K compacto y C cerrado. Entonces existe un entorno del origen V tal que $K+V$ y $C+V$ son disjuntos.*

Demostración. La continuidad de la suma implica que para cada entorno del origen W existen entornos del origen V_1 y V_2 tales que $V_1 + V_2 \subset W$. Sea $U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$ entonces U es simétrico, i.e. $U = -U$ y $U + U \subseteq W$. Aplicando el mismo procedimiento para el entorno U vemos que para cada entorno del origen W existe un entorno simétrico U tal que $U + U + U \subseteq W$.
Sea $x \in K$, entonces $E \setminus C$ es un entorno abierto de x. Debido a la invariancia por traslaciones y lo que acabamos de ver en el párrafo anterior, existe un entorno simétrico del origen V_x tal que $x + V_x + V_x + V_x$ no interseca a C. Además la simetría de V_x implica que $x + V_x + V_x + V_x$ y C son disjuntos. Al ser K compacto está recubierto por un número finito de conjuntos $x_1 + V_{x_1}, \dots, x_n + V_{x_n}$. Si ponemos $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$, entonces

$$K + V \subseteq \bigcup_i \left(x_i + V_{x_i} + V\right) \subseteq \bigcup_i \left(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}\right)$$

Y ninguno de los términos de la última unión interseca con $C+V$. ■

Definición. Cono.
Dado un conjunto C de un espacio vectorial, se dice que es un *cono* si para cada $x \in C$ se verifica que $ax \in C$ para cada $a \geq 0$.

Definición. Conjunto Convexo.
Dado un espacio vectorial E, un conjunto $C \subseteq E$, se dice que es *convexo* si se verifica

$$\alpha C + (1-\alpha)C \subset C$$

para cada α tal que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Definición. Conjunto Equilibrado.
Dado un espacio vectorial E, un conjunto $B \subseteq E$ se dice que es *equilibrado* si $\alpha B \subseteq B$ para cada escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| \leq 1$.

Definición. Conjunto Absolutamente Convexo.
Dado un espacio vectorial E, un conjunto $B \subseteq E$ se dice que es *absolutamente convexo* si B es equilibrado y convexo.

Definición. Conjunto Absorbente.
Dado un espacio vectorial E, un $V \subseteq E$ se dice que es *absorbente* en E si para cada $x \in E$ existe un número real $r(x) > 0$ tal que $\lambda x \in V$ si $|\lambda| \leq r(x)$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Lema A.2.2. *Sea V un entorno del origen en un espacio vectorial topológico E y (r_n) una sucesión de números reales tendiendo a infinito. Entonces*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} r_n V = E$$

***Demostración*.** Fijemos $x \in E$. Como V es un abierto de E y la aplicación de $\mathbb{R} \to E$ dada por $\lambda \to \lambda x$ es continua, entonces $\{\lambda : \lambda x \in V\}$ es un abierto de $\mathbb{R}$. Este último conjunto contiene al cero, y por tanto contiene a $1/r_n$ para n suficientemente grande. ■

Este lema implica que si V es un entorno del origen en un espacio vectorial topológico E, entonces V es absorbente en E.

Definición. Funcional de Minkowski.
Dado un subconjunto absolutamente convexo y absorbente A en un espacio vectorial topológico E, definimos el *funcional de Minkowski* la aplicación $\mu_A : E \to [0,\infty)$ dada por

$$\mu_A(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$$

Al ser A absorbente el conjunto $\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ no es vacío y está acotado inferiormente por cero por lo que μ_A está bien definido.

El lema siguiente recoge importantes propiedades del funcional de Minkowski que serán utilizadas más adelante.

Lema A.2.3. *Sea A un subconjunto convexo y absorbente en un espacio vectorial topológico E sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, y sea $\mu_A(x)$ su funcional de Minkowski, entonces se verifican las propiedades*

(i) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$ *para cada* $x, y \in E$

(ii) $\mu_A(\alpha x) = \alpha \mu_A(x)$ *para cada* $x \in E$ *y* $\alpha \geq 0$

Demostración. Para $x, y \in E$ y $\varepsilon > 0$ sean $t = \mu_A(x) + \varepsilon$, $s = \mu_A(y) + \varepsilon$. Entonces por definición de μ_A, $x/t \in A$ e $y/s \in A$. De aquí que la combinación convexa

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t}\frac{x}{t} + \frac{s}{s+t}\frac{y}{s}$$

también pertenezca a A. Queda así demostrada la primera propiedad enunciada en el lema. La segunda propiedad es sencilla de probar.

■

Lema A.2.4. *Cada entorno del origen en E contiene un entorno del origen equilibrado.*

Demostración. Sea V un entorno de $0 \in \mathbb{R}$. Puesto que la multiplicación por escalares es continua entonces existe un $\delta > 0$ y un entorno del origen U en E tal que $\alpha U \subseteq V$ si $|\alpha| < \delta$. Por tanto $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$ es un entorno equilibrado del origen en E. ■

Definición. Funcional Lineal Acotado.
Una aplicación lineal $\Lambda : E \to \mathbb{R}$ se llama *funcional lineal* en el espacio E. Un funcional lineal en E es *acotado* en $A \subseteq E$ si existe un número $K > 0$ tal que $|\Lambda(x)| \leq K$ para cada $x \in A$.

