Aproximación a FX y Productos Quanto en el Marco Black-Scholes

Trabajo aprobado para la obtención del Título de Master en Matemáticas Avanzadas de la UNED.

Especialidad de Investigación Operativa y Estadística

Autor: D. Marcos Javier Olza Tapiz
Tutor: Dr. D. Ricardo Vélez Ibarrola

11 de marzo de 2015

Abstract

This work deals with how to price some financial contracts which have exposure to the risk of the currency exchange rate and the underlying price risk. The mainframe of this work is the Black-Scholes market model and the contracts will be the simplest derivatives, which will serve as an introduction to the field of Foreign Exchange and Quanto Derivatives.

Resúmen

En este trabajo se trata la valoración de algunos productos financieros que tiene exposición al riesgo de cambio de divisas y al de cambio de precios del subyacente. El marco de este trabajo es el modelo de mercado Black-Scholes y los productos financieros serán los derivados más sencillos, de forma que nos sirva de introducción al campo de negociación de divisas y derivados tipo quanto.

Keywords: **Quanto, Quanto products, FX, FOREX, Black-Scholes, Risk Neutral Pricing, Quanto Forwards, valoración de productos quanto, valoración FX**

Dedicatoria

A mi mujer y a mis hijos, que habiendo padecido mis ausencias para completar este proyecto, han creído en mi y no han dejado de apoyarme.

Agradecimientos

A Dios siempre. También han colaborado Juan Carlos Cordón, que me ha facilitado valiosa documentación para el estudio y disfrutado conmigo alguna asignatura de la carrera en la UNED y Pedro Nuño, que con el anterior asistieron a las pruebas de la presentación de este TFM e hicieron valiosas aportaciones para su mejora. Juanjo Gibaja tambien me facilito interesante bibliografía para el estudio del Master.
Con un recuerdo especial para Jesús De la Cal Aguado, profesor, mentor y amigo que nos dejó para siempre.

Prefacio

En finanzas, una opción sobre tasas de descuento en divisas, comúnmente denominada FX option, es un instrumento financiero derivado que proporciona a su propietario el derecho pero no la obligación a cambiar dinero denominado en una divisa, que llamaremos local o doméstica, por dinero denominado en otra divisa distinta, que llamaremos foránea a una tasa de descambio previamente acordada, que denominaremos Strike, y en una fecha prefijada, denominada madurez de la opción.
Este tipo de instrumentos financieros se regulan mediante contratos que admiten diversas modalidades, y que, al involucrar diferentes divisas, se denominan genéricamente productos Quanto.
Nadie conoce con precisión la evolución en el tiempo de las diversas variables que intervienen en la caracterización del valor de estos instrumentos, y este ambiente de incertidumbre se intenta abordar mediante su conversión en un ambiente de riesgo a través de su modelización utilizando para su descripción teórica la Teoría de la Probabilidad, y en particular la parte referida a Procesos Estocásticos.
En este trabajo se intenta hacer un abordaje elemental de las características de los productos quanto más simples en el marco del modelo Black-Scholes. Tras hacer un resumen de los requisitos matemáticos imprescindibles para ello, se procede al abordaje del tema y se procede al cálculo de diversos productos. A pesar de la enorme importancia de tener en cuenta los aspectos de modelos de volatilidad y de la dinámica de los tipos de interés, no se entra en los mismos por hallarse fuera de los objetivos marcados en este trabajo, sin perjuicio de poder ser abordados en trabajos posteriores.

Índice general

Capítulo 1

Fundamentos matemáticos básicos

El objeto de este capítulo es la descripción de los fundamentos matemáticos básicos para abordar la modelización del comportamiento de algunos productos financieros ligados a la relación entre una divisa y otra. Asimismo la relación entre el valor de un activo modelado en el seno de una divisa y su valor en un mercado que se rige por otra divisa distinta es estudiada en este marco. Por ello se invoca la multidimensionalidad del modelo, pues en general varios procesos estocásticos independientes, que supondremos basados en el movimientos brownianos se verán involucrados. Como estamos hablando de procesos que se desarrollan en el tiempo, necesitaremos modelar la información en la cual nuestras decisiones de futuro estarán basadas, y esto nos llevará a la consideración de σ-álgebras, y sub-σ-álgebras que formarán las estructuras denominadas filtraciones. El estudio de los procesos estocásticos ad-hoc se situará en este marco.

1.1. Descripción del Movimiento Browniano

Un proceso estocástico con espacio de estados S es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in T}$ definidas en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$. El conjunto T es denominado conjunto de parámetros y puede ser numerable, dando lugar un un proceso estocástico discreto o no numerable para el caso de un proceso estocástico continuo. En general estaremos interesados en $T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
El índice t representa al tiempo, y pueden considerarse entonces a X_t como el estado o la posición del proceso en el instante t. El espacio de estados es $\mathbb{R}$ para nuestros intereses, y entonces decimos que el proceso es de valores reales.
Para cada $\omega \in \Omega$ dado, la aplicación

$$t \longrightarrow X_t(\omega)$$

definida en el conjunto paramétrico T se denomina realización, trayectoria o camino muestral (sample path) del proceso.

Ejemplo **1.1** *Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ es gaussiano o normal si sus distribuciones en dimensión finita son leyes normales multidimensionales.*
Un proceso con valores reales $\{X_t\}_{t\in T}$ se denomina proceso de segundo orden si

$$\mathbb{E}\left[{X_t}^2\right] < \infty, \; \forall t \geqslant 0$$

La media y la función de autocovarianza de un proceso estocástico de segundo orden $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ se definen:

$$m_X(t) = \mathbb{E}\left[X_t\right]$$

$$\Gamma_X(s,t) = Cov\left[X_s, X_t\right]$$

y su varianza por

$$\sigma_X^2(t,t) = \Gamma_X(t,t) = Var\left[X_t\right]$$

Para el caso de que $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ sea una familia de variables aleatorias independientes para cada t, distribuidas $N(0,\sigma^2)$, tenemos que la media y autocovarianza de este proceso es

$$m_X(t) = 0\,,\ y\ \Gamma_X(s,t) = \begin{cases} \sigma^2 & si \quad s=t \\ \\ 0 & si \quad s\neq t \end{cases}$$

Nosotros estamos interesados en ampliar la clase de procesos estocásticos bajo estudio.

Es posible generalizar la anterior definición al caso de los procesos estocásticos multidimensionales en tiempo continuo, y para ello seguiremos la presentación del tema del Profesor D. Ricardo Vélez Ibarrola, que se cita en la bibliografía.
Asi, dado un espacio probabilístico $(\Omega, F, \mathbb{P})$ y un intervalo I de $\mathbb{R}$, llamaremos proceso estocástico sobre $(\Omega, F, \mathbb{P})$ con conjunto de parámetros I a cualquier familia $\{X_t\}_{t\in I}$, donde consideraremos en general que I es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, y con más frecuencia como [0,T].
En general se supondrá que cada X_t es una variable aleatoria multidimensional, y

$$\forall t\in I,\ X_t : (\Omega, F) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}) \ \ es\ medible.$$

En la anterior expresión, $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}$ se corresponde con el espacio de los conjuntos medibles-Borel, o Borelianos de $\mathbb{R}^d$.
Podemos observar que a cada $\omega\in\Omega$ fijo, el proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in I}$ hace corresponder una función de I en $\mathbb{R}^d$, $X(.,\omega)$ que se denomina trayectoria del proceso asociada a ω.
Si llamamos $(\mathbb{R}^d)^I$ al conjunto de todas las funciones de I en $\mathbb{R}^d$, podemos interpretar el proceso como una única aplicación $\mathbb{X}$ de Ω en $(\mathbb{R}^d)^I$ que vendría definida por

$$\mathbb{X}(\omega) \in (\mathbb{R}^d)^I$$

que a cada $t\in I$ hace corresponder $X_t(\omega)\in\mathbb{R}^d$.
Esto da lugar a que tengamos una función de dos variables

$$X(t,\omega)\ \ de\ \ I\times\Omega\ \ en\ \mathbb{R}^d$$

donde puede considerarse:

- para cada $t\in I$ fijo, $X(.,\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es una variable aleatoria multidimensional.
- para cada $\omega\in\Omega$ fijo, $X(t,.) : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ es una trayectoria del proceso, multidimensional.

La interpretación del proceso como una aplicación global

$$\mathbb{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

permitirá, en cierta manera, introducir la distribución conjunta de todas las variables que componen el proceso.
Para ello hay que dotar a $(\mathbb{R}^d)^I$ de una σ-álgebra, $\mathbb{B}^I_{\mathbb{R}^d}$, sobre la cual se define dicha distribución. Con el fin de no obscurecer la notación en demasía, esta álgebra la denotaremos por $\mathbb{B}_I$, y el contexto nos aclarará cuando estamos tratando una álgebra sobre $\mathbb{R}$ y cuando sobre $\mathbb{R}^d$, habida cuenta de que la consideración de X_t como variable aleatoria multidimensional no introduce

ninguna complicación extra en el modelo de estudio.
Para ello llamamos conjunto cilíndrico de $(\mathbb{R}^d)^I$ a todo conjunto de la forma

$$\big\{f \in (\mathbb{R}^d)^I : f(t_1) \in B_1, f_2 \in (B_2), \cdots, f_n \in (B_n)\big\}$$

cualesquiera que sean

$$n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \cdots, t_n \in I \ \ y \ \ B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}$$

En el texto de referencia se dan las pautas mediante las que puede demostrarse que la clase de todos los conjuntos cilíndricos de $(\mathbb{R}^d)^I$ es un semianillo. Nosotros tomamos entonces $\mathbb{B}_I$ como la σ-álgebra de $(\mathbb{R}^d)^I$ engendrada por dicho anillo.
Puede demostrarse que

$$\forall t \in I \ \ X_t : (\Omega, F) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathbb{B}_I)$$

es medible si y solo si

$$\mathbb{X} : (\Omega, F) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathbb{B}_I)$$

es medible.
Una caracterización de $\mathbb{B}_I$ consiste en ver que $B \in \mathbb{B}_I$ si y solo si existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}$ en I, y existe un conjunto $D \in \mathbb{B}_{\mathbb{N}}$ tales que

$$B = \Big\{f \in (\mathbb{R}^d)^I : \Big(f(t_1) \in B_1, f_2 \in (B_2), \cdots, f_n \in (B_n)\Big) \in D\Big\}$$

es decir, que los elementos de $\mathbb{B}_I$ son conjuntos de funciones que tienen limitados sus valores sobre una sucesión de elementos de I a un conjunto de sucesiones, $D \subset \mathbb{R}_{\mathbb{N}}$, que pertenece a $\mathbb{B}_{\mathbb{N}}$. No hay, por tanto, en $\mathbb{B}_I$ ningún conjunto de funciones definido restringiendo los valores de sus elementos en más de un número numerable de puntos de I.
Una vez introducida la σ-álgebra $\mathbb{B}_I$ en el espacio $\mathbb{R}^d$, llamaremos distribución del proceso estocástico

$$\mathbb{X} : (\Omega, F, \mathbb{P}) \longrightarrow ((\mathbb{R}^d)^I, \mathbb{B}_I)$$

a la medida de probabilidad en $\mathbb{B}_I$ dada por

$$\widehat{\mathbb{P}}(B) = \mathbb{P}\{\mathbb{X}^{-1}(B)\} \ \ \forall B \in \mathbb{B}_I$$

Teniendo en cuenta lo anterior, diremos que dos procesos estocásticos son equivalente si dan lugar a la misma distribución $\widehat{\mathbb{P}}$ en $((\mathbb{R}^d)^I, \mathbb{B}_I)$. Y destacaremos en la clase de equivalencia de los procesos con distribución $\widehat{\mathbb{P}}$, el representante canónico definido sobre el espacio probabilístico $\big((\mathbb{R}^d)^I, \mathbb{B}_I, \widehat{\mathbb{P}}\big)$, tomando como $\mathbb{X}$ la identidad. La distribución de cualquier proceso en el espacio funcional $((\mathbb{R}^d)^I, \mathbb{B}_I)$ se puede caracterizar en términos de distribuciones de dimensión finita en virtud de la prolongación del teorema de Kolmogorov, tal y como se muestra en el texto de referencia "Procesos Estocásticos. UNED " del Profesor D. Ricardo Vélez Ibarrola, a la cual nos remitimos, señalándose que la interpretación práctica del mismo es que para conocer la distribución de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in I}$ basta con conocer la distribución conjunta de cualquier grupo finito de las variables que lo componen.

Con la mayor generalidad se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ es una versión de otro proceso $\{Y_t\}_{t\geqslant 0}$ si para cada $t \geqslant 0$

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1$$

Se dice también que ambos procesos son equivalentes. Dos procesos equivalentes pueden tener trayectorias diferentes.
Diremos que el proceso $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ es continuo en probabilidad si $\forall\varepsilon > 0$ *y* $\forall t > 0$

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}\{\,|X_t - X_s\,| > \varepsilon\,\} = 0$$

Teorema 1.1 (Teorema de continuidad de Kolmogorov) *Supongamos que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ sastisface la siguiente condicion:*

$$\mathbb{E}\,(\,|X_t - X_s|^{\,p}\,) \leq\ D\,\cdot\,|t-s|^{1+\alpha},\ 0\leq s<t\leq T,\ y\ p, D, \alpha\ > 0$$

Entonces, existe una versión del proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ que tiene trayectorias continuas.

Definición 1.1 (Movimiento Browniano) *Dado el espacio $(\Omega, F, \mathbb{P})$, un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}$, $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ es un $\mathbb{P}$-Movimiento Browniano si bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ se verifica para alguna constante real σ*

1. *para cada $s\geqslant 0$, $t>0$ la variable aleatoria $W_{t+s} - W_s$ tiene una distribución normal $N(0,\sigma^2 t)$,*

2. *para cada $n\geqslant 1$ y cualesquiera instantes $0\leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \ldots \leqslant t_n$ las variables aleatorias $\{W_{t_r} - W_{t_{r-1}}\}$ son independientes,*

3. *$W_0 = 0$, (esta es una convención que puede salvarse por traslación del movimiento)*

4. *W_t es continua para $t\geqslant 0$, $\mathbb{P}$-casi seguro (c.s.).*

El proceso con $\sigma^2 = 1$ se denomina Movimiento Browniano standard y a no ser que en este texto se diga otra cosa, se asumirá que es el que se considera.
No hay dificultad en extender la definición del movimiento browniano unidimensional al caso d-dimensional:

Definición 1.2 (Movimiento Browniano d-dimensional) *Dado el espacio $(\Omega, F, \mathbb{P})$, un proceso estocástico con valores en $\mathbb{R}^d$, $\{W_t\}_{t\geqslant 0} = \{\{W_t^1\}_{t\geqslant 0}, \cdots, \{W_t^d\}_{t\geqslant 0}\}$ es un $\mathbb{P}$-Movimiento Browniano si bajo la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ verifica las siguientes propiedades:*

(i) Cada W_t^i es un movimiento browniano 1-dimensional.

(ii) Si $i\neq j$, entonces los procesos W_t^i, W_t^j son independientes.

Proposición 1.1 *Supongamos un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$ y supongamos que para cada $\omega\in\Omega$ existe una función continua W_t para $t\geqslant 0$ que satisface $W_0 = 0$ y que depende de ω. Las siguiente propiedades son equivalentes:*

(i) Para todo $0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_m$, los incrementos

$$W_{t_1} = W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$$

son independientes y cada uno de ellos esta normalmente distribuido con media y varianza dados por

$$\mathbb{E}\left[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right] = 0, Var\left[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right] = t_{i+1} - t_i$$

(ii) Para todo $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_m$*, las variables aleatorias* $W_{t_1}, W_{t_2}, ..., W_{t_m}$ *estan normalmente distribuidas con medias iguales a 0 y matriz de covarianzas*

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[W_{t_1}W_{t_1}\right] & \mathbb{E}\left[W_{t_1}W_{t_2}\right] & \cdots \mathbb{E}\left[W_{t_1}W_{t_m}\right] \\ \mathbb{E}\left[W_{t_2}W_{t_1}\right] & \mathbb{E}\left[W_{t_2}W_{t_2}\right] & \cdots \mathbb{E}\left[W_{t_2}W_{t_m}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{E}\left[W_{t_m}W_{t_1}\right] & \mathbb{E}\left[W_{t_m}W_{t_2}\right] & \cdots \mathbb{E}\left[W_{t_m}W_{t_m}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \cdots t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 \cdots t_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ t_1 & t_2 & t_2 \cdots t_m \end{pmatrix}$$

es decir, que $Cov\left[W_{t_i}, W_{t_j}\right] = t_i \wedge t_j = min(t_i, t_j)$

(iii) Para todo $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_m$*, las variables aleatorias* $W_{t_1}, W_{t_2}, ..., W_{t_m}$ *tienen una función generatriz conjunta*

$$\varphi(u_1, u_2, ..., u_m) = \mathbb{E}[\exp(u_m W_{t_m} + u_{m-1} W_{t_{m-1}} + ... + u_1 W_{t_1})] =$$

$$= \exp\{\tfrac{1}{2}(u_1 + u_2 + \cdots + u_m)^2 t_1 + \tfrac{1}{2}(u_2 + u_3 + \cdots + u_m)^2 (t_2 - t_1) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(u_3 + u_4 + \cdots + u_m)^2 (t_3 - t_2) + \cdots + \tfrac{1}{2}(u_{m-1} + u_{m-2})^2 (t_{m-1} - t_{m-2}) + \tfrac{1}{2} u_m^2 (t_m - t_{m-1})\}$$

Si i, ii o iii se verifican, y por tanto todos ellos, entonces $\{W_t\}$*,* $t \geqslant 0$ *es un movimiento browniano.*

Algunas de las características definitorias del movimiento browniano son

1. Las trayectorias del movimiento browniano son contínuas en todo punto y derivables en ninguno.
2. El movimiento browniano alcanzará cualquier valor prefijando, bien sea positivo, bien negativo.
3. Una vez alcanzado cualquier valor prefijado, el movimiento browniano undimensional volverá a tomar dicho valor infinitas veces para valores temporales arbitrariamente grandes. Esta "falta de memoria" es una importante propiedad, según se verá. Para el caso de n = 2, dado un valor de dicho movimiento en un instante dado, este movimiento visitará una infinidad de veces para un espacio temporal arbitrariamente largo una vecindad dada del valor tomado en el instante inicial. Para n mayor que 2, sin embargo, dado un valor del movimiento en un instante t, y un espacio temporal de longitud arbitrariamente grande, el movimiento visitará una vecindad dada de su valor inicial con una probabilidad nula.

Como señalamos anteriormente, el Teorema de Extensión de Kolmogorov (tambien puede consultarse en "Stochastic Differential Equations" de Bernt Oksendal, ed. Springer Verlag, entre otros muchos) permite construir un proceso estocástico fijadas las distribuciones en dimensión finita, siempre que se verifiquen determinadas condiciones de compatibilidad, y el Teorema de Continuidad (1.1) da una condición suficiente para que haya un versión del proceso estocástico tal que sus trayectorias sean continuas. Cuando los incrementos $W_t - W_s$ tienen una ley normal N(0,t-s), para todo número entero k tendremos:

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k$$

Por lo tanto, eligiendo $k = 2$ ya podemos asegurar que existe una versión contínua para el movimiento browniano, ya que

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^4\right] = 3\,(t-s)^2$$

Las demostraciones de estas características pueden hallarse en la bibliografía que se relaciona.

BIBLIOGRAFIA:

Ricardo Vélez Ibarrola: " Procesos Estocásticos. UNED "
Leo Breiman: " Probability "
Luis Rincón: " Introducción a los procesos estocásticos. UNAM. 2012"
Steven E. Shreve " Stochastic Calculus for Finance II. Springer. 2004"
Bernt Oksendal: "Stochastic Differential Equations". Springer Verlag

1.2. Procesos Estocásticos, Filtraciones y Movimiento Browniano. Estructura de la Información.

Definición 1.3 (Filtración) *Sea Ω un conjunto no vacío. Sea T un número positivo fijado, y asumamos que para cada $t \in [0, T]$ existe una σ-álgebra F_t. Además, asumamos que si $s \leq t$, entonces cada conjunto de F_s está en F_t. Entonces llamamos a la colección de σ-álgebras $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$, una filtración. Se trata pues de una familia de σ-álgebras F_t, $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ tal que si $s < t \Rightarrow F_s \subset F_t$.*

Para el modelado de procesos estocásticos en tiempo continuo estamos interesados usualmente en filtraciones caracterizadas por

(a) F_0 contiene a todos los subconjuntos de conjuntos de medida 0. Esto significa que F_t es la mínima σ-álgebra que contiene los conjuntos de la forma $\{X_s \in B\} \cup N$, donde $s \in [0, t]$, B pertenece a la σ-álgebra de Borel $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^d$, y N es un conjunto de probabilidad nula.

(b) Para todo $t \geq 0$, la familia de σ-álgebras F_t es continua por la derecha, es decir, se verifica $F_t = \bigcap\limits_{s:s>t} F_s$

La σ-álgebra F_0 solo contiene conjuntos de probabilidad cero o uno. Esto implica que las variables aleatorias F_0-medibles serán constantes, casi seguro.
Recordemos las siguientes dos definiciones elementales:

Definición 1.4 (σ-álgebra generada por una variable aleatoria X) *Sea Ω un conjunto no vacío y sea X una variable aleatoria multidimensional definida en dicho conjunto. La σ-álgebra generada por X, denotada por $\sigma(X)$, es la colección de todos los subconjuntos de Ω de la forma $\{X \in \mathbb{B}\}$ con $\mathbb{B}$ representando al álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$. $\{X \in \mathbb{B}\}$ es una forma abreviada de significar el conjunto $\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in \mathbb{B}\}$.*

En relación con lo anterior, dada una familia U de subconjuntos de Ω, existe una σ-álgebra, $\sigma(U)$, que es la menor σ-álgebra que contiene a U, que se designa por

$$\sigma(U) = \bigcap \{H : H \ \ es \ \ \sigma - algebra \ \ de \ \ \Omega, U \subset H\}$$

De aquí se deduce que $\sigma(U)$ es la menor σ-álgebra que contiene a la familia de subconjuntos U. Por ejemplo, si U es la colección de todos los subconjuntos abiertos de un espacio topológico Ω, (por ejemplo $\Omega = \mathbb{R}^d$), entonces $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma(U)$ es denominada la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^d$ y a sus elementos B se les denomina borelianos de $\mathbb{R}^d$. $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}$ contiene todos los conjuntos abiertos, todos los cerrados, todas las uniones contables de cerrados, todas las intersecciones contables de tales uniones contables, etc... de $\mathbb{R}^d$.

Definición 1.5 (G-medibilidad) *Sea X una variable aleatoria multidimensional definida en un espacio muestral no vacío Ω, y sea G una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Si cada conjunto en $\sigma(X)$ esta también en G, decimos que X es G-medible.*

Es decir, si $(\Omega, G, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad dado, entonces una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ se llama G-medible si

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}\} \in G$$

para todos los borelianos B de $\mathbb{R}^d$.
En dicho caso, la σ-álgebra generada por X, $\sigma(X)$ es la menor σ-álgebra en Ω que contiene todos los conjuntos $X^{-1}(B)$, $B \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}$, es decir

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B); B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}\}$$

Así, X será entonces $\sigma(X)$-medible y $\sigma(X)$ será la σ-álgebra mínima con dicha propiedad.

Definición 1.6 (Proceso estocástico adaptado) *Sea Ω un espacio muestral no vacío equipado con una filtración $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$, y sea $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ una colección de variables aleatorias, que pueden ser multidimensionales, indexadas por $t \in [0,T]$. Decimos que esta colección de variables aleatorias es un proceso estocástico adaptado si, para cada t, la variable aleatoria X_t es F_t-medible.*

Cuando una variable aleatoria es medible con respecto de una σ-álgebra G, la información contenida en G es suficiente para determinar el valor de la variable aleatoria. El otro extremo es cuando una variable aleatoria es independiente de una σ-álgebra. En este caso, la información contenida en la σ-álgebra no aporta ninguna información acerca del valor de dicha variable aleatoria. En el más común de los casos, cuando tenemos una σ-álgebra G y una variable aleatoria X que ni es ni G-medible ni independiente de G, la información en G no es suficiente para evaluar X, pero podemos estimar X basada en la información en G.
De esta forma, $\{\sigma(W_s)\}_{s\in[0,t]} \subset \{F_t\}_{t\in[0,T]}$, y a la primera de estas filtraciones la denominamos filtración canónica del movimiento browniano (que puede ser multidimensional). Así, con respecto de ella, para cada $s \in [0,t]$ tenemos que $B \in \sigma(W_s)$ con $t \in [0,T]$ si, habiendo observado la trayectoria $\{W_s\}_{0\leq s\leq t}$, (que puede ser multidimensional), es posible decidir si el suceso $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^d}$ se ha verificado o no.
Queda claro del comentario anterior que puede haber más de un proceso estocástico que sea medible con respecto de la misma filtración $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$, pero que $\{\sigma(W_s)\}_{s\in[0,t]}$ es, sin embargo, la mínima filtración para la cual el movimiento browniano es adaptado.

En contraste con el concepto de medibilidad, necesitamos una medida de probabilidad para poder hablar de independencia. Consecuentemente, la independencia puede verse afectada por los cambios de medida de probabilidad, pero no así la medibilidad.

Definición 1.7 (Independencia) *Sea un espacio de probabilidad* $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *y sean* G *y* H *dos sub-*σ*-álgebras de* F *(es decir, los conjuntos de* G *y los conjuntos de* H *estan tambien en* F *). Decimos que dos* σ*-álgebras son independientes si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \, \forall \, A \in G, \, B \in H$$

Sean X *e* Y *variables aleatorias en* $(\Omega, F, \mathbb{P})$*, que pueden ser multidimensionales. Decimos que estas dos variables aleatorias son independientes si las* σ*-álgebras que generan,* $\sigma(X)$*, y* $\sigma(Y)$*, son independientes. Decimos que la variable aleatoria* X *es independiente de la* σ*-álgebra* G *si* $\sigma(X)$ *y* G *son independientes.*

Teorema 1.2 *Sean* X *e* Y *variables aleatorias independientes, posiblemente multidimensionales, y sean* f *y* g *sendas funciones* $\mathbb{B}$*-medibles con valores en* $\mathbb{R}$ *(con las correspondencias relativas al caso multidimensional). Entonces* $f(X)$ *y* $g(Y)$ *son variables aleatorias independientes.*

Una filtración se suele usar para representar el flujo de información que vamos obteniendo al observar como evoluciona un proceso en tiempo continuo. Nosotros estamos interesados en filtraciones del tipo $\sigma(X_s, \, s < t)$ Como proceso estocástico que es, al movimiento browniano puede adjuntársele una filtración que da cuenta de la información disponible en cada instante.

Definición 1.8 (Filtración para un movimiento browniano) *Sea* $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad en el que se ha definido o tiene lugar un Movimiento Browniano* $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$*. Una filtración para el Movimiento Browniano es una colección de* σ*-álgebras* $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$*, que satisfacen*

(i) ***(La información es acumulativa)*** *Para cada* $0 \leq s < t$*, cada conjunto en* F_s *esta también en* F_t*. En otras palabras, hay al menos tanta información disponible en el instante posterior* t*, en* F_t *como la existente en un instante anterior* s*, en* F_s*.*

(ii) ***(Adaptatividad del proceso estocástico)*** *Para cada* $t \geq 0$*, el Movimiento Browniano* W_t *en el tiempo* t *es* F_t*-medible. En otras palabras, la información disponible en el instante* t *es suficiente para evaluar el Movimiento Browniano* W_t *en ese instante.*

(iii) ***(Independencia de los incrementos futuros)*** *Para* $0 \leq s < u$*, el incremento* $W_u - W_t$ *es independiente de* F_t*. En otras palabras, cualquier incremento del movimiento browniano posterior al instante* t *es independiente de la información disponible en dicho instante* t*.*

Las dos primeras propiedades de la anterior definición garantizan que la información disponible en cada instante t es al menos tanta como la que podría adquirirse observando los datos del movimiento browniano desde su inicio hasta dicho instante t. La tercera propiedad expresa que dicha información no tiene uso para predecir futuros movimientos (valores) del movimiento browniano. En los modelos de valoración de activos que pretendemos construir, esta propiedad conducirá a hipótesis de mercados eficientes.

BIBLIOGRAFIA: Luis Rincón: " Introducción a los procesos estocásticos. UNAM. 2012"
Steven E. Shreve " Stochastic Calculus for Finance II. Springer. 2004"

1.3. Esperanza Condicionada, Martingalas y Movimiento Browniano.

Si se enfoca la Teoría de la Probabilidad desde el punto de partida de la Teoría de la Medida, una esperanza condicionada es en si misma una variable aleatoria, que es medible con respecto a la σ-álgebra condicionante. Este punto de vista es indispensable para tratar las esperanzas condicionadas que se abordan en la Teoría de Martingalas.

No entraremos en las consideraciones acerca de tiempos de parada o stopping times de las martingalas y sus connotaciones, ya que en principio no esta programado en este trabajo abordar aquellos temas en los que son un vehículo fundamental, como el análisis de los contratos que admiten tiempos de ejecución anteriores a la madurez del contrato, caso de opciones bermudas, perpetuas y americanas, y algunas de las denominadas exóticas. El interés de estos tópicos es obvio, y un acercamiento a ellos puede adquirirse en la bibliografía que se relaciona al final de esta sección.

Definición 1.9 (Esperanza condicional) *Sean $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, una sub-σ-álgebra G de F, y X una variable aleatoria que es no negativa o integrable. La esperanza condicional de X dado G, denotada $\mathbb{E}[X|G]$, es cualquier variable aleatoria que satisfaga:*

(i) ***(Medibilidad)*** $\mathbb{E}[X|G]$ *es G-medible, y*

(ii) ***(Partial averaging)*** $\int_A \mathbb{E}[X|G](\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_A X(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \forall A \in G,$

que puede expresarse, denominando $Z = \mathbb{E}[X|G]$ como $\mathbb{E}[X \cdot 1_A] = \mathbb{E}[Z \cdot 1_A]$.

Si G es la σ-álgebra generada por alguna otra variable aleatoria W (por ejemplo, $G = \sigma(W)$, escribiremos generalmente $\mathbb{E}[X|W]$ en vez de $\mathbb{E}[X|\sigma(W)]$.

La propiedad (i) de la anterior definición garantiza que, a pesar de que la estimación de X basada en la información contenida en G es en si misma una variable aleatoria, el valor de la estimación $\mathbb{E}[X|G]$ de X puede ser determinado a partir de la información en G. La propiedad (i) captura el hecho de que la estimación $\mathbb{E}[X|G]$ de X esta basado en la información en G. La segunda propiedad asegura que $\mathbb{E}[X|G]$ es incluso una estimación de X. Da las mismas medidas que X sobre todos los conjuntos en G. Si G tiene "muchos" conjuntos, lo que aporta una resolución fina de la incertidumbre inherente en ω, entonces esta propiedad partial-averaging sobre los "pequeños" conjuntos en G dice que $\mathbb{E}[X|G]$ es un buen estimador de X. Si G tiene "solo unos pocos" conjuntos, esta propiedad partial-averaging garantiza solo que $\mathbb{E}[X|G]$ es una estimación burda de X. Puede demostrarse que siempre existe una variable aleatoria que satisface las condiciones (i) y (ii). La demostración de la existencia de $\mathbb{E}[X|G]$ se apoya en el Teorema de Radon-Nikodym. Además, la unicidad de dicha variable aleatoria puede asegurarse salvo para conjuntos de medida nula. Esto da lugar a que diferentes variables aleatorias verifiquen las mencionadas propiedades, aunque ellas se diferencien entre sí únicamente en conjuntos de medida cero, por lo que puede asegurarse que son iguales casi seguro.

Teorema 1.3 *Sean $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y una sub-σ-álgebra G de F, entonces son de aplicación estas reglas:*

(1) ***(Linealidad de las esperanzas condicionales)*** *Si X e Y son variables aleatorias integrables y a y b son constantes,*

$$\mathbb{E}[aX + bY|G] = a\mathbb{E}[X|G] + b\mathbb{E}[Y|G]$$

(2) ***(Sacar lo conocido)*** *Si X e Y son variables aleatorias integrables, así como XY, y X es G-medible,*

$$\mathbb{E}[XY|G] = X\mathbb{E}[Y|G]$$

Esta ecuación también se verifica si asumimos que X es positiva e Y es no negativa. Es decir, las variables aleatorias G-medibles se comportan como constantes y pueden sacarse fuera de la esperanza condicionada.

(3) ***(Condicionamiento iterado)*** *Si H es una sub-σ-álgebra de G, (H contiene menos información que G), y X es una variable aleatoria integrable, entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|G] \mid H] = \mathbb{E}[X|H]$$

(4) ***(Independencia 1)*** *Si X es integrable e independiente de G, entonces*

$$\mathbb{E}[X|G] = \mathbb{E}X$$

(5) ***(Desigualdad condicional de Jensen)****Si $\varphi(X)$ es un función convexa, la integral de X (variable aleatoria) existe y la de $\varphi(X)$ esta definida, entonces*

$$\mathbb{E}[\,\varphi(X)\,|\,G\,] \,\geq\, \varphi\,(\,\mathbb{E}[X|G]\,)$$

(6) ***(Independencia 2)****Consideramos dos variables aleatorias X e Y, tales que Y es G-medible y X es independiente de G, y una función h(x,y) tal que h(X,Y) es integrable. Entonces se tiene que*

$$\mathbb{E}[\,h(X,Y)\,|\,G\,] = \mathbb{E}[\,h(X,y)\,]_{y=Y}$$

Es decir, primero calculamos la esperanza $\mathbb{E}[\,h(X,y)\,]$ para un valor arbitrario y de la variable aleatoria Y, y luego sustituimos y por Y.

Definición 1.10 (Propiedad de Martingala) *Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$, sea T un número positivo fijado, y sea $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$, una filtración de sub-σ-álgebras de F. Consideremos un proceso estocástico adaptado a la anterior filtración $\{M_s\}_{s\in[0,t]}$.*
Decimos que el proceso estocástico $\{M_s\}_{s\in[0,t]}$, verifica la propiedad de martingala, o es una martingala, cuando se verifica

$$\mathbb{E}[\,M_t\,|\,F_s\,] = M_s\,,\,\forall\,0 \leq s \leq t \leq T$$

Cuando en la relación anterior se sustituye la igualdad por $\leq$ o por $\geq$, tenemos respectivamente las propiedades de supermartingala y de submartingala. La propiedad de martingala de un proceso estocástico expresa que la esperanza del mismo se mantiene constante a lo largo de todo el proceso, sin tendencia a crecer o a disminuir en su valor. La submartingala tiene una tendencia no decreciente y la supermartingala tiene una tendencia no creciente.

Definición 1.11 (Proceso de Markov) *Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$, sea T un número positivo fijado, y sea $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$, una filtración de sub-σ-álgebras de F. Consideremos un proceso estocástico adaptado a la anterior filtración $\{X_s\}_{s\in[0,t]}$. Asumamos que para todo s,t, tales que $0 \leq s \leq t \leq T$ y para cada función no negativa y Borel-medible f, existe otra función Borel-medible g, tal que*

$$\mathbb{E}[\,f(X_t)\,|\,F_s\,] = g(X_s)$$

Entonces decimos que el proceso estocástico $\{X_s\}_{s\in[0,t]}$ es un proceso de Markov.

En la definición se ha permitido a f depender de t y a g de s sin indicarlo explícitamente para enfatizar como la dependencia del punto muestral ω funciona, es decir, la parte derecha de la igualdad depende de ω solo por medio de la variable aleatoria X_s . Si indicamos la dependencia en el tiempo escribiendo f(t,x) en vez de f(x), podemos escribir f(s,x) en vez de g(x) (no necesitamos diferentes símbolos f y g porque las variables temporales t y s indican que estamos manejando diferentes funciones de x en diferentes tiempos) y podemos reescribir la igualdad propuesta como

$$\mathbb{E}\,[\, f(t, X_t) \,|\, F_s \,] = f(s, X_s),\ \ 0 \leq s \leq t \leq T$$

Cuando se verifica para un proceso estocástico esta definición, se tiene que la estimación de $f(X_t)$ hecha en el instante s anterior a t, depende solo del valor del proceso X_s en el instante s y no en la trayectoria del proceso antes de dicho instante s.

