Trabajo de Fin de Máster

Matemáticas avanzadas

UNED

Facultad de Ciencias

Sobre algunas topologías vectoriales

Febrero de 2022

Nombre: Pablo Esteban de la Iglesia
Centro asociado: Ramón Areces
Tutor: Dr. Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo

Contenidos

1 Resumen

En este trabajo de final de máster, vamos a realizar un análisis sobre algunas topologías vectoriales

Para empezar este TFM, recordaremos resultados básicos de álgebra lineal, recordando qué son los espacios vectoriales, y algunas de sus propiedades básicas.

Posteriormente, definiremos qué es un espacio vectorial topológico. En este apartado también veremos algunas propiedades básicas de éstos.

Luego, definiremos qué son las seminormas y demostraremos propiedades qué tienen. Luego, trataremos de relacionar las topologías vectoriales localmente convexoas con las topologías inducidas por las seminormas.

Por último haremos un estudio de cómo son las topologías vectoriales en $\mathbb{R}^n$.

Summary

In this Final Master Thesis, we will make an analysis of some vector topologies.

At first, we will remember some basic results of lineal algebra, defining what are vector spaces, and some of their basic properties.

Then, we will define what is a vector topological space. In this section, we will see some of their basic properties.

Later, we will define what is a semi-norm, and we will prove the properties they have. Once it is done, we will try to link the locally convex topologies with the ones induced by semi-norms.

At last, we will make an analysis of how are the vector topologies in $\mathbb{R}^n$.

Nota:

De la bibliografía proceden los apartados 4, 5, 6, y 7, excepto los apartados de ejemplos.

Los ejemplos han sido puestos por el autor del Trabajo de Final de Máster, a quién también se le debe el apartado de topologías vectoriales en $\mathbb{R}^n$.

El apartado de historia y motivación ha sido obtenido de la Wikipedia (`https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space`).

2 Agradecimientos

Antes de empezar este Trabajo de Final de Máster, me gustaría reconocer el trabajo de los profesores de matemáticas que he tenido, y en especial me gustaría recordar al profesor Joaquín Hernández Gómez, tristemente fallecido, que fue quien me hizo admirar las matemáticas. También me gustaría dar las gracias a todos los profesores del proyecto estalmat, que dieron su tiempo altruistamente para enseñarme un universo distinto como éste.

Por otro lado, también me gustaría mencionar a mis compañeros de universidad, que tanto tiempo he disfrutado con ellos, y a su vez ha sido un auténtico placer aprender con gente tan extremadamente brillante.

Por último, sólo me queda agradecer al director de este trabajo, el doctor Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo, quien me ha guiado durante el mismo, siendo una parte vital de éste, además de haber sido de una gran ayuda. Sin él, este trabajo nunca hubiera sido posible.

3 Historia y motivación

Los espacios vectoriales nacieron de la geometría afín cuando se introdujeron las coordenadas al plano o a los espacios tridimensionales. Sobre el año 1636, los matemáticos franceses Descartes y Fermat fundaron la geometría analítica introduciendo ecuaciones de dos variables en el plano. Para hallar soluciones de ciertas ecuaciones sin tener que utilizar coordenadas, Bolzano introdujo en 1804 una serie de operaciones con puntos, líneas y planos, que fueron los predecesores de los vectores. Bellavitis, en 1833 introdujo la nocion de bipunto, que es un segmento orientado donde uno de sus extremos está en el origen, y el otro extremo del segmento es el punto que queremos representar. Años más tarde, los vectores fueron reconsiderados con la representación de números complejos por parte de Hamilton y Argand.

No fue hasta 1888 cuando el matemático italiano Peano introdujo la definición de espacio vectorial. Más adelante, en 1920, el matemático francés Lebesgue introdujo los espacios de funciones. Más tarde fueron definidos formalmente por Banach y por Hilbert.

A estos espacios vectoriales se les dio una estructura topológica. Un espacio vectorial topológico es un espacio vectorial donde las funciones básicas con vectores (suma y producto por escalares) son continuas. Claros ejemplos de estos espacios, como se verá más adelante, son los espacios de Banach, o los espacios de Hilbert.