Teorema A.2.5. *Sea Λ un funcional no trivial en un espacio vectorial topológico E. Entonces Λ es continuo si y sólo si Λ es acotado en un entorno del origen.*

Demostración. Supongamos que Λ es continua, entonces su núcleo $N = \{x \in E : \Lambda(x) = 0\}$ es cerrado. Como Λ es no trivial, existe un $x \in E \setminus N$. Por el Teorema A.2.1 existen un entorno equilibrado del origen V tal que $x + V$ y N son disjuntos, por lo que $\Lambda(V)$ es un subconjunto equilibrado de $\mathbb{R}$. Si $\Lambda(V)$ no fuera acotado entonces, al ser equilibrado, sería todo $\mathbb{R}$. En particular existe $y \in V$ tal que $\Lambda(y) = -\Lambda(x)$, pero entonces $x + y \in N$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\Lambda(V)$ es acotado, i.e. Λ es acotado en V.
Recíprocamente, supongamos que $|\Lambda(x)| \leq M$ para todo $x \in V$. Para $r > 0$, sea $W = (r/M)V$, entonces para $x \in W$, sea $x = (r/M)y$ para $y \in V$, tenemos que $|\Lambda(x)| = (r/M)|\Lambda(y)| \leq r$. Es decir, Λ is continua en el origen, y por la invarianza ante traslaciones, es continua en todos los puntos. ■

A.3. El Teorema de Hahn-Banach

La demostración de la versión del Teorema de Hahn-Banach que vamos a ver a continuación se basa en el axioma de elección en la forma del Teorema de maximalidad de Hausdorff:
Cada subconjunto no vacío parcialmente ordenado P contiene un subconjunto totalmente ordenado Q que es maximal respecto de la propiedad de ser totalmente ordenado.
Una demostración de este hecho puede verse por ejemplo en [Rud87], pp. 395-396.

Teorema A.3.1. ***Teorema de Hahn-Banach.***
Sean E un espacio vectorial real, $p : E \to \mathbb{R}$ verificando que $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ y que $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para cada $x, y \in E$, $\alpha \geq 0$. Entonces si f es un funcional lineal en un subespacio M de E tal que $f(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$, f se extiende a un funcional lineal Λ para todo el espacio E, tal que $\Lambda(x) \leq p(x)$ para cada $x \in E$.

***Demostración*.** Supongamos que M es un subespacio propio de E, y tomamos $x_1 \in E - M$. Para $x, y \in M$ se cumple $f(x)+f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-x_1)+p(y+x_1)$, de aquí que $f(x)-p(x-x_1) \leq p(y+x_1) - f(y)$. Y por tanto existe α tal que

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_1), f(y) + \alpha \leq p(y + x_1) \tag{A.1}$$

para cada $x, y \in M$. Sea M_1 el espacio vectorial engendrado por M y x_1. Un elemento de M_1 es de la forma $x + \lambda x_1$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Así podemos extender f para M_1 definiendo $f_1(x+\lambda x_1) = f(x)+\lambda\alpha$. Entonces f_1 está bien definido y es un funcional lineal sobre M_1, además las desigualdades dadas por (A.1) implican que $f_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M_1$.
Sea C la colección de pares (M', f'), donde M' es un subespacio de E que contiene M y f' es una extensión lineal de f a M' tal que $f \leq p$ en M'. Establecemos un orden en C diciendo que $(M', f') \leq (M'', f'')$ si $M' \subseteq M''$ y $f''|_{M'} = f'$. Éste es un orden parcial y C es un conjunto no vacío. Por lo tanto, por el teorema de maximalidad de Hausdorff, podemos extraer un subconjunto maximal C' totalmente ordenado. Sea $\tilde{M}$ la unión de todos los M' tales que $(M', f') \in C'$. Entonces $\tilde{M}$ es un subespacio de E (Verif.). Si $x \in \tilde{M}$, entonces $x \in M'$ para algún M' tal que $(M', f') \in C'$. Ponemos $\Lambda(x) = f'(x)$. Esto define a Λ como una función lineal sobre $\tilde{M}$ que cumple además que $\Lambda \leq p$. Si $\tilde{M}$ fuera un subespacio propio de E por lo apuntado anteriormente Λ sería nueva extensión, contradiciendo la maximalidad de C'. Por lo tanto, $\tilde{M} = E$. Esto completa la prueba, reseñando además que $\Lambda \leq p$ implica que $-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda(x)$ para todo $x \in E$. ∎

Antes de usar el teorema de Hahn-Banach en la prueba de la versión para dimensión infinita del teorema del hiperplano separador, recordaremos algunos conceptos usuales del Análisis Funcional.

Definición. Espacio Localmente Convexo.
Un espacio vectorial topológico E se dice que es *localmente convexo* si para cada entorno del origen V existe un entorno del origen U convexo tal que $U \subseteq V$.

Definición. Espacio Dual.
El espacio de aplicaciones lineales continuas de E en $\mathbb{R}$ será denotado por E^* y es llamado *dual* de E. El espacio dual es tratado con más detalle en la siguiente sección.