Como proceso de incrementos independientes, el Movimiento Browniano es un proceso de Markov.

Proposición 1.2 *Dados un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$, sea T un número positivo fijado, y sea $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ una filtración de sub-σ-álgebras de F. Consideremos un proceso browniano adaptado a la anterior filtración $\{W_s\}_{s\in[0,t]}$. Los siguientes procesos estocásticos, basados en el movimiento browniano son martingalas para la medida de probabilidad $\mathbb{P}$ y la filtración $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$:*

1. $\{W_s\}_{s\in[0,t]}$
2. $\{W_s^2 - s\}_{s\in[0,t]}$
3. $\{\exp(\,\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s\,)\,\}_{s\in[0,t]}$, *para cada $\sigma \in \mathbb{R}$. Este proceso es denominado Movimiento Browniano Geométrico, y su utilización será recurrente a lo largo de todo el presente trabajo.*

El siguiente resultado, no trivial, se debe a Paul Lèvy y establece condiciones que caracterizan de manera única al Movimiento Browniano en términos de la propiedad de martingala.

Teorema 1.4 (Teorema de caracterización de Paul Lèvy) *Un proceso $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ es un Movimiento Browniano si, y solo si, tiene trayectorias continuas, empieza en cero, y tanto $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ como $\{X_t^2 - t\}_{t\in[0,T]}$ son martingalas.*

Pueden consultarse las demostraciones de los resultados expuestos, profundizar en los mismos y examinar los aspectos relativos a los tiempos de paro o stoping times en la siguiente

BIBLIOGRAFIA: Oksendal B. : " Stochastic differential equations: an introduction with applications, Springer- Verlag 1992"
Luis Rincón: " Introducción a los procesos estocásticos. UNAM. 2012"
Steven E. Shreve " Stochastic Calculus for Finance II. Springer. 2004"
David Nualart "Cálculo Estocástico"
Jose Manuel Corcuera "Introducción a las Finanzas Cuantitativas"

1.4. Integración estocástica

El objeto de esta sección es presentar la definición de la integral de Itô de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ con respecto del movimiento browniano standard $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$, es decir, una integral de la forma $\int_0^t X_s dW_s$
Este tipo de integrales no pueden definirse trayectoria por trayectoria, es decir, como si fuera una integral de Riemann-Stieljes de una función respecto de otra función, pues en este caso la función integradora es una trayectoria del movimiento browniano, que no tiene variación finita, según se verá.

Consideramos como elementos iniciales un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$ y un movimiento browniano standard unidimensional $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$, junto con su filtración natural o canónica $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$. Supondremos que tenemos un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ con T fijo.Supondremos también que dicho proceso, visto como función X: Ω x $[0,\, T]$ $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ es $F_T \otimes \mathbb{B}_{[0,\, T]}$-medible. Dichos procesos se denominan medibles. La hipótesis de que X es medible es necesaria en muchos resultados posteriores.
El término $F_T \otimes \mathbb{B}_{[0,\, T]}$ se corresponde con la mínima σ-álgebra generada en el espacio producto por la familia de conjuntos del producto $F_t \times \mathbb{B}_{[0,\, T]}$. Supondremos además que el proceso es adaptado.
En lo sucesivo, y con el fin de aligerar la notación en aras de una mejor legibilidad, y una vez establecidas las correspondientes definiciones, denotaremos las esperanzas matemáticas condicionadas de las variables que en su caso correspondan, $\mathbb{E}\,[\, M_t \,|\, F_s\,]$, por $E_s M_t$, sin perjuicio de regresar a la notación inicial cuando se estime oportuno.

Definición 1.12 (Espacio L^2(P)) *Se define como tal al espacio vectorial de variables aleatorias X en* $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *que son de cuadrado integrable, es decir, que cumplen la condición*

$$\|X\|_{L^2(P)} = (E\,|X|^2)^{1/2} < \infty$$

1.4.1. Integral de Itô de procesos simples

La función $\|\cdot\|_{L^2(P)}$ define una norma en $L^2(P)$, para la cual dicho espacio es completo, es decir, es un espacio de Banach. Por ello toda sucesión de Cauchy en el mismo tendrá límite en él. A la convergencia con esta norma la denominaremos convergencia en media cuadrática. Puede demostrarse que toda sucesión convergente en media cuadrática tiene una subsucesión convergente casi seguro.

Definición 1.13 (Espacio L^2(P × dt)) *Se define como tal al espacio lineal de todos los procesos estocásticos medibles* $X = \{X_t\}_{0\le t\le T}$ *que cumplen la condición*

$$\|X\|_{L^2(P\times dt)} = (E\int_0^T |X_t|^2\, dt\,)^{1/2} < \infty$$

Puede demostrarse que la función $\|\cdot\|_{L^2(P\times dt)}$ es una norma que hace que X sea un espacio completo respecto de ella, es decir, un espacio de Banach. Asimismo, puede demostrarse que el movimiento browniano W = $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ pertenece a esta espacio, pues

$$\|W\|_{L^2(P\times dt)} = (E\int_0^T |W_t|^2\, dt\,)^{1/2} = (\int_0^T E|W_t|^2\, dt\,)^{1/2} = (\int_0^T t\, dt\,)^{1/2} < \infty$$

Definición 1.14 (Variación de orden p de una función en un intervalo) *Consideremos una partición de un intervalo de la forma siguiente:* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *y definamos* $\Delta t = max\{\,|\,t_{i+1} - t_i| : i = 0, 1, \cdots, n-1\}$. *La variación de orden p, con p un número real, de una función g: [a,b]*$\longrightarrow \mathbb{R}$ *es el número*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |\, g(t_{i+1}) - g(t_i)|^p$$

Cuando dicho número es finito para un p dado, se dice que la función tiene variación finita de orden p en dicho intervalo.

Para p = 1, sobre cualquier intervalo de tiempo acotado, casi todas las trayectorias del movimiento browniano tienen variación no acotada, y para p = 2, es decir, la variación cuadrática, el movimiento browniano tiene como variación la longitud del intervalo, en el sentido L^2 de media cuadrática. Esto es, para un intervalo [a, b] se tiene

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |\, W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^1 = \infty, \;\; c.s., \;\; y \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |\, W_{t_{i+1}} - W_{t_i}|^2 = b - a, \;\; c.s.$$

Ello, a diferencia del caso en que la función g fuera diferenciable (aún a trozos) en el intervalo, pues su variación sería finita y su variación cuadrática nula. Esta propiedad es particularmente importante ya que tiene como consecuencia el hecho de que no se pueden usar las trayectorias brownianas como funciones integradores en el sentido de Riemann-Stieljes, tal y como se adelantaba al comienzo de esta sección.

Nosotros queremos dar un sentido a $\int_0^T X_s dW_s$ por motivo de que el integrando X_t será eventualmente la posición que tomaremos en un activo en el instante t, y esto depende típicamente de la trayectoria del precio del activo hasta el instante t. Cualquier cosa que dependa del camino de un proceso aleatorio es en si misma aleatoria. Requerir que $\{X_t\}_{0 \leq t}$ sea adaptado significa que requerimos a $\{X_t\}_{0 \leq t}$ ser F_t-medible para cada $t \geq 0$. En otras palabras, la información disponible en el instante t es suficiente para evaluar X_t en dicho instante. Cuando estamos en el instante 0 y t es estrictamente positivo, X_t es desconocido para nosotros. Es una variable aleatoria. Cuando alcanzamos el tiempo t, poseemos suficiente información para evaluar X_t y su aleatoriedad ha sido resuelta.

Recordemos que los incrementos del movimiento browniano posteriores al instante t son independientes de la σ-álgebra F_t, y como X_t es F_t-medible, debe también ser independiente de dichos futuros incrementos brownianos. Las posiciones que tomemos en los activos pueden depender de la historia del precio de los mismos, pero ellas deben ser independientes de los incrementos futuros del movimiento o movimientos brownianos que dirigen dichos precios.

El problema que enfrentamos cuando intentamos asignar sentido a la integral $\int_0^T X_s dW_s$ es que las trayectorias brownianas no son diferenciables con respecto del tiempo. He aquí la justificación del uso de la integral de Itô en el referido ambiente.

La construcción de la integral de Itô sigue unos pasos similares a la construcción de la integral de Lebesgue. Primero se define la integral para integrandos simples, que en el caso de Itô son procesos estocásticos simples, y posteriormente se produce una extensión de dicha construcción por aproximación de procesos más generales a través de dichos procesos simples en el seno de una estructura de espacio de Banach.

Definición 1.15 (Proceso estocástico simple) *Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ una partición finita del intervalo [0,T]. Un proceso estocástico simple es un proceso de la forma*

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} 1_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

en donde $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $\cdots$, $X^{(n-1)}$, es una colección de variables aleatorias adaptadas a la filtración $\{F_{t_k}\}_{k=0}^{n-1}$, y que son de cuadrado integrable.

Por tanto un proceso simple es un proceso constante a trozos, con trayectorias continuas por la derecha y con límite por la izquierda (càdlag), adaptado y con trayectorias cuadrado integrables.
Denotaremos $\mathbf{H_0^2}$ al espacio de todos los procesos simples. Es sencillo demostrar que $\mathbf{H_0^2}$ es un espacio vectorial teniendo en cuenta que dos procesos simples siempre pueden expresarse en términos de una misma partición común, de donde su suma es operación interna.

Definición 1.16 (Integral de Itô de un proceso simple) *La integral estocástica de Itô de un proceso simple X como en la definición anterior respecto del movimiento browniano, denotada por I(X), se define como la variable aleatoria*

$$I(X) = \int_0^T X_s dW_s = \sum_{k=0}^{n-1} X_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

Si consideramos que para $t \in [0,T]$, es decir, que t puede variar en el intervalo $[0,T]$, resultará para cualquier partición finita de dicho intervalo, que en general, $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, y entonces pondremos

$$I(X) = \int_0^t X_s dW_s = \sum_{j=0}^{k} X_{t_j} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

De esta forma, podemos asumir que la cantidad de activos, X_{t_k}, es constante en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1})$, que representa el tiempo transcurrido entre fechas de negociación del activo, y que W_t es el precio por unidad de activo en el instante t - constante en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1})$, no olvidemos la naturaleza del proceso estocástico simple de la definición 1.15 - (aunque este no es un buen modelo para la representación de precios de un activo porque el movimiento browniano puede tomar valores negativos, el ejemplo lo es únicamente a efectos ilustrativos). Y entonces I(X_t) puede ser interpretada como la ganancia obtenida por la negociación hasta el tiempo t, que estará comprendido entre algún $[t_k, t_{k+1}]$.
Algunas de las propiedades mas reseñables de la variable aleatoria I(X) son

(i) I(X) es integrable, pues siendo las variables $X^{(k)}$ y $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ independientes, cada sumando tiene esperanza cero, y por tanto E I(X) es cero.

(ii) I(X) es cuadrado integrable y se cumple la siguiente igualdad fundamental denominada Isometría de Itô:

$$\|I(X)\|^2_{L^2(P)} = \|X\|^2_{L^2(P \times dt)}$$

Esto puede tambien ser expresado

$$E\, I^2(t) = E \int_0^t X_s^2 ds$$

Esta identidad establece que tanto el proceso simple X como la variable aleatoria I(X) tienen la misma norma en sus respectivos espacios. Esta igualdad es fundamental en la definición general de integral estocástica. La integral estocástica asigna entonces a cada elemento del espacio $\mathbf{H_0^2}$ una variable aleatoria en el espacio $\mathbf{L^2(P)}$. De esta forma se tiene la transformación lineal $\mathbf{I} : \mathbf{H_0^2} \longrightarrow \mathbf{L^2(P)}$, que resulta ser continua por la isometría de Itô.

(iii) La integral de Itô de un proceso simple I(X) es una martingala y es una aplicación lineal, tomando en consideración la definición 1.16.

(iv) I(t), de acuerdo con la definición 1.16, para cada $t \in [0,T]$ es F_t-medible, por lo que I(t) es adaptada.

Teorema 1.5 *La variación cuadrática acumulada hasta el instante t por la integral de Itô I(t), conforme a la definición 1.16, es* $\langle I,I\rangle(t) = \int_0^t X_s^2\, ds$

Llegados a este punto, creo que merece la pena transcribir el análisis de la situación que hace Steven E. Shreeve, en Stochastic Calculus for Finance II (Ed. Springer), uno de los textos de referencia para el estudio de los fundamentos matemáticos que se abordan este capítulo:

"De este último teorema y de la propiedad de isometría se puede ver como la variación cuadrática de un proceso estocástico y la varianza de dicho proceso pueden diferir. La variación cuadrática se computa camino a camino, y el resultado puede depender del camino. Si a lo largo de un camino del movimiento browniano elegimos posiciones altas en un activo, (X_s), la integral de Itô tendrá una variación cuadrática grande. A lo largo de diferentes caminos, podríamos elegir pequeñas posiciones en un activo, (X_s), y la integral de Itô tendrá una variación cuadrática pequeña. Dicha variación cuadrática puede ser considerada como una medida del riesgo, y depende del tamaño de las posiciones que tomemos. La varianza de I(t) es un promedio sobre todos los posibles caminos de la variación cuadrática. Como se trata de la esperanza de algo, no puede ser aleatoria. Como promedio sobre todos los caminos posibles, realizados y no realizados, es un concepto más teórico que la variación cuadrática. Se enfatiza aquí en que lo que estamos llamando varianza no es la varianza empírica resultante del análisis de los datos de trading. La varianza empírica (o muestral) se computa a partir de un camino realizado y es un estimador de la varianza teórica que estamos abordando. Dicha varianza empírica es algo que a veces, indolentemente, denominamos varianza, lo que puede crear la posibilidad de confusión".

Las notaciones $I(t) = \int_0^t X_s dW_s$, y $dI(t) = X_t dW_t$ vienen a ser equivalentes, aunque la segunda quizás sea más intuitiva. La segunda es un tanto imprecisa desde que sabemos que W no es derivable en ningún punto, pero sin embargo, cuando se integra se obtiene

$$I(t) = I(0) + \int_0^t X_s dW_s$$

1.4.2. Extensión de la integral a procesos generales

Para la extensión de la integral estocástica a procesos más generales, consideramos $\mathbf{H^2}$, espacio de todos los procesos estocásticos $X = \{X_t\}_{0\leq t}$ medibles y adaptados, de cuadrado integrable, i.e., tales que $(E\int_0^T |X_t|^2\, dt\,)^{1/2} < \infty$. El espacio $\mathbf{H^2}$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathbf{L^2(P \times dt)}$, donde la única diferencia entre estos dos espacios es que a los elementos de $\mathbf{H^2}$

se les exige además que sean adaptados. Todo proceso simple esta en $\mathbf{H^2}$, y entonces se tienen los siguientes contenidos:

$$\mathbf{H_0^2} \subset \mathbf{H^2} \subset \mathbf{L(P \times dt)^2}$$

en donde puede probarse que $\mathbf{H_0^2}$ es denso en $\mathbf{H^2}$ respecto de la norma de la que esta dotado $\mathbf{L(P \times dt)^2}$. Esto significa que para cualquier proceso X en $\mathbf{H^2}$ existe una sucesión de procesos X^k en $\mathbf{H_0^2}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} \|X - X^k\|_{L^2(P\times dt)} = 0$$

Este proceso de aproximación puede llevarse a cabo de la siguiente manera: mediante la técnica de truncación todo proceso en $\mathbf{H^2}$ puede ser aproximado por un proceso acotado. A su vez todo proceso en $\mathbf{H^2}$ que es acotado se puede aproximar por procesos acotados y continuos. Y estos, a su vez se aproximan por procesos simples de la forma $X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} 1_{[t_k,t_{k+1})}(t)$

Usando la isometría de Itô puede comprobarse que la sucesión $I(X^k)$ es de Cauchy en $\mathbf{L^2(P)}$

Definición 1.17 (Integral de Itô de un proceso general) *Sea X un proceso en* $\mathbf{H^2}$*, y sea* X^k *una sucesión de procesos en* $\mathbf{H_0^2}$ *aproximante a X. Se define la integral estocástica (de Itô) de X como*

$$I(X) = \lim_{k\to\infty} I(X^k)$$

donde el límite debe entenderse dentro del espacio $\mathbf{L^2(P)}$ *, es decir, se trata de la convergencia en media cuadrática de una sucesión de variables aleatorias.*

Por tanto, la variable aleatoria I(X) es un elemento de $\mathbf{L^2(P)}$, que es cerrado para la norma dada.

Para cada $t \in [0, T]$ y cualquier X en $\mathbf{H^2}$ puede definirse el proceso

$$I_t(X) = \int_0^T X_s 1_{[0,t]}(s) dW_s = \int_0^t X_s dW_s$$

lo que permite ver la integral estocástica no como una variable aleatoria, sino como un proceso estocástico,

$$\left\{ \int_0^t X_s dW_s \right\}_{t\in[0,T]}$$

que también esta en $\mathbf{H^2}$ y del que puede demostrarse la existencia de una versión contínua que resulta ser una martingala respecto de la filtración natural del movimiento browniano.

La isometría de Itô tambien se cumple para procesos en $\mathbf{H^2}$:

Proposición 1.3 (Isometría de Itô) *Para cualquier proceso X en* $\mathbf{H^2}$ *se cumple:*

$$\|I(X)\|^2_{L^2(P)} = \|X\|^2_{L^2(P\times dt)} \text{ y , equivalentemente, } \int_0^t X_s dW_s = \lim_{k\to\infty} \int_0^t X_s^{(k)} dW_s$$

La integral de Itô hereda las propiedades de la integral de Itô de procesos simples, las cuales se pueden sumarizar en el siguiente teorema:

Teorema 1.6 *Sea T una constante positiva y sea* $X = \{X_t\}_{0\le t\le T}$ *un proceso estocástico medible y adaptado, que satisface* $E\int_0^T X_t^2 dt < \infty$*, es decir, de* $\mathbf{H^2}$*, o bien, de forma algo más general, de* $\mathbf{L(P \times dt)^2}$*, que es un espacio que no requiere que sus elementos sean adaptados. Entonces* $I(t) = \int_0^t X_s dW_s = \lim_{k\to\infty} \int_0^t X_s^{(k)} dW_s$ *tiene las siguientes propiedades:*

(i) ***(Continuidad)*** *Como función del límite superior de integración t, los caminos de I(t) son continuos.*

(ii) ***(Adaptatividad)*** *Para cada t, I(t) es* F_t*-medible.*

(iii) ***(Linealidad)*** *Si* $J(t) = \displaystyle\int_0^t Y_s dW_s$, *para cualquier constantes a,b se tiene* $aI(t)+bJ(t) = \displaystyle\int_0^t (aX_s + bY_s) dW_s$.

(iv) ***(Martingala)*** $\{I_t\}_{0\leq t\leq T}$ *es una martingala.*

(v) ***(Isometría de Itô)*** $E\ I(t)^2 = E \displaystyle\int_0^t X_s^2 ds$

(vi) ***(Variación cuadrática)*** $\langle I, I\rangle(t) = \displaystyle\int_0^t X_s^2 ds$

1.4.3. Fórmula de Itô

Usualmente una integral de Riemann no se calcula a partir de su definición, sino que en lugar de ello se utilizan una serie de fórmulas conocidas que agilizan y simplifican los cálculos. Asimismo, similar situación se da para el caso de las integrales estocásticas.
En lo sucesivo, la función f(t,x), real de variables reales, a la que nos referiremos cumplirá $f(t,x) \in C^{1,2}$, es decir, es diferenciable con continuidad respecto de su primera variable, denotándose f_t, y dos veces diferenciable con continuidad respecto de la segunda derivada, denotándose f_x la primera derivada y f_{xx} la segunda.

Teorema 1.7 (Fórmula de Itô para el movimiento browniano) *Para* $f(t,x) \in C^{1,2}$ *y* $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ *un movimiento browniano, se tiene:*

$$f(T, W_T) - f(0, W_0) = \int_0^T f_t(t, W_t)\, dt + \int_0^T f_x(t, W_t)\, dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W_t)\, d_t$$

Estamos interesados en extender la fórmula de Itô para los procesos estocásticos más generales que el movimiento browniano, que denominaremos procesos de Itô, y que conforman la mayoría de los procesos estocásticos, excepto aquellos denominados procesos "a saltos".

Definición 1.18 (Proceso de Itô) *Sean* $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ *un movimiento browniano y* $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ *su filtración asociada. Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s\, dW_s + \int_0^t v_s\, ds$$

donde X_0 *es no aleatorio, y* u_s *y* v_s *verifican respectivamente* $E \int_0^t u_s^2\, ds < \infty$ *y* $\int_0^t |v_s|\, ds < \infty$ *para cada* $t > 0$ *P-casi seguro, y ambos son procesos estocásticos adaptados a* $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$.

En lo sucesivo haremos estas asunciones de integrabilidad de los los componentes del proceso de Itô, aunque no siempre se refieran de forma explícita.
En general un proceso de Itô será una suma de una integral estocástica más una integral ordinaria (de Lebesgue).

Proposición 1.4 *La variación cuadrática del proceso de Itô es*

$$\langle X, X \rangle(t) = \langle I, I \rangle(t) = \int_0^t u_s^2\, ds$$

En general, esta conclusión puede ser más fácilmente recordada expresando el proceso de Itô mediante una notación diferencial: $dX_t = u_t dW_t + v_t d_t$, lo que da lugar a la siguiente regla:

$$dX_t dX_t = u_t^2 dt, \text{ y } dX_t \cdot dt = dt \cdot dt = 0$$

Definición 1.19 (Integral con respecto de un proceso de Itô) *Sean* $\{X_t\}_{0\leq t}$ *un proceso de Itô y* $\{\Gamma_t\}_{0\leq t}$ *un proceso adaptado. Asumimos que* $E\int_0^t \Gamma_s^2 u_s^2\, ds < \infty$ *y* $\int_0^t |\Gamma_s v_s|\, ds < \infty$, *para cada* $t > 0$ *P-casi seguro, y definimos la integral on respecto de un proceso de Itô como*

$$\int_0^t \Gamma_s dX_s = \int_0^t \Gamma_s u_s dW_s + \int_0^t \Gamma_s v_s ds$$

Teorema 1.8 (Fórmula de Itô) *Para* $f(t,x) \in C^{1,2}$, *un movimiento browniano* $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$, *y* $\{X_t\}_{0\leq t}$ *un proceso de Itô, se tiene para cada* $T > 0$:

$$f(T, X_T) - f(0, X_0) = \int_0^T f_t(t, X_t)\, dt + \int_0^T f_x(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, X_t)\, d\langle X, X\rangle(t)$$

En notación diferencial, puede reescribirse la anterior fórmula como

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)\, u_t\, dW_t + f_x(t, X_t)\, v_t\, dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\, u_t^2\, dt$$

una vez que sustituimos dX_t por $dX_t = u_t dW_t + v_t d_t$.

Teorema 1.9 (Integral de Itô de un integrando determinista) *Sean un movimiento browniano* $\{W_s\}_{0\leq s}$, *y* Δ_s *una función del tiempo no aleatoria. Definamos* $I(t) = \displaystyle\int_0^t \Delta_s\, dW_s$. *Para cada* $t \geq 0$, *la variable aleatoria I(t) esta normalmente distribuida con esperanza cero y varianza* $\displaystyle\int_0^t \Delta_s^2\, ds$.

En el teorema anterior es necesario que $\Delta(s)$ sea no aleatoria para poder obtener la función generadora de momentos $E \exp\{u\, I(t)\} = \exp\{\frac{1}{2} u^2 \displaystyle\int_0^t \Delta_s^2\, ds\}, \forall u \in \mathbb{R}$

Ejemplo **1.2** *Movimiento Browniano Geométrico Generalizado 1 Sean un movimiento browniano* $\{W_s\}_{0\leq s}$, *y* $\{F_t\}_{0\leq t}$ *su filtración asociada. Sean* α_t *y* σ_t *dos procesos adaptados a dicha filtración, donde* α_t *y* σ_t *verifican* $E\int_0^t \sigma_t^2\, ds < \infty$ *y* $\int_0^t |\alpha_t|\, ds < \infty$ *para cada* $t > 0$ *P-casi seguro.*
Definamos el proceso de Itô $X_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_s\, dW_s + \int_0^t (\alpha_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds$.
Entonces $dX_t = \sigma_t\, dW_t + (\alpha_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2)dt$, *y* $dX_t \cdot dX_t = \sigma_t^2\, dW_t \cdot dW_t = \sigma_t^2 dt$.
Si consideramos el proceso de precio de un activo dado por

$$S_t = S_0 \cdot \exp X_t = S_0 \cdot \exp\{\int_0^t \sigma_s\, dW_s + \int_0^t (\alpha_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds\}$$

con S_0 no aleatorio y positivo, podemos escribir

$$S_t = f(X_t),\ con\ f(x) = S_0 \cdot \exp x,\ f'(x) = S_0 \cdot \exp x,\ y f''(x) = S_0 \cdot \exp x$$

y aplicando la fórmula de Itô, obtenemos que $dS_t = \alpha_t\, S_t\, dt + \sigma_t\, S_t\, dW_t$.
El precio del activo, S_t tiene una tasa instantánea de retorno α_t y una volatilidad σ_t, donde se permite a dichas α_t y σ_t variar con el tiempo t y ser aleatorias. Este ejemplo incluye todos los posibles modelos del proceso de precios de un activo que es siempre positivo, que no tiene saltos y que es conducido por un movimiento browniano unidimensional. Si α_t y σ_t son constantes, tenemos el modelo del movimiento browniano geométrico usual, y la distribución de S_t es log-normal. Pero si α_t y σ_t varian con el tiempo t y/o son aleatorias, S_t no será en general log-normal.

Ejemplo **1.3** *Consideremos la función $f(x) = \exp x$. Por la fórmula de Itô,*

$$e^{W_t} - e^{W_0} = \int_0^t e^{W_s} dW_s\ +\ \frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s} ds,$$

es decir, el proceso $\{X_t = e^{W_t}\}_{0\leq t}$ satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = X_t\, dW_t + \frac{1}{2} X_t\, dt$$

con condición inicial dada por $X_0 = 1$.

Ejemplo **1.4** *Movimiento Browniano Geométrico 2.*

Si $f(t,x) = e^{ax - \frac{1}{2}a^2 t}$, $X_t = W_t$, e $Y_t = e^{aW_t - \frac{1}{2}a^2 t}$, entonces como $f_t + \frac{1}{2} f_{xx} = 0$ resulta que $Y_t = 1 + \int_0^t Y_s\, dW_s$. Este importante ejemplo nos permite deducir:

(i) Si una función f(t,x) satisface $f_t + \frac{1}{2} f_{xx} = 0$, entonces el proceso estocástico $f(t, W_t)$ será una integral estocástica indefinida más un término constante, y por tanto será una martingala, siempre que f satisfaga $E(\int_0^t (\, f_x(s, W_t)\,)^2 ds\,) < \infty$

(ii) La solución de la ecuación diferencial estocástica $dY_t = a\, Y_t\, dW_t$ no es $Y_t = e^{a\, W_t}$, como en el caso del cálculo diferencial ordinario, sino $Y_t = e^{a\, W_t - \frac{1}{2} a^2 t}$

Proposición 1.5 (Fórmula de integración por partes) *Sean X_t e Y_t sendos procesos de Itô, de la forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds\ + \int_0^t H_s\, dW_s\ \ e\ \ Y_t = Y_0 + \int_0^t K_s^{'}\, ds\ + \int_0^t H_s^{'}\, dW_s$$

Entonces se tiene

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s\, dY_s\ + \int_0^t Y_s\, dX_s\ +\ \langle\, X, Y\,\rangle_t\ ,\ donde\, \langle\, X, Y\,\rangle_t\ =\ \int_0^t H_s\, H_s{}' ds$$

Supongamos que f(t) es una función continuamente diferenciable en [0, T]. En tal caso tendremos $\int_0^t f_s dW_s = f(t)\, W_t - \int_0^t W_s\, f_s^{'}\, ds$ sin más que aplicar la fórmula de Itô a la función f(t)x, derivando, y luego expresar lo obtenido en forma integral.

1.4.4. Fórmula de Itô para multiples procesos

Proposición 1.6 (Fórmula de Itô para procesos multidimensionales) *Supongamos que tenemos un movimiento browniano m-dimensional*

$$\{W_t\}_{t\geqslant 0} = \{\{W_1^t\}_{t\geqslant 0}, \cdots, \{W_m^t\}_{t\geqslant 0}\}$$

cuyas componentes son movimientos brownianos independientes. Consideremos un proceso de Itô n-dimensional de la forma:

$$X_t^1 = X_0^1 + \int_0^t u_s^{11} dW_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{1m} dW_s^m + \int_0^t v_s^1 \, ds$$

$$- -$$

$$- -$$

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t u_s^{n1} dW_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{nm} dW_s^m + \int_0^t v_s^n \, ds$$

En notación diferencial y vectorial, esto puede expresarse $dX_t = u_t dW_t + v_t dt$ *donde* X_t, v_t, *son procesos n-dimensionales y* u_t *es un proceso con valores en el conjunto de las matrices* $n \times m$. *Supondremos que las componentes de u y v son procesos adaptados, y que además* $E \int_0^t u_s^2 \, ds < \infty$ *y* $\int_0^t |v_s| \, ds < \infty$, *para cada* $t > 0$ *P-casi seguro.*
Entonces, si $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es una función de clase* $C^{1,2}$, *el proceso* $Y_t = f(t, X_t)$ *es tambien un proceso de Itô con la representación siguiente, en notación diferencial:*

$$dY_t^k = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, X_t) \, dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, X_t) \, dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_k^2}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \, dX_t^i \, dX_t^j$$

El producto de los diferenciales $dX_t^i \, dX_t^j$ *se calcula teniendo en cuenta las siguientes reglas:*

$$dW_t^i \, dt = 0, \ (dt)^2 = 0, \ dW_t^i \, dW_t^j = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ dt & si \quad i = j \end{cases}$$

De esta forma se obtiene $dX_t^i \, dX_t^j = (\sum_{k=1}^m u_t^{ik} u_t^{jk}) \, dt = (u_i u_j')_t \, dt.$

Para clarificar la notación y fijar ideas, tomamos el caso de dos procesos de Itô dirigidos por un movimiento browniano bidimensional y ambos procesos los suponemos independientes entre sí. Esto no disminuirá la generalidad de lo hasta ahora expuesto porque puede ser generalizado a cualquier número n de procesos de Itô, conducidos por sendos movimientos brownianos m-dimensionales, eso sí, independientes entre sí. Tendremos:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s^{11} dW_s^1 + \int_0^t u_s^{12} dW_s^2 + \int_0^t v_s^1 \, ds$$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t u_s^{21} dW_s^1 + \int_0^t u_s^{22} dW_s^2 + \int_0^t v_s^2 \, ds$$

Siquiendo las reglas ya expuestas, tendríamos:

$$\langle X, X \rangle(t) = \int_0^t ((u_s^{11})^2 + (u_s^{12})^2) ds \Rightarrow dX_t dX_t = ((u_t^{11})^2 + (u_t^{12})^2) dt$$

todo ello teniendo en cuenta

$$dt\,dt = 0,\; dt\,dW_t^i = 0,\; dW_t^i\,dW_t^i = dt,\;\; dW_t^i\,dW_t^j = 0 \; para \; i \neq j$$

Similarmente $dY_t\,dY_t = ((u_t^{21})^2 + (u_t^{22})^2)\,dt$, y $dX_t\,dY_t = (u_t^{11}\,u_t^{21}\; + u_t^{12}\,u_t^{22}\,)\,dt$

A partir de estas observaciones, tendríamos

Proposición 1.7 (Fórmula de Itô para un proceso bidimensional) *Sea $f(t,x,y) \in C^{1,2}$ y sean X_t e Y_t sendos procesos de Itô independientes y dirigidos por un movimiento browniano bidimensional. Entonces tenemos la siguiente expresión para la fórmula de Itô:*
$d\,f(t,X_t,Y_t) = f_t\,(t,X_t,Y_t)\,dt + f_x\,(t,X_t,Y_t)\,dX_t + f_y\,(t,X_t,Y_t)\,dY_t +$

$$+\frac{1}{2}\,f_{xx}\,(t,X_t,Y_t)\,dX_t\,dX_t + f_{xy}\,(t,X_t,Y_t)\,dX_t\,dY_t + \frac{1}{2}\,f_{yy}\,(t,X_t,Y_t)\,dY_t\,dY_t$$

De forma más compacta podemos expresar la fórmula anterior

$$d\,f(t,X_t,Y_t) = f_t\,dt + f_x\,dX + f_y\,dY\; + \frac{1}{2}\,f_{xx}\,dX\,dX + f_{xy}\,dX\,dY + \frac{1}{2}\,f_{yy}\,dY\,dY$$

donde ya conocemos el significado de dX_t , dY_t y el resto de productos cruzados y cuadráticos que hemos calculado algunas líneas más arriba.
Asimismo, podemos obtener la regla del producto de Itô para sendos procesos de Itô si tomamos $f(t,x,y) = xy$ y obtenemos:

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_tdY_t$$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

BIBLIOGRAFIA: Oksendal B. : " Stochastic differential equations: an introduction with applications, Springer- Verlag 1992"
Luis Rincón: " Introducción a los procesos estocásticos. UNAM. 2012"
Steven E. Shreve " Stochastic Calculus for Finance II. Springer. 2004"
David Nualart "Cálculo Estocástico"
Jose Manuel Corcuera "Introducción a las Finanzas Cuantitativas"

1.5. Representación Integral de Martingalas y cambio de medidas de probabilidad

1.5.1. Representación Integral de Martingalas

Consideremos un proceso estocástico $\mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{H^2}$, espacio de todos los procesos estocásticos $X = \{X_t\}_{0 \leq t}$ medibles y adaptados, de cuadrado integrable, i.e., tales que $(E \displaystyle\int_0^T |X_t|^2 \, dt\,)^{1/2} < \infty$. El espacio H^2 es un subespacio lineal cerrado de $L^2(P \times dt)$, donde la única diferencia entre estos dos espacios es que a los elementos de H^2 se les exige además que sean medibles y adaptados. Todo proceso simple esta en H^2, como sabemos.

Sabemos asimismo que la integral indefinida $X_t = \displaystyle\int_0^t u_s \, dW_s$ es una martingala respecto de la filtración F_T que denota a la filtración $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ generada por un movimiento browniano standard $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Es posible demostrar que todas las martingalas de cuadrado integrable respecto de esta filtración son de este tipo. Aquí se reseñan, sin demostración, los argumentos teóricos que permiten afirmarlo, y que pueden ser examinados con detalle, por ejemplo, en "Cálculo Estocástico" de David Nualart.

Proposición 1.8 (Lema instrumental) *El conjunto de variables aleatorias que son combinaciones lineales de exponenciales de la forma*

$$exp\{ \int_0^T h_s \, dW_s \, - \, \frac{1}{2} \int_0^T h_s^2 \, ds \, \}$$

donde h es una función determinista tal que $\int_0^T h_s^2 \, ds \, < \infty$, *es denso en* $\mathbf{L^2}$.

Teorema 1.10 (Teorema de Representación de Itô) *Consideremos una variable aleatoria* $\mathbf{F}, \mathbf{F} \in \mathbf{L^2}$. *Entonces existe un único proceso estocástico* $\mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{H^2}$ *tal que*

$$F = E(F) + \int_0^T u_s \, dW_s$$

Este teorema establece que cualquier variable aleatoria de cuadrado integrable es representable mediante la integral de Itô con respecto de un movimiento browniano standard de un proceso estocástico medible y adaptado a la filtración generada por el movimiento browniano, para un tiempo T fijado.

Teorema 1.11 (Teorema de Representación de Martingalas) *Consideremos un proceso estocástico* $M = \{M_t\}_{0 \leq t \leq T}$, *que tiene la propiedad de martingala con respecto a* F_T *que denota a la filtración* $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ *generada por un movimiento browniano standard* $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$, *y que* $E\,(\,M_T^2\,) \, < \infty$. *Entonces existe un único proceso estocástico* $\mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{H^2}$ *tal que*

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t u_s \, dW_s \,, \; \forall t \in [0, T]$$

Sin embargo, para el caso de un proceso estocástico multidimensional $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \in \mathbf{H^2}$ que tiene la propiedad de martingala bajo P respecto de la filtración (multidimensional) $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$, generada por el movimiento browniano multidimensional $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$, el anterior Teorema no sería de aplicación a las componentes de dicho proceso tomadas de forma aislada. Los componentes del movimiento browniano multidimensional $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ que genera la filtración (multidimensional) $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ son independientes bajo P, pero cada uno de los Γ_t^j procesos componentes de $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \in \mathbf{H^2}$ puede depender de una forma camino-dependiente pero adaptada de todos o algunos de los movimientos brownianos $\{W_t^1\}_{0 \leq t \leq T}, \cdots, \{W_t^d\}_{0 \leq t \leq T}$.