Como se verá durante este trabajo, los espacios de Banach (espacios vectoriales normados y completos) admiten una topología vectorial inducida por su norma, pero puede darse el caso de topologías vectoriales que no vienen inducidas por ninguna norma.

4 Espacios vectoriales

4.1 Introducción

Antes de empezar este apartado, durante todo este TFM, cualquier espacio vectorial estará definido sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$, con la salvedad de algún ejemplo.

Hay que recordar qué es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto no vacío E que tiene una ley de composición interna llamada suma $(x, y) \to x + y$, y una ley de composición externa llamada producto, que asocia a cada elemento α de $\mathbb{K}$ y a cada elemento x de E un elemento αx de E. Además tienen las operaciones que cumplir las siguientes propiedades: para cada $x, y, z \in E$ y para cada $\alpha\beta \in \mathbb{K}$.

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $x + y = y + x$
3. Existe un elemento neutro de la suma llamado 0, de forma que $x + 0 = x$
4. Todo elemento del espacio vectorial tiene un elemento opuesto, de forma que $x + (-x) = 0$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
8. $1x = x$

Ejemplos de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ pueden ser $\mathbb{R}$ o el conjunto de los polinomios con coeficientes reales , y otro sobre $\mathbb{C}$ es $\mathbb{C}^2$.

Una base de un espacio vectorial E es un subconjunto B de elementos de E si verifica que cada elemento de E puede ser representado por una combinación lineal de los elementos de B y éstos son linealmentes independientes. Puede comprobarse que dos bases cualesquiera de un espacio vectorial E pueden ponerse en biyección, es decir, que tienen el mismo cardinal. Diremos que la dimensión de E es el cardinal de B. En los ejemplos anteriores, la dimensión de $\mathbb{R}$ es 1, de $\mathbb{C}^2$ es 2, y de $\mathbb{R}(X)$ es infinita numerable.

Un subespacio de un espacio vectorial es un subconjunto no vacío de elementos de E que es cerrado para la suma y, además, para cualquier elemento $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x \in B$ para todo $x \in B$.

Por ejemplo,en $\mathbb{R}^2$ el $\{0\}$ es un subespacio vectorial, porque el único elemento que tiene, si se suma 0, o se multiplica por cualquier número, da 0. Otro claro ejemplo es $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. Se puede apreciar que es cerrada para la suma,

$$(x_1, y_1) \in B \Rightarrow x_1 + y_1 = 0$$

$$(x_2, y_2) \in B \Rightarrow x_2 + y_2 = 0$$

Por lo tanto queda:

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in B$$

Acabamos de ver que es cerrada para la suma, ahora veremos que también lo es para el producto,

$$(x_1, y_1) \in B \Rightarrow x_1 + y_1 = 0$$

$$\alpha (x_1 + y_1) = 0 \, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha (x_1 , y_1) \in B$$

Por último, sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación f de E a F es lineal si, y sólo si, para todo $x, \, y \in E,$ para todo$\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Un ejemplo de aplicación lineal es $f(x) = 0 \, \forall x \in E$ siendo E un espacio vectorial cualquiera.

Ya hemos acabado la primera parte de este tema, que es un breve recordatorio de definiciones básicas dados. A partir de ahora, vamos a introducir conceptos más avanzados para espacios vectoriales sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

4.2 Conjuntos en un espacio vectorial

4.2.1 Definición

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un subconjunto $A \subset E$ es convexo si, $\forall x, y \in E, \forall\lambda \in [0,1]$, se tiene que,

$$\lambda x \ + \ (1 \ - \ \lambda)y \ \in \ A$$

Es decir, que A es convexo si dados dos puntos cualesquiera de A, el segmento que los une pertenece a A.

Por ejemplo, un conjunto formado por un solopunto es un conjunto convexo.

4.2.2 Proposición

Sean A un conjunto convexo, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tales que

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p = 1$$

Entonces,

$$\sum_{p=1}^{n} \lambda_p x_p \in A$$

Demostración:

Si $n = 1$ es trivial que se cumple.