Teorema A.3.2. ***Teorema de Separación.***
Sean A y B dos conjuntos convexos, disjuntos y no vacíos de un espacio vectorial topológico E, entonces:

i Si A es abierto existen $\Lambda \in E^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\Lambda(x) < \gamma \leq \Lambda(y)$ para cada $x \in A$ e $y \in B$.

ii Si E es localmente convexo, A es compacto y B es cerrado, existen $\Lambda \in E^*$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Lambda(y)$ para cada $x \in A$ e $y \in B$.

Demostración. *(i).* En primer lugar, escogemos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ y ponemos $x_0 = b_0 - a_0$. Definimos ahora $C = A - B + x_0$ y tenemos en cuenta que C es un entorno del origen abierto y convexo. Sea μ_C el funcional de Minkowski asociado a C.
Sea M el subespacio lineal engendrado por x_0 y definamos un funcional lineal f en M poniendo $f(\lambda x_0) = \lambda$. Dado que A y B son disjuntos, $x_0 \notin C$ por lo que $\mu_C(x_0) \geq 1$ y:

i si $\lambda \geq 0$ se tiene que $f(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda \mu_C(x_0) = \mu_C(\lambda x_0)$.

ii si $\lambda < 0$ se tiene que $f(\lambda x_0) < 0 \leq \mu_C(\lambda x_0)$.

Por el Lema A.2.3 y el Teorema A.3.1 (Hahn-Banach), el funcional f se extiende a un funcional lineal Λ en E, y la extensión satisface $\Lambda(x) \leq \mu_C(x)$ para todo $x \in E$. En particular $\Lambda \leq 1$ en C, y por tanto, $|\Lambda| < 1$ en el entorno del origen $C \cap (-C)$. Por el teorema A.2.5 Λ es continua,i.e., $\Lambda \in E^*$.
Por otra parte, para $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que

$$\Lambda(a) - \Lambda(b) + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) < 1$$

ya que $a - b + x_0 \in C$ y C es abierto entonces $\Lambda(a) < \Lambda(b)$. De esto último se sigue que $\Lambda(A)$ y $\Lambda(B)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos y convexos, quedando además el primero a la izquierda del segundo. Dado que A es abierto y no constante, $\Lambda(A)$ es también abierto. Tomando γ como el supremo de $\Lambda(A)$ se completa la demostración. ■

Demostración. *(ii).* Por el Teorema A.2.1 y la convexidad local de E existe un entorno convexo y abierto del origen tal que $(A + V) \cap B = \emptyset$. Por la prueba de la parte (i) existe $\Lambda \in E^*$ tal que $\Lambda(A + V)$ y $\Lambda(B)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos y convexos, quedando el primero a la izquierda del segundo y siendo el primero abierto. Además, $\Lambda(A)$ es un subconjunto compacto de $\Lambda(A + V)$. Completándose con facilidad la el resto de la demostración. ■

Corolario A.3.3. *Si E es un espacio vectorial topológico localmente convexo, E^* separa los puntos de E.*

Demostración. Dados dos puntos distintos $x, y \in E$, aplicamos el teorema de separación con $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$ ■

Definición. Conjunto Polar.
Dado $x \in E$ y $\Lambda \in E^*$ vamos a denotar, en analogía con el caso finito-dimensional $\Lambda(x) = \langle x, \Lambda \rangle$. Dado $C \subseteq E$ su conjunto *polar*, denotado C^o, viene dado por

$$C^o \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda \in E^* : \langle x, \Lambda \rangle \leq 1, \forall x \in C\}$$

De forma análoga el conjunto *bipolar* denotado por $C^{oo} = (C^o)^o$, viene dado por

$$C^{oo} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : \langle x, \Lambda \rangle \leq 1, \forall \Lambda \in C^0\}$$

Teorema A.3.4. ***Teorema Bipolar.***
El conjunto bipolar C^{oo} de un subconjunto C de un espacio vectorial topológico localmente convexo E coincide con el cierre de la envoltura convexa de C.

Demostración. Está claro que C^{oo} es un conjunto convexo y cerrado que contiene a C por lo que el cierre A de la envoltura convexa de C es un subconjunto de C^{oo}. Supongamos que la inclusión inversa no es cierta. Entonces existe un $x_0 \in C^{oo}$ que no está en C. Por el teorema de separación entonces existe un funcional $\Lambda \in E^*$ tal que $\Lambda(x_0) > 1 > \Lambda(y)$ para cada $y \in C$. La segunda desigualdad implica que $\Lambda \in C^o$, y la primera implica que $x_0 \notin C^{oo}$, que es una contradicción. ■

A.4. Espacio Dual

El *dual* de un espacio vectorial topológico E es el espacio E^* de todos los funcionales lineales y continuos sobre E. Por el Teorema A.2.5. E^* es el mismo espacio que el de las formas lineales que son acotadas en un entorno del origen. Es fácil ver que un funcional lineal Λ pertenece a E^* si y sólo si la imagen de la bola unidad en E por Λ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. En ese caso, definimos la norma de Λ por

$$\|\Lambda\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} |\Lambda(x)|$$

verificándose que $|\Lambda(x)| \leq \|\Lambda\| \|x\|$ para cada $x \in E$.