Teorema 1.12 (Teorema Representación Martingalas múltiples dimensiones) *Sea T un instante fijado positivo, y asumamos que $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$, es la filtración generada por el movimiento browniano d-dimensional $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$. Sea $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ una martingala con respecto de dicha filtración bajo la medida de probabilidad P, y que $E\,(\,M_T^2\,) < \infty$. Entonces existe un proceso estocástico d-dimensional adaptado, $\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \in \mathbf{H^2}$,*

$$\big\{\mathbf{\Gamma_s}\big\}_{0\leq s\leq T} = \big\{\{\Gamma_s^1\}_{0\leq s\leq T},\, \cdots, \{\Gamma_s^d\}_{0\leq s\leq T}\big\}$$

tal que

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_s \,\cdot\, dW_s\,,\; 0 \leq s \leq T$$

donde M_t es el proceso estocástico con la propiedad de martingala del enunciado, representado por una matriz columna de tamaño $d\times 1$ y la notación $(\cdot)$ designa al producto del vector columna que representa al proceso Γ_s, de tamaño $d \times 1$, y el vector fila que representa al movimiento browniano dW_s, de tamaño $1 \times d$ con lo que

$$M_t^i = M_0^i + \int_0^t \Gamma_s^i \,\cdot\, dW_s = M_0^i + \int_0^t \sum_{j=1}^{d} \Gamma_s^i\, dW_s^j = M_0^i + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \Gamma_s^i\, dW_s^j$$

donde $i = 1, 2, \cdots, d$;

1.5.2. Cambio de medidas de probabilidad. Teorema de Girsanov

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$ y una variable aleatoria $Z \geq 0$ de esperanza $E\,Z = 1$ es posible definir una nueva probabilidad $\mathbb{Q}$, definiendo para cada $A \in F$ la medida dada por $\mathbb{Q}\,(\,A\,) = E\,(\,1_A\,Z\,)$. Que la esperanza de Z sea 1 garantiza que $Q(\Omega) = EZ = 1$. Se dice que Z es la densidad de $\mathbb{Q}$ respecto de $\mathbb{P}$ y se escribe formalmente $\dfrac{dQ}{dP} = Z$.
La esperanza de una variable aleatoria X en el espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{Q})$ se calcula de la forma siguiente:

$$E^Q\,X = E^P\,(\,X\,Z\,) = E^P(\,X\,\frac{dQ}{dP}\,)$$

La probabilidad $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}$, lo que significa que

$$P(A) = 0 \,\Rightarrow\, Q(A) = 0$$

Si la variable Z es estrictamente positiva, entonces las probabilidades $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes, o sea, mutuamente absolutamente continuas, lo que significa

$$P(A) = 0 \,\Leftrightarrow\, Q(A) = 0$$

y podremos denotar $Q(A) \equiv \widetilde{P}(A)$ para remarcar dicha equivalencia.

En esta sección estamos interesados en mostrar un cambio de medida que pueda ser aplicado no solo a una variable aleatoria, sino a un proceso estocástico completo para poder así ser capaces de convertirlo, bajo determinados supuestos, en una martingala. El interés de esta transformación se verá más adelante, pero desde ahora podemos señalar que es la base para poder valorar los precios de derivados financieros de una manera "justa" en el sentido de que no permitirá enriquecimientos "ilegítimos" de los actores del mercado, con el significado que se especificará.
De una forma general, el Teorema de Girsanov establece que en el espacio de probabilidad

$(\Omega, F_T, \mathbb{Q})$, el proceso estocástico $\{\widetilde{W}_t = W_t + \lambda\, t\,\}_{0\leq t\leq T}$ es un movimiento browniano standard, donde $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un movimiento browniano standard en $(\Omega, F_T, \mathbb{P})$.
Es interesante tener en cuenta, a la hora de verificar las demostraciones pertinentes, la siguiente proposición de carácter técnico:

Proposición 1.9 (Lema instrumental) *Supongamos que X es una variable aleatoria real y G es una σ-álgebra tales que*

$$E(e^{iuX}\,|\,G) = E_G\, e^{iuX} \;= e^{-\dfrac{u^2\sigma^2}{2}}$$

Entonces, la variable X es independiente de la σ-álgebra G y tiene una distribución normal $N(0,\sigma^2)$.

Para establecer los aspectos relativos al cambio de medida con propiedad, supongamos que tenemos el espacio de probabilidad $(\Omega, F_T, \mathbb{P})$, y una filtración F_T que denota a $\{\,F_t\,\}_{0\leq t\leq T}$ con T un instante fijado.Supongamos que tenemos una variable aleatoria Z definida en dicho espacio probabilístico, estrictamente positiva $\mathbb{P}$-casi seguro, y que satisface E Z = 1.

Entonces podemos definir una nueva medida de probabilidad

$$Q(A) = \widetilde{P}(A) = \int_A Z(w)\, dP(w),\ \forall\, A\, \in F$$

Ahora cualquier variable aleatoria X tiene dos esperanzas, una bajo la medida de probabilidad original P, la cual denotamos por E X, y la otra bajo la nueva medida de probabilidad $\widetilde{P}$, que denotamos por $\widetilde{E}\, X$. Ambas están relacionadas por la fórmula $\widetilde{E}\, X = E\left[X\, Z\,\right]$
Si $P\left\{\, Z\, >\, 0\right\} = 1$ entonces P y $\widetilde{P}$ coincidirán en cuales eventos medibles tiene probabilidad nula y cuales la tienen no nula, aunque no necesariamente han de coincidir en cual fuera la medida de estos últimos.

Definición 1.20 (Proceso de la derivada de Radon-Nikodym) *Dados el espacio de probabilidad $(\Omega, F_T, \mathbb{P})$, y una filtración F_T que denota a $\{\,F_t\,\}_{0\leq t\leq T}$ con T un instante fijado y una variable aleatoria Z definida en dicho espacio probabilístico, estrictamente positiva $\mathbb{P}$-casi seguro, y que satisface E Z = 1, el proceso de la derivada de Radon-Nikodym, $\{\,Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ se define por*

$$\{\,Z_t\}_{0\leq t\leq T} = \{\,E\left[Z|F_t\right]\,\}_{0\leq t\leq T} = \{\,E_t Z\,\}_{0\leq t\leq T}, donde F_t \in F_T$$

Expresaremos en general $Z_t = E_t\, Z$ con cierto abuso, al tomar la parte (una variable aleatoria) por el todo (un proceso estocástico).

Este proceso **es una martingala** a causa del condicionamiento iterado: para $0 \leq s \leq t \leq T$ se tiene

$$E_s\, Z_t = E\big[\, E_t\, Z\,\big|F_s\,\big] = E_s\, Z = Z_s$$

y además de esta propiedad tiene las que reflejan los siguientes lemas instrumentales:

Proposición 1.10 (Lema instrumental) *Fijado T, sea t, tal que $0 \leq t \leq T$, y sea Y una variable aleatoria F_t-medible. Entonces $\widetilde{E}\, Y = E\left[Y\, Z_t\,\right]$, conforme a la definición del proceso de la derivada de Radon-Nikodym.*

Proposición 1.11 (Lema instrumental) *Sean s y t tales que $0 \leq s \leq t \leq T$ y sea Y una variable aleatoria F_t-medible. Entonces $\widetilde{E_s}\, Y = \dfrac{1}{Z_s}\, E_s\left[\, Y\, Z_t\,\right]$*

Teorema 1.13 (Teorema de Girsanov unidimensional) *Sean un espacio de probabilidad* $(\Omega, F, \mathbb{P})$*, un movimiento browniano standard unidimensional* $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$*, junto con la filtración* $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ *para la cual dicho proceso estocástico es adaptado, y sea tambien* $\{\theta_t\}_{0\leq t\leq T}$*, un proceso estocástico que tambien es adaptado a dicha filtración.*
Definimos

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\Big\{ -\int_0^t \theta_u \, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_u^2 \, du \Big\} \\ \widetilde{W_t} &= W_t + \int_0^t \theta_u \, du \end{aligned}$$

Para asegurar condiciones de Itô-integrabilidad y de martingala, de forma similar a lo impuesto en la construcción de la integral de Itô, imponemos la condición

$$E \int_0^T \theta_u^2 \, Z_u^2 \, du \; < \infty$$

Fijamos $Z = Z_T$*. Entonces* $E\, Z = 1$ *y bajo la medida de probabilidad* $\widetilde{P}$ *dada por*

$$Q(A) = \widetilde{P}(A) = \int_A Z(w) \, dP(w), \; \forall \, A \in F$$

tenemos que el proceso $\{\widetilde{W_t}\}_{0\leq t\leq T}$ *es un movimiento browniano standard.*

La demostración de este teorema se basa en el uso del Teorema de caracterización de Levy, que establece que una martingala que comienza en cero en el tiempo cero, con caminos continuos y variación cuadrática igual a t en cada instante t, es un movimiento browniano. El proceso $\{\widetilde{W_t}\}_{0\leq t\leq T}$ comienza en cero para t=0 y es continuo. Además, $\langle \widetilde{W_t}, \widetilde{W_t}\rangle = \langle W_t, W_t\rangle = t$ ya que el término $\int_0^t \theta_u \, du$ en la definición de $\widetilde{W_t}$ tiene una contribución nula a la variación cuadrática del proceso.
El proceso estocástico $\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala bajo la medida de probabilidad P. Derivando bajo la regla de Itô se obtiene $dZ_t = -\theta_t \, Z_t \, dW_t$, e integrando esta expresión se obtiene $Z_t = Z_0 - \displaystyle\int_0^t \theta_u \, Z_u \, dW_u$. Como las integrales de Itô son martingalas, Z_t, como proceso estocástico tambien goza de dicha propiedad. A la misma conclusión se llega sin integrar el término diferencial anterior ya que no contiene término en dt, siendo su drift, o coeficiente de deriva nulo. En particular, $E\, Z = E\, Z_T = Z_0 = 1$.
Como $\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala y $Z = Z_T$, tenemos $Z_t = E_t \, Z_T = E_t \, Z$, para $0 \leq t \leq T$, y esto muestra que $\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso de la derivada de Radon-Nikodym, con lo que los lemas instrumentales 1.10 y 1.11 que siguen a su definición le son de aplicación.
Tambien es una martingala, bajo P, el proceso estocástico $\{\widetilde{W_t}\, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$, lo que se observa al derivar dicha expresión bajo la regla del producto de Itô, ya que se obtiene una expresión diferencial estocástica que no tiene término en dt, es decir, sin deriva: $d\left(\widetilde{W_t}\, Z_t\right) = \left(\widetilde{W_t}\, \theta_t + 1\right) Z_t \, dW_t$
Si ahora consideramos s y t tales que $0 \leq s \leq t \leq T$ para T dado, por el anterior lema instrumental y por la propiedad de martingala bajo P del proceso $\{\widetilde{W_t}\, Z_t\}_{0\leq t\leq T}$ tenemos

$$\widetilde{E_s}\, \widetilde{W_t} = \frac{1}{Z_s} E_s \left[\widetilde{W_t}\, Z_t \right] = \frac{1}{Z_s} \widetilde{W_s}\, Z_s = \widetilde{W_s}$$

y con esto queda demostrado que $\widetilde{W_t}$ como proceso estocástico es una martingala bajo la medida de probabilidad $\widetilde{P}$.

Las medidas de probabilidad P y $\widetilde{P}$ del Teorema de Girsanov resultan ser equivalentes por ser $P\left\{ Z > 0\right\} = 1$.

Si recordamos el Teorema de Representación de Martingalas de la sección anterior, vemos que una de las condiciones para el mismo era que la filtración de referencia era generada por el movimiento browniano, y que $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ era una martingala con respecto a dicha filtración en el espacio de probabilidad de referencia. Esto significa que la única información aportada por la filtración es la obtenida mediante la observación del movimiento browniano hasta el instante t. De esta forma cada martingala con respecto de dicha filtración es una condición inicial más una integral de Itô con respecto del movimiento browniano. La importancia para el recubrimiento de un derivado financiero (se verá más adelante) consiste en que de esta forma la única fuente de aleatoriedad del modelo es el movimiento browniano al que se refiere el Teorema de Representación de Martingalas y por tanto esta es la única fuente de aleatoriedad que se intentará eliminar a través del recubrimiento de un derivado financiero.
Esta asunción es más fuerte que la impuesta en el Teorema de Girsanov, en el que la filtración puede contener a la generada por el movimiento browniano. Si imponemos al Teorema de Girsanov la más restrictiva de ambas, este Teorema no varía en su primer parágrafo y se le añadiría un segundo que contendría una segunda aserción:

" Sea $\{ \widetilde{M_t} \}_{0\leq t\leq T}$ una martingala bajo $\widetilde{P}$.
Entonces existe un proceso estocástico adaptado $\{ \widetilde{\Gamma}_u \}_{0\leq u\leq T}$, tal que

$$\widetilde{M_t} = \widetilde{M_0} + \int_0^t \widetilde{\Gamma}_u \, d\widetilde{W_u}\,,\ 0\leq t\leq T.''$$

Este corolario no es una consecuencia trivial del Teorema de Representación de Martingalas con $\widetilde{W_t}$ reemplazando a W_t porque la filtración $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ en este corolario esta generada por el proceso $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$, y no por el $\widetilde{P}$-movimiento browniano $\{\widetilde{W_t}\}_{0\leq t\leq T}$

Teorema 1.14 (Teorema de Girsanov multidimensional) *Sean un espacio de probabilidad $(\Omega, F, \mathbb{P})$, un movimiento browniano standard d-dimensional $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$, junto con la filtración $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ (d-dimensional) para la cual dicho proceso estocástico es adaptado, y sea tambien un proceso estocástico d-dimensional, $\left\{\Theta_t\right\}_{0\leq t\leq T} = \left\{\{\theta_t^1\}_{0\leq t\leq T}, \cdots, \{\theta_t^d\}_{0\leq t\leq T}\right\}$ que también es adaptado a dicha filtración.*
Definimos

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\left\{ -\int_0^t \Theta_u \cdot dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Theta_u\|^2\, du \right\} \\ \widetilde{W_t} &= W_t + \int_0^t \Theta_u \cdot du \end{aligned}$$

Para asegurar condiciones de Itô-integrabilidad y de martingala, de forma similar a lo impuesto en la construcción de la integral de Itô, y en la versión unidimensional de este Teorema, imponemos la condición

$$E\int_0^T \|\Theta_u\|^2\, Z_u^2\, du \ < \infty$$

Fijamos $Z = Z_T$. Entonces $E\,Z = 1$ y bajo la medida de probabilidad $\widetilde{P}$ dada por

$$Q(A) = \widetilde{P}(A) = \int_A Z(w)\, dP(w),\ \forall\, A \in F$$

tenemos que el proceso $\{\widetilde{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$ *es un movimiento browniano d-dimensional standard.*

Es de señalar que los procesos componentes de $\{\widetilde{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$ son independientes bajo $\widetilde{P}$. Esto es parte del significado de "ser un movimiento browniano d-dimensional". Los procesos componentes de $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ son independientes bajo P, pero cada uno de los θ_j^t procesos puede depender de una forma camino-dependiente pero adaptada de todos o algunos de los movimientos brownianos $\{W_1^t\}_{0\leq t\leq T}, \cdots, \{W_m^t\}_{0\leq t\leq T}$. Por tanto, bajo P, los componentes de $\{\widetilde{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$ pueden no ser independientes.

Asimismo, tambien a este Teorema se le puede hacer la observación que se le hacía a su versión unidimensional:

Si la filtración $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ (d-dimensional) esta generada por el movimiento browniano $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ (d-dimensional), puede añadirse al Teorema el siguiente corolario:
" Sea $\{\,\widetilde{M}_t\,\}_{0\leq t\leq T}$ un proceso adaptado d-dimensional que es martingala bajo $\widetilde{P}$.
Entonces existe un proceso estocástico adaptado d-dimensional $\{\,\widetilde{\Gamma}_u\,\}_{0\leq u\leq T}$, tal que

$$\widetilde{M}_t = \widetilde{M}_0 + \int_0^t \widetilde{\Gamma}_u \cdot d\widetilde{W}_u\,,\ 0 \leq t \leq T.''$$

BIBLIOGRAFIA:
Steven E. Shreve " Stochastic Calculus for Finance II. Springer. 2004"
David Nualart "Cálculo Estocástico"

1.6. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas y en Derivadas Parciales. Relación

Existen dos formas, básicamente, de computar el precio de un derivado financiero: la primera es la utilización de Métodos de Montecarlo mediante los cuales se simulan muchos posibles caminos que pueden tomar los precios del subyacente bajo una medida neutral al riesgo y posteriormente se estima cual podría ser el precio de dicho derivado. La segunda consiste en resolver alguna o algunas ecuaciones en derivadas parciales a las que se llega a través de las correspondientes ecuaciones diferenciales estocásticas que modelan los precios de los activos financieros subyacentes. Este segundo método en general no aporta fórmulas cerradas y procede, entonces, su resolución mediante algún método numérico adecuado. En esta sección se examina esta segunda alternativa en lo concerniente a las relaciones que existen entre las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y las ecuaciones diferenciales estocásticas.

1.6.1. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Definición 1.21 (Ecuación diferencial estocástica) *Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma*

$$dX_u = \beta\,(\,u, X_u\,)\,du + \gamma\,(\,u, X_u\,)\,dW_u$$

donde $\beta\,(\,u, x\,)$ *y* $\gamma\,(\,u, x\,)$ *son funciones dadas, que denominamos comúnmente drift o término de tendencia y término de difusión o difusivo.*

Además de esta ecuación, una condición inicial de la forma $X_t = x$ donde $t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$ deben ser especificados. Entonces, el problema que se plantea es el de encontrar un proceso estocástico $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ tal que se satisfagan las condiciones

$$X_t = x,\ \ y\ \ X_T = X_t + \int_t^T \beta\,(\,u, X_u\,)\,du + \int_t^T \gamma\,(\,u, X_u\,)dW_u$$

Bajo determinadas condiciones en las funciones $\beta\,(\,u,x\,)$ y $\gamma\,(\,u,x\,)$ existe un único proceso X_T con $T \geq t$ que satisface las condiciones iniciales y de contorno dadas, aunque dicho proceso puede ser difícil de hallar debido a que aparece a ambos lados del signo de igualdad de la condición de contorno.
La solución X_T en el tiempo T será F_T-medible, i.e. solo depende del camino del movimiento browniano hasta el instante T, y de hecho, como la condición inicial $X_t = x$ esta especificada, lo único que se necesita para determinar X_T es el camino del movimiento browniano desde el instante t hasta el instante T. En resumen, la solución es un proceso estocástico con trayectorias continuas adaptado a la filtración browniana y que cumple la condición inicial y la de contorno.
A los procesos solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas se les llama tambien procesos de difusión.
A pesar de que las ecuaciones diferenciales estocásticas son en general difíciles de resolver explícitamente, puede ser así resuelta la ecuación estocástica diferencial unidimensional siguiente:

$$dX_u = \big(a_u + b_u\,X_u\big)du + \big(\gamma_u + \sigma_u\,X_u\big)dW_u$$

donde a_u , b_u , γ_u y σ_u son funciones no aleatorias del tiempo. Incluso, esta ecuación puede ser aún resuelta cuando dichas funciones son procesos aleatorios adaptados, aunque entonces ya no será de la forma descrita en la definición que encabeza esta sección.
En esta exposición solo permitiremos en la parte derecha de la ecuación diferencial estocástica la aleatoriedad inherente a X_t y al movimiento browniano que dirige al proceso estocástico, W_t. Esto es así con el objeto de garantizar que la solución de dicha ecuación tiene la propiedad de Markov. No puede haber aleatoriedad adicional, como ocurriría si alguno de los procesos a_u , b_u , γ_u y σ_u fueran aleatorios.

Ejemplo **1.5** ***Movimiento Browniano Geométrico.*** *La ecuación diferencial estocástica para un movimiento browniano geométrico es*

$$dS_u = \alpha\,S_u\,du + \sigma\,S_u\,dW_u$$

donde se corresponden $\beta\,(\,u,x\,)$ y $\gamma\,(\,u,x\,)$ con $\alpha\,x$ y $\sigma\,x$, respectivamente.
Sabemos que para t = 0 y S_0, valor del activo en el instante inicial, la solución de esta ecuación diferencial estocástica viene dada por la expresión $S_t = S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,W_t\,+\big(\,\alpha - \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\big)\,t\,\big\}$
De forma similar, para $T \geq t$ se tiene $S_T = S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,W_T\,+\big(\,\alpha - \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\big)\,T\,\big\}$
Dividiendo la segunda expresión por la primera obtenemos

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp\,\left\{\sigma\,\big(W_T - W_t\big) + \big(\,\alpha - \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\big)\,\big(\,T-t\,\big)\,\right\}$$

Si la condición inicial es dada en el tiempo t en vez de en t=0, esta última ecuación queda

$$S_T = x\exp\,\left\{\sigma\,\big(W_T - W_t\big) + \big(\,\alpha - \frac{1}{2}\,\sigma^2\,\big)\,\big(\,T-t\,\big)\,\right\}$$

y como era de esperar, al usar la condición inicial $S_t = x$, entonces S_T depende únicamente del camino del movimiento browniano entre los tiempos t y T.

Este es momento de recordar uno de los ejemplos tratados en este trabajo, y ver la diferencia de los matices en los planteamientos de ambos, lo que puede ayudar a fijar ideas:

Recordatorio. Ejemplo 1.1 sobre el Movimiento Browniano Generalizado. Sean un movimiento browniano $\{W_s\}_{0\leq s}$, y $\{F_t\}_{0\leq t}$ su filtración asociada. sean α_t, *y* σ_t dos procesos adaptados. Definamos el proceso de Itô $X_t = \int_0^t \sigma_s\, dW_s + \int_0^t (\alpha_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds.$
Entonces $dX_t = \sigma_t\, dW_t + (\alpha_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2)dt$, y $dX_t \cdot dX_t = \sigma_t^2\, dW_t \cdot dW_t = \sigma_t^2 dt$.
Si consideramos el proceso de precio de un activo dado por

$$S_t = S_0 \cdot \exp X_t = S_0 \cdot \exp\{\int_0^t \sigma_s\, dW_s + \int_0^t (\alpha_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds\}$$

con S_0 no aleatorio y positivo. Podemos escribir

$$S_t = f(X_t),\ con\, f(x) = S_0 \cdot \exp x,\ f'(x) = S_0 \cdot \exp x,\ y\ f''(x) = S_0 \cdot \exp x$$

y aplicando la fórmula de Itô, obtenemos que $dS_t = \alpha_t\, S_t\, dt + \sigma_t\, S_t\, dW_t$.
El precio del activo, S_t tiene una tasa instantánea de retorno α_t y una volatilidad σ_t, donde se permite a dichas α_t y σ_t variar con el tiempo t y ser aleatorias. Este ejemplo incluye todos los posibles modelos del proceso de precios de un activo que es siempre positivo, que no tiene saltos y que es conducido por un movimiento browniano unidimensional. Si α_t y σ_t son constantes, tenemos el modelo del movimiento browniano geométrico usual, y la distribución de S_t es log-normal. Pero si α_t y σ_t varian con el tiempo t y/o son aleatorias, S_t no será en general log-normal. **Fin del recordatorio.**
Nosotros hemos usado en el ejemplo de esta sección α y σ constantes.

1.6.2. Propiedad de Markov

Consideremos la ecuación diferencial estocástica de la definición, con $0 \leq t \leq T$ dados y una función h(y) que es medible-Borel. Denotemos por

$$g(t,x) = E^{t,x}\, h\,(\,X_T\,)$$

a la esperanza de $h\,(\,X_T\,)$, donde X_T es la solución de dicha ecuación con condición inicial $X_t = x$. Asumimos que $E^{t,x}\,|\,h\,(\,X_T\,)| < \infty$. Aquí no hay en g(t,x) nada aleatorio. De hecho es una simple función, Borel-medible, de dos simples variables x y t.
Si no conocemos la distribución de X_T podríamos calcular g(t,x) numéricamente comenzando por $X_t = x$ hasta llegar a g(T,x), y simular la ecuación diferencial estocástica utilizando el método de Euler, por ejemplo, para evaluar la solución mediante algún método de Montecarlo. Si empezasemos con un tiempo diferente t y un valor inicial x diferentes, podríamos obtener una respuesta diferente en el cálculo, y esta dependencia de t y de x es lo que indica enfáticamente la notación $E^{t,x}$

Teorema 1.15 *Sea X_u, $u \geq 0$, una solución a la ecuación diferencial estocástica de la definición con condición inicial dada en $t = 0$. Entonces, para $0 \leq t \leq T$ se tiene*

$$E\big[h(X_T)\,\big|\,F_t\,\big] = E_t\, h(X_T)\ = g(t, X_t)$$

Lo que significa que si suponemos que el proceso X_u comienza en t = 0 y es generado por la ecuación diferencial estocástica de referencia y observamos el recorrido generado por esta hasta el instante t, y deseamos calcular la esperanza condicionada por los datos que hemos conocido de $h(X_T)$, podríamos considerar que el proceso esta comenzando en el instante t en la posición x que ocupa, generar la solución de la ecuación diferencial estocástica correspondiente a la condición inicial dada por $X_t = x$ y computar el valor esperado de $h(X_T)$generado por este método. Es decir, reemplazamos X_t por una simple variable x para mantenerlo constante, computamos $g(t,x) = E^{t,x}h(X_T)$ y después de computar esta función ponemos la variable aleatoria X_t de nuevo en el lugar de x. Este método es aplicable al caso porque el valor de X_T esta determinado por el valor de X_t , que es F_t-medible y los incrementos del movimiento browniano entre los tiempos t y T son independientes de F_t.
En esta discusión debe notarse que aunque uno observa el proceso estocástico X_u desde 0 hasta $t \in [0,T)$, la única pieza relevante de información cuando se computa $E\big[h(X_T)\,\big|\,F_t\,\big] = E_t\,h(X_T) = g(t, X_t)$ es el valor de X_t, y esto significa que X_t es un proceso de Markov.
Por lo tanto podemos decir que **las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas son procesos de Markov.**

1.6.3. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Existe una relación interesante entre procesos de difusión y ecuaciones en derivadas parciales. En general, los procesos de difusión permiten dar interpretaciones probabilistas de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.
Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo **1.6** ***(Movimiento Browniano y Ecuación de la Calor.)***
Si B_t es un movimiento browniano y f es una función continua y con crecimiento polinomial, la función

$$u(t,x) = E\,f\,(\,B_t + x\,)$$

satisface la ecuación de la calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condición inicial u(0,x) = f(x). Esto es debido a que podemos escribir

$$E\,f\,(\,B_t + x\,) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\,dy$$

y la función $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ *para cada y fijo satisface la ecuación* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
La función $x \mapsto u(t,x)$ representa la distribución de temperaturas en una barra de longitud infinita, suponiendo una condición inicial de temperaturas dada por la función f(x).

Proposición 1.12 *Sea X_u una solución a la ecuación diferencial estocástica de referencia con condición inicial dada en t = 0. Sea h(y) una función medible Borel, fijemos $T > 0$, y sea g(t,x) dado por $E^{t,x}\,h\,(\,X_T\,)$. Entonces el proceso estocástico dado por $\{\,g(t,X_t)\,\}_{0\le t\le T}$ es una martingala.*

Teorema 1.16 (Teorema de Feynman-Kac) *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_u = \beta\,(\,u, X_u\,)\,du + \gamma\,(\,u, X_u\,)\,dW_u$$

y sea h(y) una función medible-Borel. Fijemos $T > 0$ y sea dado t, $t \in [0,T]$. Definamos la función dada por $g(t,x) = E^{t,x}\, h\,(\,X_T\,)$. Asumamos que $E^{t,x}\,|\,h\,(\,X_T\,)| \,<\infty$ para todo t y todo x.
Entonces g(t,x) satisface la ecuación en derivadas parciales

$$g_t(t,x) + \beta(t,x)\, g_x(t,x) + \frac{1}{2}\,\gamma^2(t,x)\, g_{xx}(t,x) = 0$$

y la condición terminal

$$g(T,x) = h(x), \;\; \forall\, x.$$

La prueba de estas proposiciones puede consultarse en la bibliografía del final de la sección. El principio general de la prueba de este teorema es:

1.- hallar la martingala,

2.- diferenciar por regla de Itô

3.- igualar a cero el término en dt.

Esto proporciona una ecuacion en derivadas parciales que puede ser resuelta numéricamente.

Teorema 1.17 (Teorema de Feynman-Kac, proceso descontado) *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_u = \beta\,(\,u, X_u\,)\, du \,+ \gamma\,(\,u, X_u\,)\, dW_u$$

y sea h(y) una función medible-Borel. Fijemos $T > 0$ y sea dado t, $t \in [0,T]$. Definamos la función dada por $f(t,x) = E^{t,x}\left[\,e^{-r\,(T-t)}\; h\,(\,X_T\,)\right]$. Asumamos que $E^{t,x}\,|\,h\,(\,X_T\,)| \,<\infty$ para todo t y todo x.
Entonces f(t,x) satisface la ecuación en derivadas parciales

$$f_t(t,x) + \beta(t,x)\, f_x(t,x) + \frac{1}{2}\,\gamma^2(t,x)\, f_{xx}(t,x) = r\, f(t,x)$$

y la condición terminal

$$f(T,x) = h(x), \;\; \forall\, x.$$

Teorema 1.18 (Teorema de Feynman-Kac n-dimensional, descontado) *Sea $\{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ un proceso estocástico n-dimensional, dado para i = 1..n por $\{X_t^i\}_{0\leq t\leq T}$, y sean para cada uno de estos procesos estocásticos, $\{W_t^j\}_{0\leq t\leq T}$ n movimientos brownianos que lo dirigen, con $\{F_t^{i,j}\}_{0\leq t\leq T}$ las filtraciones correspondientes a las que los movimientos brownianos son adaptados.*
Sean $r \geq 0$ una constante real, $\sigma(t,x) = \left[\,\sigma_{i,j}\,(t,x)\right]$ una matriz real y simétrica $n\,\times\, n$, y sean $h : R^n \,\longrightarrow\, R$, y $\beta_i : R^+ \,\times\, R^n \,\longrightarrow R$ sendas funciones con valores reales. Supongamos que la función $f : R^+ \,\times\, R^n \,\longrightarrow\, R$ dada por f(t,x) resuelve el problema con ligaduras siguiente:

$$f_t(t,x) + \sum_{i=1}^{n}\, \beta_i(t,x)\, f_{x_i}(t,x) + \frac{1}{2}\,\sum_{i,j=1}^{n}\, C_{i,j}(t,x)\, f_{x_i,x_j}(t,x) = r\, f(t,x)$$

y la condición terminal

$$f(T,x) = h(x), \;\; \forall\, x, \;\; donde\;\, C_{i,j}(t,x) = \sum_{k=1}^{n}\, \sigma_{ik}(t,x)\sigma_{jk}(t,x)$$

Asumamos además que para cada i = 1..n, el proceso $\{X_t^i\}_{0\le t\le T}$ *resuelve la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t^i = \beta_i\,(\,t, X_t\,)\,dt\, + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(\,t, X_t\,)\,dW_t^j$$

donde $X_t = \left\{\, X_t^1,\, \cdots\, X_t^n \right\}$. *Finalmente, supongamos que*

$$\int_0^T E\left[\, \sum_{j=1}^{n} \left(\, \sigma_{ij}\,(s, X_s)\, f_{x_i}\,(s, X_s)\,\right)^2 \right] dx\, < \infty,\;\; i = 1..n.$$

Entonces $f(t,x) = e^{-r(T-t)}\, E^{t,x} h(X_T) = e^{-r(T-t)}\, E\left[h(X_T)\,\big|_{X_t=x}\right]$, *donde la última igualdad denota a la esperanza condicionada respecto del valor del proceso estocástico en el instante t, que es conocido y es x.*

Como corolario del anterior teorema, puede concluirse que
" Sea $\{S_t\}_{0\le t\le T}$ un proceso estocástico n-dimensional con $S_t = \{\, S_t^1, \cdots\, S_t^n\,\}$ análogo al del teorema anterior, y que representa el proceso de precios de un activo financiero que esta vinculado a n activos financieros independientes entre sí, y sea $C_T = h(S_T)$ la función de pago o de valor de dicho activo en el instante T. Entonces el valor del activo en el instante $t < T$, dado por

$$V_t = e^{-r(T-t)}\, \widetilde{E}_t\, h(S_T) = e^{-r(T-t)}\, \widetilde{E}\,\left[\, h(S_T) \big|\, S_t = x\,\right] \triangleq f(t,x)$$

satisface

$$f_t(t,x) + r\, \sum_{i=1}^{n}\, x_i\, f_{x_i}(t,x) + \frac{1}{2}\, \sum_{i,j=1}^{n}\, C_{i,j}(t,x)\, x_i\, x_j\, f_{x_i,x_j}(t,x) = r\, f(t,x)$$

y la condición terminal

$$f(T,x) = h(x),\;\; \forall\, x,\;\; donde\;\, C_{i,j}(t,x) = \sum_{k=1}^{n}\, \sigma_{ik}(t,x)\sigma_{jk}(t,x)''$$

Para fijar ideas, podemos ilustrar el Teorema de Feynman-Kac multidimensional usando el ejemplo de dos ecuaciones diferenciales estocásticas conducidas por dos movimientos brownianos. Sea $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ un movimiento browniano bidemensional, es decir, un vector de dos movimientos brownianos unidimensionales e independientes entre sí. Consideremos dos ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{aligned} dX_u^1 &= \beta_1(u, X_u^1, X_u^2)du + \gamma_{11}(u, X_u^1, X_u^2)dW_u^1 + \gamma_{12}(u, X_u^1, X_u^2)dW_u^2 \\ dX_u^2 &= \beta_2(u, X_u^1, X_u^2)du + \gamma_{21}(u, X_u^1, X_u^2)dW_u^1 + \gamma_{22}(u, X_u^1, X_u^2)dW_u^2 \end{aligned}$$

La solución a este par de ecuaciones , comenzando en $X_1(t) = x_1$ y en $X_2(t) = x_2$ depende del tiempo inicial t especificado y de las posiciones iniciales x_1 y x_2, y con independencia de estas condiciones iniciales, la solución es un proceso de Markov. Sea $h(y_1, y_2)$ una función medible-Borel dada. Dada la condición inicial (t, x_1, x_2) con $0 \le t \le T$ definimos

$$\begin{aligned} g(t, x_1, x_2) &= E^{t,x_1,x_2} h(X_T^1, X_T^2) \\ f(t, x_1, x_2) &= E^{t,x_1,x_2}\left[\, e^{-r(T-t)}\, h(X_T^1, X_T^2)\,\right] \end{aligned}$$

Entonces,

$$g_t + \beta_1 g_{x_1} + \beta_2 g_{x_2} + \frac{1}{2}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2) g x_1 x_1 + (\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}) g_{x_1x_2} + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2) g_{x_2X_2} = 0$$

$$f_t + \beta_1 f_{x_1} + \beta_2 f_{x_2} + \frac{1}{2}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2) f x_1 x_1 + (\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}) f_{x_1x_2} + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2) f_{x_2x_2} = rf$$

Ambas ecuaciones, satisfaciendo tambien las condiciones terminales para todo x_1 y x_2
$g(T, x_1, x_2) = f(T, x_1, x_2) = h(x_1, x_2)$.

BIBLIOGRAFIA: Oksendal B. : " Stochastic differential equations: an introduction with applications, Springer- Verlag 1992"
Steven E. Shreve " Stochastic Calculus for Finance II. Springer. 2004"
David Nualart "Cálculo Estocástico"
Allison Etheridge " A course in Financial Calculus "

Capítulo 2

Valoración Neutral al Riesgo bajo el Modelo de Black-Scholes

En este capítulo derivaremos la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes-Merton, que aporta el valor de un derivado financiero en el tiempo t.