Por inducción, supongamos que se cumple para un cierto entero positivo r.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1} \in A$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r+1} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tales que $\sum_{p=1}^{r+1} \lambda_p = 1$. Sea ahora $\beta = \sum_{p=1}^{r} \lambda_p$. Tenemos por lo tanto que $\lambda_{r+1} = 1 - \beta$. Vamos a diferenciar entre $\beta = 0$ y $\beta \neq 0$.

Si $\beta \neq 0$ tenemos que

$$\sum_{p=1}^{r+1} \lambda_p x_p = \sum_{p=1}^{r} \frac{\lambda_p}{\beta} \beta x_p \ + \ \lambda_{r+1} x_{r+1} = \beta \sum_{p=1}^{r} \frac{\lambda_p}{\beta} x_p \ + \ (1 - \beta) x_{r+1}$$

Por la hipótesis de inducción, se cumple para el entero positivo r que

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{\lambda_p}{\beta} x_p = x_\beta \in A$$

Como A es convexo, tenemos que

$$\sum_{p=1}^{r+1} \lambda_p x_p = \beta x_\beta + (1-\beta) x_{r+1} \in A$$

Si $\beta = 0$, como los valores λ_i son no negativos, y $0 = \beta = \sum_{p=1}^{r} \lambda_p$, esto implica que $\lambda_i = 0\ \forall i \leq r$, y por consiguiente $\lambda_{r+1} = 1 - \beta = 1$.

$$\sum_{p=1}^{r+1} \lambda_p x_p = \sum_{p=1}^{r} \lambda_p x_p \ + \ \lambda_{r+1} x_{r+1} = \sum_{p=1}^{r} 0 x_p \ + \ x_{r+1} = x_{r+1} \in A$$

c.q.d.

4.2.3 Proposición

Sean A y B dos conjuntos convexos. Se tiene que A+B es convexo.

Demostración:

Sean $x, y \in A + B$ tales que:

$$x = x_1 + x_2,\ \ x_1 \in A, x_2 \in B$$

$$y = y_1 + y_2,\ \ y_1 \in A, y_2 \in B$$

y $\lambda \in [0, 1]$. Se tiene por lo tanto que

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 \in A$$

$$\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2 \in B$$

Como consecuencia,

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2) =$$

$$= \big(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1\big) \ + \ \big(\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2\big) \in A + B$$

c.q.d.

4.2.4 Proposición

Sea A un conjunto convexo. Entonces αA es convexo.

Demostración:

Si $A = \emptyset$, $\alpha A = \emptyset$ que es convexo.

Si $A \neq \emptyset$. Tenemos que si $\alpha = 0$, $\alpha A = \{0\}$ que es convexo.

En cualquier otro caso, si $\alpha \neq 0$, $A \neq \emptyset$, $\lambda \in [0, 1]$, y $x, y \in \alpha A$. Tenemos por lo tanto que

$$\frac{1}{\alpha}x, \frac{1}{\alpha}y \in A$$

como A es convexo,

$$\lambda\frac{1}{\alpha}x + (1-\lambda)\frac{1}{\alpha}y \in A$$

lo que implica que

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \alpha A$$

c.q.d.

4.2.5 Proposición

Sean A un subconjunto convexo, y α, β números reales no negativos, entonces

$$\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$$

Demostración:

Si $A = \emptyset$, es trivial ver que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A = \emptyset$.