Sea E^* el dual de un espacio vectorial topológico E. Cada punto $x \in E$ induce un funcional lineal sobre E^*, definido por $\Lambda \to \Lambda(x)$. La topología débil* de E^* es la topología más débil, i.e. la más pequeña, que hace todas estas aplicaciones continuas.

El siguiente teorema establece que E^* con la topología débil* es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Esto implica, por tanto, que podemos aplicar el teorema de separación al mismo. En general, el espacio E^* dotado de la topología débil* no es un espacio de Banach. De hecho, ni siquiera es metrizable si E es un espacio de Banach de dimensión infinita.

Teorema A.4.1. *El espacio dual E^* de un espacio vectorial topológico E, dotado de la topología débil* es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Además su espacio dual E^* viene dado por* $\{\Lambda \to \Lambda(x) : x \in E\}$.

Demostración. Denotemos por f_x el funcional lineal $\Lambda \to \Lambda(x)$. Si $\Lambda \neq \Lambda'$ en E^*, entonces existe un $x \in E$ tal que $f_x(\Lambda) \neq f_x(\Lambda')$. Por lo tanto, existen en $\mathbb{R}$ entornos disjuntos U de $f_x(\Lambda)$ y U' de $f_x(\Lambda')$. Puesto que f_x es continua, $f_x^{-1}(U)$ y $f_x^{-1}(U')$ son entornos disjuntos de Λ y Λ'. Esto prueba que E^* es Hausdorff y, en particular que sus puntos son cerrados.

Para demostrar que la topología débil* es invariante por traslación, tomamos el abierto

$$U = \{\Lambda : \Lambda(x_1) \in B_1, \ldots, \Lambda(x_n) \in B_n\}$$

y $\Lambda' \in E^*$. Entonces

$$\Lambda' + U = \{\Lambda : \Lambda(x_1) \in B_1 + \Lambda'(x_1), \ldots, \Lambda(x_n) \in B_n + \Lambda'(x_n)\}$$

es también un abierto. De esto se sigue que la topología es invariante por traslación. Los conjuntos abiertos V de la forma:

$$V = \{\Lambda : |\Lambda(x_1)| < r_1, \ldots, |\Lambda(x_n)| < r_n\} \tag{A.2}$$

para $x_1, \ldots, x_n \in E$ y $r_1, \ldots, r_n > 0$ forman un sistema fundamental de entornos del origen. Es fácil ver que los conjuntos V de esta forma son absolutamente convexos y absorbentes. En particular E^* es un espacio localmente convexo.

Para conjuntos V de la forma dada por (A.2) se verifica que $V/2 + V/2 = V$ y por tanto la suma es continua en $(0,0)$. En cuanto a la multiplicación por escalares, supongamos que $\alpha\Lambda \in V$ para algún escalar no nulo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\Lambda \in E^*$. Por otra parte, existe $t > 0$ tal que $t < 1/|\alpha|$ y $\Lambda \in tV$. Para $\varepsilon > 0$ y $\Lambda' \in tV$ se tiene que $(\alpha+\varepsilon)\Lambda' \in (\alpha+\varepsilon)tV$. Al ser V equilibrado, $(\alpha+\varepsilon)\Lambda' \in V$ para todo ε tal que $|\alpha|t + |\varepsilon|t \leq 1$. Puesto que $|\alpha|t < 1$ hay un intervalo no vacío alrededor de 0 satisfaciendo esta condición. Por lo tanto, la multiplicación por escalares es continua.

Resta identificar el dual de E^* dotado de la topología débil*. Si $x \in E$, la aplicación lineal $\Lambda \to \Lambda(x)$ es débil*-continua por definición de topología débil*. Recíprocamente, sea $f : E^* \to \mathbb{R}$ débil*-continua. Por el TeoremaA.2.5, f es acotada en un entorno de 0, y por tanto también en un conjunto V de la forma (A.2). Esto implica que f se anula en el conjunto

$$N = \{\Lambda : \Lambda(x_1) = \cdots = \Lambda(x_n) = 0\}$$

N es el núcleo de la aplicación lineal $\pi : E^* \to \mathbb{R}^n$ definida por $\pi(\Lambda) = (\Lambda(x_1), \ldots, \Lambda(x_n))$. De ello se desprende que la aplicación lineal dada por $F : \pi(E^*) \to \mathbb{R}$ dada por $F(\pi(\Lambda)) = f(\Lambda)$ está bien definida. Podemos extender F a un funcional lineal en $\mathbb{R}^n$. Es entonces necesariamente de la forma $F(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$ para ciertos $\alpha_i \in \mathbb{R}$. En particular

$$f(\Lambda) = F\big(\Lambda(x_1), \ldots, \Lambda(x_n)\big) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Lambda(x_i)$$

Y por tanto $f(\Lambda) = \Lambda(x)$ siendo $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. ■

Si E es un espacio de Banach su dual E^* está dotado de una norma, y la bola unidad en E^* es el conjunto $\{\Lambda \in E^* : |\Lambda(x)| \leq \|x\| \text{ para cada } x \in E\}$. En la topología inducida por la norma este conjunto no es compacto en general, como ocurre por ejemplo en un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Sin embargo, en la topología débil* siempre es compacto.