Definición 2.1 (Producto Derivado Financiero) *Un producto derivado financiero, o derivado, es una variable aleatoria no negativa definida en el mismo espacio de probabilidad filtrado de un mercado de referencia y F_t-medible. En general designaremos el derivado genérico por C_T, haciendo referencia al horizonte temporal del mercado de referencia, y su payoff, o eventual pago al poseedor del derivado se designará por h.*

A veces se utilizará indistintamente C_T o h para designar el payoff del derivado, toda vez que dicha variable aleatoria lo identifica.

Existen muchos tipos de derivados financieros, tales como contratos forward, de futuros, opciones, swaps,... etc. Dichos productos derivados establecen una obligación contractual entre el emisor y el tomador desarrollada en las especificaciones del producto. El payoff que se establece esta relacionado con una serie de acontecimientos relativos al precio del activo subyacente desde el tiempo t=0 de la contratación, hasta el tiempo t de ejercicio o posible ejercicio del derecho, que tambien es una característica contractual.
Por eso se llama derivado: depende del comportamiento del activo de referencia en el mercado, que puede ser, por ejemplo, una acción de la empresa A, o el precio del barril de Brent en la Bolsa de Chicago.
En el caso de las opciones, dicho derivado consiste en un contrato que da derecho, a su poseedor, pero que no le obliga, a obtener un pago en el tiempo t, vinculado a una serie de acontecimientos relativos al precio del activo subyacente desde el tiempo t=0 de la contratación, hasta el tiempo T de vencimiento de la obligación.
Si la opción es de las denominadas europeas, entonces solo puede ser ejercida en t = T. Para otros tipos de opciones cabe la posibilidad de que puedan ser ejercidas en fechas determinadas dentro de [0, T], en caso de opciones tipo bermudas, o incluso en cualquier momento hasta T, caso opciones americanas.

Definición 2.2 (Opciones europeas) *Una opción europea es un tipo de derivado financiero, es decir, un tipo de contrato que faculta a su poseedor (holder) a comprar (opción call) o a vender (opción put) una unidad de activo subyacente en un tiempo de madurez T por un precio strike K previamente acordado con el emisor del contrato (writer). Mientras el poseedor no tiene obligación de comprar o vender el activo de referencia en la fecha de madurez, el emisor*

del contrato si esta obligado a vender o comprar, respectivamente, el activo al poseedor si este así lo requiriese.
Para una opción call europea, $h = max\big(S_T - K, 0\big) = \big(S_T - K\big)^+$, *y para una opción put europea,* $h = max\big(K - S_T, 0\big) = \big(K - S_T\big)^+$.

En general, de la ecuación de Black-Scholes, y de las condiciones de contorno asociadas al producto derivado en cuestión se puede obtener el valor del producto, dentro del marco que se especificará.
La forma de hallar dicha ecuación consiste en asociar al producto derivado que se negocia una cantidad determinada del subyacente (activo o activos de riesgo) al que se refiere el derivado y una cantidad determinada de dinero en una cuenta bancaria libre de riesgo riesgo denominando a este par portafolio.

De forma más precisa, un portafolio es un proceso estocástico adaptado d+1 dimensional que representa las posiciones que un inversor toma en $d+1$ activos financieros $\{S^0, S^1, \cdots, S^d\}$ cuyos precios en el instante t están dados por variables aleatorias no negativas y $F_{t,t\in[0,T]}$- medibles. Los inversores conocen los precios presentes y pasados de los activos, pero no los venideros.

A diferencia de cual sería el caso de trading en tiempo discreto, que no es objeto de este estudio, no es necesario imponer condiciones de predecibilidad al proceso del portafolio en el caso de tiempo contínuo. De hecho, aunque todavía es posible definir un proceso predecible en tiempo contínuo, en el caso de la filtración generada por un movimiento browniano, esto no restringiría significativamente la clase de procesos adaptados a causa de la continuidad de los caminos muestrales del movimiento browniano.

El vector $S_t = (S_t^0, S_t^1, \cdots, S_t^d)$ es el vector de precios en el instante t. El activo indexado por 0, S_t^0, es el activo libre de riesgo y convenimos $S_0^0 = 1$, y los activos indexados por $1, \cdots, d$ son los activos de riesgo.
La referencia al riesgo del activo o de los activos se refiere al riesgo de variación del precio de dichos activos subyacentes.
La referencia a activo libre de riesgo se refiere a que podemos tener la certeza de que dicho activo va a tener un valor determinado en una fecha determinada. Por ejemplo un depósito bancario que ofrece una tasa de interés determinada para un plazo determinado, realizado en una institución totalmente solvente. Se suele considerar como tasa libre de riesgo la tasa de los Bonos del Tesoro de los U.S.A. o bien la tasa LIBOR, dependiendo del entorno de negociación y del producto.
Se intentará mediante la negociación en tiempo contínuo de las oportunas cantidades de los activos del portafolio asociado que los riesgos inherentes al derivado sean nulos.

Por ejemplo, 0.25 acciones de la compañía A, que cotiza en Bolsa, y una call europeas sobre dicho activo, para un Strike K, y madurez T (x días de cotización consecutivos desde la fecha del contrato, por ejemplo t es del 12 de septiembre de 2014, y T es el 3 de junio de 2015), y una cantidad de dinero en una cuenta bancaria sin riesgo asociada, de por ejemplo 250 euros.
La referencia a que los riesgos inherentes al derivado sean nulos se refiere a que sin aportar dinero extra al valor del portafolio inicial podamos hacer frente a los pagos a que nos obligara el derivado a lo largo de su vida.
La razón por la que esto puede hacerse así es que el precio del derivado y el precio del activo están afectados ambos por la misma fuente de incertidumbre: el movimiento en la cotización del precio del activo.
Esto se encuadra en el marco de la ausencia de arbitraje en el mercado. La definición del concepto de arbitraje se precisará más adelante, aunque puede ilustrarse a grandes rasgos como

la imposibilidad de obtener beneficios en el mercado sin asumir riesgos.
Las hipótesis de mercado que deben hacerse para que tenga encaje el método de valoración BSM son las siguientes:

- El precio del activo subyacente esta modelado por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.1}$$

  con μ, σ constantes conocidas, $\sigma > 0$ y W_t es un movimiento browniano standard. Aunque en lo referido al marco Black-Scholes se considerarán μ, σ constantes conocidas, con mayor generalidad se podrían considerar μ_t, σ_t procesos adaptados con valores en R y $\sigma_t > 0$, y tales que ambos son adaptados a la filtración F_T, cumpliendo además $\int_0^t |\alpha_s| ds < \infty$ y $E \int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$ para cada $t > 0$, P-casi seguro.

- Al proceso de retornos del activo libre de riesgo lo denominamos tasa libre de riesgo r y lo consideramos constante.

- El subyacente no paga dividendos y es divisible, es decir, puede tomarse cualquier cantidad real del mismo. Se considerará más adelante, de todas formas, la existencia de subyacentes que pagan dividendos de forma contínua como un caso especial, bajo las condiciones que se especificarán.

- No hay fricciones internas del mercado: no hay impuestos, no hay costes de transacción financiera, no hay diferencia entre los precios de compra y venta del mismo activo en el mismo instante t (bid-ask spread), la profundidad del mercado es infinita, ie, la negociación de un activo no afecta al precio del mismo. Por ejemplo, sacar un millón de acciones de la empresa A a lo largo de tres días consecutivos no hundirá su precio en la Bolsa. Asimismo, la información relativa al movimiento de los subyacentes se propaga de forma instantánea e isótropa (no inside trading).

- Se admite la posición short en el subyacente. (Pedir prestadas las acciones a un tercero bajo promesa de devolverlas antes de una fecha dada y pagarle a cambio de dicho préstamo)

- No existen riesgos de default (impagos o pagos inferiores al nominal por concursos de acreedores, quiebras, estafas u otras catástrofes).

Como se ve, se trata de condiciones que en general no se dan casi nunca en la práctica, aunque las partes en el trading las aceptan a dichos efectos. Por ello, a la hora de hacer una valoración utilizando el método Black-Scholes hay que ser consciente de las implicaciones del modelo y la distancia que puede haber entre sus resultados y la realidad del mercado.

2.1. Medida Neutral al Riesgo

2.1.1. Valor de un activo bajo la Medida Neutral al Riesgo

Sean $\{W_t\}_{0 \le t \le T}$ un movimiento browniano en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y sea $\{F_t\}_{0 \le t \le T}$ una filtración a la que esta adaptado el P-movimiento browniano, donde T es un tiempo final fijado, donde para cada t, F_t contiene todos los conjuntos P-nulos y es contínua por la derecha.
Consideramos un activo cuyos precios a lo largo de $0 \le t \le T$ constituyen un proceso estocástico $\{S_t\}_{0 \le t \le T}$ que se puede representar por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \alpha\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t$$

donde se representan la tasa media de retorno o beneficio del activo por α, y la volatilidad del precio del activo por σ, y asumimos que $\sigma > 0$, P-casi seguro.
Además de la descripción anterior del movimiento de precios del activo tenemos un proceso de tasa de descuento de intereses que es previsible, $\{R_t\}_{0\leq t\leq T}$, y que nosotros consideraremos constante con $R_t = r$ y **definimos el proceso de descuento** por

$$D_t = e^{-\int_0^t R_s ds} = e^{-rt}, \quad con\ dD_t = -\,r\,D_t\,dt$$

donde queremos significar que si se deposita 1 euro en la cuenta del mercado del dinero (p.ej. una cuenta corriente bancaria sin gastos), en el instante t tendremos e^{rt} euros, es decir, $\dfrac{1}{D_t}$ euros.
El proceso de precios descontados es

$$D_t S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \sigma\, dW_s + \int_0^t \left(\alpha - r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) ds \right\}$$

y su diferencial es, aplicando la regla de derivación del producto de Itô,

$$d(D_t S_t) = \sigma D_t S_t \left[\Theta_t dt + dW_t \right]$$

donde Θ_t es un proceso adaptado que denominamos **precio del mercado de riesgo** definido por $\Theta_t = \dfrac{\alpha_t - R_t}{\sigma_t}$ (en nuestro caso $\Theta_t = \dfrac{\alpha - r}{\sigma} = \Theta$ es constante), denominándose a $\alpha_t - R_t$ prima al riesgo o "risk premium" que todo inversor desea sea lo mayor posible en comparación con σ_t. Además, se observa que la tasa de retorno del precio del activo descontado es $\alpha_t - R_t$ en comparación con α_t para el precio no descontado, y que la volatilidad σ_t no varía al descontar.
Ahora introducimos la medida de probabilidad $\widetilde{P}$ del Teorema de Girsanov, donde la Θ_t que figuraba en el mismo es la misma que nosotros hemos definido como precio del mercado de riesgo, con lo que el diferencial del proceso de precios descontados queda

$$d(D_t S_t) = \sigma D_t S_t\, d\widetilde{W}_t$$

donde $\widetilde{W}_t$ es un movimiento browniano normalizado bajo $\widetilde{P}$.

Llamamos a $\widetilde{P}$, así definida, **Medida Neutral al Riesgo** porque es equivalente a P y convierte el proceso estocástico de precios descontados de un activo en una martingala, ya que integrando la anterior expresión, queda, por ser $D_0 = 1$,

$$D_t S_t = S_0 + \int_0^t \sigma D_u S_u\, d\widetilde{W}_u$$

El proceso de precios sin descontar, $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$, bajo $\widetilde{P}$ tiene una tasa media de retorno igual a la tasa de interés r, como se comprueba reemplazando $dW_t = -\Theta dt + d\widetilde{W}_t$ en la ecuación que describe el proceso bajo P, $dS_t = \alpha\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t$, proporcionando $dS_t = r\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t$. Resolviendo esta ecuación se obtiene

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \int_0^t \sigma\, d\widetilde{W}_s + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) ds \right\}$$

Queda claro por todo lo anterior, que el cambio de medida afecta a la tasa de retorno pero no a la volatilidad de precios del activo. Si la prima al riesgo es positiva, como suele ser, entonces el cambio de medida de probabilidad añade más probabilidad en los caminos con retornos más bajos de forma que la tasa media de retorno baje desde α hasta r.

2.1.2. Valor de un portafolio bajo la Medida Neutral al Riesgo

Se considera un agente con un portafolio consistente en un capital inicial H_0^0 y que en cada tiempo t, $0 \leq t \leq T$ contiene H_t unidades del activo negociado (acciones que cotizan en Bolsa, por ejemplo), y que invierte o toma prestado dinero de una cuenta del mercado del dinero a tasa de interés R_t en la cantidad necesaria para financiar su portafolio. El precio del activo es un proceso estocástico descrito por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \alpha\, S_t dt + \sigma\, S_t dW_t$$

y el proceso de descuento $D_t = e^{-\int_0^t R_s ds} = e^{-rt}$.
De esta manera, el valor del portafolio en el instante t, será también un proceso estocástico $\{V_t\}_{0 \leq t \leq T}$, que verificará en cada instante

$$dV_t = H_t\, dS_t + R_t \left(V_t - H_t S_t\right) dt = R_t V_t dt + H_t \sigma_t S_t \left[\, \Theta_t dt + dW_t \,\right], donde\ \Theta_t = \frac{\alpha_t - R_t}{\sigma_t}$$

lo que a nuestros efectos se traduce en

$$dV_t = H_t\, dS_t + r \left(V_t - H_t S_t\right) dt = r V_t dt + H_t \sigma S_t \left[\, \Theta dt + dW_t \,\right], donde\ \Theta = \frac{\alpha - r}{\sigma}$$

Por el Teorema de Girsanov y la regla de derivación del producto de Itô tenemos

$$d(D_t V_t) = H_t \sigma_t D_t S_t \left[\, \Theta_t dt + dW_t \,\right] = H_t d\big(D_t S_t\big) = H_t \sigma_t D_t S_t\, d\widetilde{W}_t$$

y tomando constantes μ_t, σ_t, R_t,

$$d(D_t V_t) = H_t \sigma e^{-rt} S_t \left[\, \Theta dt + dW_t \,\right] = H_t d\big(e^{-rt} S_t\big) = H_t \sigma e^{-rt} S_t\, d\widetilde{W}_t$$

Esto refleja que los cambios en el valor descontado del portafolio son enteramente debidos a las fluctuaciones de los precios descontados del activo.
Nuestro agente tiene dos opciones de inversión: una cuenta del mercado del dinero con tasa de retorno R_t, y un activo $\widetilde{S}_t$ con tasa de retorno R_t bajo $\widetilde{P}$. No importa como invierta dicho agente, el valor descontado de su portafolio, $D_t V_t$, será una martingala.

2.1.3. Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos

En lo siguiente nos basaremos en los Teoremas de Girsanov y de Representación Integral de Martingalas en su versión multidimensional.
Consideramos un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, F_T, \mathbb{P})$ y un horizonte temporal representado por el intervalo real $[0, T]$
El mercado consistirá en d+1 activos financieros $\{S^0, S^1, \cdots, S^d\}$ cuya dinámica de precios en el intervalo [0,T], está representada por $\{S_t^0, S_t^1, \cdots, S_t^d\}$, de manera que

$$dS_t^0 = r_t\, S_t^0\, dt,\ S_0^0 = 1$$

y

$$dS_t^i = S_t^i\, \mu_t^i\, dt + S_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij}\, dW_t^i,\ i = 1, \cdots, d$$

donde $W_t = (W_t^1, \cdots, W_t^d)$ es un movimiento browniano d-dimensional, $\mu_t, \sigma_t \, y \, r_t$ son procesos en $\mathbb{R}$ que supondremos adaptados, y continuos por la derecha y con límite por la izquierda (cadlag), con $\sigma_t > 0$ y $r_t \geq 0$. Estos procesos verificarán $\int_0^t |\mu_s| ds < \infty$, y $\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty$.

Consideramos la filtración natural asociada a W_t, $\{ F_t \}_{0 \leq t \leq T}$, generada por $\{ W_t \}_{0 \leq t \leq T}$, cumpliendo además

(a) F_0 contiene a todos los subconjuntos de conjuntos de medida 0. Esto significa que F_t es la mínima σ-álgebra que contiene los conjuntos de la forma $\{X_s \in B\} \cup N$, donde $s \in [0, t]$, B pertenece a la σ-álgebra de Borel $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^d$, y N es un conjunto de probabilidad nula.

(b) Para todo $t \geq 0$, la familia de σ-álgebras F_t es continua por la derecha, es decir, se verifica $F_t = \bigcap_{s:s>t} F_s$

Una estrategia de inversión será un proceso adaptado en R^{d+1}:

$$\phi = \{ \phi_t \}_{0 \leq t \leq T} = \left\{ (\phi_t^0, \phi_t^1, \cdots, \phi_t^d) \right\}_{0 \leq t \leq T}$$

El valor de la cartera en el instante t es el producto escalar

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i$$

y su valor descontado $\widetilde{V}_t(\phi) = e^{-\int_0^t r_s \, ds} V_t(\phi) = \phi_t e^{-\int_0^t r_s \, ds} S_t = \phi_t \cdot \widetilde{S}_t$, donde $\widetilde{S}_t$ representa el proceso de precios descontados $e^{-\int_0^t r_s \, ds} S_t$.

Definición 2.3 (Estrategia autofinanciada) *Una estrategia autofinanciada,*

$$\{\phi_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{ (H_t^0, H_t) \}_{0 \leq t \leq T}$$

es un par de procesos adaptados en R^{d+1} que satisfacen

- $\displaystyle\int_0^T | H_t^0 | \, dt < \infty \quad y \int_0^T H_t^2 \, dt < \infty$, *P-c.s.*
- $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t \cdot S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 \cdot S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u \cdot dS_u$, $P - c.s.$, $0 \leq t \leq T$

Definición 2.4 (Portafolio de inversión) *Fijado un intervalo de tiempo [0, T], un portafolio de inversión o cartera de valores es una estrategia de inversión que consiste en un proceso estocástico ϕ dado por*

$$\{\phi_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{ (H_t^0, H_t) \}_{0 \leq t \leq T}$$

Dicho proceso es adaptado, toma valores en R^{d+1}, y sus componentes H_t^0, H_t, representan en cada instante t las cantidades de activo sin riesgo, S_t^0, referido a la cuenta del mercado del dinero de nuestro mercado multidimensional de referencia, esto es, la cantidad de dinero en la cuenta bancaria libre de riesgo vinculada al portafolio, sobre la que opera una tasa de interés R_t que aquí entenderemos como un proceso previsible no negativo y la cantidad de activo de riesgo que obra a dicho portafolio, $(S_t^1, S_t^2, \cdots, S_t^d)$. De esta manera, el valor del portafolio en el tiempo t esta dado por $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t \cdot S_t$.

Proposición 2.1 *La estrategia ϕ es una estrategia autofinanciada si y solo si:*

$$\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_s \, d(\widetilde{S}_t)$$

El valor actualizado de una cartera autofinanciada ϕ valdrá $\widetilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d(\widetilde{S}_u)$ y será una martingala respecto de la probabilidad neutral al riesgo $\widetilde{P}$, equivalente a P, si se verifica que $\int_0^t E^{\widetilde{P}} \left(H_u^2 \widetilde{S}_u^2 \right) du < \infty$.

Definición 2.5 (Arbitraje) *Se define como estrategia de arbitraje a aquella estrategia de cartera autofinanciada con valor inicial cero y tales que $V_T \geq 0$, y $P\left\{V_T \geq 0\right\} > 0$. Tales probabilidades se denominan probabilidades sin riesgo.*

Observemos que una cartera autofinanciada no puede ser un arbitraje ya que si su valor inicial es nulo, entonces $E^{\widetilde{P}} \left[\widetilde{V}_T(\phi)\right] = V_0(\phi) = 0$

Definición 2.6 (Estrategia admisible) *Una estrategia $\phi = \left\{H_t^0, H_t\right\}_{0 \leq t \leq T}$ es admisible si es autofinanciada y el valor descontado $\widetilde{V}_t(\phi) = V_t D_t = H_t^0 + H_t \widetilde{S}_t$ del correspondiente portafolio es no negativo para todo t, y tal que $\sup_{0 \leq t \leq T} \widetilde{V}_t$ es de cuadrado integrable bajo $\widetilde{P}$.*

Definición 2.7 (Cartera recubridora) *Diremos que una cartera autofinanciada ϕ que cumple $\int_0^t E^{\widetilde{P}} \left(H_u^2 \widetilde{S}_u^2 \right) du < \infty$ cubre el derivado financiero si $V_T(\phi) = h$, es decir, su valor final coincide con el precio final o payoff del contrato C_T.*

Definición 2.8 (Derivados financieros replicables.) *Un derivado financiero es replicable si su payoff, o pago final al tenedor h, es igual al valor final de una estrategia de cartera admisible.*

Definición 2.9 (Modelos completos) *Se dice que un modelo de valoración de activos es completo si todo derivado financiero es replicable.*

Existencia de la medida neutral al riesgo

Definición 2.10 (Modelos viables) *Se dice que un modelo de valoración de activos es viable si existe una probabilidad equivalente respecto de la cual los precios descontados forman una martingala.*

Esta condición es equivalente a que no haya arbitrajes:

Teorema 2.1 (Primer Teorema Fundamental de Valoración de Activos) *Si un modelo de mercado tiene una medida de probabilidad neutral al riesgo, entonces no admite arbitraje.*

Para que esto suceda, la ecuación (multidimensional) que representa el precio del mercado de riesgo en el diferencial del proceso de precios descontados de un activo debe tener solución. Podría darse el caso de que dicha ecuación tuviera más de una solución, por ejemplo si el número de activos del mercado es inferior al número de movimientos brownianos que dirigen el movimiento de cada activo. Entonces existiría más de una medida y esto implicaría que dicha cartera tendría más de un precio neutral al riesgo. Entonces no sería posible el recubrimiento de la cartera con los activos disponibles, porque si lo fuera, esto conllevaría la existencia de un precio o valor único del portafolio y la medida sería única.

Unicidad de la medida neutral al riesgo

Teorema 2.2 (Segundo Teorema Fundamental de Valoración de Activos) *Considérese un modelo de mercado que dispone de una medida de probabilidad neutral al riesgo. El modelo es completo si y solo si la medida de probabilidad neutral al riesgo es única.*

Esto equivale a que la ecuación multidimensional del precio del mercado del riesgo que aparece en el proceso de precios descontados de los activos, tenga solución única. Así podremos utilizar el Teorema de Girsanov y aplicar el cambio de probabilidad necesario para hallar la probabilidad neutral al riesgo. Esta, como sabemos, posibilita la aplicación al modelo de mercado del Teorema de Representación de Martingalas, y este, a su vez, garantiza la existencia de un proceso adaptado único c.s. de recubrimiento del portafolio.

Las pruebas de los anteriores teoremas pueden verse, por ejemplo, en la bibliografía que se cita.

2.1.4. Valoración bajo la Medida Neutral al Riesgo

Ante la posibilidad de que un derivado financiero pueda ser negociado o transmitido a un tercero antes de ser ejercido, estamos interesados en conocer cual sería su valor "justo" en dicho instante t, para $0 \leq t \leq T$, queriendo significar por "justo" al valor que imposibilita el arbitraje por cualquiera de las partes negociadoras.
En relación con la averiguación del precio del derivado que nos interesa, nos preguntamos cual es el capital inicial X_0 que un agente necesitaría y cual sería su estrategia de cartera recubridora, o proceso de portafolio $\{\phi_t\}_{0\leq t\leq T}$ para poder recubrir la venta (posición short) de un derivado, es decir, para tener $\widetilde{P}$-c.s $X_T = V_T(\phi) = C_T = h$, toda vez que sabemos que una estrategia admisible imposibilita el arbitraje.
En lo siguiente procederemos de una forma más general que si buscásemos el valor de un derivado restringido al caso de opciones call y put europeas.
Sea C_T una variable aleatoria F_T-medible, y cuadrado integrable. Esto representa el payoff del derivado en el instante T. Permitiremos que dicho payoff sea camino-dependiente, es decir, estar vinculado a eventos relativos a precios del activo subyacente $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ que se hayan producido desde el inicio del contrato hasta su madurez, que es lo que significa ser F_T-medible.
El planteamiento anterior implica que, como bajo $\widetilde{P}$, $\{\, D_tC_t \,\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala, tenemos

$$D_tC_t = E^{\widetilde{P}}\left[\, D_TC_T \,\middle|\, F_t \,\right] = E^{\widetilde{P}}\left[\, D_TV_T(\phi) \,\middle|\, F_t \,\right]$$

y entonces el valor $V_t(\phi)$ de la cartera recubridora es el capital necesario en cada instante t para recubrir con éxito la posición corta en el derivado con payoff $h = C_T = V_T(\phi)$. Por tanto, podemos llamar a esto el precio V_t del derivado en el tiempo t, y así se tiene que

$$D_tV_t = E^{\widetilde{P}}\left[\, D_TV_T(\phi) \,\middle|\, F_t \,\right] = E_t^{\widetilde{P}}\left[\, D_TV_T(\phi) \,\right] \;, 0 \leq t \leq T$$

donde la segunda esperanza es una notación para la primera. Si dividimos esta expresión por D_t, que es F_t-medible y por tanto puede ser introducida dentro del término de la esperanza condicional de la parte derecha de la igualdad, y recordamos la definición de D_t, obtenemos

$$V_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[\, e^{-\int_t^T R_u\, du}\, V_T(\phi) \,\right] = E_t^{\widetilde{P}}\left[\, e^{-\int_t^T R_u\, du}\, C_T \,\right] = E_t^{\widetilde{P}}\left[\, e^{-\int_t^T R_u\, du}\, h \,\right] \;, 0 \leq t \leq T$$

Denominaremos a cualquiera de estas expresiones, según el contexto, **fórmula de valoración neutral al riesgo** para el modelo de tiempo contínuo.

Esta claro que para que la opción cuyo pago final es h sea replicable, es necesario que h sea cuadrado-integrable bajo $\widetilde{P}$. En el caso de una call europea, $h = \left(S_T - K\right)^+$ y esta propiedad se verifica ya que $E_t^{\widetilde{P}}\, S_T^2 < \infty$, y en el caso de una put europea, h es incluso acotada.

Teorema 2.3 *En el modelo Black-Scholes, cualquier opción definida por una variable aleatoria h no negativa y F_T-medible, que sea de cuadrado integrable bajo $\widetilde{P}$ es replicable y el valor en el instante t de cualquier portafolio que la replique, o cartera recubridora, esta dado por*

$$V_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-\int_t^T R_u\, du}\, h\right], 0 \leq t \leq T$$

Por lo tanto, el valor de la opción en el instante t puede ser definido por la anterior expresión. En particular, $V_0 = E_0^{\widetilde{P}}\left[e^{-\int_0^T R_u\, du}\, h\right]$ sería el precio del derivado en el instante inicial t=0.

Seguidamente se procede a la demostración del anterior teorema para el caso de $R_u = r$ constante.

Demostración 2.1 *Primero asumamos que $S_0^0 = 1$ y que dicho activo sin riesgo, vinculado a la cuenta corriente sin gastos, evoluciona con el tiempo como $\dfrac{1}{D_t} = S_t^0 = e^{rt}$ y que existe una estrategia admisible $\left(H_t^0, H_t\right)$ que replica la opción. El valor en el tiempo t del portafolio, $V_t(\phi)$ (en lo sucesivo V_t) dado por $\left(H_t^0, H_t\right)$ esta dado por $V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ y asumimos que $V_T = h$. Sea $\widetilde{V}_t = D_t\, V_t = V_t\, e^{-rt} = H_t^0 + H_t\, \widetilde{S}_t$ el valor descontado del portafolio.*

Como la estrategia ϕ es autofinanciada, a partir de las expresiones

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t H_u d\widetilde{S}_u \\ d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t \sigma d\widetilde{W}_t \end{aligned}$$

se tiene que $\widetilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_u \sigma \widetilde{S}_u d\widetilde{W}_u$

Bajo $\widetilde{P}$, $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \widetilde{V}_t$ es de cuadrado integrable por la definición de estrategias admisibles. Aún más, la anterior igualdad muestra que el proceso $\{\widetilde{V}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es una integral estocástica con respecto de $\{\widetilde{W}_t\}_{0 \leq t \leq T}$. Se sigue de esto que $\{\widetilde{V}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala de cuadrado integrable bajo $\widetilde{P}$, y de ahí que $V_t = E_t^{\widetilde{P}}\, \widetilde{V}_T$, y en consecuencia, $V_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\, h\right], 0 \leq t \leq T$
Así hemos probado que si un portafolio $\left(H_t^0, H_t\right)$ replica la opción definida por h, su valor esta dado por $V_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\, h\right], 0 \leq t \leq T$. Para completar la prueba del teorema, falta por mostrar que la opción, además, es replicable, es decir, hallar algunos procesos (H_t^0) y (H_t) que definan una estrategia admisible, tal que

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\, h\right], 0 \leq t \leq T$$

Bajo la probabilidad $\widetilde{P}$, el proceso definido por $M_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-rT}\, h\right], 0 \leq t \leq T$ es una martingala de cuadrado integrable. La filtración $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$, que es la filtración natural de $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$, es tambien la filtración natural de $\{\widetilde{W}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ y por el Teorema de Representación de Martingalas, existe un proceso adaptado $\{K_t\}_{0 \leq t \leq T}$ tal que $E^{\widetilde{P}} \int_0^t K_s^2 d\widetilde{W}_s < \infty$ y para t, tal que $0 \leq t \leq T$, se tiene $\widetilde{P}$-c.s., que $M_t = M_0 + \int_0^t K_s\, d\widetilde{W}_s$

La estrategia $\{\phi_t\}_{0\le t\le T} = \{(H^0,H)\}_{0\le t\le T}$*, con* $H_t = \dfrac{K_t}{\sigma \widetilde{S}_t}$*, y con* $H_t^0 = M_t - H_t\widetilde{S}_t$ *es entonces, debido a las igualdades*

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t(\phi) &= V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\widetilde{S}_u \\ d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t \sigma d\widetilde{W}_t\end{aligned}$$

una estrategia autofinanciada. Su valor en el tiempo t esta dado por

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\, h\right].$$

Esta expresión muestra que $V_t(\phi)$ *es una variable aleatoria no negativa para todo t,* $0 \le t \le T$*, con* $\sup\limits_{0\le t\le T} \widetilde{V}_t$ *de cuadrado integrable bajo* $\widetilde{P}$*, y que* $V_T(\phi) = h$*.* $\square$

Hay dos asunciones clave que hacen posible el recubrimiento de la cartera: una es que la volatilidad σ es no nula, por lo que la ecuación $H_t = \dfrac{K_t}{\sigma\widetilde{S}_t}$ puede ser resuelta para H_t. Si la volatilidad se desvaneciera, entonces la aleatoriedad del movimiento browniano no afectaría al precio del activo, aunque todavía puede afectar al pay-off del derivado. En este caso, el activo ya no será un instrumento de recubrimiento efectivo. La otra asunción clave es que la filtración F_t esta generada por el movimiento browniano subyacente, es decir, no hay otra aleatoriedad en el valor del derivado aparte de la correspondiente al movimiento browniano, la cual puede ser recubierta a través de la negociación del activo subyacente. Bajo esas dos asunciones, cada derivado F_T-medible puede ser recubierto. El Teorema de Representación de Martingalas asegura que existe un proceso adaptado K_t y esto permite asegurar la posibilidad del recubrimiento, pero no proporciona un método para hallar dicho proceso.