Si $A \neq \emptyset$ y $\alpha + \beta = 0$, como $\alpha, \beta \geq 0$ tenemos que $\alpha = \beta = 0$ y por consiguiente

$$\{0\} = \alpha A = \beta A = (\alpha + \beta)A$$

En cualquier otro caso, $A \neq \emptyset$ y $\alpha + \beta > 0$. Si $x \in \alpha A + \beta A$, existen $y_1, y_2 \in A$ tales que

$$x = \alpha y_1 + \beta y_2$$

Como A es convexo, tenemos que

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}y_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta}y_2 \in A$$

por consiguiente

$$x = \alpha y_1 + \beta y_2 = (\alpha+\beta)\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y_2\right] \in (\alpha+\beta)A$$

lo que implica que

$$\alpha A + \beta A \subseteq (\alpha+\beta)A$$

Por otra parte, si $z \in (\alpha+\beta)A$, tenemos que $\frac{z}{\alpha+\beta} \in A$ por consiguiente,

$$z = \alpha\frac{1}{\alpha+\beta}z + \beta\frac{1}{\alpha+\beta}z \in \alpha A + \beta A$$

lo que implica que

$$(\alpha+\beta)A \subseteq \alpha A + \beta A$$

De las dos inclusiones resulta la igualdad.

c.q.d.

4.2.6 Proposición

Si A es un conjunto convexo y $x \in E$, entonces $x + A$ es convexo.

Demostración:

Sean $y_1, y_2 \in x + A$ y $\lambda \in [0,1]$. Tenemos pues que

$$y_1 - x, y_2 - x \in A$$

Como A es convexo,

$$\lambda(y_1 - x) + (1-\lambda)(y_2 - x) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \ - \ x \in A$$

lo que implica que

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in x + A$$

Así pues $x + A$ es convexo.

c.q.d.

4.2.7 Proposición

Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos convexos de E, se tiene que

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

es convexo.

Demostración:

Sean $u, v \in A_i \ \forall i \in I$ como $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos convexos,

$$\lambda u + (1 - \lambda) v \in A_i \ \forall i \in I, \ \forall \lambda \in [0, 1]$$

lo que implica que

$$\lambda u + (1 - \lambda) v \in \bigcap_{i \in I} A_i, \ \ \forall \lambda \in [0, 1]$$

Por lo tanto $\bigcap_{i \in I} A_i$ es convexo.

c.q.d.

Si A es un subconjunto cualquiera de E, sea $\{A_i : i \in I\}$ la familia de todos los subconjuntos convexos de E que contienen a A. Sabemos que esta familia no es vacía, puesto que E es un conjunto convexo de E que contiene a A. Entonces se le llama la envoltura convexa de A a

$$\langle A \rangle = \bigcap_{i \in I} A_i$$

4.2.8 Definición

Un subconjunto A de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ se dice que es equilibrado si

$$\lambda A \subset A, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } |\lambda| \leq 1$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, una recta que corte al origen es un conjunto equilibrado.

4.2.9 Proposición

Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos equilibrados de E, entonces se tiene que

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

es equilibrado.

Demostración:

Sea $\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leq 1$. Se tiene que para todo $j \in I$,

$$\lambda \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \lambda A_j \subseteq A_j$$

y por consiguiente

$$\lambda \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$$

c.q.d.

Si A es un subconjunto cualquiera de E, sea $\{A_i : i \in I\}$ la familia de todos los subconjuntos equilibrados de E que contienen a A. Sabemos que esta familia no es vacía, puesto que E es un conjunto equilibrado de E que contiene a A. Entonces se le llama la envoltura equilibrada a

$$[A] = \bigcap_{i \in I} A_i$$

4.2.10 Definición

Un conjunto es absolutamente convexo si es equilibrado y convexo.

4.2.11 Definición

Un subconjunto A de E es absorbente si $\forall x \in E$, $\exists\, \epsilon(x) > 0 \ : \lambda x \ \in \ A$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $|\lambda| < \epsilon(x)$.

Un ejemplo de conjunto absorbente es, en $\mathbb{R}^2$, la bola unidad con centro en el origen.

4.2.12 Proposición

Sea A un conjunto equilibrado de E. Si $\forall x \in E$ existe $\alpha(X) > 0$ que cumple que

$$\alpha(x)x \in A$$

entonces A es absorbente

Demostración:

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq \alpha(x)$ se tiene que

$$\frac{|\lambda|}{\alpha(x)} \leq 1$$

por lo tanto,

$$\lambda x = \frac{\lambda}{\alpha(x)} \alpha(x) x \in \frac{\lambda}{\alpha(x)} A \subseteq A$$

por lo que A es absorbente.

c.q.d.