Teorema A.4.2. *Banach-Alaoglu.*
La bola unidad del dual de un espacio de Banach es siempre débil-compacta.*

Demostración. Sea E un espacio de Banach y B^* la bola unidad en su dual. Por el teorema de Tychonoff, $P = \prod_{x \in E}[-\|x\|, \|x\|]$ es compacto con respecto a la topología producto en $\mathbb{R}^n$. Podemos ver P como una colección de funciones sobre E, con $f \in P$ si y sólo si $|f(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Y como $B^* \subseteq E^* \cap P$, entonces B^* hereda dos topologías: la topología débil* de E^* y la topología producto de P. Estas dos topologías coinciden en B^*. Para comprobar esta última afirmación, tomamos $\Lambda_0 \in B^*$. Los conjuntos de la forma:

$$V_1 = \{\Lambda \in E^* : |\Lambda(x_1) - \Lambda_0(x_1)| < r_1, \ldots, |\Lambda(x_n) - \Lambda_0(x_n)| < r_n\}$$

y

$$V_2 = \{f \in P : |f(x_1) - \Lambda_0(x_1)| < r_1, \ldots, |f(x_n) - \Lambda_0(x_n)| < r_n\}$$

Donde $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in E, r_1, \ldots, r_n > 0$, forman una base local para las topologías débil* y producto respectivamente en $\Lambda_0 \in B^*$. Puesto que $B^* \subseteq E^* \cap P$, se tiene que $V_1 \cap B^* = V_2 \cap B^*$ y por lo tanto las dos topologías coinciden.

Comprobamos ahora que B^* es cerrado en P. Sea f_0 un elemento del cierre de B* respecto a la topología producto. Para $x, y \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos que el conjunto

$$U = \{f \in P : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon, |f(y) - f_0(y)| < \varepsilon, |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)| < \varepsilon\}$$

es un entorno abierto de f_0. Por lo tanto, existe $f \in U \cap B^*$ y como f es lineal se verifica

$$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) = (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) - \alpha(f_0 - f)(x) - \beta(f_0 - f)(y)$$

y por tanto

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| \leq (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon$$

Puesto que ε es arbitrario, se deduce que f_0 es lineal. Además, por definición de P se verifica que $|f_0(x)| \leq \|x\|$ para cada $x \in E$, por lo que $f_0 \in B^*$. La prueba se completa tras recordar que, como se vio anteriorment, B^* es compacto respecto a la topología producto. Pero por la primera parte de la prueba, la última topología coincide en B^* con la topología débil*. ■

APÉNDICE B

Elementos de Teoría de la Medida y de Martingalas

Aquí comienza el apéndice B.

B.1. Teoría de la Medida

En esta primera sección del apéndice se recogen los conceptos principales de Teoría de la Medida que son utilizados para definir un sistema proyectivo de medidas de Radon. Asimismo se enuncian teoremas y corolarios que han sido utilizados en el capítulo quinto del presente trabajo. Para más detalle se pueden consultar las referencias [Val88], [Sch73] y [BMM02].

B.1.1. Definiciones Básicas

Definición. σ -álgebra de Borel.
Dado Y un espacio topológico de Hausdorff, la *σ-álgebra de Borel*, denotada por β, sobre Y se define como la σ-álgebra engendrada por todos los abiertos de Y.

Definición. Medida Localmente Finita.
Una medida μ sobre los borelianos de un espacio topológico E se dice que es *localmente finita* si para cada $x \in E$ existe un entorno abierto U de x tal que $\mu(U) < \infty$.

Definición. Medida Regular Interior.
Una medida μ sobre Y se dice que es *regular interior* en β si para cada $B \in \beta$ se verifica que $\mu(B) = \sup\left\{\mu(K) : K \subset B,\, K \text{ compacto}\right\}$.

Definición. Medida de Radon.
Una *medida de Radon* μ en Y es una medida positiva localmente finita y regular interior sobre β.

Si μ es una medida de Radon en Y, Z es un espacio topológico de Hausdorff y $f : Y \to Z$ es una aplicación continua entonces, la medida de la imagen $f(\mu)$ dada por $f(\mu)(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)$, para todo conjunto Borel-medible B de Z, es una medida de Radon en Z.

Definición. Sistema Proyectivo.
Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido. Sean una familia de espacios topológicos de Hausdorff $(X_i)_{i\in I}$ y las aplicaciones continuas $\pi_{ij} : X_j \to X_i$, $i, j \in I$, $i \leq j$. Se dice que $(X_i)_{i\in I}$ es un sistema proyectivo de espacios topológicos Hausdorff con aplicaciones π_{ij}, si $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$ para todo $i, j, k \in I$, $i \leq j \leq k$.

Definición. Límite Proyectivo.
El *límite proyectivo* del sistema proyectivo $(X_i)_{i\in I}$ viene dado por el conjunto

$$X = \lim_{i\in I} X_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : x_j = \pi_{jk}(x_k) \text{ si } j, k \in I,\ i \leq j \right\}$$

dotado de la topología producto.
Para cada $i \in I$, la proyección canónica $\pi_i : X \to X_i$ es continua y además $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$ para todo $i, j \in I$, $i \leq j$.