Si la variable aleatoria h puede ser escrita como $h = f(S_t, t)$, podemos expresar el valor V_t de la opción en el tiempo t como una función de T-t y de S_t. Como la dinámica de precios del subyacente esta descrita por la ecuación diferencial estocástica (2.1) de un movimiento browniano geométrico bajo $\widetilde{P}$, tendríamos:

$$S_t = S_0 e^{\sigma\widetilde{W}_t + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)t}, \;\; y \;\; S_T = S_0 e^{\sigma\widetilde{W}_T + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}$$

con lo que, dividiendo, $S_T = S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t) - (\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}$, y

$$V_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\, f(S_t,t)\right] = E_t^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\, f\Big(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(\widetilde{W}_T-\widetilde{W}_t)-(\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\Big)\right]$$

La variable aleatoria S_t es F_t-medible y bajo $\widetilde{P}$, $\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t$ es independiente de F_t. Por tanto, como el proceso es de Markov, S_t puede considerarse como constante y sustituirse por la variable muda x, y así deducimos que $V_t = F(t, S_t)$, donde

$$F(t,x) = E^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\, f\Big(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(\widetilde{W}_T-\widetilde{W}_t)-(\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\Big)\right]$$

Dado que bajo $\widetilde{P}$, $\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza T-t, N(0,T-t), tendremos que

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\, e^{(r-\frac{1}{2}\,\sigma^2)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Esta función F puede calcularse explícitamente para opciones call y put. Si tomamos el caso de la opción call, strike K, madurez T, y por tanto con f(x) = $(x-K)^+$, tenemos

$$F(t,x) = E^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\left(xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(\widetilde{W}_T-\widetilde{W}_t)} - K\right)^+\right] = E^{\widetilde{P}}\left[\left(x\,e^{\sigma g\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2} - K\,e^{-r\tau}\right)^+\right]$$

donde g es una variable aleatoria con distribución normal N(0,1), y τ = T-t.
Realizando el cálculo de dicha esperanza se obtiene la fórmula que proporciona el valor para cualquier instante t antes de madurez de una opción call europea sobre un subyacente que no proporciona dividendos. En términos de la función de distribución normal N(0,1), dicho valor resulta ser:

$$F(t,x) = x\,N(d_+) - Ke^{-r\tau}N(d_-),\ \ con\ \ N(d\pm) = \frac{log\frac{x}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

De forma similar se llegaría al cálculo del valor para una put europea, de strike K y madurez T en cada t, $0 \leq t \leq T$, obteniendo:

$$F(t,x) = K\,e^{-r\tau}\,N(-d_-)\ -\ x\,N(-d_+)$$

El siguiente teorema establece que cuando una opción esta definida por una variable aleatoria h = f(S_T) es posible hallar de forma explícita una estrategia de cobertura para dicha opción, bajo hipótesis muy generales sobre f, como por ejemplo si es continua y derivable a trozos, lo que incluye, en particular a las funciones de pago de call y put europeas. En estos dos casos, la función F(t,x) es de la clase $C^{1,2}$. Supondremos que existe una función F(t,x) de este tipo que cumple $V_t = F(t,S_t)$, donde

$$F(t,x) = E^{\widetilde{P}}\left[e^{-r(T-t)}\,f\big(\,xe^{r(T-t)}e^{\sigma(\widetilde{W}_T-\widetilde{W}_t)-(\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\big)\right]$$

Teorema 2.4 *En el modelo Black-Scholes, cualquier opción con payoff (no negativo) de la forma $h = f(S_T)$, de cuadrado integrable con respecto de $\widetilde{P}$, y con $E_t^{\widetilde{P}}h$ siendo una función $C^{1,2}$ del tiempo y de S_t y replicable, y con $R_u = r$, constante, su precio viene dado por*

$$F(t,S_t) = E_t^{\widetilde{P}}\left(e^{-r(T-t)}h\right)$$

y la estrategia que replica h viene dada por $\left(H_t^0, H_t\right)$ *con*

$$\begin{aligned} H_t &= \frac{\partial F(t,S_t)}{\partial S_t} = F_x(t,S_t)\ \ (Notacion) \\ H_t^0 S_t^0 = H_t^0 e^{rt} &= F(t,S_t) - H_t S_t \end{aligned}$$

Demostración 2.2 *Como es costumbre, por conveniencia convendremos que $S_0^0 = 1$, representando S_t^0 la cuenta libre de riesgo del mercado del dinero, cuya dinámica, para $r \geq 0$ constante es*

$$dS_t^0 = rS_t^0dt = re^{rt}dt$$

Por la independencia de los incrementos relativos,

$$E_t^{\widetilde{P}}\left(e^{-r(T-t)}f(S_T)\right) = E_t^{\widetilde{P}}\left(e^{-r(T-t)}f(\frac{S_T}{S_t}S_t)\right) = F(t,S_t)$$

de manera que lo que llamaremos precio del derivado en t depende únicamente de S_t y de t. Una cartera recubridora debe tener en cualquier instante t, un valor descontado igual a

$$\widetilde{V}_t = e^{-rt} F(t, S_t),$$

y hacemos $\widetilde{F}(t,x) = e^{-rt} F(t, \widetilde{S}_t e^{rt})$, entonces tenemos $\widetilde{V}_t = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$.
Si aplicamos ahora la fórmula de Itô a $\widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$, tendremos

$$\widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) = F(0, S_0) + \int_0^t \widetilde{F}_x(u, \widetilde{S}_u) d\widetilde{S}_u + \int_0^t \widetilde{F}_t(u, \widetilde{S}_u) du + \frac{1}{2} \int_0^t \widetilde{F}_{xx}(u, \widetilde{S}_u) d\langle \widetilde{S}, \widetilde{S} \rangle_u$$

y como $d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \sigma d\widetilde{W}_t$, tendremos

$$\widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) = F(0, \widetilde{S}_0) + \int_0^t \widetilde{F}_x(u, \widetilde{S}_t) \, \widetilde{S}_u \sigma d\widetilde{W}_t + \int_0^t K_u du$$

donde $\displaystyle\int_0^t K_u du = \int_0^t \widetilde{F}_t(u, \widetilde{S}_u) du + \frac{1}{2} \int_0^t \widetilde{F}_{xx}(u, \widetilde{S}_u) \sigma^2 \widetilde{S}_u^2 du$

Ahora bien, $\widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$ es una martingala de cuadrado integrable bajo $\widetilde{P}$, y por tanto, como la descomposición de un proceso de Itô es única c.s. tendremos que el proceso $\{K_u\}_{0 \leq t \leq T}$ debe ser nulo, y entonces

$$\widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) = F(0, \widetilde{S}_0) + \int_0^t \widetilde{F}_x(u, \widetilde{S}_u) \, \sigma \, \widetilde{S}_u \, d\widetilde{W}_t = F(0, \widetilde{S}_0) + \int_0^t \widetilde{F}_x(u, \widetilde{S}_u) \, d\widetilde{S}_u$$

Por lo tanto, el candidato natural para el proceso H_t es entonces

$$H_t = \widetilde{F}_x(t, \widetilde{S}_t) = F_x(t, S_t)$$

y si hacemos

$$H_t^0 = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) - H_t \widetilde{S}_t$$

entonces el portafolio (H_t^0, H_t) es autofinanciado y su valor descontado es

$$\widetilde{V}_t = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$$

++++++++++++++Otra forma de llegar a este resultado: ++++++++++++++++++

Por el Teorema 2.3, $F(t, S_t)$ es el precio del derivado representado por $h = f(S_T)$, con

$$F(t, S_t) = E_t^{\widetilde{P}}[e^{-r(T-t)} f(\frac{S_T}{S_t} S_t)]$$

y suponemos que existe (H_t^0, H_t), una estrategia autofinanciada que replica h y que hace que el proceso de valor del portafolio verifique

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$$

donde S_t^0 representa el valor en el instante t del activo libre de riesgo, que puede ser una cuenta libre de riesgo del mercado del dinero, y S_t representa el precio del activo de riesgo en el instante t.
Si el derivado es recubrible, ie, $h = V_T$, su valor libre de arbitraje, para $t < T$ es el valor del portafolio:

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = F(t, S_t)$$

En esta ecuación $H_t^0 S_t^0 = V_t - H_t S_t$ *representa la parte en cash del portafolio en cada instante t, depositada en la cuenta libre de riesgo del mercado del dinero.*
Tenemos las siguientes igualdades:

$$dF(t,S_t) = dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$$

Asumiendo que $F(t,S_t) \in C^{1,2}$*, aplicamos la regla de Itô y obtenemos*

$$dF(t,S_t) = F_x(t,S_t)dS_t + F_t(t,S_t)dt + \frac{1}{2}F_{xx}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2 dt$$

Relacionando estas dos últimas igualdades

$$\big(H_t - F_x(t,S_t)\big)dS_t = \big(F_t(t,S_t) + \frac{1}{2}F_{xx}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2\big)dt - H_t^0 dS_t^0$$

La parte de la izquierda tiene variación cuadrática positiva, a no ser que $H_t = F_x(t,S_t)$*.*
La parte de la derecha tiene variación cuadrática nula.
Para que sean iguales tiene que ser para todo t,

$$\begin{aligned} H_t &= F_x(t,S_t),\ \textit{lo que implica}\ H_t^0 S_t^0 = H_t^0 e^{rt} = F(t,S_t) - F_x(t,S_t)S_t \qquad (2.2)\\ H_t^0 &= e^{-rt}\big(F(t,S_t) - F_x(t,S_t)S_t\big) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

y por tanto, el portafolio de réplica viene dado por las ecuaciones (2.2) y (2.3), que constituyen una estrategia autofinanciada cuyo valor final es $f(t,S_t)$*.*

Por otro lado,

$$H_t^0 dS_t^0 = \big(F_t(t,S_t) + \frac{1}{2}F_{xx}(t,S_t)\sigma^2 S_t^2\big)dt$$

Poniendo los valores de H_t *y de* $H_t^0 S_t^0$ *en la ecuación*

$$V_t = H_t^0 B_t + H_t S_t = F(t,S_t)$$

y reemplazando S_t *por* x*, obtenemos*

$$F_t(t,x) + rxF_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F_{xx}(t,x) = rF(t,x)$$

que es la expresión en derivadas parciales a la que se refiere el Teorema de Feynman-Kac descontado y que debe verificarse en dicho Teorema para que para todo t, $t \in [0,T]$

$$F(t,S_t) = E_t^{\widetilde{P}}\big[e^{-r(T-t)}h(S_T)\big]$$

sea martingala, y a la cual debemos añadir la ecuación de contorno que hace referencia al payoff del contrato C_T*,* $F(T,x) = f(x)$*. De esta forma, las ecuaciones*

$$\begin{aligned} F_t(t,S_t) + r\,S_t\,F_x(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\,S_t^2\,F_{xx}(t,S_t) &= r\,F(t,S_t) \qquad (2.4)\\ F(T,x) &= f(x) \qquad (2.5)\end{aligned}$$

resuelven el problema del valor de un derivado en el marco Black-Scholes. Estas ecuaciones tal vez no tienen una solución en forma de fórmula cerrada y deban ser integradas numéricamente o utilizando un método de Monte Carlo.
Hemos identificado por esta vía la expresión del proceso $\big\{K_u\big\}_{0\le t\le T}$ *que debe ser nulo y que referíamos en la demostración anterior de este Teorema.*

Usando la fórmula Black-Scholes para el precio de una opción call europea, por ejemplo, tendríamos que el portafolio replicante sería

$$\begin{aligned} H_t &= N(d_+) \\ H_t^0 &= KN(d_-) \end{aligned}$$

Por supuesto, no todos los derivados financieros tiene un payoff $h = f(S_T)$. Ejemplo de ellos son las opciones asiáticas, con payoff

$$h = \frac{1}{T}\left(\int_0^T S_u\,du \, - \, K\right)^+$$

las opciones lookback, opciones barrera y muchas más. Para todas ellas es de aplicación general en el modelo de Black-Scholes el Teorema 2.3.

2.1.5. Valoración de una call europea sobre un activo que paga dividendos continuamente

Sabemos que los precios descontados de los activos son martingalas bajo la medida neutral al riesgo en los casos de activos que no abonan dividendos. La característica clave de dicha medida neutral al riesgo es que hace que los valores descontados del portafolio sean martingalas y esto asegura la ausencia de arbitraje, según afirma el primer teorema fundamental de valoración de activos. Para que el valor descontado de un portafolio que invierte en un activo que paga dividendos sea martingala, el valor descontado del activo **con los dividendos reinvertidos** debe ser una martingala, pero el precio del activo, en si mismo, no es una martingala. En lo siguiente consideramos un activo simple conducido por un movimiento browniano único, aunque los resultados obtenidos pueden ser aplicados al caso de múltiples activos y múltiples movimientos brownianos.
Suponemos el activo simple modelado por la ecuación diferencial estocástica del movimiento browniano geométrico. El activo rinde dividendos continuamente con una tasa A_t por unidad de tiempo y de activo, donde A_t es un proceso no negativo adaptado a la misma filtración que W_t, y donde $0 \leq t \leq T$.
Toda vez que los dividendos abonados reducen el valor del activo en el instante en el que se abonan, el modelo del activo de referencia sería

$$dS_t = \alpha_t\, S_t\, dt \, + \sigma_t\, S_t\, dW_t \, - A_t\, S_t\, dt$$

donde asumimos α_t, σ_t procesos adaptados, y asumiremos un proceso de descuento $D_t = e^{-\int_0^t R_u\,du}$ en el que R_t es un proceso predecible y no negativo.
Si H_t es la cantidad de activo de riesgo que el portafolio mantiene en el instante t, entonces el valor del portafolio en dicho instante, V_t, satisface

$$\begin{aligned} dV_t &= H_t dS_t + H_t A_t S_t dt + R_t(V_t - H_t S_t)dt \\ &= R_t V_t dt + (\alpha_t - R_t)H_t S_t dt + \sigma_t H_t S_t dW_t \\ &= R_t V_t dt + H_t S_t \sigma_t \big[\, \Theta_t dt + dW_t \,\big] \end{aligned}$$

donde $\Theta_t = \dfrac{\alpha_t - R_t}{\sigma_t}$ es nuestro precio del mercado del riesgo.

Si definimos $\widetilde{W}_t = W_t + \displaystyle\int_0^t \Theta_u du$ y usamos el Teorema de Girsanov para cambiar a la medida

$\widetilde{P}$, bajo la cual sabemos que $\widetilde{W}$ es un movimiento browniano, podremos escribir

$$dV_t = R_t V_t dt + H_t S_t \sigma_t d\widetilde{W}_t$$

El valor descontado de dicho portafolio satisface

$$d(D_t V_t) = H_t D_t S_t \sigma_t d\widetilde{W}_t$$

el cual sabemos que es una martingala bajo $\widetilde{P}$.
Si deseamos recubrir una posición corta de nuestro portafolio en un derivado sobre un activo que abona dividendos de forma continua y cuyo precio es C_T en el tiempo T, donde C_T es F_T-medible, necesitaremos elegir el capital inicial H_0^0, y el proceso H_t, para que $V_T = C_T$, así como la estrategia $\phi = \{\phi_t\}_{0 \leq t \leq T} = \{(H_t^0, H_t)\}_{0 \leq t \leq T}$.
Como $D_t V_t$ es $\widetilde{P}$-martingala, tendremos $D_t V_t = E_t^{\widetilde{P}}\big[\, D_T C_T \,\big]$ para cada t, tal que $0 \leq t \leq T$. El valor V_t de este portafolio en cada instante t es el valor (precio) del derivado en ese instante, al que denominaremos por V_t, y reemplazando en la fórmula anterior, obtenemos la fórmula de valoración neutral al riesgo

$$D_t V_t = E_t^{\widetilde{P}}\big[\, D_T V_T \,\big],\ con\ 0 \leq t \leq T$$

Esta fórmula es como la obtenida para el caso de no dividendos, y la diferencia entre ambos casos esta en la evolución del activo subyacente bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. De $dS_t = \alpha_t\, S_t\, dt\ + \sigma_t\, S_t\, dW_t\ - A_t\, S_t\, dt$ y de la definición de $\widetilde{W}$ tenemos que

$$dS_t = \big[R_t - A_t\big] S_t dt + \sigma_t S_t d\widetilde{W}$$

Bajo la medida neutral al riesgo, el activo no tiene tasa media de retorno igual a R_t y por tanto su precio descontado no es martingala. De hecho,

$$S_t = S_0\, exp\Big\{ \int_0^t \sigma_u\, d\widetilde{W}_u\ + \int_0^t \big[\, R_u - A_u - \frac{1}{2}\,\sigma_u^2 \,\big]\, du \Big\}$$

El proceso

$$e^{\int_0^t\ A_u\, du}\, D_t S_t = exp\Big\{ \int_0^t \sigma_u\, d\widetilde{W}_u\ - \frac{1}{2} \int_0^t\ \sigma_u^2\, du \Big\}$$

es una martingala y representa el valor descontado a la tasa de descuento en el tiempo t de una unidad de activo subyacente que continuamente reinvierte los dividendos en dicho activo. En el caso de que la volatilidad σ, la tasa de interés $R_t = r$ y la tasa de dividendos $A_t = a$ sean constantes, el precio del activo en el tiempo t, dado por

$$S_t = S_0\, exp\Big\{ \int_0^t \sigma_u\, d\widetilde{W}_u\ + \int_0^t \big[\, R_u - A_u - \frac{1}{2}\,\sigma_u^2 \,\big]\, du \Big\},$$

es $S_t = S_0\, exp\big\{\, \sigma\, \widetilde{W}_t + (r - a - \frac{1}{2}\,\sigma^2\,)\, t \,\big\}$. Para $0 \leq t \leq T$ tenemos

$$S_T = S_t\, exp\big\{\, \sigma\, (\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t) + (r - a - \frac{1}{2}\sigma^2)\, (T - t)\, \big\}$$

Conforme a la fórmula de valoración neutral del riesgo, el precio en el instante t de una call europea de madurez T y precio de ejercicio K es

$$V_t = E_t^{\widetilde{P}}\, \big[\, e^{-r(T-t)}\, (S_T - K)^+ \,\big]$$

y para evaluarlo, primero calculamos

$$
\begin{aligned}
\text{c(t,x)} &= E^{\widetilde{P}}\left[\, e^{-r(T-t)} \left(x\, exp\left\{\, \sigma\,(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t) + (r - a - \frac{1}{2}\sigma^2)\,(T-t)\,\right\} - K\right)^+\,\right] \\
&= E^{\widetilde{P}}\left[\, e^{-r\tau} \left(x\, exp\left\{\, -\sigma\, Y\,\sqrt{\tau} + (r - a - \frac{1}{2}\sigma^2)\,\tau\,\right\} - K\right)^+\,\right]
\end{aligned}
$$

donde $\tau = T - t$, y $Y = -\dfrac{(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t)}{\sqrt{T-t}}$ tiene, bajo $\widetilde{P}$, una distribución normal standard N(0,1). Únicamente para el caso de que $e^{-r\tau}\left(x\, exp\left\{\, -\sigma\, Y\,\sqrt{\tau} + (r - a - \frac{1}{2}\sigma^2)\,\tau\,\right\} - K \geq 0\right.$ es no nula la función de pago h, con lo que definiendo

$$
d_{\pm}(\tau, x) \;=\; \frac{1}{\sigma\,\sqrt{\tau}}\left[\, log\,\frac{x}{K} + (\, r - a \pm \frac{1}{2}\,\sigma^2\,)\,\tau\,\right]
$$

la opción tendrá un pago no negativo si y solo si $Y < d_-(\tau, x)$. Por todo ello,

$$
c(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau}\left(x\, exp\left\{\, -\sigma\, y\,\sqrt{\tau} + (r - a - \frac{1}{2}\sigma^2)\,\tau\,\right\} - K\,\right) e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} x\, exp\left\{\, -\sigma\, y\,\sqrt{\tau} - (a + \frac{1}{2}\sigma^2)\,\tau\, - \frac{1}{2}y^2\right\} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau}\, K\, e^{-\frac{1}{2}y^2} dy
$$

Seguidamente hacemos el cambio de variable $z = y + \sigma\,\sqrt{\tau}$ en la anterior integral, lo que produce

$$
\begin{aligned}
\text{c(t,x)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_+(\tau,x)} x\, e^{-a\tau}\, e^{-\frac{1}{2}\,z^2}\, dz - e^{-r\tau}\, K\, N\big(\, d_-(\tau, x)\,\big) \\
&= x\, e^{-a\tau}\, N\big(\, d_+(\tau, x)\,\big) - e^{-r\tau}\, K\, N\big(\, d_-(\tau, x)\,\big)
\end{aligned}
$$

Y conforme al lema de Independencia de las esperanzas condicionadas, el precio de la opción es

$$
V_t = E_t^{\widetilde{P}}\left[\, e^{-r(T-t)}\,(S_T - K)^+\,\right] = c(t, S_t).
$$

La única diferencia entre esta fórmula y la de una call europea sobre un activo que no paga dividendos esta en la definición de $d_{\pm}(\tau, x)$ y en la presencia de $e^{-a\tau}$ en el primer término de la expresión $x\, e^{-a\tau}\, N\big(\, d_+(\tau, x)\,\big) - e^{-r\tau}\, K\, N\big(\, d_-(\tau, x)\,\big) =$ c(t,x).

Ejemplo **2.1** *Una divisa puede ser considerada como un tipo de activo cuyo valor por unidad en el instante t, digamos X_t, varía de manera aleatoria y genera unos intereses en el tipo foráneo (dividendos), digamos que de r^f. Así, suponiendo un modelo Black-Scholes para X y tipo de interés doméstico r^d, el valor de una opción de compra con strike K se obtiene a través de la fórmula anterior con $\delta = r^f$ y $r = r^d$*

2.1.6. Black-Scholes en el caso multidimensional

El mercado de referencia es el que se describe en la sección 2.1.3, y supondremos que los activos pueden repartir dividendos continuos (y deterministas), que son abonados en activos del mismo tipo

$$
\left\{(\delta_t^1,\, \delta_t^2,\, \cdots,\, \delta_t^d)\right\}_{0 \leq t \leq T}
$$

de manera que si la estrategia de inversión que allí se describe es autofinanciada, tenemos $dV_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i \, dS_t^i + \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i \, S_t^i \, \delta_t^i \, dt$

Busquemos una probabilidad bajo la cual los precios actualizados de las carteras autofinanciadas sean martingalas. Sabemos que para $0 \le s \le t \le T$ tenemos

$$\begin{aligned}
d\widetilde{V}_t &= d\Big(e^{-\int_0^t r_s\,ds} V_t(\phi)\Big) = -r_t e^{-\int_0^t r_s\,ds} V_t(\phi)dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dV_t(\phi) \\
&= -r_t e^{-\int_0^t r_s\,ds} V_t(\phi)dt + e^{-\int_0^t r_s ds} \left(\sum_{i=0}^{d} \phi_t^i \, dS_t^i + \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i \, S_t^i \, \delta_t^i \, dt \right) \\
&= r_t e^{-\int_0^t r_s\,ds} \Big(\phi_t^0 \, S_t^0 - V_t(\phi) \Big) dt + e^{-\int_0^t r_s\,ds} \sum_{i=1}^{d} \Big(\phi_t^i \, dS_t^i + \phi_t^i \, S_t^i \, \delta_t^i \, dt \Big) \\
&= e^{-\int_0^t r_s\,ds} \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i S_t^i \Big(\delta_t^i - r_t \Big) dt + e^{-\int_0^t r_s\,ds} \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i \, dS_t^i \\
&= e^{-\int_0^t r_s\,ds} \left(\sum_{i=1}^{d} \phi_t^i S_t^i \Big(\delta_t^i + \mu_t^i - r_t \Big) dt + \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i S_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} \, dW_t^j \right) \\
&= e^{-\int_0^t r_s\,ds} \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i S_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} \left(dW_t^j + \sum_{k=1}^{d} (\sigma_t^{-1})^{jk} \Big(\delta_t^k + \mu_t^k - r_t \Big) dt \right) \\
&= e^{-\int_0^t r_s\,ds} \sum_{i=1}^{d} \phi_t^i S_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} \, d\widetilde{W}_t^j
\end{aligned}$$

con

$$d\widetilde{W}_t^j = dW_t^j + \sum_{k=1}^{d} (\sigma_t^{-1})^{jk} \Big(\delta_t^k + \mu_t^k - r_t \Big) dt \, , \; j = 1, \cdots, d \tag{2.6}$$

Entonces por el teorema de Girsanov con

$$\theta_t^j = (\sigma_t^{-1})^{jk} \Big(\delta_t^k + \mu_t^k - r_t \Big) \tag{2.7}$$

resulta que tenemos $\{ \widetilde{W}_t \}_{0 \le t \le T}$ es un movimiento browniano d-dimensional con respecto de la probabilidad $\widetilde{P}$, que es equivalente a la probabilidad P:

$$d\widetilde{P} = \prod_{j=1}^{d} \exp \left\{ - \int_0^T \theta_t^j \, dW_t^j \, - \, \frac{1}{2} \int_0^T (\theta_t^j)^2 dt \right\} \tag{2.8}$$

y tendremos así, por el Teorema 2.3, fórmula de valoración neutral al riesgo en el modelo Black-Scholes, que

$$V_t D_t = E_t^{\widetilde{P}} V_T D_T = E_t^{\widetilde{P}} \, \widetilde{V}_T = \widetilde{V}_t$$

y cualquier derivado X, con payoff h en T, F_T medible y de cuadrado integrable bajo $\widetilde{P}$, que sea replicable, tendrá un precio en t dado por

$$V_t = E_t^{\widetilde{P}} \, e^{-\int_t^T r_s\,ds} \, h$$

Por otro lado, si X es de cuadrado integrable, el teorema de representación de martingalas permite escribir

$$V_t = E_t^{\widetilde{P}} \, e^{-\int_t^T r_s\,ds} \, h = E^{\widetilde{P}} \, e^{-\int_0^T r_s\,ds} \, h + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t H_s^j \, d\widetilde{W}_s^j$$

con lo que podemos tomar

$$\phi_t^i = \frac{1}{\widetilde{S}_t^i} \sum_{k=1}^{d} (\sigma_t^{-1})^{ik} H_t^k, \; i = 1, \cdots, d.$$

La suposición de que $(\sigma_t)^{ij}$ es invertible es fundamental, ya que de la misma se deriva que el modelo esta libre de arbitraje y es completo. Esto es así porque en dicho caso la ecuación multidimensional del precio del mercado del riesgo tiene solución única y esto significa que existe una probabilidad equivalente a la inicial, neutral al riesgo, que es única. Por tanto, según los Teoremas Fundamentales de Valoración de Activos, el modelo es completo y esta libre de arbitraje. En realidad, para la ausencia de arbitraje solo es necesario que exista θ_t tal que $\sum_{k=1}^{d} \sigma_t^{jk} \theta_t^k = (\delta_t^j + \mu_t^j - r_t)$.

En cambio para que el modelo sea completo necesitamos que $(\sigma_t)^{ij}$ sea invertible. De esta manera podemos tener modelos viables donde la dimensión de W sea mayor que el número de activos, pero en dicho caso ya no serán completos.

Precio de una call europea

Notemos primero que bajo $\widetilde{P}$, $dS_t^i = S_t^i \Big((r_t - \delta_t^i)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} \, d\widetilde{W}_t^i \Big)$, $i = 1, \cdots, d$ con lo que $\Big(S_t^i \, e^{-\int_0^t (r_s - \delta_s^i) ds} \Big)$ son martingalas bajo $\widetilde{P}$:

$$d\left(S_t^i \, e^{-\int_0^t (r_s - \delta_s^i) ds} \right) = e^{-\int_0^t (r_s - \delta_s^i) ds} \left(- S_t^i \left(r_t - \delta_t^i \right) dt + dS_t^i \right) = \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} \, S_t^i \, d\widetilde{W}_t^j$$

Entonces, designando el valor de la call en el instante t por C_t, tendremos

$$C_t = E_t^{\widetilde{P}} \, \frac{(S_T^i - K)^+}{e^{\int_t^T r_s ds}} = e^{-\int_t^T \delta_s^i ds} \, E_t^{\widetilde{P}} \, \frac{(S_T^i - K)^+}{e^{\int_t^T (r_s - \delta_s^i) ds}}$$

Pero bajo $\widetilde{P}$, y condicionado a F_t, se tiene

$$\log S_T^i - \log S_t^i \sim N\left(\int_t^T (r_s - \delta_s^i) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \sum_{j=1}^{d} (\sigma_s^{ij})^2 ds \, , \; \int_t^T \sum_{j=1}^{d} (\sigma_s^{ij})^2 ds \right)$$

Por tanto

$$C_t = e^{-\int_t^T \delta_s^i ds} \left(S_t^i \, N(d_+) - K \, e^{-\int_t^T (r_s - \delta_s^i) ds} \, N(d_-) \right)$$

con

$$d_{\pm} = \frac{\log \dfrac{S_t^i}{K} + \displaystyle\int_t^T \left(r_s - \delta_s^i \pm \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} (\sigma_s^{ij})^2 \right) ds}{\sqrt{\displaystyle\int_t^T \sum_{j=1}^{d} (\sigma_s^{ij})^2 ds}}$$

BIBLIOGRAFIA:
D. Lambertoy y B. Lapeyre. "Stochastic Calculus Applied to Finance": Chapman and Hall: New York, 1996.
Steven E. Shreve. "Stochastic Calculus and Finance, Vol II"
Jose Manuel Corcuera. "Introducción a las Finanzas Cuantitativas."
P. Wilmott. "Wilmott on Quantitative Finance"

2.2. Denominación de los activos. Numerario.

Un numerario es la unidad de medida en la cual otros activos son denominados. Usualmente se toma como numerario la moneda de un país, y podría cambiarse de numerario tomando como unidad de medida la divisa de otro país. Puede ser conveniente a veces cambiar de numerario por que eso puede simplificar un modelo que describa las características de un activo.
En esta sección tendremos en cuenta el modelo de mercado multidimensional de la sección 2.1.3 con d+1 activos con alguna modificación que seguidamente señalamos.
La filtración $\{ F_t \}_{0\leq t\leq T}$ es la generada por $\{ W_t \}_{0\leq t\leq T}$, cumpliendo además

(a) F_0 contiene a todos los subconjuntos de conjuntos de medida 0. Esto significa que F_t es la mínima σ-álgebra que contiene los conjuntos de la forma $\{X_s \in B\} \cup N$, donde $s \in [0,t]$, B pertenece a la σ-álgebra de Borel $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^d$, y N es un conjunto de probabilidad nula.

(b) Para todo $t \geq 0$, la familia de σ-álgebras F_t es continua por la derecha, es decir, se verifica $F_t = \bigcap\limits_{s:s>t} F_s$

Disponemos asimismo de un proceso previsible de tasas de interés no negativas, $\{ R_t \}_{0\leq t\leq T}$, que puede ser usado para crear una cuenta del mercado del dinero libre de riesgo que evoluciona con el tiempo como $M_t = e^{\int_0^t R_u du}$, y designamos S_t^0, y definimos asimismo el proceso de descuento $D_t = e^{-\int_0^t R_u du} = \dfrac{1}{M_t}$.

Nuestro modelo de referencia esta formado por d activos primarios, y sus precios satisfacen la ecuación

$$dS_t^i = \alpha_t^i \, S_t^i \, dt + S_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij} \, dW_t^j \;, i = 1, ..., m$$

Queda expresamente excluida la posibilidad de que los activos repartan dividendo alguno.
El horizonte temporal del trading se representa por el intervalo [0,T].
El proceso de precios descontados mediante el proceso D_t, es una martingala bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo $\widetilde{P}$, que se asumirá única. La medida de probabilidad neutral al riesgo es construida por medio del Teorema de Girsanov, y bajo $\widetilde{P}$, los movimientos brownianos

$$\{ (\widetilde{W}_t^1, \widetilde{W}_t^2, ..., \widetilde{W}_t^d) \}_{0\leq t\leq T}$$

a que se refiere la fórmula (2.2) de la página 50, son independientes entre sí. Conforme al Segundo Teorema Fundamental de Valoración de Activos el mercado será completo y cada producto derivado puede ser recubierto mediante la negociación del correspondiente activo y la cuenta del mercado del dinero.
Bajo $\widetilde{P}$, los precios de los activos descontados $D_t S_t$ son martingalas y por tanto lo será el valor descontado de cada proceso del portafolio cuando se sigue una estrategia de negociación autofinanciada.
La medida neutral al riesgo $\widetilde{P}$, está asociada con el precio de la cuenta del mercado del dinero

M_t de la siguiente manera:
Si fuéramos a denominar el activo i-ésimo en términos de la cuenta del mercado del dinero libre de riesgo, su precio sería $\dfrac{S_t^i}{M_t} = D_t S_t^i$. Es decir, en el instante t, dicho activo vale $D_t S_t^i$ unidades de la cuenta del mercado del dinero. Este proceso, el valor del i-ésimo activo denominado en unidades de la cuenta del mercado del dinero, es una $\widetilde{P}$-martingala. Diremos entonces que la medida $\widetilde{P}$ es neutral al riesgo para el numerario de la cuenta del mercado del dinero.
Cuando cambiemos de numerario ya no tendremos la propiedad de martingala y necesitaremos cambiar la medida neutral al riesgo para recuperar la neutralidad al mismo.

2.2.1. Noción de numerario

Definición 2.11 *Un numerario es un proceso estocástico adaptado con respecto de la filtración* $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$, *estrictamente positivo* $\{\ N_t\ \}_{0\leq t\leq T\leq \bar{T}}$ *que puede ser tomado como unidad de referencia cuando se valora un activo o un contrato.*

En principio, podemos tomar como numerario cualquier activo con valor positivo, que no reparta dividendos, o incluso un activo que en si mismo fuera el derivado de otro activo, siempre que cumpla los requisitos de la anterior definición. Asociado a cada numerario, tendremos una medida neutral al riesgo. En particular, contemplamos $\widetilde{P}$ como la medida neutral al riesgo asociada con la cuenta del mercado del dinero doméstico, no con la divisa doméstica. La divisa paga un dividendo porque puede ser invertida en el mercado del dinero, y por contra, en nuestro modelo, una unidad de la cuenta del mercado del dinero incrementa su valor sin pagar dividendo. Algunos de los numerarios que podemos considerar son:

- La cuenta del mercado del dinero

$$N_t = e^{\int_0^t R_s ds}$$

  donde $\{\ R_t\ \}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso adaptado que puede ser estocástico o dependiente del tiempo y representa una tasa de interés libre de riesgo no negativa que es conocida en el instante t por los participantes del mercado para el intervalo [t,T] (short rate). El proceso N_t siempre es estrictamente positivo. En este caso, $\widetilde{S}_t = \dfrac{S_t}{N_t} = S_t\, e^{-\int_0^t R_s ds}$ representa el precio del activo descontado por dicho numerario en un instante t dado. Denotamos la medida de probabilidad neutral al riesgo asociada a dicho numerario por $\widetilde{P}$. Esta es la medida de probabilidad neutral al riesgo para el numerario dado por la cuenta del mercado del dinero. Si hubieramos tomado otro numerario distinto, la medida de probabilidad neutral al riesgo hubiera sido distinta.

- Cuenta del mercado del dinero foráneo, similar en definición al anterior, con R_t^f el proceso de tasas de interés correspondiente. Denotamos la medida de probabilidad neutral al riesgo asociada al numerario dado por la cuenta del mercado del dinero foráneo por $\widetilde{P}^f$.

- Una divisa para la que la tasa de descambio, Q_t entre divisas definida por

$$(FOR)_t = Q_t\,(DOM)_t\,,\ \ i.e.\ \ Q_t = 1\, unidad\, de\, FOR_t \,/\, 1\, unidad\, de\, DOM_t$$

  representa el precio en un instante t determinado de una unidad de divisa foránea FOR en unidades de divisa doméstica DOM, es decir, el numerario es la divisa doméstica DOM. Así, por ejemplo, un precio spot en FX para un par de divisas DOM/FOR cotizado en el instante t es el precio de una unidad de la divisa FOR en unidades de divisa DOM para una transacción efectuada en el instante t, y cuya entrega de la divisa FOR comprada se

hace también en el instante t. Ello implica que una unidad de FOR_t vale Q_t unidades de DOM_t.
Las operaciones financieras en Foreign Exchange (FX), que es como se denominan a aquellas en las que interviene más de una divisa, son casos típicos en los que intervienen operaciones de cambio de numerario.

- Si utilizamos como medida del precio de un activo S en el instante t el valor de un Bono que no reparte cupones y tiene madurez T, cuyo precio en el instante t es $P(t, T)$, es decir, usamos como numerario a dicho Bono, obtenemos el que se denomina numerario forward. Puede demostrarse, aunque no es objeto de este trabajo, que el valor de dicho bono viene dado en cada instante $0 \leq t \leq T$ para determinado proceso de descuento $D_t = e^{-\int_0^t R_s ds}$ por
$$P(t,T) = E_t^{\widetilde{P}}\, e^{-\int_t^T R_s ds}$$
y donde P(T,T) = 1 es el precio de un ZCB en su madurez T, y $\widetilde{P}$ es la medida de probabilidad neutral al riesgo que hace que se cumpla para cualquier $t \in [0, T]$
$$D_t P(t,T) = E_t^{\widetilde{P}}\big[D_T P(T,T)\big]$$
En este caso, $N_t = P(t, T)$ es el numerario o activo de referencia.
Denotamos la medida de probabilidad neutral al riesgo asociada a este numerario T-forward por $\widetilde{P}^T$, denotándola medida T-forward.

En la bibliografía al final de esta sección se muestran además otros muchos ejemplos de numerarios que se utilizan comúnmente.

Teorema 2.5 (Representación estocástica de los activos) *En nuestro modelo de mercado multidimensional de referencia, sea N_T un proceso de precios estrictamente positivo referido a un activo S^j, j= 1..d, que no reparte dividendos. Entonces existe un proceso de volatilidad (multidimensional)*
$$\{\,\nu_t\,\}_{0\leq t\leq T} = \{\,(\nu_t^1,\,\cdots\,,\nu_t^d)\,\}_{0\leq t\leq T}$$
tal que la dinámica del activo S^j que adoptamos como numerario, viene dada bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo por
$$dN_t = R_t\, N_t\, dt + N_t\, \nu_t\, \cdot d\widetilde{W}_t$$
donde se significa con la notación (·) el producto escalar de dos magnitudes multidimensionales.
Esta ecuación es equivalente a cualquiera de estas ecuaciones:

- $d(D_t\, N_t) = D_t\, N_t\, \nu_t\, \cdot d\widetilde{W}_t$
- $D_t\, N_t = N_0\, \exp\Big\{ \int_0^t \nu_u \cdot d\widetilde{W}_u - \dfrac{1}{2}\int_0^t \|\,\nu_u\,\|^2\, du \Big\}$
- $N_t = N_0\, \exp\Big\{ \int_0^t \nu_u\, \cdot d\widetilde{W}_u + \int_0^t (R_u - \dfrac{1}{2}\,\|\,\nu_u\,\|^2\,)\, du \Big\}$

En otras palabras, bajo la medida neutral al riesgo $\widetilde{P}$, cada activo tiene un retorno medio igual a la tasa R_t (short rate) de interés de la cuenta del mercado del dinero libre de riesgo. El retorno neutral al riesgo realizado para los activos esta caracterizado únicamente por sus procesos del vector de volatilidades.

La prueba de este teorema descansa en el hecho de que bajo la medida $\widetilde{P}$ neutral al riesgo, el proceso de precios descontados $D_t N_t$ debe ser una martingala. La medida neutral al riesgo se construye para reforzar esta condición para los activos primarios, y es una consecuencia de la fórmula de valoración neutral al riesgo para los derivados de los activos primarios. Conforme al Teorema de Representación de Martingalas, tenemos que

$$d(D_t\,N_t) = \sum_{j=1}^{d} \widetilde{\Gamma}_t^j\, d\widetilde{W}_t^j = \widetilde{\Gamma}_t\,\cdot\, d\widetilde{W}_t$$

para algún proceso d-dimensional adaptado $\widetilde{\Gamma}_t$. Como N_t es un proceso estrictamente positivo, podemos definir el vector ν_t por $\nu_t^j = \dfrac{\widetilde{\Gamma}_t^j}{D_t\,N_t}$. De ahí, la primera de las igualdades. Definiendo $X_t = \displaystyle\int_0^t \nu_u \cdot d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2}\int_0^t \|\nu_u\|^2 du = \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \nu_u^j\, d\widetilde{W}_u^j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\int_0^t (\nu_u^j)^2 du$ para que $dX_t = \nu_t \cdot d\widetilde{W}_t - \dfrac{1}{2}\|\nu_t\|^2 dt = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \nu_t^j\, d\widetilde{W}_t^j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(\nu_t^j)^2 dt$, entonces $dX_t\, dX_t = \displaystyle\sum_{j=1}^{d}(\nu_t^j)^2 dt = \|\nu_t\|^2 dt$. Haciendo ahora f(x) $= N_0\, e^x$, por la regla de Itô, derivamos y $df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t dX_t = f(X_t)\,\nu_t\, d\widetilde{W}_t$

Tenemos que $f(X_t)$ resuelve la primera de las igualdades, que $f(X_0) = N_0$, y que es la parte derecha de la segunda de las igualdades. La tercera de ellas se sigue directamente de la segunda. Si derivamos por la regla de Itô la tercera, obtenemos $dN_t = R_t\, N_t\, dt + N_t\, \nu_t\ \cdot d\widetilde{W}_t$.