4.2.13 Ejemplos

Sea A un conjunto absorbente de E, y B un conjunto de E tal que $A \subseteq B$. Veremos que B es absorbente

Tenemos que A es absorbente, luego para cada $x \in E$, existe un escalar $\epsilon(x) > 0$ tal que $\lambda x \in A$ si $|\lambda| < \epsilon(x)$, como $A \subseteq B$, tenemos que considerando el mismo escalar $\epsilon(x)$, $\lambda x \in A \subseteq B \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$ si $|\lambda| < \epsilon(x)$, por lo que B es equilibrado.

Sean A y B dos conjuntos absorbentes de E. Ver que $A \cap B$ es absorbente

Tenemos que A es absorbente, luego $\forall x \in E$, existe un escalar $\epsilon_1(x) > 0$ tal que $\lambda x \in A$ si $|\lambda| < \epsilon_1(x)$. Análogamente, haciendo lo mismo para el conjunto B, $\forall x \in E, \exists \epsilon_2(x) > 0$ tal que $\lambda x \in B$ si $|\lambda| < \epsilon_2(x)$. Sea $\epsilon(x) = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$. Por lo tanto, tenemos que $0 < \epsilon(x) \leq \epsilon_1(x)$ y $0 < \epsilon(x) \leq \epsilon_2(x)$. Con lo que tenemos que $\forall x \in E, \lambda x \in A$ si $|\lambda| < \epsilon(x)$ y $\forall x \in E, \lambda x \in B$ si $|\lambda| < \epsilon(x)$, luego, $\forall x \in E, \lambda x \in A \cap B$ si $|\lambda| < \epsilon(x)$, por lo que $A \cap B$ es absorbente.

Conjunto no absorbente, no equilibrado y no convexo

Sea $E = \mathbb{R}$. Sea $A = \{-2\} \cup \{1\}$. Este conjunto no es absorbente porque $0 \notin A$. Tampoco es equilibrado porque $1 \in A$, pero $-1 \notin A$. Por último, tampoco en convexo, porque el intervalo $(-2, 1) \nsubseteq A$.

Conjunto no absorbente, no equilibrado y convexo

Sea $E = \mathbb{R}$. Sea $A = \{1\}$. Este conjunto no es absorbente porque $0 \notin A$. Tampoco es equilibrado porque $1 \in A$, pero $-1 \notin A$. Por último, sí es convexo, porque solamente es un punto, luego $\forall \alpha \in [0, 1], \alpha 1 + (1 - \alpha) 1 = 1 \in A$.

Conjunto no absorbente, equilibrado y no convexo

Sea $E = \mathbb{R}^2$. Sea $A = \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$. No es absorbente, porque $(1,1) \in E$, pero $\nexists \alpha \in \mathbb{R}^+,\ x \in A:\ \alpha x = (\alpha, \alpha) \in A$, porque A es el conjunto de los elementos de $\mathbb{R}^2$ tales que una de sus componentes es nula o ambas son nulas, pero en αx, ninguna componente es nula. Por lo tanto, A no es absorbente. Por otra parte, el conjunto $\{x = 0\} = \{(0, \beta) :\ \beta \in \mathbb{R}\}$ es equilibrado, porque $\alpha(0, \beta) = (0, \alpha\beta) \in \{(0, \beta) :\ \beta \in \mathbb{R}\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Análogamente, $\{y = 0\}$ también es equilibrado, lo que implica que A es equilibrado por ser la unión de dos conjuntos equilibrados. Por último, no es convexo porque $(0, 2),\ (2, 0) \in A$, $\frac{1}{2} \in [0, 1]$ pero $\frac{1}{2}(2, 0)\ +\ \left(1 - \frac{1}{2}\right)(2, 0) = (1, 1) \notin A$.