Definición. Sistema Proyectivo de Medidas de Radon.
Un *sistema proyectivo de medidas de Radon* es una familia de medidas de Radon μ_i en X_i, $i \in I$ tales que $\pi_{ij}(\mu_j) = \mu_i$ si $i, j \in I$, $i \leq j$.

Definición. Medida de Radon sobre el Límite Proyectivo.
Una *medida de Radon μ sobre el límite proyectivo X* es el límite proyectivo de las medidas $(\mu_i)_{i\in I}$, denotado por $\mu = \lim_{i\in I} \mu_i$, si $\pi_i(\mu) = \mu_i$ para cada $i \in I$.

B.1.2. Resultados Principales

Teorema B.1.1. *Teorema de Prokhorov.*
Un sistema proyectivo $(\mu_i)_{i\in I}$ de medidas finitas de Radon tiene límite proyectivo si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset X$, tal que $\mu_i(X_i - \pi_i(K)) \leq \varepsilon$, para todo $i \in I$.

Corolario B.1.2. *Un sistema proyectivo numerable $((\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas finitas de Radon tiene límite proyectivo.*

Las demostraciones del Teorema de Prokhorov y del último corolario pueden verse en [Bou69] y en [Sch73].

B.2. Teoría de Martingalas

En esta segunda parte del apéndice B se recogen tanto los conceptos como los principales resultados de Teoría de Martingalas que han sido utilizados en los primeros capítulos.

B.2.1. Definiciones Básicas

Definición. Proceso *cadlag* acotado.
Sea $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una colección de variables aleatorias $X=(X_t)_{t\in T}$ con soporte en $\mathbb{R}^d$ e indexadas por un conjunto $T\subset\mathbb{R}$ se dice que es un *proceso estocástico* (d-dimensional). El proceso estocástico se dice que es *continuo* o *cadlag*[4] si sus trayectorias $t\to X_t(\omega)$ son continuas o *cadlag*. Se dice que el proceso es *acotado* si existe un número finito K tal que $\|X_t\|\leq K$ c.s. para todo t.

Definición. Condiciones Habituales.
Una *filtración* es una colección $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ de sub σ-álgebras de $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}_s\subseteq\mathscr{F}_t$ para todo $s\leq t$. Se dice que se satisfacen las *condiciones habituales* si es continua por la derecha, es decir, $\cap_{s>t}\mathscr{F}_s=\mathscr{F}_t$, para todo t y $\mathscr{F}_0$ contiene todos los conjuntos $\mathbb{P}$-nulos en $\mathscr{F}$.

Definición. Proceso Adaptado Progresivamente Medible.
Un proceso X se dice que es *adaptado* a $(\mathscr{F}_t)$ si para todo t, X_t es $\mathscr{F}_t$-medible. Para un proceso de X y $t\in T$ definimos $\mathscr{F}_t^X$ como la σ-álgebra generado por la colección de variables aleatorias $X_s : s\leq t$. La filtración $(\mathscr{F}_t^X)$ se dice que es la *filtración natural* del proceso X. Es la filtración más pequeña para la cual X es adaptado. Un proceso $X=(X_t)t\in[0,T]$ se dice que es *progresivamente medible* con respecto a la filtración $(F_t)_{t\in[0,T]}$ si para todo t, la aplicación $(\omega,s)\longmapsto X_s(\omega)$ en $\Omega\times[0,T]$ es $\mathscr{F}_t\otimes\mathscr{B}([0,t])$-medible.

Definición. Tiempo de Parada y Sucesión de Localización.
Una variable aleatoria definida en $[0,\infty)$ se llama *tiempo de parada* con respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)$ si $\{\tau\leq t\}\in\mathscr{F}_t$ para cada t. Si τ es un tiempo de parada y X un proceso, el *proceso parado* X^τ se define por $X_t^\tau=X_{\tau\wedge t}$. Una *sucesión de localización* es una secuencia de tiempos de parada τ_n creciente c.s. hasta infinito.

Se dice que un proceso de X tiene la propiedad P *localmente* si existe una sucesión de localización τ_n tal que para cada n, el proceso parado X^τ tiene la propiedad P.

Definición. Martingala.
Un proceso M se dice que es *martingala* respecto a la filtración $(\mathscr{F}_t)$ si cada M_t es integrable y para todo $s\leq t$ se cumple que $\mathbb{E}\left[M_t|\mathscr{F}_s\right]=M_s$ casi seguro. De acuerdo con la notación previamente introducida el proceso M se llama una *martingala local* si existe una secuencia de localización

[4]Del francés '*continue à droite, limite à gauche*', i.e. continuo por la derecha con límite por la izquierda.

τ_n tal que para cada n, el proceso detenido M^{τ_n} es una martingala. Cada martingala es una martingala local pero no al contrario.

B.2.2. Resultados Principales

Dada una filtración $(\mathscr{F}_t)$ un tiempo de parada τ se define

$$\mathscr{F}_\tau = \left\{A \in \mathscr{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \text{ para todo } t\right\}$$

El conjunto $\mathscr{F}_\tau$ es siempre una σ-álgebra y debe ser considerado como la colección de eventos que describen la historia hasta tiempo τ.