Conforme al Teorema multidimensional de Girsanov, podemos usar el vector de volatilidad de N_t para cambiar de medida. Definimos

$$\widetilde{W}_t^{j\,(N)} = -\int_0^t \nu_u^j\, du + \widetilde{W}_t^j\ \ , j = 1, \cdots, d,$$

y una nueva medida de probabilidad

$$\widetilde{P}^{(N)}(A) = \frac{1}{N_0}\int_A D_T\, N_T\, d\widetilde{P}\,,\ para\, todo\, A \in F$$

De $D_t\, N_t = N_0\, \exp\Big\{\displaystyle\int_0^t \nu_u \cdot d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2}\int_0^t \|\,\nu_u\,\|^2\, du\Big\}$ vemos que $\dfrac{D_T\,N_T}{N_0}$ es la variable aleatoria Z_T que aparece en el teorema multidimensional de Girsanov, y en el que reemplazamos θ_t^j por $-\nu_t^j$ para j = 1, ..., m. Aquí usamos la probabilidad $\widetilde{P}$ en vez de P, que es la usada en el teorema de Girsanov, y usamos el $\widetilde{P}$-movimiento browniano d-dimensional $\widetilde{W}_t$ de nuestro mercado de referencia, en vez de W_t bajo P.

Con las sustituciones que hemos señalado, este Teorema multidimensional de Girsanov implica que bajo $\widetilde{P}^{(N)}$, el proceso $\widetilde{W}_t^{(N)} = (\widetilde{W}_t^{1\,(N)}, \cdots, \widetilde{W}_t^{d\,(N)})$ es un movimiento browniano d-dimensional. En particular, bajo $\widetilde{P}^{(N)}$, las componentes de $\widetilde{W}_t^{(N)}$ son independientes entre sí. El valor esperado bajo $\widetilde{P}^{(N)}$ de cualquier variable aleatoria X puede ser calculado a través de la fórmula

$$E^{\widetilde{P}^{(N)}} X = \frac{1}{N_0}\, E^{\widetilde{P}}\left[\, X\, D_T\, N_T\,\right]$$

De una forma más general

$$\frac{D_t\,N_t}{N_0} = E_t^{\widetilde{P}}\,\Big[\,\frac{D_T\,N_T}{N_0}\,\Big]\,,\; 0\le t\le T$$

es el proceso de la derivada de Radon-Nikodym, Z_t del teorema de Girsanov, y para Y una variable aleatoria F_t-medible, tenemos para cada $0\le s\le t\le T$

$$E_s^{\widetilde{P}^{(N)}}\,Y = \frac{1}{D_s\,N_s}\,E_s^{\widetilde{P}}\,\big[\,Y\,D_t\,N_t\,\big]$$

Teorema 2.6 (Cambio de la medida neutral al riesgo) *Sean S_t y N_t los precios de dos activos denominados en una divisa común, y sean $\sigma_t = (\sigma_t^1, ..., \sigma_t^d)$ y $\nu_t = (\nu_t^1, ..., \nu_t^d)$ los vectores de volatilidad respectivos. Entonces*

$$d(D_t\,S_t) = D_t\,S_t\,\sigma_t\,\cdot\,d\widetilde{W}_t\,,\; y\; d(D_t\,N_t) = D_t\,N_t\,\nu_t\,\cdot\,d\widetilde{W}_t$$

Tomamos N_t como numerario para que el precio de S_t sea $S_t^{(N)} = \dfrac{S_t}{N_t}$.
Bajo la medida $\widetilde{P}^{(N)}$, el proceso $S_t^{(N)}$ es una martingala, y aún más,

$$dS_t^{(N)} = S_t^{(N)}\,\big[\,\sigma_t - \nu_t\,\big]\,\cdot\,d\widetilde{W}_t^{(N)}.$$

Esta última igualdad expresa que el vector de volatilidad de $S_t^{(N)}$ es la diferencia de los vectores de volatilidad de S_t y de N_t. En particular, después del cambio de numerario, el precio del numerario es 1: $N^{(N)} = \dfrac{N_t}{N_t} = 1$, y esto tiene un vector de volatilidad nulo:

$$dN_t^{(N)} = N_t^{(N)}\,\big[\,\nu_t - \nu_t\,\big]\,\cdot\,d\widetilde{W}_t^{(N)} = 0$$

En este teorema, el proceso N_t tiene la representación diferencial estocástica

$$dN_t = R_t\,N_t\,dt + N_t\,\nu_t\,\cdot d\widetilde{W}_t$$

que reescribimos

$$dN_t = R_t\,N_t\,dt + \|\,\nu_t\,\|\,N_t\,dB_t^{(N)}$$

donde

$$B_t^{(N)} = \int_0^t \sum_{j=1}^{d} \frac{\nu_u^j}{\|\,\nu_u\,\|}\,d\widetilde{W}_u^j$$

Conforme al Teorema de Levy, $B_t^{(N)}$ es un movimiento browniano d-dimensional. Por tanto, la volatilidad (no el vector de volatilidad) de N_t en el reciente teorema es $\|\,\nu_t\,\|$ y de forma similar, la volatilidad de S_t es $\|\,\sigma_t\,\|$. La aplicación del mismo argumento a la ecuación $dS_t^{(N)} = S_t^{(N)}\,\big[\,\sigma_t - \nu_t\,\big]\,\cdot\,d\widetilde{W}_t^{(N)}$ muestra que la volatilidad de $S_t^{(N)}$ es $\|\,\sigma_t - \nu_t\,\|$, que no es la diferencia de las volatilidades $\|\,\sigma_t\,\|$ - $\|\,\nu_t\,\|$ a no ser que el vector de volatilidad σ_t sea un múltiplo positivo del vector de volatilidad ν_t.
Si tomamos en este teorema como numerario la cuenta del mercado del dinero, ie, $N_t = M_t = \dfrac{1}{D_t}$ tendremos $d(D_tN_t) = 0$, con el vector de volatilidad para dicha cuenta del mercado del dinero $\nu_t = 0$, y el vector de volatilidad para un activo $S_t^{(N)}$ denominado en unidades de cuenta del mercado del dinero es el mismo que el vector de volatilidad del activo denominado en unidades de divisa. El descontar un activo usando la cuenta del mercado del dinero no afecta a su vector

de volatilidad.

Este teorema es un caso especial de un resultado más general: Siempre que M_t^1 y M_t^2 sean martingalas bajo una medida P, $M_0^2 = 1$, y M_t^2 tome solo valores positivos, entonces $\dfrac{M_t^1}{M_t^2}$ es una martingala bajo la medida P^{M^2} definida por

$$P^{M^2}(A) = \int_A M_T^2 \, dP$$

Demostración 2.3 *Tenemos*

$$D_t\, S_t = S_0 \, \exp\Big\{ \int_0^t \sigma_u \, \cdot d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \parallel \sigma_u \parallel^2 du \Big\}$$

$$D_t\, N_t = N_0 \, \exp\Big\{ \int_0^t \nu_u \, \cdot d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \parallel \nu_u \parallel^2 du \Big\}$$

De aquí,

$$S_t^{(N)} = \frac{S_0}{N_0} \exp \Big\{ \int_0^t \big(\sigma_u - \nu_u\big) \cdot d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \big(\parallel \sigma_u \parallel^2 - \parallel \nu_u \parallel^2 \big)\, du$$

Para aplicar la fórmula de Itô a esta igualdad, definimos

$$X_t = \int_0^t \big(\sigma_u - \nu_u\big) \cdot d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \big(\parallel \sigma_u \parallel^2 - \parallel \nu_u \parallel^2 \big)\, du$$

Así,

$$\begin{aligned}
dX_t &= \big(\sigma_t - \nu_t\big) \cdot d\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\big(\parallel \sigma_t \parallel^2 - \parallel \nu_t \parallel^2 \big)\, dt \\
&= \sum_{j=1}^d \big(\sigma_t^j - \nu_t^j\big)\, d\widetilde{W}_t^j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \big((\sigma_t^j)^2 - (\nu_t^j)^2 \big)\, dt \\
dX_t dX_t &= \sum_{j=1}^d \big(\sigma_t^j - \nu_t^j\big)^2 dt \\
&= \sum_{j=1}^d \big((\sigma_t^j)^2 - 2\sigma_t^j \nu_t^j + (\nu_t^j)^2 \big)\, dt \\
&= \|\sigma_t\|^2 - 2\sigma_t \cdot \nu_t \, dt + \|\nu_t\|^2 \, dt
\end{aligned}$$

Con $f(x) = \dfrac{S_0}{N_0}\, e^x$*, tenemos* $S_t^{(N)} = f(X_t)$ *y*

$$\begin{aligned}
dS_t^{(N)} &= df(X_t) \\
&= f'(X) dX + \frac{1}{2} f''(X) dX dX \\
&= S^{(N)} \Big[(\sigma - \nu) \cdot d\widetilde{W} - \frac{1}{2}\|\sigma\|^2 dt + \frac{1}{2}\|\nu\|^2 dt + \frac{1}{2}\|\sigma\|^2 dt - (\sigma \cdot \nu) dt + \frac{1}{2}\|\nu\|^2 dt \Big] \\
&= S^{(N)} \Big[(\sigma - \nu) \cdot d\widetilde{W} - \nu \cdot (\sigma - \nu) dt \Big] \\
&= S^{(N)} \, (\sigma - \nu) \cdot (-\nu dt + d\widetilde{W}) \\
&= S^{(N)} \, (\sigma - \nu) \cdot d\widetilde{W}^{(N)}
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{W}_t^{(N)}$ es un movimiento browniano d-dimensional bajo $\widetilde{P}^{(N)}$, el proceso $S_t^{(N)}$ es una martingala bajo esta medida.

BIBLIOGRAFIA:

Damiano Brigo y Fabio Mercurio: "Interest Rate Models - Theory and Practice". Springer.
Steven E. Shreve. "Stochastic Calculus and Finance, Vol II"
N. Privault: "Notes on Stochastic Finance", www.ntu.edu.sg/home/nprivault/indext.html

2.2.2. Medidas neutrales al riesgo domestica y foránea

Para aplicar las ideas de la sección anterior a un mercado con dos divisas, una doméstica y otra foránea, consideramos que puede ser representado por un movimiento browniano bidimensional $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ en un espacio filtrado (Ω, F_T, P). En particular, asumimos que W_t^1 y W_t^2 son independientes bajo la probabilidad P. Contamos además con sendos procesos adaptados de tasas de interés doméstico y foráneo, R_t y R_t^f, que conducen a sendos procesos de descuento doméstico y foráneo $D_t = e^{-\int_0^t R_u\, du}$ y $D_t^f = e^{-\int_0^t R_u^f\, du}$ y a sendos procesos doméstico y foráneo de cuenta del mercado de dinero $M_t = (D_t)^{-1}$ y $M_t^f = (D_t^f)^{-1}$.
Tenemos un activo cuya dinámica de precios en la divisa doméstica satisface la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$dS_t = \alpha_t\, S_t\, dt + \sigma_t^1\, S_t\, dW_t^1$$

Además existe un proceso estocástico adaptado de tasa de descambio entre divisas, Q_t que da unidades de divisa doméstica por unidad de divisa foránea, que puede representarse por la relación FOR/DOM. Asumimos que satisface

$$dQ_t = \gamma_t Q_t dt + \sigma_t^2 Q_t \left[\rho_t dW_t^1 + \sqrt{1-\rho_t^2}\, dW_t^2 \right]$$

donde solo la correlación ρ tiene exponente 2 y el resto de superíndices no designan exponentes.

Podemos definir tambien $W_t^3 = \displaystyle\int_0^t \rho_u dW_u^1 + \int_0^t \sqrt{1-\rho_u^2}\, dW_u^2$ y por el Teorema de Levy W_t^3 es un movimiento browniano bajo $\widetilde{P}$, con lo que podemos decir que

$$dQ_t = \gamma_t Q_t dt + \sigma_t^2 Q_t dW_t^3$$

de donde se desprende que Q_t tiene volatilidad σ_t^2 tras esta transformación.

Asumimos $R_t, R_t^f, \sigma_1^t, \sigma_t^2, \rho_t$ procesos adaptados a la filtración F_T generada por el movimiento browniano bi-dimensional W_t, $\sigma_t^1 > 0$, $\sigma_t^2 > 0$ y $-1 < \rho_t < +1$ para todo t c.s.

Como $\dfrac{dS_t}{S_t} \cdot \dfrac{dQ_t}{Q_t} = \rho_t\, \sigma_t^1\, \sigma_t^2\, dt$, el proceso ρ_t es la correlación instantánea entre los cambios relativos en S_t y Q_t. En efecto:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha_t dt + \sigma_t^1 dW_t^1 \;\; y \;\; \frac{dQ_t}{Q_t} = \gamma_t dt + \sigma_t^2 \Big[\rho_t dW_t^1 + \sqrt{1-\rho_t^2}\, dW_t^2 \Big]$$

y al multiplicar los términos de variación cuadrática no nula, con $dW_t^1 dW_t^2 = 0$, se tiene que

$$\frac{dS_t}{S_t} \cdot \frac{dQ_t}{Q_t} = \sigma_t^1 dW_t^1 \sigma_t^2 \rho_t dW_t^1 + \sigma_t^1 dW_t^1 \sigma_t^2 \sqrt{1-\rho_t^2}\, dW_t^2 = \rho_t \sigma_t^1 \sigma_t^2 dt$$

La tasa de descambio se modela para atrapar de alguna forma la relación existente entre las dinámicas de las divisas involucradas en ella. El mercado en el que subyacen dichas dos divisas esta dirigido por sendos movimientos brownianos que son independientes bajo P. Por tanto la dinámica de precios de un activo en su divisa doméstica, esta afectada con respecto de otra divisa foránea por la dinámica que afecta a la tasa de cambio entre ellas.
Puede decirse de otra forma: bajo la dinámica de precios de la divisa foránea, el precio de un activo medido en divisa doméstica esta sometido a dos fuentes de incertidumbre, la del precio del activo en la divisa doméstica y la de la tasa de cambio entre la divisa doméstica y la divisa foránea.

Medida Neutral al Riesgo Doméstica

Tenemos tres activos disponibles para la negociación: la cuenta del mercado doméstico del dinero, un activo primario y la cuenta del mercado del dinero foráneo. Valoraremos cada uno de ellos en divisa doméstica y lo descontaremos a la tasa de interés doméstico. El resultado es el precio de cada uno de ellos en unidades de la cuenta del mercado de dinero doméstico. Bajo la medida neutral al riesgo doméstica los precios de dichos tres activos en divisa doméstica deben ser martingalas, y usamos esta observación para hallar dicha medida neutral al riesgo doméstica.

- La cuenta del mercado del dinero doméstico, cuando se valora en unidades del mercado del dinero doméstico tiene valor constante igual a 1. Esto siempre es una martingala, para cualquier medida de probabilidad P.

- El activo primario, una acción, por ejemplo, tiene precio en unidades de cuenta del mercado del dinero doméstico $\dfrac{S_t}{M_t} = S_t D_t$. Esto satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\,(\,D_t\,S_t\,) = D_t\,S_t\left[\,(\,\alpha_t - R_t\,)\,dt + \sigma_t^1\,dW_t^1\,\right] = \sigma_t^1\,D_t\,S_t\,d\widetilde{W}_t^1$$

tras construir un proceso $\widetilde{W}_t^1 = \displaystyle\int_0^t \Theta_u^1\,du + W_t^1$ que nos permita hacer el cambio de medida y que requiere que Θ_t^1 sea elegida de forma que se satisfaga la primera ecuación del precio del riesgo de mercado, $\Theta_t^1 = \dfrac{\alpha_t - R_t}{\sigma_t^1}$.

- El tercer activo es la cuenta del mercado del dinero foráneo. Si invertimos en dicho activo y lo descambiamos a divisa doméstica, el valor de la inversión, denominado en unidades de la cuenta del mercado del dinero doméstico será $\dfrac{M_t^f\,Q_t}{M_t} = M_t^f\,Q_t\,D_t$. Esto satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\,(M_t^f\,Q_t\,D_t) = M_t^f\,Q_t\,D_t\left[\,(R_t^f - R_t + \gamma_t)\,dt + \sigma_t^2\,\rho_t\,dW_t^1 + \sigma_t^2\,\sqrt{1-\rho_t^2}\,dW_t^2\,\right]$$

donde únicamente el superíndice asignado a ρ_t designa exponenciación.

La tasa media de cambio de Q_t es γ_t, y si le aplicamos la tasa de interés foráneo y luego lo descontamos a la tasa de interés doméstico, obtenemos que la tasa media de retorno o drift ha cambiado a $R_t^f - R_t + \gamma_t$, y los términos de volatilidad no han variado. Además del proceso $\widetilde{W}_t^1$ nos interesaría construir el proceso $\widetilde{W}_t^2 = \int_0^t \Theta_u^2\, du + W_t^2$ (estos superíndices no indican exponenciación) y hacer un cambio de probabilidad para obtener que

$$d\,(M_t^f\, Q_t\, D_t) = M_t^f\, Q_t\, D_t \left[\, \sigma_t^2\, \rho_t\, d\widetilde{W}_t^1 + \sigma_t^2\, \sqrt{1-\rho_t^2}\, d\widetilde{W}_t^2 \,\right]$$

Para ello tenemos que identificar miembros de estas dos últimas ecuaciones, y obtenemos la segunda ecuación del precio del riesgo del mercado:

$$R_t^f - R_t + \gamma_t = \sigma_t^2\, \rho_t\, \Theta_t^1 + \sigma_t^2\, \sqrt{1-\rho_t^2}\, \Theta_t^2$$

Si las ecuaciones del precio del riesgo del mercado $\Theta_t = (\Theta_t^1, \Theta_t^2)$ tienen una solución única, existirá una única medida de probabilidad neutral al riesgo, $\widetilde{P}$ bajo la cual $\widetilde{W}_t = (\widetilde{W}_t^1, \widetilde{W}_t^2)$ es un movimiento browniano bi-dimensional, y los procesos 1, $D_t\, S_t$ y $D_t\, M_t^f\, Q_t$ son martingalas.
Si hacemos $\widetilde{W}_t^3 = \displaystyle\int_0^t \rho_u\, d\widetilde{W}_u^1 + \int_0^t \sqrt{1-\rho_t^2}\, d\widetilde{W}_u^2$ tenemos que $\widetilde{W}_t^3$ es un $\widetilde{P}$-movimiento browniano, y $d\widetilde{W}_t^3 = \rho_t\, d\widetilde{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho_t^2}\, d\widetilde{W}_t^2$, obteniendo asimismo

$$d\widetilde{W}_t^1\, d\widetilde{W}_t^3 = \rho_t dt\,,\ y\,,\ d\widetilde{W}_t^2\, d\widetilde{W}_t^3 = \sqrt{1-\rho_t^2}\, dt$$

Podemos escribir los procesos de precios 1, $D_t S_t$ y $D_t M_t^f Q_t$ sin descontar multiplicándolos respectivamente por $M_t = \dfrac{1}{D_t}$ y usando que $dM_t = R_t M_t dt$ y la regla de Itô, lo que llevaría a

$$\begin{aligned}
dM_t &= R_t M_t dt \\
dS_t &= S_t[R_t dt + \sigma_t^1 d\widetilde{W}_t^1] \\
d(M_t^f Q_t) &= M_t^f Q_t[R_t dt + \sigma_t^2 \rho_t d\widetilde{W}_t^1 + \sigma_t^2 \sqrt{1-\rho_t^2} d\widetilde{W}_t^2] \\
&= M_t^f Q_t[R_t dt + \sigma_t^2 d\widetilde{W}_t^3]
\end{aligned}$$

Se ve que todos estos procesos tienen tasa de retorno R_t bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo $\widetilde{P}$ doméstica.
Si multiplicamos $M_t^f Q_t$ por D_t^f y usamos la regla del producto de Itô para derivar dicho producto, obtenemos

$$dQ_t = Q_t \left[\, (R_t - R_t^f)\, dt + \sigma_t^2\, \rho_t\, d\widetilde{W}_t^1 + \sigma_t^2\, \sqrt{1-\rho_t^2}\, d\widetilde{W}_t^2 \,\right] = Q_t \left[\, (R_t - R_t^f)\, dt + \sigma_t^2\, d\widetilde{W}_t^3 \,\right]$$

Bajo la medida neutral al riesgo, la tasa media de cambio de la tasa de descambio es la diferencia entre las tasas de interés doméstica y foránea $R_t - R_t^f$. En particular, no es R_t como si se tratara de un activo. Si se considerase la tasa de descambio como un activo, es decir tener una unidad de divisa foránea cuyo valor es en cada instante t, Q_t, entonces se trataría de un activo que paga dividendos contínuamente con una tasa R_t^f.
La última fórmula deducida da cuenta de la tasa media de cambio de la tasa de descambio bajo la medida neutral al riesgo doméstica. Bajo la medida de probabilidad real (y desconocida para nosotros) la tasa media de cambio de la tasa de descambio puede ser cualquiera, pues no hay restricción alguna en el proceso γ_t en la descripción dada por

$$dQ_t = \gamma_t Q_t dt + \sigma_t^2 Q_t \left[\rho_t dW_t^1 + \sqrt{1-\rho_t^2}\, dW_t^2 \right]$$

Medida Neutral al Riesgo Foránea

Se consideran tres activos: La cuenta del mercado del dinero foráneo, un activo y la cuenta del mercado del dinero doméstico. Valoraremos cada uno de ellos en divisa foránea y lo descontaremos a la tasa de interés foráneo. El resultado es el precio de cada uno de ellos en unidades de la cuenta del mercado de dinero foráneo. Bajo la medida neutral al riesgo foránea los precios de dichos tres activos en divisa foránea deben ser martingalas, y usamos esta observación para hallar dicha medida neutral al riesgo foránea.

- La cuenta del mercado del dinero foráneo cuando se computa en unidades de la cuenta del mercado del dinero foránea tiene un valor $\dfrac{M_t^f}{M_t^f} = 1$, que es siempre una martingala para cualquier medida de probabilidad.
- El activo primario, una acción, por ejemplo, tiene precio en unidades de divisa foránea $\dfrac{S_t}{M_t^f}\dfrac{1}{Q_t} = S_t D_t^f Q_t^{-1}$.
- El tercer activo es la cuenta del mercado del dinero doméstico. Si invertimos en dicho activo y lo descambiamos a divisa foránea, el valor de la inversión será $\dfrac{M_t}{M_t^f}\dfrac{1}{Q_t} = M_t D_t^f Q_t^{-1}$.

Si examinamos lo anterior, y tenemos en cuenta que dichas fórmulas se obtienen dividiendo las análogas del punto de vista doméstico por $D_t M_t^f Q_t$, vemos que para hallar la medida neutral al riesgo foránea tomamos como numerario la cuenta del mercado del dinero foráneo. Su valor en el instante t, denominado en unidades de cuenta del mercado del dinero doméstico, es $D_t M_t^f Q_t$ y en unidades de divisa doméstica es $M_t^f Q_t$.

Como

$$d\big(M_t^f Q_t\big) = M_t^f Q_t\big[R_t dt + \sigma_t^2 \rho_t d\widetilde{W}_t^1 + \sigma_t^2\sqrt{1-\rho_t^2}\,d\widetilde{W}_t^2\big]$$

el vector de volatilidad es

$$\big(\nu_t^1, \nu_t^2\big) = \big(\sigma_t^2\rho_t, \sigma_t^2\sqrt{1-\rho_t^2}\big)$$

que es el mismo que el vector de volatilidad de Q_t.
Conforme al último teorema dado, la medida neutral al riesgo asociada al numerario $M_t^f Q_t$ que representa la divisa doméstica, esta dado por

$$\widetilde{P}^f(A) = \frac{1}{Q_0\, M_0^f\, D_0}\int_A D_T\, M_T^f\, Q_T\, d\widetilde{P} = \frac{1}{Q_0}\int_A D_T\, M_T^f\, Q_T\, d\widetilde{P}\,, \forall A \in F\,,$$

teniendo en cuenta que $D_0 = M_0^f = 1$.
El proceso $\widetilde{W}_t^f = (\widetilde{W}_t^{1\,f}, \widetilde{W}_t^{2\,f})$, donde (únicamente ρ esta sujeto a exponenciación)

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_t^{1\,f} &= -\int_0^t \sigma_u^2\,\rho_u\,du + \widetilde{W}_t^1\\ \widetilde{W}_t^{2\,f} &= -\int_0^t \sigma_u^2\,\sqrt{1-\rho_u^2}\,du + \widetilde{W}_t^2\end{aligned}$$

es un movimiento browniano bi-dimensional bajo $\widetilde{P}^f$ a la que denominaremos medida de probabilidad neutral al riesgo foránea.

Podemos definir también

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_t^{3\,f} &= \int_0^t \rho_u \, d\widetilde{W}_u^{1\,f} + \int_0^t \sqrt{1-\rho_u^2}\, d\widetilde{W}_u^{2\,f} \\
&= \int_0^t \rho_u \left(-\sigma_u^2 \rho_u \, du + d\widetilde{W}_u^1 \right) + \int_0^t \sqrt{1-\rho_u^2} \left(-\sigma_u^2 \sqrt{1-\rho_u^2} du + d\widetilde{W}_u^2 \right) \\
&= -\int_0^t \sigma_u^2 \, du + \int_0^t \left(\rho_u \, d\widetilde{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho_u^2}\, d\widetilde{W}_u^2 \right) \\
&= -\int_0^t \sigma_u^2 \, du + \widetilde{W}_t^3
\end{aligned}$$

Por tanto, $\widetilde{W}_t^{3\,f}$ es un movimiento browniano bajo $\widetilde{P}^f$ y en consecuencia, $d\widetilde{W}_t^{1\,f}\, d\widetilde{W}_t^{3\,f} = \rho_t \, dt$, $d\widetilde{W}_t^{2\,f}\, d\widetilde{W}_t^{3\,f} = \sqrt{1-\rho_u^2}\, dt$

2.2.3. Paradoja de Siegel

Desde el punto de vista de la medida neutral al riesgo doméstica $\widetilde{P}$ la tasa media de cambio para Q_t es $R_t - R_t^f$ y desde la perspectiva foránea, como la tasa de descambio es $\frac{1}{Q_t}$ podría pensarse que la tasa media de cambio de $\frac{1}{Q_t}$ es $R_t^f - R_t$. Sin embargo, si tomamos f(x) $= \dfrac{1}{x}$ de forma que $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$, y $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, tenemos que

$$dQ_t = Q_t \left[(R_t - R_t^f)\, dt + \sigma_t^2 \, d\widetilde{W}_t^3 \right]$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{1}{Q}\right) &= df(Q) = f'(Q)dQ + \frac{1}{2} f''(Q)\, dQ\, dQ \\
&= \frac{1}{Q} \left(\left(R^f - R\right)dt - \sigma_t^2 \, d\widetilde{W}_3 \right) + \frac{1}{Q} (\sigma_t^2)^2 d\widetilde{W}_t^3 \, d\widetilde{W}_t^3 \\
&= \frac{1}{Q} \left(\left(R^f - R + (\sigma_t^2)^2\right)dt - \sigma_t^2 \, d\widetilde{W}_t^3 \right)
\end{aligned}$$

la tasa media de cambio bajo la medida neutral al riesgo doméstica es $R_t^f - R_t + (\sigma_t^2)^2$ y no $R_t^f - R_t$. La asimetría introducida por la convexidad de f(x) $= \dfrac{1}{x}$ se resuelve al cambiar a la medida neutral al riesgo foránea, que es la apropiada para valorar derivados en la divisa foránea. Recordando que $d\widetilde{W}_t^{3\,f} = -\sigma_t^2 \, dt + d\widetilde{W}_t^3$, podemos reescribir

$$d\left(\frac{1}{Q_t}\right) = \left(\frac{1}{Q_t}\right) \left[(R_t^f - R_t)\, dt - \sigma_t^2 \, d\widetilde{W}_t^{3\,f} \right]$$

y entonces, bajo la medida neutral al riesgo foránea, la tasa media de cambio para $\dfrac{1}{Q_t}$ es $R_t^f - R_t$ como se esperaba, con lo que se resuelve la paradoja.
Bajo la medida real P (que desconocemos) tenemos

$$dQ_t = \gamma_t \, Q_t \, dt + \sigma_t^2 \, Q_t \, dW_t^3$$

y

$$d\left(\frac{1}{Q_t}\right) = \frac{1}{Q_t} \left(-\gamma_t + (\sigma_t^2)^2 \right) dt - \frac{1}{Q_t} \sigma_t^2 \, dW_t^3 = \frac{1}{Q_t} \left(-\gamma_t + (\sigma_t^2)^2 \right) dt + \frac{1}{Q_t} \sigma_t^2 \, d(-W_t^3)$$

Se ve que Q_t y $\dfrac{1}{Q_t}$ tienen la misma volatilidad pero sus tasas medias de cambio no son opuestas la una con respecto de la otra, a no ser que σ sea nula, con lo que la dinámica de Q sería determinista. El cambio de signo en la volatilidad no afecta al resultado, puesto que el Movimiento Browniano es simétrico.

2.2.4. Tasas de descambio forward

Asumiendo que las tasa de interés doméstica y foránea son r y r^f constantes, y recordando que Q esta en unidades de divisa doméstica por unidad de divisa foránea, la tasa de descambio desde el punto de vista doméstico se describe por

$$dQ_t = Q_t\,(r - r^f)\,dt + Q_t\,\sigma_t^2\left[\rho_t d\widetilde{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho_t^2}\,d\widetilde{W}_t^2\right]$$

por tanto $e^{-(r-r^f)\,t}\,Q_t$ es una martingala bajo la medida $\widetilde{P}$ neutral al riesgo doméstica.
En t = 0, y en divisa doméstica, el precio forward F de una unidad de divisa foránea, para ser entregado en el instante T, se determina por la ecuación

$$V_0 = 0 = E^{\widetilde{P}}\left[\,e^{-rT}\,(Q_T - F)\,\right]$$

Queremos resolver esta ecuación para F, observando que ello implica

$$e^{-rT}\,F = E^{\widetilde{P}}\left[\,e^{-rT}\,Q_T\,\right] = e^{-r^f\,T}\,E^{\widetilde{P}}\left[\,e^{-(r-r^f)\,T}\,Q_T\,\right] = e^{-r^f\,T}\,Q_0$$

lo que implica que $F = e^{(r-r^f)\,T}\,Q_0$.
La tasa de descambio desde el punto de vista foráneo esta dada por la ecuacion diferencial

$$d\,\Big(\frac{1}{Q_t}\Big) = \Big(\frac{1}{Q_t}\Big)\,(r^f - r)\,dt - \Big(\frac{1}{Q_t}\Big)\,\sigma_t^2\left[\rho_t\,d\widetilde{W}_t^{1\,f} - \sqrt{1-\rho_t^2}\,d\widetilde{W}_t^{2\,f}\right],$$

de donde $e^{-(r^f-r)\,t}\,\dfrac{1}{Q_t}$ es una martingala bajo la medida $\widetilde{P}^f$ neutral al riesgo foránea.
En t = 0, y bajo la divisa foránea, el precio forward F^f de una unidad de divisa doméstica para ser entregada en el instante T, esta determinado por la ecuación

$$E^{\widetilde{P}^f}\left[e^{-r^f\,T}\,\Big(\frac{1}{Q_T} - F^f\Big)\right] = 0$$

La parte izquierda de la ecuación representa la fórmula de valoración neutral al riesgo aplicada al contrato que abona $\dfrac{1}{Q_t}$ unidades del activo (divisa foránea) en el instante T a cambio de un pago de F^f unidades de divisa foránea, ambas cantidades denominadas en divisa foránea. La fórmula anterior conlleva

$$e^{-r^f\,T}\,F^f = E^{\widetilde{P}^f}\left[e^{-r^f\,T}\,\frac{1}{Q_T}\right] = e^{-r\,T}\,E^{\widetilde{P}^f}\left[e^{-(r^f-r)\,T}\,\frac{1}{Q_T}\right] = e^{-r\,T}\,\frac{1}{Q_0}$$

y esto da cuenta de la tasa de descambio T-forward, (unidades de divisa foránea por unidad de divisa doméstica):

$$F^f = e^{(r^f-r)\,T}\,\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{F}$$

2.2.5. Fórmula de Garman-Kohlhagen

Asumiendo en esta sección que las tasas de interés doméstico, r, y foráneo, r^f, así como σ^2 son constantes, vamos a valorar en t = 0 una opción call europea sobre una unidad de divisa foránea como activo subyacente (que por tanto, vale Q_0 en divisa doméstica), para un precio de ejercicio K (en divisa doméstica) y una madurez T, cuyo payoff en divisa doméstica es, por tanto, $(Q_T - K)^+$.
Así, $V_0 = E_0^{\widetilde{P}} \left[e^{-r(T-0)} \left(Q_T - K \right)^+ \right]$, donde en este caso, $dQ_t = Q_t \left[(r - r^f)\, dt + \sigma_2\, d\widetilde{W}_t^3 \right]$.
De ello se sigue que $Q_T = Q_0 \exp \left\{ \sigma_2 \widetilde{W}_T^3 + \left(r - r^f - \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) T \right\}$
Si definimos Y $= -\dfrac{\widetilde{W}_T^3}{\sqrt{T}}$ obtenemos una variable aleatoria que bajo $\widetilde{P}$ tiene una distribución normal standard, y entonces el precio de la call será

$$V_0 = E_0^{\widetilde{P}} \left[e^{-rT} \left(Q_T - K \right)^+ \right] = E_0^{\widetilde{P}} \left[e^{-rT} \left(Q_0 \exp \left\{ -\sigma_2 \sqrt{T}\, Y + \left(r - r^f - \frac{1}{2} \sigma_2 \right) T \right\} - K \right)^+ \right]$$

Esta expresión es la misma que teníamos para el cálculo de una opción europea sobre un activo que abonaba dividendos de forma contínua, en la que τ es sustituído por T, x por S_0 y el ratio de dividendos por r^f, con lo que el precio de la call es

$$V_0 = e^{-r^f T} Q_0\, N(d_+) - e^{-rT} K\, N(d_-),\ con\, d_\pm = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{T}} \left[\log \frac{Q_0}{K} + \left(r - r^f \pm \frac{1}{2} \sigma_2^2 \right) T \right]$$

y N la función de distribución de una variable aleatoria normal standard.
Esta es la conocida como Fórmula de Garman-Kohlhagen.

2.2.6. Dualidad Put-Call sobre las tasas de descambio

Desarrollaremos una relación entre una call europea sobre divisa doméstica, denominada en divisa foránea, y una put europea sobre divisa foránea, denominada en divisa doméstica.
Para hallar la medida neutral al riesgo foránea, tomamos la cuenta del mercado del dinero foráneo como numerario. Su valor en el instante t, denominado en unidades de la cuenta del mercado del dinero doméstico es $D_t\, M_t^f\, Q_t$ y denominado en unidades de divisa doméstica es $M_t^f\, Q_t$. Este es el precio doméstico de la cuenta del mercado del dinero foráneo, que usaremos como numerario. La derivada de Radon-Nikodym de la medida de probabilidad neutral al riesgo foránea, con respecto de la doméstica es $\dfrac{d\widetilde{P}^f}{d\widetilde{P}} = \dfrac{D_T\, M_T^f\, Q_T}{D_0\, M_0^f\, Q_0} = \dfrac{D_T\, M_T^f\, Q_T}{Q_0}$, habida cuenta de que $D_0 = M_0^f = 1$. Así, la medida de probabilidad neutral al riesgo asociada con el numerario $M_t^f\, Q_t$ es

$$\widetilde{P}^f = \frac{1}{Q_0} \int_A D_T\, M_T^f\, Q_T\, d\widetilde{P}\,, \forall\, A \in F$$

Por lo tanto, para cualquier variable aleatoria X, se tiene $E^{\widetilde{P}^f} X = E^{\widetilde{P}} \left[\dfrac{D_T\, M_T^f\, Q_T}{Q_0} X \right]$.
Una call europea, sobre una unidad de divisa doméstica denominada en la divisa foránea, y con strike K en divisa foránea, tiene un payoff en divisa foránea de $\left(\dfrac{1}{Q_T} - K \right)^+$. En el instante t = 0, su valor en divisa foránea, es la esperanza de dicho payoff descontado, bajo la probabilidad

neutral al riesgo foránea:

$$\begin{aligned}
E^{\widetilde{P}^f}\Big[D_T^f\,\big(\frac{1}{Q_T}-K\big)^+\Big] &= E^{\widetilde{P}}\Big[\frac{D_T\,M_T^f\,Q_T}{Q_0}\cdot D_T^f\,\big(\frac{1}{Q_T}-K\big)^+\Big]\\
&= \frac{1}{Q_0}\,E^{\widetilde{P}}\Big[D_T\,\big(1-K\,Q_T\big)^+\Big]\\
&= \frac{K}{Q_0}\,E^{\widetilde{P}}\Big[D_T\,\big(\frac{1}{K}-Q_T\big)^+\Big]
\end{aligned}$$

Este es el valor en el instante inicial en divisa doméstica de $\frac{K}{Q_0}$ puts sobre la tasa de descambio foránea. Mas específicamente, una put europea con strike $\frac{1}{K}$ sobre una unidad de divisa foránea denominada en la divisa doméstica, paga a su madurez $\big(\frac{1}{K}-Q_T\big)^+$ unidades de divisa doméstica. El valor de la divisa doméstica de esta put, en el instante inicial, que es el valor esperado del payoff descontado, bajo la probabilidad neutral al riesgo doméstica, es

$$E^{\widetilde{P}}\Big[D_T\,\big(\frac{1}{K}-Q_T\big)^+\Big]$$

La call con la que habíamos empezado, vale $\frac{K}{Q_0}$ de estos puts.