Conjunto no absorbente, equilibrado y convexo

Sea $E = \mathbb{R}^2$. Sea $A = \{x = 0\}$. Como hemos visto en el ejemplo anterior, $A = \{(0, \beta) :\ \beta \in \mathbb{R}\}$, por lo que $\alpha(0, \beta) = (0, \alpha\beta) \in \{(0, \beta) :\ \beta \in \mathbb{R}\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Esto implica que si $\alpha > 0$ el punto $\alpha(1, 1) = (\alpha, \alpha) \notin A$, como consecuencia A no es absorbente. Por otra parte, ya hemos visto en el ejemplo anterior que es equilibrado este conjunto. Por último,

$$\forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda(0, \beta_1)\ +\ (1 - \lambda)(0, \beta_2) = \big(0, \lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2\big) \in A$$

luego A es convexo.

Conjunto absorbente, no equilibrado y no convexo

Sea $E = \mathbb{R}$. Sea $A = (-1, 1) \cup \{2\}$. Como el conjunto $(-1, 1)$ es absorbente, A es absorbente por ser unión de dos conjuntos donde uno es absorbente. Por otro lado, no es equilibrado, porque $2 \in A$, pero $-2 \notin A$. Por último, no es conexo, porque el punto $\frac{3}{2} = \frac{1}{4}0\ +\ \frac{3}{4}2 \notin A$.

Conjunto absorbente, no equilibrado y convexo

Sea $E = \mathbb{R}$. Sea $A = (-1, 1]$. Evidentemente A es absorbente. Por otro lado, no es equilibrado, porque $1 \in A$, pero $-1 \notin A$. Por último, el conjunto A es convexo evidentemente.

Conjunto absorbente, equilibrado y no convexo

Sea $E = \mathbb{R}^2$, y sea $r \in \mathbb{R}^+$. Definiremos como B_r el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que distan del origen una distancia inferior a r con la distancia usual.

Sea $A = B_1 \cup \{x = 0\}$. Evidentemente B_1 es absorbente, por lo tanto, A es absorbente por ser la unión de dos conjuntos donde uno de ellos es absorbente.

Por otra parte, A es equilibrado por ser la unión de dos conjunto equilibrados. Por último, no es convexo, porque $(0,2), \left(\frac{1}{2},0\right) \in A$, pero por otra parte, $\frac{1}{2}(0,2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2},0\right) = \left(\frac{1}{4},1\right) \notin A$.

Conjunto absorbente, equilibrado y convexo

El conjunto B_1 definido en el ejemplo anterior es un claro ejemplo de un conjunto absorbente, equilibrado y convexo.

Conjunto equilibrado y absorbente cuyo interior en la topología usual no contiene al 0

Sea $E = \mathbb{R}^2$. Sea $\overline{B_{1,(-1,0)}}$ la bola cerrada de radio 1, y centro en $(-1,0)$, y $\overline{B_{1,(1,0)}}$ la bola cerrada de radio 1, y centro en $(1,0)$. Sea $A = \{x = 0\} \cup \overline{B_{1,(-1,0)}} \cup \overline{B_{1,(1,0)}}$. Vamos a ver que $0 \notin \mathring{A}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n = \left(\frac{1}{n}, \sqrt{1 - \frac{n^2-1}{2n^2}}\right)$. Vemos que $x_n \notin A \ \forall n \in \mathbb{N}$. Pero por otro lado, $\lim_{n\to\infty} x_n = (0,0)$, lo que implica que $0 \notin \mathring{A}$. Por último, el conjunto es absorbente, porque para todo $x \in E$, si x es de la forma $(0,\lambda)$, $\forall \epsilon > 0, \ \epsilon(0,\lambda) = (0,\epsilon\lambda) \in A$ porque la coordenada $x = 0$. Por otro lado, si la primera coordenada no es 0, entonces tenemos que el segmento que va de 0 a x, corta a $D_{1,(-1,0)}$ o a $D_{1,(1,0)}$ en un punto $p \neq 0$. Como el segmento que une 0 y p está contenido en A, entonces el conjunto es absorbente.

Es decir, este conjunto es absorbente, es equilibrado, pero no es convexo.