Teorema B.2.1. ***Teorema de la parada opcional.***
Sea M una martingala cadlag uniformemente integrable. Entonces para todo tiempo de parada $\sigma \leq \tau$

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathscr{F}_\sigma] = M_\sigma$$

Teorema B.2.2. ***Teorema de Kakutani.***
Sea $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias positivas, independientes y con media igual a1. Definimos $M_0 = 1$ y $M_n = X_1 X_2 \cdots X_n$. Se verifica que M es uniformemente integrable si y sólo si

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \mathbb{E}\left[\sqrt{X_n}\right]\right) < \infty$$

Si M es no uniformemente integrable, entonces $M_n \to \infty$ casi seguro.

Corolario B.2.3. *Sean $X = (X_1, X_2, \ldots)$ e $Y = (Y_1, Y_2, \ldots)$ dos sucesiones de variables aleatorias independientes. Supongamos que X_i tiene una densidad f_i positiva con respecto a una medida dominante μ, e Y_i tiene una densidad positiva g_i con respecto a μ. Entonces, las leyes de las sucesiones X e Y son medidas de probabilidad equivalentes en $(\mathbb{R}^\infty, \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty))$ si y sólo si*

$$\sum_{i=1}^{n} \int \left(\sqrt{f_i} - \sqrt{g_i}\right)^2 d\mu < \infty$$

Si las leyes no son equivalentes entonces, son mutuamente singulares.

Demostración. Sea $(\Omega, \mathscr{F}) = (\mathbb{R}^\infty, \mathscr{B}(\mathbb{R}^\infty))$ y $Z = (Z_1, Z_2, \ldots)$ el proceso de la coordinadas sobre $(\Omega, \mathscr{F})$, tal que $Z_i(\omega) = \omega_i$. Sea $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}$ la σ-álgebra generada por $Z_1, \ldots, Z_n$. Dado que las densidades f_i y g_i son todas positivas, las distribuciones de $\mathbb{P}_X$ y $\mathbb{P}_Y$ de las sucesiones X e Y son equivalentes en $\mathscr{F}_n$. Dado $A \in \mathscr{F}_n$ se tiene que

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A M_n d\mathbb{P}_Y$$

donde la derivada de Radon Nikodym viene dada por $M_n = \prod_{i=1}^n f_i(Z_i)/g_i(Z_i)$. Notemos que bajo $\mathbb{P}_Y$, el proceso M es una martingala a la cual se puede aplicar el teorema anterior. Se verifica fácilmente que las medidas $\mathbb{P}_X$ y $\mathbb{P}_Y$ son equivalentes en toda la σ-álgebra $\mathscr{F}$ si y sólo si M es uniformemente integrable con respecto a $\mathbb{P}_Y$. Por lo tanto, por el teorema anterior, las medidas son equivalentes si y sólo si equivalente si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-\int\sqrt{f_i g_i}d\mu\right)<\infty$$

La demostración de la primera parte se completa notando que $\int(\sqrt{f_i}-\sqrt{g_i})^2 d\mu = 2-2\int\sqrt{f_i g_i}d\mu$.

Si $\mathbb{P}_X$ y $\mathbb{P}_Y$ no son equivalentes, entonces M no es uniformemente integrable respecto a $\mathbb{P}_Y$. Por lo tanto, aplicando de nuevo el teorema anterior, $M_n \to 0$ $\mathbb{P}_Y$-c.s. Podemos invertir los papeles de X e Y, lo que equivale a reemplazar M por $1/M$. Entonces, si $\mathbb{P}_X$ y $\mathbb{P}_Y$ no son equivalentes, $1/M_n \to 0$ $\mathbb{P}_X$-c.s. Se sigue que para el evento $A=\{M_n\to 0\}$ se tiene $\mathbb{P}_Y(A)=1$ y $\mathbb{P}_X(A)=0$. ∎

Ejemplo B.2.4. Sean $X=(X_1,X_2,\dots)$ e $Y=(Y_1,Y_2,\dots)$ dos sucesiones de variables aleatorias independientes. Supongamos que $\mathbb{P}(X_i=1)=1-\mathbb{P}(X_i=-1)=1/2$ y que $\mathbb{P}(Y_i=1)=1-\mathbb{P}(Y_i=-1)=1/2+\varepsilon_i$ para algún $\varepsilon_i\in(-1/2,1/2)$. Tomando la medida de conteo μ, $f_i(1)=f_i(-1)=1/2$ y $g_i(1)=1-g_i(-1)=1/2+\varepsilon_i$, y aplicando el corolario anterior, las leyes de las sucesiones X e Y son equivalentes si y sólo si

$$\sum_{i\in\mathbb{N}-\{0\}}\left(\left(\sqrt{1/2}-\sqrt{1/2+\varepsilon_i}\right)^2+\left(\sqrt{1/2}-\sqrt{1/2-\varepsilon_i}\right)^2\right)<\infty$$

Por otra parte, el desarrollo en serie de Taylor para $h(x)=\left(\sqrt{1/2}-\sqrt{1/2+x}\right)^2+\left(\sqrt{1/2}-\sqrt{1/2-x}\right)^2$ se comporta como un múltiplo de x^2 en torno a $x=0$. Resulta por tanto que las sucesiones son equivalentes si y sólo si $\sum_i \varepsilon_i^2<\infty$.