El precio en divisa foránea de la put con strike $\frac{1}{K}$ sobre una unidad de divisa foránea es

$$\frac{1}{Q_0}\,E^{\widetilde{P}}\Big[D_T\,\big(\frac{1}{K}-Q_T\big)^+\Big]$$

La call con la que habíamos empezado tiene un valor K veces esta última cantidad. Cuando denominamos tanto la call como la put de esta manera en divisa foránea, podemos entender el resultado final. De hecho, hemos visto que la opción para descambiar K unidades de divisa foránea por una unidad de divisa doméstica (la call) es la misma que K opciones para descambiar $\frac{1}{K}$ unidades de divisa doméstica por una unidad de divisa foránea (la put).

BIBLIOGRAFIA:

Musiela y Rutkowsky, "Martingale Methods in Financial Modelling"
Steven Shreve, "Stochastic Calculus for Finance II"

Capítulo 3

Aproximación a FX y Productos Quanto

Este capítulo cubre la valoración de opciones en las que el valor de ejercicio depende de mas de un activo de riesgo. La primera parte del capítulo contempla los mercados de divisas y la valoración de contratos derivados en dichos mercados. Igual que en el caso de los derivados sobre acciones, la superficie de volatilidad implícita correspondiente a los precios de las opciones vainilla europeas sobre tasas de descambio no es ni plana ni constante. Por ello es aceptado generalmente que el modelo del movimiento browniano geométrico de Black-Scholes es un modelo no muy bueno para los mercados FOREX. Como en el caso de los derivados sobre acciones, sin embargo, los precios de las opciones vainilla FOREX son establecidos y sus griegas son calculadas usando el marco Black-Scholes. Por ello es necesario entender como se aplica dicho modelo a los mercados FOREX cuando se trabaja con derivados en dichos mercados. La segunda parte del capítulo se hace cargo, con especial hincapié, de la valoración de algunos productos quanto.

3.1. Dinámica de las economías doméstica y foránea.

Introducción.

En lo siguiente, todos los procesos considerados están definidos en un espacio de probabilidad filtrado común (Ω, F, P), donde F es la P-complección por medio de los eventos de probabilidad P-nula de la filtración generada por una movimiento browniano d-dimensional W_t = $(W_1^t, ..., W_d^t)$. Las tasas de interés doméstico y foráneo r^d y r^f son dos números no negativos dados, y constantes. Los procesos de cuenta bancaria o mercado del dinero, doméstico y foráneo satisfacen

$$B_t^d = e^{\int_0^t r_s^d ds} = e^{r^d t}\,,\, B_t^f = e^{\int_0^t r_s^f ds} = e^{r^f t}\,,\, \forall\, t \in [0, T]$$

donde B_t^d y B_t^f estan denominados en unidades de divisa doméstica y foránea respectivamente. La tasa de cambio de divisa Q_t es un proceso estocástico adaptado que modela la relación DOM/FOR, de numerario la divisa doméstica, que a cada unidad de divisa foránea le hace corresponder en el instante t, Q_t unidades de divisa doméstica, y verifica la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = \mu_Q dt + \sigma_Q \cdot dW_t, Q_0 > 0$$

donde $\mu_Q \in R$ es un coeficiente de deriva (drift) constante y $\sigma_Q \in R^d$ denota un vector de volatilidad constante y de componentes positivas. La notación $(\cdot)$ denota el producto de magnitudes de tipo multidimensional y compatibles, de tipo euclídeo, como de costumbre.

- S_t^0 representa a la cuenta del mercado del dinero, y sin pérdida de generalidad tomamos $S_0^0 = 1$.
- $\{ r_t^{d/f} \}_{0\leq t\leq T}$ denota un proceso estocástico F_t-adaptado al que se refiere la tasa de intereses del mercado doméstico/foráneo a corto plazo.
- $\{ \phi \}_{0\leq t\leq T}$, es un proceso estocástico d+1-dimensional, cuyos componentes $\{ \phi_i \}_{0\leq t\leq T}^{0\leq i\leq d}$ son localmente acotados y previsibles. El valor del proceso asociado con la estrategia que denominamos de trading, ϕ_t, esta definido por

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_i^t S_i^t \,,\; 0 \leq t \leq T$$

y el proceso de beneficios asociado con dicha estrategia

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi_u \cdot dS_u = \int_0^t \sum_{i=0}^{d} \phi_i^u dS_i^u \,,\; 0 \leq t \leq T$$

con ϕ_i^t en número de activos en t del subyacente i-ésimo en el portafolio. $V_t(\phi)$ y $G_t(\phi)$ se contemplan como el valor del portafolio en el instante t y la ganancia acumulada por el inversor hasta el instante t siguiendo la estrategia de trading ϕ.

Medida de Martingala Doméstica.

Como la dinámica de la tasa de descambio Q_t verifica

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = \mu_Q dt + \sigma_Q \cdot dW_t, Q_0 > 0 \Rightarrow Q_t = Q_0 \exp\left(\sigma_Q \cdot W_t + (\mu_Q - \frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2)t\right)$$

introduciremos un proceso auxiliar $Q_t^* = \dfrac{B_t^f Q_t}{B_t^d} = e^{(r^f - r^d)t} Q_t \,, \forall\, t \in [0, T]$, que representa el valor en t de la cuenta del mercado foráneo convertida en divisa doméstica y descontada por el numerario de la cuenta del mercado del dinero doméstico. Es útil observar que Q_T^* satisface

$$Q_t^* = Q_0 \exp\left(\sigma_Q \cdot W_t + (\mu_Q + r^f - r^d - \frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2)t\right)$$

de donde

$$\frac{dQ_t^*}{Q_t^*} = \left(\mu_Q + r^f - r^d\right)dt + \sigma_Q \cdot dW_t$$

que será martingala bajo la medida de probabilidad original P si $\mu_Q = r^d - r^f$. De otro lado, podemos hacer uso del proceso $\widetilde{B}_t^f$, que representa el valor en t de una unidad de inversión en la cuenta del mercado de dinero foráneo, expresado en unidades de divisa doméstica, es decir, $\widetilde{B}_t^f = B_t^f Q_t = e^{r^f t} Q_t \,, \forall t \in [0, T]$.

Definición 3.1 *Una medida de probabilidad P^*, equivalente a P en (Ω, F_t), es una medida de martingala del mercado doméstico, o medida de martingala doméstica, si el proceso Q_t^* es una P^*-martingala.*

Para excluir arbitraje en inversiones entre bonos domésticos y foráneos, debemos asumir que el drift del proceso de tasa de descambio es igual a $r^d - r^f$ bajo una medida de probabilidad equivalente P^* a la que denominaremos medida de martingala doméstica. Merece la pena recordar que en general la medida de martingala P^* no es única en general. De hecho, en el marco en que nos hallamos, la medida de martingala P^* esta asociada con una solución $\Theta \in R^d$ de

$$\mu_Q + r^f - r^d + \sigma_Q \cdot \Theta = 0$$

para la cual la unicidad de la solución no tiene por que darse en general.
De hecho, para alguna solución Θ de la anterior ecuación, la medida de probabilidad dada por $\frac{dP^*}{dP} = \exp(\Theta \cdot W_T - \frac{1}{2}\|\Theta\|^2 T)$, P- c.s. puede jugar el rol de una medida de martingala asociada con el mercado doméstico. Además, el proceso $W_t^* = W_t - \Theta t, \forall t \in [0,T]$ sigue un movimiento browniano d-dimensional bajo P^* respecto de la filtración subyacente. La unicidad de la medida puede ser obtenida mediante la introducción de la posibilidad de negociación en mas activos adicionales domésticos o foráneos, como por ejemplo acciones, y se dará cuando haya al menos d activos cuyas dinámicas de precios sean independientes entre sí, mas la cuenta del dinero doméstica, como sabemos.

Por ejemplo, si no hay activos de riesgo domésticos y solo un activo de riesgo foráneo es considerado, para garantizar la unicidad de la medida de martingala P^*, y por tanto la completitud del mercado, es suficiente asumir que $\widetilde{W}_t^{3,f}$, y tambien, por tanto, $\widetilde{W}_t^{3,d}$, tal y como los denotábamos en la sección 2.2.2, es un movimiento browniano bidimensional bajo las probabilidades de martingala respectivas P^* y $\widetilde{P}$. En lo sucesivo, denotaremos a estos movimientos brownianos, respectivamente, como W_t^* y $\widetilde{W}_t$ para simplificar un poco la notación. En tal caso el modelo del mercado involucraría tres activos primarios, la cuenta del dinero doméstico, la del dinero foráneo y el stock foráneo. Las dos primeras tienen su equivalente en sendos bonos doméstico y foráneo. De esta manera, la dinámica de la tasa de descambio Q bajo la medida de martingala doméstica P^* queda descrita como

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = (r^d - r^f)dt + \sigma_Q \cdot dW_t^*\,,\ Q_0 > 0$$

con W_t^* siguiendo un movimiento browniano 2-dimensional bajo P^*.

El inversor doméstico, que constantemente denomina los precios de todos los activos en la divisa doméstica, contempla a P^*, medida de martingala doméstica, como a una probabilidad neutral al riesgo. Así, cualquier contrato C_T con pago contingente h en T, denominado en divisa doméstica, verifica que tiene un precio libre de arbitraje dado en cada t, $t \in [0,T]$ por

$$V_t(C_T) = e^{-r^d(T-t)} E_t^{P^*} h$$

Si un contrato con pago contingente en T, Y, esta denominado en unidades de divisa foránea, su precio libre de arbitraje en el instante t, expresado en unidades de divisa doméstica, esta dado por la fórmula

$$V_t(Y_T) = e^{-r^d(T-t)} E_t^{P^*}[Q_T Y_T]$$

Véase que el precio libre de arbitraje de un tal contrato puede ser evaluado alternativamente usando la medida de martingala asociada con el mercado foráneo y después convertido en unidades de divisa doméstica usando la tasa de descambio correspondiente Q_t. Para ello necesitamos introducir una medida de probabilidad libre de arbitraje asociada con el mercado foráneo, que denotaremos como medida de martingala foránea.

Medida de Martingala Foránea.

Ahora tomamos la perspectiva del inversor foráneo, que denomina sus beneficios y pérdidas en unidades de divisa foránea. Como Q_t es el precio en t de una unidad de divisa foránea en unidades de divisa doméstica, el precio en t de una unidad de divisa doméstica en unidades de divisa foránea será $\frac{1}{Q_t} = R_t$. Por la fórmula de Itô,

$$d\frac{1}{Q_t} = -\frac{dQ_t}{Q_t^2} + \frac{1}{Q_t^3} d\langle Q, Q\rangle_t$$

y de forma más explícita

$$\frac{dR_t}{R_t} = -(r^d - r^f)dt - \sigma_Q \cdot dW_t^* + \|\sigma_Q\|^2 dt$$

Así, la dinámica de R bajo P^* esta dada por la expresión

$$\frac{dR_t}{R_t} = (r^f - r^d)dt - \sigma_Q \cdot (dW_t^* - \sigma_Q dt)$$

Equivalentemente,

$$\frac{dR_t^*}{R_t^*} = -\sigma_Q \cdot (dW_t^* - \sigma_Q dt)$$

donde denotamos por R_t^* al proceso

$$R_t^* = R_t e^{(r^d - r^f)t} = e^{-r^f t} R_t B_t^d \,,\ \forall t \in [0, T]$$

R_t^* representa el proceso de precios de la cuenta del dinero doméstico, expresada en unidades de divisa foránea, y descontada usando la tasa de interés libre de riesgo foránea. Se ve, de $\frac{dR_t^*}{R_t^*} = -\sigma_Q(dW_t^* - \sigma_Q dt)$, que el proceso R_t^* tiene la propiedad de martingala bajo la medida de probabilidad $\widetilde{P}$ equivalente a P^*, satisfaciéndose

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP^*} = Z_T \,,\ P^* - c.s.$$

en (Ω, F_T), donde $Z_t = e^{\sigma_Q \cdot W_t^* - \frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2 t}$, $\forall t \in [0, T]$ es el proceso de derivada de Radon-Nikodym asociado. Cualquier medida de probabilidad $\widetilde{P}$ definida de esta manera es referida como la medida de martingala del mercado foráneo. Si no se verifica la unicidad de la medida de martingala doméstica P^*, tampoco lo hará la de $\widetilde{P}$. De todas maneras, bajo cualquier medida de martingala foránea $\widetilde{P}$, tenemos

$$\frac{dR_t^*}{R_t^*} = -\sigma_Q \cdot d\widetilde{W}_t$$

donde el proceso

$$\widetilde{W}_t = W_t^* - \sigma_Q t$$

sigue un movimiento browniano d-dimensional bajo $\widetilde{P}$. Es útil observar que la dinámica de R bajo la medida de martingala $\widetilde{P}$ esta dada por

$$\frac{dR_t}{R_t} = (r^f - r^d)dt - \sigma_Q \cdot d\widetilde{W}_t$$

La interpretación financiera, es que una medida de martingala del mercado foráneo $\widetilde{P}$ es cualquier medida de probabilidad en (Ω, F_t) equivalente a P que excluya oportunidades de arbitraje entre inversiones libres de riesgo efectuadas en sendas economías doméstica y foránea, tal y como lo percibe un inversor radicado en la economía foránea. Para cualquier pago contingente realizable X, que tiene lugar en el instante T y es denominado en unidades de divisa doméstica, el precio libre de arbitraje en el instante t en unidades de divisa foránea, esta dado por la igualdad

$$\widetilde{\pi}_t(X) = e^{-r^f(T-t)} E_t^{\widetilde{P}} \left[R_T X_T \right], \forall t \in [0,T]$$

Ahora estamos en posición de establecer una relación que une una esperanza condicional evaluada bajo la medida de martingala del mercado foráneo $\widetilde{P}$ con su contrapartida evaluada bajo la medida de martingala doméstica P^*. Asumiremos que ambas medidas estan relacionadas por

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP^*} = Z_T \, , \, P^* - c.s. \, , \, Z_t = e^{\sigma_Q \cdot W_t^* - \dfrac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2 t}, \forall t \in [0,T]$$

Proposición 3.1 *La siguiente fórmula es válida para cualquier variable aleatoria F_T-medible X (siempre que la esperanza condicional este bien definida):*

$$E_t^{\widetilde{P}} X_T = E_t^{P^*} \left(X_T \, e^{\sigma_Q \cdot (W_T^* - W_t^*) - \dfrac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2 (T-t)} \right)$$

Demostración 3.1 *Por la regla de Bayes* $E_t^{\widetilde{P}} X_T = \dfrac{E_t^{P^*}[X_T Z_T]}{E_t^{P^*} Z_T}$
Como Z_T es martingala bajo P^*,

$$E_t^{\widetilde{P}} X_T = \frac{1}{Z_t} E_t^{P^*}[X_T Z_T] = E_t^{P^*}[\frac{Z_T}{Z_t} X_T]$$

Y ahora usamos que $Z_t = e^{\sigma_Q \cdot W_t^* - \dfrac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2 t}$, $\forall t \in [0,T]$.

Sea S_t^f el precio en el instante t en divisa foránea de un stock foráneo negociado que no paga dividendos. Para excluir arbitraje, asumimos que la dinámica del proceso de precios S_t^f bajo la medida de martingala foránea $\widetilde{P}$ esta descrita por

$$\frac{dS_t^f}{S_t^f} = r^f dt + \sigma_{S^f} \cdot d\widetilde{W}_t \, , \, S_0^f > 0$$

y con un coeficiente de volatilidad $\sigma_{S^f} \in R^d$ constante, y donde $\widetilde{W}_t = W_t^* - \sigma_Q t$.
Esto significa que el proceso de precios del activo sigue

$$\frac{dS_t^f}{S_t^f} = (r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f}) dt + \sigma_{S^f} \cdot dW_t^*$$

bajo la medida de martingala doméstica P^* asociada a $\widetilde{P}$.

Con el propósito de valorar opciones sobre activos (equity) foráneos, puede ser útil convertir el precio del stock foráneo subyacente S^f a divisa doméstica. Escribimos $\widetilde{S}_t^f = Q_t S_t^f$ para denotar el precio de un stok foráneo S^f expresado en unidades de divisa doméstica. Usando la fórmula de Itô, y la dinámica bajo P^* de la tasa de descambio Q, que es

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = (r^d - r^f) dt + \sigma_Q \cdot dW_t^*$$

se halla que bajo la medida de martingala doméstica P^*, el proceso $\widetilde{S}_t^f$ satisface

$$\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t^f &= d(Q_t S_t^f) = dQ_t S_t^f + Q_t dS_t^f + dQ_t dS_t^f \\
&= Q_t((r^d - r^f)dt + \sigma_Q \cdot dW_t^*)S_t^f + Q_t((r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f})dt + \sigma_{S^f} \cdot dW_t^*)S_t^f + Q_t S_t^f \sigma_{S^f}\sigma_Q dt \\
&= Q_t S_t^f \Big(r^d dt + (\sigma_{S^f} + \sigma_Q) \cdot W_t^* \Big)
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d\widetilde{S}_t^f}{\widetilde{S}_t^f} = r^d dt + (\sigma_{S^f} + \sigma_Q) \cdot dW_t^*$$

Esta última igualdad muestra que el proceso de precios $\widetilde{S}^f$ se comporta como el proceso de precios de un stock doméstico en el marco clásico de Black-Scholes. Sin embargo, el correspondiente coeficiente de volatilidad es igual a la superposición $\sigma_{S^f} + \sigma_Q$ de dos volatilidades, la del stock foráneo más la de la tasa de descambio.

3.2. Productos Quanto.

Un "Quanto" es un tipo de derivado en el que el subyacente esta denominado en una divisa, pero el instrumento en si mismo esta fijado en otra divisa a algún tipo de cambio fijado. Tales productos son atractivos para especuladores e inversores que desean tener exposición a un activo foráneo, pero sin el correspondiente riesgo de tasa de cambio.
Los quantos son atractivos porque protegen al comprador de las fluctuaciones de la tasa de cambio entre divisas. Si un inversor europeo, digamos, fuera a invertir directamente en activos japoneses comprendidos en el índice Nikkei, podría estar expuesto a fluctuaciones de dicho índice y a fluctuaciones de la tasa de cambio EUR/JPY. Esencialmente, un quanto tiene incrustado un forward de divisas con un importe nominal variable. Es este importe nominal variable que da a los quantos su nombre: quanto es una abreviación para " quantity adjusting option".
Al involucrar más de una divisa, los productos quanto pueden ser al menos tantos como productos derivados pueden darse en el seno de una única divisa, es decir, innumerables. Por ese motivo, en esta sección nos limitaremos a dar cuenta únicamente de alguno de los más sencillos que se dan en los mercados financieros.

En esta sección se extiende el modelo libre de arbitraje del mercado doméstico de activos asumiendo que la negociación de activos foráneos, tales como bonos foráneos libres de riesgo y activos foráneos, así como sus derivados, esta permitida. Trabajaremos en el marco clásico de Black-Scholes. Más específicamente, asumimos constantes no negativas tanto las tasas de interés libre de riesgo foránea como la doméstica, y los precios de los activos negociados modelados por movimientos brownianos geométricos.

3.2.1. Contratos Forward y Opciones Sobre Divisas.

En esta sección consideramos contratos derivados cuyo valor depende exclusivamente de las fluctuaciones de la tasa de descambio Q, en contraposición a aquellos contratos que dependen también de algunos activos foráneos. Las opciones sobre divisas, y los contratos forward y futuros proveen un instrumento financiero a través del cual controlar la exposición al riesgo del tipo de cambio. El subyacente que se entregará en una opción sobre la tasa de cambio foráneo es una cantidad fijada de divisa foránea. A lo largo de esta sección asumiremos que el movimiento browniano W es unidimensional, lo que no restará generalidad a lo visto hasta ahora, ayudando a simplificar la exposición conforme a lo presentado en las herramientas para el cambio de numerario.

Tasa Forward de Descambio.

Consideramos primero un contrato forward sobre tasa de cambio foránea, celebrado en el instante t, con fecha de entrega T. El activo se entregará por la parte que asume la posición short en el contrato (el writer) por importe, digamos, de 1 unidad. La parte que asume la posición long (el holder) esta obligada a pagar cierto número de unidades de divisa doméstica, el precio de entrega. Este precio debe hacer que el contrato forward tenga un valor nulo en el instante t, y se denominará precio forward, como de costumbre, en el tiempo t de una unidad de divisa foránea para ser entregada en la fecha de entrega T. Escribiremos $F_Q(t,T)$ para denotar la tasa de descambio forward.

Proposición 3.2 *La tasa de descambio forward $F_Q(t,T)$ en el instante t para una fecha de entrega T esta dada por*

$$F_Q(t,T) = e^{(r^d - r^f)(T-t)}\, Q_t \,,\; \forall t \in [0,T]$$

Demostración 3.2 *Tenemos que $e^{-(r^d-r^f)t}Q_t$ es martingala bajo P^*, medida de martingala doméstica.*

En t, y divisa doméstica, $\pi_t(X_T) = 0 = E_t^{P^*}[e^{-r^d(T-t)}(Q_T - K)]$

Entonces, $e^{-r^d(T-t)}K = E_t^{P^*}[e^{-r^d(T-t)}Q_T] = e^{-r^f(T-t)}E_t^{P^*}[e^{-(r^d-r^f)(T-t)}Q_T] = e^{-r^f(T-t)}Q_t$

Es decir, $K = e^{(r^d-r^f)(T-t)}Q_t$

La relación de la anterior proposición se conoce como "Paridad de tasas de interés" y establece que la prima del contrato forward de descambio de divisas debe ser, en un mercado equilibrado, igual al diferencial de las tasas de interés $r^d - r^f$.

Incluso cuando las correspondientes tasas de interés no son constantes deterministas, sino que siguen procesos estocásticos, todavía se mantiene una relativamente simple versión de la paridad de tasas de interés. Bajo tasas de interés no deterministas, necesitamos introducir los procesos de precios $B^d(t,T)$ y $B^f(t,T)$ referidos a los precios de los bonos de madurez T que son negociados en ambos mercados en el instante t. Entonces la igualdad a que se refiere la paridad señalada puede ser extendida para cubrir el caso de tasas de interés estocásticas. Por medio de argumentos de no arbitraje puede demostrarse que

$$F_Q(t,T) = \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)} Q_t \,,\; \forall t \in [0,T]$$

donde $B^d(t,T)$ y $B^f(t,T)$ deben ser considerados como los factores de descuento doméstico y foráneo, mejor que como precios de los bonos. De hecho, los precios deberían ser expresados en unidades de las correspondientes divisas, mientras que los factores de descuento son simplemente los correspondientes números reales. Finalmente, se sigue de

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = (r^d - r^f)dt + \sigma_Q \cdot dW_t^*$$

que para cualquier fecha fijada T de entrega del subyacente, la dinámica de precios forward bajo la medida de martingala (de la medida doméstica) P^* es

$$\frac{dF_Q(t,T)}{F_Q(t,T)} = \sigma_Q \cdot dW_t^* \,,\; F_Q(T,T) = Q_T$$

Veamos cual es el portafolio recubridor del precio forward de la proposición.

Definimos los siguientes procesos: $S_t = Q_t B_t^f$, y $\widetilde{S}_t = \dfrac{S_t}{B_t^d} = Q_t \dfrac{B_t^f}{B_t^d}$.
Para que el precio inicial del contrato forward sea nulo, el precio strike debe fijarse como $K = E_0^{P^*} Q_T = e^{(r^d - r^f)T} Q_0$.
Como $Q_t = \widetilde{S}_t \dfrac{B_t^f}{B_t^d}$, tenemos

$$V_t(C_T) = E_t^{P^*}[e^{-r^d(T-t)}(Q_T - Q_0 e^{(r^d - r^f)T})]$$

Bajo P^*,

$$\begin{aligned} E_t^{P^*} Q_T &= e^{(r^d - r^f)(T-t)} \frac{B_t^d}{B_t^f} E_t^{P^*} \widetilde{S}_T \\ &= e^{(r^d - r^f)(T-t)} \frac{B_t^d}{B_t^f} \widetilde{S}_t \\ &= e^{(r^d - r^f)(T-t)} Q_t \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} V_t(C_T) &= e^{-r^f(T-t)} Q_t - e^{r^d t - r^f T} Q_0 \\ &= e^{-r^f T} \Big(e^{r^f t} Q_t - e^{r^d t} Q_0 \Big) \end{aligned}$$

El valor descontado en el mercado doméstico del portafolio es

$$\begin{aligned} M_t = e^{-r^d t} V_t &= e^{-r^d t} \Big[e^{-r^f T} \Big(e^{r^f t} Q_t - e^{r^d t} Q_0 \Big) \Big] \\ &= e^{-r^f T} e^{-(r^d - r^f)t} Q_t - e^{-r^f T} Q_0 \\ &= e^{-r^f T} \widetilde{S}_t - e^{-r^f T} Q_0 \\ &= e^{-r^f T} \Big(\widetilde{S} t - Q_0 \Big) \end{aligned}$$

Es decir, el portafolio recubridor es constante, consistiendo en $e^{-r^f T}$ posiciones long en bonos foráneos libres de riesgo (activo de riesgo) y $e^{-r^f T}$ posiciones short en bonos domésticos libres de riesgo (activo libre de riesgo), cuya posición short puede entenderse como pedir prestado dinero a la tasa de interés doméstico libre de riesgo.
Es conveniente aclarar la denominación de ”activo de riesgo” a los bonos foráneos libres de riesgo. Estos son un activo libre de riesgo en el mercado foráneo, pero no lo son en el mercado doméstico: el riesgo lo introduce la variación estocástica de la tasa de cambio.

FOREX Swaps.

Un FX Swap es la compra y venta simultánea de idénticas cantidades de una divisa por otra con dos fechas de valoración diferentes. Dichas fechas de valoración son aquellas en que la entrega de las divisas tiene lugar. En un swap FX, la primera fecha suele ser la fecha spot y la segunda es alguna posterior T. Un swap FX es entonces un intercambio de divisas spot normal, con una intercambio forward, ambos dos ejecutados simultáneamente por la misma cantidad. Los swaps FX suelen denominarse FOREX SWAPS, y no deben ser confundidos con swaps en divisas, que son considerablemente menos líquidos. Un swap de divisas es típicamente

un instrumento a largo plazo en el que los pagos de intereses y el principal en una divisa son descambiados por pagos e intereses y principal en la otra divisa. Los swaps FX son regularmente usados por instituciones para proveerse de divisas en sus balances FX.
Forwards y FX swaps son cotizados típicamente en términos de puntos forward, que son la diferencia entre el precio forward y el precio spot. Utilizando que

$$F_Q(t,T) = e^{(r^d - r^f)(T-t)}\, Q_t \,,\ \forall t \in [0,T]$$

tenemos

$$F_Q(t,T) - Q_t = \left[e^{(r^d - r^f)(T-t)} - 1 \right] Q_t \,,\ \forall t \in [0,T]$$

Cuando las tasas de interés son idénticas, los puntos forward son cero. Cuando el diferencial entre tasas se hace mayor, el valor absoluto de los puntos forward se incrementa.

Valoración de Opciones Sobre Divisas.

Como primer ejemplo de opción sobre divisas, consideramos una opción europea call sobre una tasa de descambio Q como subyacente, cuyo payoff a madurez T y strike K es $C_T^Q = N(Q_T - K)^+$, donde Q_T es el precio spot de la divisa entregable en madurez T, K es el precio de ejercicio o strike en unidades de divisa doméstica, y $N > 0$ es el valor nominal de la opción expresado en unidades de divisa doméstica. No hay pérdida de generalidad en considerar N = 1. En resumen, consideramos una opción a comprar una unidad de divisa foránea a un precio prefijado K para entregar en madurez T, único instante de ejercicio permitido.

Proposición 3.3 *El precio libre de arbitraje, en unidades de divisa doméstica, de una opción call europea sobre divisa foránea, esta dado por la fórmula de valoración neutral al riesgo siguiente:*

$$C_t^Q = e^{-r^d(T-t)} E_t^{P*}\left[(Q_T - K)^+ \right] ,\ \forall t \in [0,T]$$

Dicho precio C_t^Q *esta dado por la expresión*

$$C_t^Q = Q_t e^{-r^f(T-t)} N(d_+) - K e^{-r^d(T-t)} N(d_-)$$

$d_\pm = \dfrac{\log \dfrac{Q_t}{K} + (r^d - r^f \pm \dfrac{1}{2}\sigma_Q^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, *y N(x) la función de distribución de una variable aleatoria normal standard.*

Ya hemos derivado esta fórmula en alguna sección anterior, de alguna forma análoga.
Nos interesa examinar una estrategia de negociación en bonos libres de riesgo domésticos y foráneos, a la que denominaremos estrategia de negociación en divisas en lo sucesivo. Formalmente, por estrategia de negociación en divisas queremos significar un proceso estocástico $\phi_t = (\phi_t^1, \phi_t^2)$. Su interpretación es que $\phi_t^1 \widetilde{B}_t^f$ y $\phi_t^2 B_t^d$ representan los importes de dinero invertidos en el instante t en bonos foráneos y domésticos. Es importante ver que ambos importes están expresados en unidades de divisa doméstica. Una estrategia de negociación en divisas ϕ se dice que es autofinanciada si el proceso de valor del portafolio

$$V_t(\phi) = \phi_t^1 \widetilde{B}_t^f + \phi_t^2 B_t^d \,,\ \forall t \in [0,T]$$

con $\widetilde{B}_t^f = B_t^f Q_t$ y $B_t^d = e^{r^d t}$ satisface

$$dV_t(\phi) = \phi_t^1 d\widetilde{B}_t^f + \phi_t^2 dB_t^d \,,\ \forall t \in [0,T]$$

Para el proceso de valor descontado del portafolio $V_t^*(\phi) = e^{-r^d t}V_t(\phi)$ de una estrategia de negociación de divisas autofinanciada, obtenemos que

$$dV_t^*(\phi) = \phi_t^1 d(e^{-r^d t}\widetilde{B}_t^f) = \phi_t^1 dQ_t^*$$

De otro lado tenemos que la dinámica del proceso Q^* bajo la medida P^* de probabilidad de la martingala doméstica, esta dada por la expresión $\dfrac{dQ_t^*}{Q_t^*} = \sigma_Q \cdot dW_t^*$ Por lo tanto, el valor descontado $V_t^*(\phi)$ de cualquier estrategia de negociación en divisas autofinanciada ϕ es una martingala bajo P^* . Esto justifica la fórmula de valoración neutral al riesgo de la proposición. Si tomamos en cuenta la igualdad $Q_T = \widetilde{B}_T^f e^{-r^f T}$, obtenemos

$$\begin{aligned} C_t^Q &= e^{-r^d(T-t)}E_t^{P^*}(Q_T - K)^+ \\ &= e^{-r^f T}e^{-r^d(T-t)}E_t^{P^*}\Big(\widetilde{B}_T^f - Ke^{r^f T}\Big)^+ \\ &= e^{-r^f T}C\big(\widetilde{B}_t^f, T-t, Ke^{r^f T}, r^d, \sigma_Q\big) \end{aligned}$$

donde C(s,t,k,r,σ) denota el precio de una call europea en el marco standard de Black-Scholes. De forma más explícita, tenemos

$$\begin{aligned} C_t^Q &= e^{-r^f T}\Big(\widetilde{B}_t^f N(d_+) - Ke^{r^f T}e^{-r^d(T-t)}N(d_-)\Big) \\ &= Q_t e^{-r^f(T-t)}N(d_+) - Ke^{-r^d(T-t)}N(d_-) \end{aligned}$$

Finalmente, es inmediato comprobar que el primer componente de la estrategia de negociación en divisas autofinanciada que replica la opción es

$$\phi_t^1 = e^{-r^f T}N(d_+)$$

Por tanto, para recubrir una posición short, el writer de la call sobre la divisa debería invertir en el instante $t \leq T$ el importe, expresado en unidades de divisa foránea,

$$\phi_t^1 B_t^f = e^{-r^f(T-t)}N(d_+)$$

en bonos libres de riesgo en el mercado foráneo (o equivalentemente, en la cuenta del mercado del dinero foráneo). Por el otro lado, debería también invertir el importe, denominado en divisa doméstica,

$$C_t^Q - Q_t e^{-r^f(T-t)}N(d_+)$$

en la cuenta de ahorros doméstica, cuenta del mercado del dinero doméstico.
La analogía respecto de opciones sobre stocks que reparten dividendos contínuamente ya la hicimos en otros lugares.
El payoff en divisa doméstica de un portafolio compuesto por una opción call long y una opción put short es

$$C_T^Q - P_T^Q = (Q_T - K)^+ - (K - Q_T)^+ = Q_T - K,$$

donde se asume que las opciones estan suscritas sobre una unidad de divisa foránea. Por tanto, para cualquier t $\in$ [0,T] tenemos

$$C_T^Q - P_T^Q = e^{-r^f(T-t)}Q_t - e^{-r^d(T-t)}K,$$

que expresa la denominada paridad put-call para las opciones en divisas.
También podemos reescribir la fórmula de enunciado de la siguiente forma:

$$C_t^Q = e^{-r^d(T-t)}\Big(F_t N(\widetilde{d}_+(F_t, T-t)) - KN(\widetilde{d}_-(F_t, T-t)) \Big)$$

donde $F_t = F_Q(t,T)$ y $\widetilde{d}_\pm = \dfrac{\log \dfrac{F}{K} \pm \dfrac{1}{2}\sigma_Q^2(T-t)}{\sigma_Q\sqrt{T-t}}$, $\forall (F,t) \in R^+ \times [0,T)$ Así, es posible reexpresar la estrategia de réplica de la opción en términos de bonos domésticos y contratos forward sobre divisas. Mencionaremos que bajo estas asunciones de tasas de interés doméstico y foráneo deterministas, la distinción entre precios de futuros sobre divisas y forwards sobre divisas no tiene sentido. En la práctica de los mercados, las opciones sobre divisas son frecuentemente recubiertas con contratos forward y futuros en vez de invirtiendo en bonos foráneos libres de riesgo.

3.2.2. Simetrías y Griegas en los mercados FX.

Las simetrías de los mercados FX son una característica que distingue a estos mercados de los demás. Con una tasa de descambio DOM/FOR de x unidades DOM por 1 unidad FOR, existe una tasa de descambio equivalente FOR/DOM de 1/x unidades FOR por 1 unidad DOM, que es justo su recíproco. Cualquier modelo Q para una tasa de descambio en el instante t, debería garantizar que 1/Q esta en el mismo tipo de modelo. El modelo de Black-Scholes satisface este requisito, así como los modelos de volatilidad local, pero no muchos de los modelos de volatilidad estocástica.
La siguiente simetría es que ambas divisas pagan intereses, que podemos asumir son contínuamente pagados. El mercado FX es el único donde esto sucede realmente.
En el mercado DOM/FOR cualquier call en DOM es equivalente a una put en FOR. Cualquier prima abonada en FOR puede ser también abonada en DOM, cualquier recubrimiento delta puede ser especificado en el monto de FOR que deben ser vendidos o, alternativamente, el monto de DOM que deben ser comprados.
Mas aún, si Q^1 es un modelo, por ejemplo, para EUR/USD y Q^2 es un modelo, por ejemplo, para USD/JPY, entonces $Q^3 = Q^1 \cdot Q^2$ es un modelo, por ejemplo, para EUR/JPY. Por tanto, además de los recíprocos, también los productos de dos cantidades del modelo permanecen en la misma clase de modelo.
Considerando el modelo del movimiento geométrico browniano para la descripción de la dinámica de la tasa de descambio DOM/FOR, Q_t,

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = (r^f - r^d)dt + \sigma dW_t$$

tenemos que el payoff de una opción vainilla (una put o una call europea) esta dada por

$$F = [\phi(S_T - K)]^+$$

donde los parámetros del contrato son el strike K, el tiempo de madurez T y el tipo ϕ, que es una variable binaria con valor +1 en el caso de una call y valor -1 en el caso de una put. Ya sabemos que en el instante t, el valor del payoff F, si el precio spot del subyacente es S, viene dado por

$$v(S,K,T,t,\sigma,r^d,r^f,\phi) = \phi e^{-r^d\tau}\Big[fN(\phi d_+) - KN(\phi d_-) \Big]$$

donde

- $\tau = T - t$ es el tiempo que falta para madurez de la opción.
- $f = E_t S_T = S e^{(r^d - r^f)\tau}$ es el precio forward en t del subyacente con fecha de entrega en T.
- $d_\pm = \dfrac{\log \frac{S}{K} + \sigma\,\theta_\pm\,\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \dfrac{\log \frac{f}{K} \pm \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, con $\theta_\pm = \dfrac{r^d - r^f}{\sigma} \pm \dfrac{1}{2}\sigma$, y $N(x) = 1 - N(-x)$.

La relación de paridad Put-Call se expresa, como sabemos, por

$$V_C - V_P = S e^{-r^f\tau} - K e^{-r^d\tau}$$

lo cual es solo una forma más complicada de escribir la ecuación trivial $x = x^+ - x^-$.

Si tomamos el precio strike K igual al precio forward f, vemos que la call y la put tienen el mismo valor:

$$S e^{-r^f\tau} - S e^{(r^d - r^f)\tau} e^{-r^d\tau} = 0 \Rightarrow V_C = V_P$$

El precio forward es el centro de simetría para los valores de las call y las put europeas, pero esto no implica que las deltas sean también simétricas con respecto del precio forward.

La paridad delta Put-Call es

$$\frac{\partial V_C}{\partial S} - \frac{\partial V_P}{\partial S} = e^{-r^f\tau}$$

En particular, la suma del delta de una put y del delta de una call sobre la misma opción no suman exactamente uno, sino únicamente el número positivo $e^{-r^f\tau}$. La suma será la unidad aproximadamente, cuando el tiempo restante para la expiración sea muy pequeño, o bien si la tasa de interés foráneo es muy cercana a 0. Es por esta razón, que los traders prefieren trabajar con deltas forward, ya que son simétricas en el sentido de que una call 25-delta es igual a una put 75-delta.
De una forma más directa, si el precio de una opción es de 1.20 euros, con una delta de +0.50, si el precio del subyacente sube 1 euro, el valor teórico de esa opción pasará a ser 1.70 euros. La práctica es referirse a la delta sin la coma decimal, con lo que estamos hablando de una delta 25, o una 25Δ. Esto es asumir que el valor de la delta puede oscilar entre 0 y 100. La delta de una call at the money es 50. Si esta muy out of the money, valores típicos pueden ser 5, 10,15..., y si esta muy in the money, 90, 95,... hasta 100.
Por ejemplo, la delta de un futuro siempre es 100. Esto refleja de alguna forma la probabilidad que se estima por el mercado de que un contrato C_T va a ser ejecutado, lo que en el caso de las opciones implica que en T estén "in the money", es decir, que $h > 0$, y por tanto rinda beneficios a su tenedor.

Para la Put vendida, el delta es positivo, y negativo si comprada, valiendo 0 o casi para opciones muy out of the money y 100, 95, 90..., caso para las muy in the money.

En general, se entiende la simetría Put-Call por la siguiente relación:

$$V(S, K, T, t, \sigma, r^d, r^f, +1) = \frac{K}{f} V(S, \frac{f^2}{K}, T, t, \sigma, r^d, r^f, -1)$$

La media geométrica del strike de la opción put, $\dfrac{f^2}{K}$ y el strike de la opción call, K, es $\sqrt{\dfrac{f^2}{K}K} = f$, por lo que f puede ser interpretado como un espejo que refleja una call en cierto número de puts. Para las opciones (forward) at the money (K = f) la simetría put-call coinciden con el caso especial de paridad put-call, donde la call y la put tienen el mismo valor.

Las griegas son las derivadas parciales de la función valor con respecto de las variables de la misma o de los parámetros del contrato. Para opciones vainilla algunas de dichas griegas son

- (Spot) Delta. Muestra cuantas unidades de FOR en el Spot debemos negociar para recubrir una opción por cada unidad de FOR nominal.

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \phi e^{-r^f \tau} N(\phi d_+)$$

- Forward Delta. Muestra cuantos contratos forward f(t,T) sobre la divisa, por cada unidad nominal de FOR, deben ser negociadas para recubrir una opción, y es la sensibilidad del precio de la opción respecto del cambio en el valor del contrato forward subyacente de igual strike e igual madurez que la opción, es decir,

$$\Delta_f = \frac{\partial V}{\partial f} = \phi N(\phi d_+) = P\Big[\, \phi\, S_T \leq \phi\, \frac{f^2}{K} \,\Big]$$

  Es igual a la probabilidad de ejercicio neutral al riesgo, o probabilidad at the money de la put simetrica referida hace pocas líneas.

- Gamma. Se trata de la segunda derivada parcial del precio del derivado con respecto del subyacente. Por tanto representa la tasa de cambio de la delta de la opción con respecto de este.

$$\Gamma = \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = e^{-r^f \tau} \frac{n(d_+)}{S\sigma\sqrt{\tau}}\,,\; n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} = n(-t)$$

- Vega. El modelo de Black-Scholes requiere que σ sea constante, por lo que la derivación respecto de esta variable no tendría sentido. Pero el hecho es que existe una volatilidad que no es constante, y la derivada parcial del precio de la opción respecto de la volatilidad del precio del subyacente. Un portafolio con valores altos en términos absolutos de vega es muy sensible a cambios en la volatilidad del subyacente y convierte la cobertura del riesgo en algo azaroso que debe ser tenido en cuenta.

$$\nu = \frac{\partial v}{\partial \sigma} = S e^{-r^f \tau} \sqrt{\tau} n(d_+)$$

- A estas alturas no debe caber duda de que el elenco de griegas puede ser inagotable, aunque podría suceder que su significado financiero no estuviera muy claro. Las anteriores son, empero, de uso común y habitual. Un estudio más detallado de las mencionadas griegas puede verse en el documento que se menciona en la bibliografía.

3.2.3. Contratos Forward Sobre Activos Foráneos.

Es posible relacionar una inversión en un activo foráneo y la correspondiente exposición al riesgo de cambio de muchas formas diferentes y asimismo elegir la correspondiente protección frente a dichos riesgos de muy diversas formas, entre las que se incluyen los contratos forward y de futuros.

Precio Forward de un Activo Foráneo.

Consideramos un acuerdo para comprar un activo foráneo que será entregado en cierta fecha posterior T y que se pagará en determinada divisa que se especifica en el contrato. Es decir, un contrato forward cuyo subyacente es un activo foráneo, pagadero a madurez en la divisa que se especifique.
Deben distinguirse dos casos:

1º.- El precio de entrega esta denominado en divisa foránea, K^f.

2º.- El precio de entrega esta denominado en divisa doméstica, K^d.

En ambos casos, el valor del contrato en la fecha de entrega T será la diferencia entre el precio del activo en T y el strike expresado en divisa foránea. El payoff terminal, entonces, es convertido en unidades de divisa doméstica a la tasa de descambio vigente en T. Por tanto, para la posición long del contrato los payoffs terminales correspondientes son

1º.- $V_T^d(K^f) = Q_T(S_T^f - K^f)$

2º.- $V_T^d(K^d) = Q_T(S_T^f - \dfrac{K^d}{Q_T}) = Q_T S_T^f - K^d = \widetilde{S}_T^f - K^d$

Los correspondientes valores del contrato en el instante t, serán:

1º.- El payoff h del contrato C_T en divisa foránea a madurez será $h = S_T^f - K^f$, por lo que su valor en el instante t, denominado en la divisa foránea será

$$V_t^f(K^f) = e^{-r^f(T-t)} E_t^{\widetilde{P}}(S_T^f - K^f) = S_t^f - e^{-r^f(T-t)} K^f$$

Entonces, cuando esto se expresa en divisa doméstica, tenemos que el valor del contrato en t es

$$V_t^d(K^f) = Q_t(S_t^f - e^{-r^f(T-t)} K^f)\,,\ \forall t \in [0,T]$$

y el precio del contrato forward sobre el activo S^f, expresado en unidades de divisa foránea será

$$F_{S^f}^f(t,T) = e^{r^f(T-t)} S_t^f\ ,\ \forall t \in [0,T]$$

2º.- En este caso, cualquier contrato C_T con pago contingente h en T, denominado en divisa doméstica, verifica que tiene un precio libre de arbitraje dado en cada t, $t \in [0,T]$ por

$$V_t(C_T) = e^{-r^d(T-t)} E_t^{P^*} h$$

lo que conduce a

$$V_t^d(K^d) = e^{-r^d(T-t)} E_t^{P^*}(\widetilde{S}_T^f - K^d)$$

Con el propósito de valorar opciones sobre activos (equity) foráneos, puede ser útil convertir el precio del stock foráneo subyacente S^f a divisa doméstica. Escribimos $\widetilde{S}_t^f = Q_t S_t^f$ para denotar el precio de un stok foráneo S^f expresado en unidades de divisa doméstica. Usando la fórmula de Itô, y la dinámica bajo P^* de la tasa de descambio Q, que es

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = (r^d - r^f)dt + \sigma_Q \cdot dW_t^*$$

se halla que bajo la medida de martingala doméstica P^*, el proceso $\widetilde{S}_t^f$ satisface

$$\frac{d\widetilde{S}_t^f}{\widetilde{S}_t^f} = r^d dt + (\sigma_{S^f} + \sigma_Q) \cdot dW_t^*$$

Entonces, el valor en divisa doméstica del contrato forward de strike K^d denominado en unidades de divisa doméstica es

$$V_t^d(K^d) = Q_t S_t^f - e^{-r^d(T-t)} K^d$$

Esto implica que el precio forward de un activo foráneo en divisa doméstica es

$$F_{S^f}^d(t,T) = e^{r^d(T-t)} \widetilde{S}_t^f \ , \ \forall t \in [0,T]$$

lo cual es, en cierto modo, sorprendente, pues es independiente de la tasa de interés libre de riesgo foránea r^f.

Contratos Forward Quanto

En esta sección se examina un contrato forward tipo quanto en un activo foráneo. Con la mayor generalidad, un activo financiero se denomina producto quanto si esta denominado en una divisa distinta que aquella en la cual es usualmente negociado. Tal contrato es también conocido como "Guaranteed Exchange Rate Forward Contract", (GER Forward Contract dicho abreviadamente), que designa al contrato forward garantizado frente a la tasa de descambio, lo que se materializa en un acuerdo acerca de la tasa de descambio aplicable al mismo. Esto posibilita que un inversor en un activo foráneo sepa de antemano cual será el tipo de cambio aplicable a dicha inversión. Esto puede hacerse entrando en un contrato forward quanto, o entrando en un contrato de opción tipo quanto sobre el activo foráneo. En esta sección vemos el primero de los casos y el segundo lo veremos en otra.
Empezaremos definiendo con precisión lo que se conoce por Contrato Forward Quanto en un activo foráneo S^f. El payoff de un GER Forward Contract en un activo foráneo S^f en una fecha de entrega T es la diferencia entre el precio del activo en el instante T y el precio de entrega denominado en la divisa foránea, digamos K^f . Sin embargo, este payoff se convierte a divisa doméstica a una tasa de descambio prefijada que denominaremos en lo sucesivo por $\widetilde{Q}$. Con mayor formalismo, al denotar por $V_t^d(K^f, \widetilde{Q})$ el valor en divisa doméstica en el instante t del contrato forward quanto, tenemos

$$V_T^d(K^f, \widetilde{Q}) = \widetilde{Q}(S_T^f - K^f)$$

y estamos interesados en conocer el valor de tal contrato en cualquier instante t anterior a la madurez. Reparemos en el hecho de que el payoff terminal de un contrato forward quanto es independiente de las fluctuaciones de la tasa de descambio que se produzcan durante la vida del contrato. Veremos como el valor $V_t^d(K^f, \widetilde{Q})$ depende del coeficiente de volatilidad σ_Q del proceso Q, y en concreto del producto $\sigma_Q \cdot \sigma_{S^f}$.
Por la fórmula de valoración neutral al riesgo, el valor en t del contrato forward quanto, en divisa doméstica, es

$$V_t^d(K^f, \widetilde{Q}) = \widetilde{Q} e^{-r^d(T-t)} \Big((E_t^{P^*} S_T^f) - K^f \Big)$$

Para hallar $E_t^{P^*} S_T^f$, tenemos en cuenta que como $\widetilde{W}_t = W_t^* - \sigma_Q t$,

$$\frac{dS_t^f}{S_t^f} = r^f dt + \sigma_{S^f} \cdot d\widetilde{W}_t = (r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f})dt + \sigma_{S^f} \cdot dW_t^*$$

Por tanto el proceso $\widehat{S}_t = e^{-\delta t} S_t^f$ es una martingala bajo P^*, cuando tomamos $\delta = r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_S^f$. y por consiguiente

$$E_t^{P^*} S_T^f = e^{\delta T} E_t^{P^*} e^{-\delta T} S_T^f = e^{\delta T} E_t^{P^*} \widehat{S}_T = e^{\delta T} \widehat{S}_t = e^{\delta T} e^{-\delta t} S_t^f = e^{\delta(T-t)} S_t^f$$

y por tanto

$$V_t^d(K^f, \widetilde{Q}) = \widetilde{Q}e^{-r^d(T-t)}\Big(\, e^{(r^f-\sigma_Q\cdot\sigma_{S^f})(T-t)}S_t^f - K^f\,\Big)$$

Esto implica que el precio forward en el instante t asociado con el contrato forward quanto de madurez en T, en unidades de divisa foránea, es

$$\widehat{F}^f_{S^f}(t,T) = e^{(r^f-\sigma_Q\cdot\sigma_{S^f})(T-t)}S_t^f = E_t^{P^*}S_T^f$$

Es interesante observar que $\widehat{F}^f_{S^f}(t,T)$ es simplemente la esperanza condicional del precio del activo en la fecha de entrega, tal y como se ve en el instante t desde la perspectiva del inversor doméstico.
Aún más, cuando $\kappa = \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f} \geq 0$, puede ser interpretado como el precio forward de un activo ficticio que abona dividendos de forma continua, con $\kappa = \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f} \geq 0$ jugando el rol de la tasa de dividendos.

3.2.4. Opciones Sobre Activos Foráneos.

En esta sección se tratan opciones sobre activos foráneos, cuyo payoff, en unidades de divisa doméstica, depende no solo del comportamiento futuro de la tasa de descambio, sino además de las fluctuaciones en el precio del subyacente foráneo.

Opciones con Strike en Divisa Foránea

El inversor desea obtener beneficio de un activo foráneo y protegerse frente a pérdidas ocasionadas por la caída de precios del activo, sin importarle la fluctuación de las tasas de descambio. Véase que K^f esta expresado en unidades de divisa foránea. El payoff terminal de una opción call europea sobre un activo foráneo cuyo precio de ejercicio K^f esta expresado en unidades de divisa foránea y de madurez T es

$$C_T^1 = Q_T(S_T^f - K^f)^+$$

Por tanto,

$$C_t^1 = e^{-r^d(T-t)}E_t^{P^*}\Big(\, Q_T\,(S_T^f - K^f)^+\,\Big)$$

Usando la fórmula de Itô, y la dinámica bajo P^* de la tasa de descambio Q, que es

$$dQ_t = Q_t((r^d - r^f)dt + \sigma_Q \cdot dW_t^*)$$

tenemos

$$C_t^1 = e^{-r^d(T-t)}E_t^{P^*}\Big(\, Q_t e^{(r^d-r^f)(T-t)}e^{\sigma_Q\cdot(W_T^*-W_t^*)-\frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2(T-t)}\,(S_T^f - K^f)^+\,\Big)$$

Equivalentemente, usando la medida de martingala foránea, y la siguiente fórmula, que es válida para cualquier variable aleatoria F_T-medible X (siempre que la esperanza condicional este bien definida):

$$E_t^{\widetilde{P}}X_T = E_t^{P^*}\left[X_T\frac{Z_T}{Z_t}\right],\ con \frac{Z_T}{Z_t} = e^{\sigma_Q\cdot(W_T^*-W_t^*)-\frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2(T-t)}$$

se tiene

$$E_t^{\widetilde{P}}X_T = E_t^{P^*}\Big(X_T\, e^{\sigma_Q\cdot(W_T^*-W_t^*)-\frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2(T-t)}\Big)$$

y de aquí,

$$\begin{aligned}
C_t^1 &= e^{-r^d(T-t)} E_t^{P^*}\Big[\, Q_T\,(S_T^f - K)^+ \,\Big] \\
&= e^{-r^d(T-t)} E_t^{P^*}\Big[\, Q_t e^{(r^d-r^f)(T-t)} e^{\sigma_Q\cdot(W_T^*-W_t^*)-\frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2(T-t)}\,(S_T^f - K^f)^+ \,\Big] \\
&= e^{-r^d(T-t)} Q_t E_t^{\widetilde{P}}\Big[\, e^{(r^d-r^f)(T-t)}(S_T^f - K^f)^+ \,\Big] \\
&= e^{-r^f(T-t)} Q_t E_t^{\widetilde{P}}(S_T^f - K^f)^+
\end{aligned}$$

De aquí que $C_t^1 = e^{-r^f(T-t)} Q_t E_t^{\widetilde{P}}(S_T^f - K^f)^+$.

Como $\widetilde{P}$ es la medida neutral al riesgo de la economía foránea, tenemos

$$C_t^1 = Q_t\Big(\, S_t^f N(d_+) - e^{-r^f(T-t)} K^f N(d_-)\,\Big)$$

donde $d_\pm = \dfrac{\log\dfrac{S_t^f}{K^f} + (r^f \pm \dfrac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2)(T-t)}{\|\sigma_{S^f}\|\sqrt{T-t}}$.

De la anterior fórmula se constata que el portafolio recubridor involucra en cada instante t, $N(d_+)$ unidades del activo subyacente. Esta inversión en el activo requiere un préstamo adicional (endeudamiento, o emisión de bonos) de $\beta_t^d = Q_t e^{-r^f(T-t)} K^f N(d_-)$ unidades de divisa doméstica, o equivalentemente, el préstamo (endeudamiento o emisión de bonos) de $\beta_t^f = e^{-r^f(T-t)} K^f N(d_-)$ unidades de divisa foránea.

Opciones con Strike en Divisa Doméstica.

Supongamos que un inversor desea recibir cualquier beneficio del mercado foráneo, pero desea estar seguro de que dichos retornos tienen sentido cuando son trasladados a la divisa doméstica. En dicho caso, podría estar interesado en una opción call sobre un activo foráneo cuyo precio strike estuviera definido en divisa doméstica, cuyo payoff a madurez sería

$$C_T^2 = \big(S_T^f Q_T - K^d\big)^+ = \big(\widetilde{S}_T^f - K^d\big)^+$$

Por la forma del payoff puede ser conveniente estudiar el caso desde la perspectiva de la economía doméstica. Para hallar el precio libre de arbitraje de la opción en t bastará calcular

$$C_t^2 = e^{-r^d(T-t)} E_t^{P^*}\big(\widetilde{S}_T^f - K^d\big)^+$$

Sabemos que el precio del activo expresado en unidades de divisa doméstica $\widetilde{S}_t^f = Q_t S_t^f$ sigue la siguiente dinámica bajo P^*:

$$\frac{d\widetilde{S}_t^f}{\widetilde{S}_t^f} = r^d dt + \big(\sigma_{S^f} + \sigma_Q\big)\cdot dW_t^*$$

Puede argumentarse como en la prueba de la fórmula clásica de Black-Scholes para hallar que el precio de la opción, en unidades de divisa doméstica, es

$$C_t^2 = \widetilde{S}_t^f N(d_+) - e^{-r^d(T-t)} K^d N(d_-)$$

con $d_\pm = \dfrac{\log\dfrac{\widetilde{S}_t^f}{K^d} + (r^d \pm \dfrac{1}{2}\|\sigma_{S^f} + \sigma_Q\|^2)(T-t)}{\|\sigma_{S^f} + \sigma_Q\|\sqrt{T-t}}$

Opciones Quanto.

Supongamos ahora que el inversor desea obtener sus beneficios en una inversión foránea pero eliminando el riesgo de divisa fijando de antemano la tasa a la cual el payoff de su opción será convertido a divisa doméstica. A primera intención, un contrato de este tipo se puede ver como una combinación de una opción sobre un activo foráneo con un contrato forward sobre divisa foránea. Por definición, el payoff a madurez de una call quanto, es decir, de una opción call sobre un activo foráneo con protección frente a la tasa de descambio, esta definido por

$$C_T^3 = \widetilde{Q}\big(S_T^f - K^f\big)^+$$

donde $\widetilde{Q}$ es una tasa de cambio prefijada en el contrato, que será aplicada a madurez sobre el payoff en divisa foránea dado por $\big(S_T^f - K^f\big)^+$.
Véase que $\widetilde{Q}$ esta denominada y representa unidades de divisa doméstica por unidad de divisa foránea y K^f esta expresado en unidades de divisa foránea. Como el payoff de la opción quanto esta expresado en unidades de divisa doméstica, su precio libre de arbitraje es

$$C_t^3 = \widetilde{Q}e^{-r^d(T-t)}E_t^{P^*}\big(S_T^f - K^f\big)^+$$

Proposición 3.4 *El precio libre de arbitraje en t de una opción call quanto europea con madurez T y precio de ejercicio (strike) en divisa foránea K^f, expresado en unidades de divisa doméstica es*

$$C_t^3 = \widetilde{Q}e^{-r^d(T-t)}\Big(S_t^f e^{\delta(T-t)}N(d_+) - K^f N(d_-)\Big)$$

donde $\delta = r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f}$ y

$$d_\pm = \frac{\log\dfrac{S_t^f}{K^f} + (\delta \pm \dfrac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2)(T-t)}{\|\sigma_{S^f}\|\sqrt{T-t}}$$

Demostración 3.3 *A partir de $C_t^3 = \widetilde{Q}e^{-r^d(T-t)}E_t^{P^*}\big(S_T^f - K^f\big)^+$ tenemos que*

$$C_t^3 = \widetilde{Q}e^{(\delta - r^d)(T-t)}E_t^{P^*}\big(e^{-\delta(T-t)}\big(S_T^f - K^f\big)\big)^+$$

La dinámica de S^f bajo P^* es, según sabemos, $dS_t^f = S_t^f\Big(\delta dt + \sigma_{S^f} \cdot dW_t^*\Big)$, esto es

$$S_T = S_t e^{\delta(T-t)}e^{\sigma_{S^f}(W_T^* - W_t^*) - \frac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2(T-t)}$$

y para evaluar la esperanza condicional podemos hacer uso de la fórmula clásica Black-Scholes, luego

$$E_t^{P^*}\big(e^{-\delta(T-t)}\big(S_T^f - K^f\big)\big)^+ = C(S_t^f, T-t, K^f, \delta, \sigma_{S^f})$$

donde la función C(s,t,K,r,σ_{S^f}) se corresponde con la fórmula Black-Scholes, obteniendo la fórmula del enunciado cuando se inserta en $C_t^3 = \widetilde{Q}e^{(\delta - r^d)(T-t)}E_t^{P^*}\big(e^{-\delta(T-t)}\big(S_T^f - K^f\big)\big)^+$:

La opción quanto también puede ser examinada bajo la probabilidad de martingala del mercado foráneo, aunque el método del mercado doméstico era relativamente sencillo. Para ver esta otra alternativa, veamos que, en unidades de divisa doméstica, el precio en t de la opción quanto esta dado por

$$e^{-r^f(T-t)}\widetilde{Q}E_t^{\widetilde{P}}\Big(R_T\,\big(\,S_T^f - K^f\,\big)^+\Big)$$

Considerando que

$$\frac{dR_t}{R_t} = (r^f - r^d)dt - \sigma_Q \cdot d\widetilde{W}_t$$

tenemos

$$R_T = R_0 e^{-\sigma_Q \cdot \widetilde{W}_T + (r^f - r^d - \frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2)T}$$

Y por otro lado,

$$\frac{dS_t^f}{S_t^f} = r^f dt + \sigma_{S^f} \cdot d\widetilde{W}_t\,,\; S_0^f > 0$$

nos daría

$$S_T^f = S_0^f e^{\sigma_{S^f} \cdot \widetilde{W}_T + (r^f - \frac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2)T}$$

Combinando ambas igualdades llegamos a

$$\begin{aligned} R_T S_T^f &= R_0 e^{-\sigma_Q \cdot \widetilde{W}_T + (r^f - r^d - \frac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2)T} \times S_0^f e^{\sigma_{S^f} \cdot \widetilde{W}_T + (r^f - \frac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2)T} \\ &= R_0 S_0^f e^{(r^f - r^d + r^f - \frac{1}{2}(\sigma_Q^2 + \sigma_S^2))T} e^{(\sigma_{S^f} - \sigma_Q)\widetilde{W}_T} \\ &= R_0 S_0^f e^{(r^f - \gamma)T} e^{\sigma \cdot \widetilde{W}_T - \frac{1}{2}\|\sigma\|^2 T} \end{aligned}$$

donde

$$\sigma = \sigma_{S^f} - \sigma_Q\,,\; \gamma = r^d - r^f + \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f}$$

Consideremos el caso t = 0. Para hallar el valor de la opción en unidades de divisa doméstica es suficiente calcular

$$C_0^3 = \widetilde{Q}\, Q_0\, E_0^{\widetilde{P}} \Big(e^{-r^f T} R_T S_T^f - e^{-r^f T} K^f R_T \Big)^+$$

Para ello se puede hacer uso de la fórmula para valorar el precio de una opción de descambiar un activo por otro, haciendo las manipulaciones precisas, o bien del siguiente

LEMA: Sea (ξ, η) una variable aleatoria bi-dimensional no degenerada y con distribución conjunta normal centrada en un espacio de probabilidad (Ω, F, P). Entonces, para sendos a,b reales arbitrarios se tiene

$$E^P \Big(a e^{\xi - \frac{1}{2} Var \xi} - b e^{\eta - \frac{1}{2} Var \eta} \Big)^+ = aN(h) - bN(h - k)$$

donde

$$h = \frac{1}{k} \log \frac{a}{b} + \frac{1}{2} k\,,\; k = \sqrt{Var(\xi - \eta)}$$

Para aplicar dicho lema, tomamos como las constantes

$$a = S_0^f e^{-\gamma T}\,,\; b = K^f e^{-r^d T}$$

y como las variables aleatorias

$$\xi = (\sigma_{S^f} - \sigma_Q) \cdot \widetilde{W}_T\,,\; \eta = -\sigma_Q \cdot \widetilde{W}_T$$

Con estos antecedentes se verifica que $k = \|\sigma_{S^f}\|\sqrt{T}$, y que

$$h = \frac{\log \frac{S_0^f}{K^f} + (\delta + \frac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2)T}{\|\sigma_{S^f}\|\sqrt{T}}\,,\; con\ \delta = r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f}$$

Consecuentemente con el lema expuesto, obtenemos

$$C_0^3 = \widetilde{Q}\left(aN(h) - bN(h-k)\right) = \widetilde{Q}e^{-r^dT}\left(S_0^f e^{\delta T}N(h) - K^f N(h-k)\right)$$

cuya última igualdad se observa que coincide con la postulada en la proposición que demostramos.
Conocido el payoff de una opción put europea, y por analogía, tenemos que:

El precio libre de arbitraje en t de una opción put quanto europea con madurez T y precio de ejercicio (strike) en divisa foránea K^f, expresado en unidades de divisa doméstica es

$$P_t^3 = \widetilde{Q}e^{-r^d(T-t)}\Big(-S_t^f e^{\delta(T-t)}N(-d_+) + K^f N(-d_-)\Big)$$

donde $\delta = r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f}$ y

$$d_{\pm} = \frac{\log \dfrac{S_t^f}{K^f} + (\delta \pm \|\sigma_{S^f}\|^2)(T-t)}{\|\sigma_{S^f}\|\sqrt{T-t}}$$

para la misma tasa de descambio garantizada $\widetilde{Q}$ y mismos parámetros usados en el cálculo de la call.
De aquí, la siguiente versión de la relación de paridad Put-Call, sin más que tener en cuenta que $N(-d) = 1 - N(d)$:

$$C_t^3 - P_t^3 = V_t^d(K^f, \widetilde{Q})$$

donde

$$V_t^d(K^f, \widetilde{Q}) = \widetilde{Q}e^{-r^d(T-t)}\Big(e^{(r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f})(T-t)}S_t^f - K^f\Big)$$

representa el valor en t del correspondiente contrato forward en divisa doméstica sobre la tasa de descambio garantizada, cuyo cálculo se abordó anteriormente en su correspondiente apartado.

Opciones Sobre Divisa Foránea Ligadas a un Activo Foráneo.

Asumamos que un inversor desea mantener un activo foráneo a pesar de que el precio de dicho activo suba o baje. Es decir, es indiferente a la exposición al riesgo de precio del activo. Sin embargo, el inversor desea establecer un límite K sobre la tasa de descambio de su inversión foránea. Una opción call sobre tasa de descuento de la divisa foránea ligada al activo foráneo (equity-linked foreign exchange call), o call Elf-X, usando la abreviación en inglés, tiene por definición un payoff a madurez, en unidades de divisa doméstica, dado por

$$C_T^4 = \left(Q_T - K^d\right)^+ S_T^f$$

Aquí, K es una tasa de descambio strike. K esta expresado en unidades de divisa doméstica por unidad de divisa foránea. Por tanto, la opción descrita es una combinación de opción sobre tasas de descambio y un forward sobre un activo foráneo. En unidades de divisa doméstica, el precio libre de arbitraje de este contrato, con madurez T, es

$$C_t^4 = e^{-r^d(T-t)}E_t^{P^*}\Big[\left(Q_T - K^d\right)^+ S_T^f\Big]$$

Primero valoraremos una tal opción usando la medida de martingala doméstica.

Proposición 3.5 *El precio libre de arbitraje, expresado en unidades de divisa doméstica, de una opción call sobre tasa de descambio de divisa foránea ligada a activo foráneo, con strike sobre la tasa K^d, en divisa doméstica, y fecha de ejercicio T, esta dado por*

$$C_t^4 = S_t^f \Big(Q_t N(d_+) - K^d e^{-\gamma(T-t)} N(d_-) \Big)$$

donde $\gamma = (r^d - r^f + \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f})$ y

$$d_\pm = \frac{\log \dfrac{Q_t}{K^d} + (\gamma \pm \dfrac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2)(T-t)}{\|\sigma_Q\|\sqrt{T-t}}$$

Demostración 3.4 *Será suficiente considerar el caso t = 0. A la vista de que bajo P^* es*

$$\frac{dS_t^f}{S_t^f} = (r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f})dt + \sigma_{S^f} \cdot dW_t^*$$

tenemos

$$S_T^f = S_0 e^{(r^f - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f} - \frac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2)T + \sigma_{S^f} \cdot W_T^*}$$

Definimos una medida de probabilidad Q' en (Ω, F_T) por medio de

$$\frac{dQ^{'}}{dP^*} = e^{\sigma_{S^f} \cdot W_T^* - \dfrac{1}{2}\|\sigma_{S^f}\|^2 T} \ , \ P^* - c.s.$$

Esta claro que el proceso $U_t = W_t^* - \sigma_{S^f} t$ sigue un movimiento browniano bajo Q'. Aún más,

$$C_0^4 = S_0^f e^{(r^f - r^d - \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f})T} E^{Q^{'}} \Big(Q_T - K \Big)^+$$

y la dinámica del proceso Q bajo la medida de probabilidad Q' es

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = \Big(r^d - r^f + \sigma_Q \cdot \sigma_{S^f} \Big) dt + \sigma_Q \cdot dU_t$$

Por tanto, $E^{Q^{'}} \Big(Q_T - K \Big)^+$ se evalúa como en el resto de casos estudiados, obteniéndose

$$C_0^4 = S_0^f C(Q_0, T, K, \gamma, \sigma_Q)$$

Las opciones ELF-X también se pueden valorar desde la perspectiva del inversor foráneo. El precio de la opción en t = 0, expresado en unidades de divisa foránea, esta dado por

$$C_0^4 = e^{-r^f T} E^{\widetilde{P}} \Big(S_T^f - K R_T S_T^f \Big)^+$$

Para derivar la igualdad de la proposición a partir de esta fórmula podemos aplicar el lema del apartado anterior con las constantes

$$a = S_0^f \ , \ b = K R_0 S_0^f e^{-\gamma T}$$

y las variables aleatorias

$$\xi = \sigma_{S^f} \cdot \widetilde{W}_T \ , \ \eta = (\sigma_{S^f} - \sigma_Q) \cdot \widetilde{W}_T$$

La desviación standard de la variable aleatoria normal $(\xi - \eta)$ es $k = \|\sigma_Q\|\sqrt{T}$, con lo que

$$h = \frac{1}{k}\log\frac{a}{b} + \frac{1}{2}k = \frac{-\log(R_0 K) + (\gamma + \dfrac{1}{2}\|\sigma_Q\|^2)T}{\|\sigma_Q\|\sqrt{T}}$$

Esto implica que el precio de la opción, en unidades de divisa doméstica, es

$$C_0^4 = S_0^f \Big(Q_0 N(h) - K e^{-\gamma T} N(h-k) \Big)$$

La derivación de la fórmula anterior para cualquier t es inmediata a estas alturas.

Por S^f podemos tomar no solo el precio de una acción que cotiza en bolsa, sino cualquier activo cuyo proceso de precios se pueda modelar mediante un proceso geométrico browniano. Por ejemplo, para hallar la fórmula de valoración de una opción sobre divisas, basta con tomar por S^f el procesos de precios de un ZCB que abona una unidad de la divisa foránea en T. Bajo estas asunciones, el precio del bono es $B^f(t,T) = e^{-r^f(T-t)}$ de forma que la volatilidad del precio del bono se desvanece, es decir, $\sigma_{S^f} = 0$. Para derivar la correspondiente fórmula a partir de la de la proposición de este apartado, que de el precio libre de arbitraje C_t^Q de una opción call europea sobre una divisa, basta observar que la relación $C_t^4 = C_t^Q e^{-r^f(T-t)}$ se satisface $\forall t \in$ [0,T].

Por último, y referido a las opciones quanto, decir que existen muchas versiones para este tipo de contratos. Puede pensarse en opciones europeas de tipo call o put knock-out, o knock-in, digitales, asiáticas, etc. y asimismo que pueden introducirse elementos que dan cuenta de procesos de interés y de volatilidad más generales que los aquí abordados, aunque estos no han sido objeto de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA:

Musiela y Rutkowsky, "Martingale Methods in Financial Modelling"
Steven Shreve, "Stochastic Calculus for Finance II"
Uwe Wystup, "Quanto Options"
Uwe Wystup, "Foreign Exchange Symmetries"
Martin Haugh, "Foreign Exchange and Quantos"
Mark Davis, "Multi-Asset Options"
Tomas Björk, "Arbitraje Theory in Continuous Time"

Esta propuesta de Trabajo de Fin de Master se somete a la corrección, propuesta de mejoras, y posterior aprobación de la misma por parte del equipo de Profesores responsables de la UNED.

Firmado por Marcos J. Olza, en Basauri (Bizkaia) a 1 de noviembre de 2014.-