Teorema B.2.5. *Si X es un semimartingala cadlag e Y es un proceso predecible localmente acotado, entonces se verifica que:*

i Existe una forma cadlag de $Y\cdot X$ que además es una semimartingala.

ii Si X es una martingala local, entonces dicha forma es una martingala local.

iii Si X es continua, entonces existe una versión continua de $Y\cdot X$.

iv Los procesos $\Delta(Y\cdot X)$, donde $Y\cdot X$ es una versión cadlag, e $Y\Delta X$ son indistinguibles.

Lema B.2.6. *Si X es una semimartingala cadlag e Y_n es una sucesión de procesos predecibles tales que, para cada n, $Yn\to Y$ puntualmente en $[0,\infty)\times\Omega$ y $|Y_n|\le K$ para un proceso predecible localmente acotado K, entonces las formas cadlag de $Y_n\cdot X$ e $Y\cdot X$ satisfacen*

$$\sup_{s\le t}\left|(Y_n\cdot X)_s-(Y\cdot X)_s\right|\xrightarrow{\mathbb{P}}0$$

para todo $t\ge 0$.

Las demostraciones de este último lema como la de los teoremas B.2.2 y B.2.5 pueden verse con detalle en [Wil91] y en [CW90].

Bibliografía

[Arr15] D. Arrieta, (2015). ***Minimum Relative Entropy and Cliquet Hedging***. Wilmott Magazine, July 2015, pp. 71-81.

[BMM02] A. Balbás, M. Mirás, M.J. Muñoz-Bouzo, (2002). ***Projective System Approach to the Martingale Characterization of the Absence of Arbitrage***. Journal of Mathematical Economics, vol. 37, pp. 311-327.

[BBM07] A. Balbás, R. Balbás, S. Mayoral, (2007). ***Risk-neutral valuation with infinitely many trading dates***. Mathematical and Computer Modelling 45, pp. 1308-1318.

[BD07] A. Balbás, A. Downarowicz, (2007). ***Infinitely Many Securities and the Fundamental Theorem of Asset Pricing***. Mediterranean Journal of Mathematics 4, pp. 321-341.

[BP91] K. Back, S. Pliska, (1991). ***On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space***. Journal of Mathematical Economics, vol. 20, pp. 1-18.

[Bou69] N. Bourbaki, (1969). ***Eléments de Mathématique***, Chapitre IX, Intégration. Diffusion C.C.L.S. Paris.

[CW90] K.L. Chung, R.J. Williams (1990). ***Introduction to stochastic integration***. Second edition. Birkhäuser, London.

[Cla93] S.A. Clark (1993). ***The valuation problem in arbitrage price theory***. Journal of Mathematical Economics 22 (5). pp. 463-478.

[Con90] J.B. Conway, (1990). ***A course in functional analysis***. Volume 96 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second edition.

[DMW90] R.C. Dalang, A. Morton, W. Willinger, (1990). ***Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models***. Stochastics and Stochastic Reports 29, pp. 185-201.

[DS94] F. Delbaen, W. Schachermayer, (1994). ***A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing***. Mathematische Annalen, vol. 300, pp. 463-520.

[DS98] F. Delbaen, W. Schachermayer, (1998). ***The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes***. Mathematische Annalen 312 (2). pp. 215-250.

[DS06] F. Delbaen, W. Schachermayer, (2006). ***The Mathematics of Arbitrage***. Springer Finance.

[Gro54] A. Grothendieck, (1954). ***Espaces vectoriels topologiques***. Sociedade de Matematica de São Paulo, São Paulo.

[HK79] J.M. Harrison, D.M. Kreps, (1979). ***Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets***. Journal of Economic Theory, vol. 20, pp. 381-408.

[HP81] J.M. Harrison, S.R. Pliska, (1981).***Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continous Trading***. Stochastic Processes and their Applications, vol. 11, pp. 215-260.

[JS98] J. Jacod, A. Shiryaev, (1998). ***Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case***. Finance and Stochastics 2(3), pp. 259-273.

[Kre81] D.M. Kreps, (1981). ***Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many Commodities***. Journal of Mathematical Economics, vol. 8, pp. 15-35.

[Mem80] J. Mémin, (1980). ***Espaces de semi martingales et changements de probabilité***. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 52, pp.9-39.

[Rud87] W. Rudin, (1987). ***Real and complex analysis***. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition.

[Rud91] W. Rudin, (1991). ***Functional Analysis***. McGraw-Hill, Inc.

[Sak33] S. Saks, (1933). ***Addition to the note on some functionals***. Trans. Amer.Math. Soc. 35, pp. 965?970.

[Sch92] W. Schachermayer, (1992). ***A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time***. Insurance: Mathematics and Economics, vol. 11, no. 4, pp. 249-257.

[Sch93] W. Schachermayer, (1993). ***A Counter-Example to several Problems in the Theory of Asset Pricing***. Mathematical Finance, vol. 3, pp. 217-229.

[Sch73] L. Schwartz, (1973). ***Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures***. Oxford University Press. London.

[Val88] M. Valdivia Ureña, (1988). ***Análisis Matemático V***. Tomos I y II, UNED, Madrid.

[Wil91] D. Williams, (1991). ***Probability with Martingales***. Cambridge University Press.