5 Espacios vectoriales topológicos

5.1 Topologías compatibles con un espacio vectorial y propiedades básicas

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de partes de E que cumple:

1. Si $V \in \mathcal{B}$, entonces V es equilibrado y absorbente.
2. Si $V_1, V_1 \in \mathcal{B}$, $\exists\, V_3 \in \mathcal{B} : V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
3. Si $V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B} : W + W \subset V$.

A partir de $\mathcal{B}$, se va a definir una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de E de la siguiente forma: el conjunto $A \in \mathcal{U} \iff \forall x \in A\, \exists V \in \mathcal{B}$ que depende de x de manera que

$$x + V \subset A$$

Además de lo mencionado anteriormente, $\emptyset \in \mathcal{U}$

5.1.1 Teorema

La familia $\mathcal{U}$ es una topología sobre E.

Demostración:

Como hemos visto en el enunciado, $\emptyset \in \mathcal{U}$. Ahora veremos que $E \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, tenemos que $\exists V \in \mathcal{B}$ y además $V \neq \emptyset$. Por otra parte,

$$\forall x \in E, x + V \subset E \Rightarrow E \in \mathcal{U}$$

Sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \mathcal{U}\; \forall i \in I$ y $x \in A$, lo que implica que $\exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$. Como $A_{i_0} \in \mathcal{U}$, tenemos que

$$\exists V \in \mathcal{B} : x + V \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i = A$$

Por último, si $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$, y $x \in V_1 \cap V_2$, hallamos

$$V_1, V_2 \in \mathcal{B} : x + V_1 \in A_1, x + V_2 \in A_2$$

Determinamos ahora un elemento $V_3 \in \mathcal{B} : V_3 \in V_1 \cap V_2$. Por lo tanto, $x + V_3 \subset A_1$ y $x + V_3 \subset A_2$. Esto implica que $x + V_3 \in A_1 \cap A_2$. Así pues $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$.

Por lo tanto se cumplen las propiedades de topología, es decir, $\mathcal{U}$ es una topología. Se dice que la topología $\mathcal{U}$ está definida por la familia $\mathcal{B}$.

c.q.d.

Se dice que la familia $\mathcal{U}$ está definida por $\mathcal{B}$.

Cualquier topología definida por una familia no vacía $\mathcal{B}$ de partes de E, con las propiedades definidas anteriormente, se dice que es compatible con la estructura vectorial de E. E con la topología $\mathcal{U}$, se la llama espacio vectorial topológico.

Veremos más adelante que una topología es vectorial si, y sólo si, la suma $(+ : E \times E \to E)$ y el producto $(\times : \mathbb{R} \times E \to E)$ son continuas.

5.2 Propiedades elementales de los espacios vectoriales topológicos

Sea E un espacio vectorial sobre un $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos que cumple las 3 propiedades mencionadas en el apartado 5.1 y $\mathcal{U}$, la topología sobre E definida por $\mathcal{B}$.

5.2.1 Proposición

Si $x_0 \in E$ y $A \in E[\mathcal{U}]$, entonces $x_0 + A$ es un abierto de $E[\mathcal{U}]$.

Demostración:

Sea $x \in x_0 + A$, entonces

$$x - x_0 \in A$$

Como A es abierto,

$$\exists V \in \mathcal{B} : x - x_0 + V \subset A \Rightarrow x + V \in x_0 + A$$

c.q.d.

5.2.2 Proposición

Si $x_0 \in E$ y A es un subconjunto cerrado de $E[\mathcal{U}]$, entonces $x_0 + A$ es un cerrado de $E[\mathcal{U}]$.

Demostración:

Si $M \subset E$, ponemos M' como su complementario. Si A es cerrado, A' es abierto, por lo que se comprueba trivialmente que

$$x_0 + A' = (x_0 + A)'$$

Por la proposición anterior, $x_0 + A'$ es abierto. Por lo tanto $X_0 + A$ es cerrado.
c.q.d.

5.2.3 Proposición

Si $A \subset E[\mathcal{U}]$, $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{B} : \ x + V \subset A$

Demostración:

$x \in \mathring{A} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B} : \ x + V \subset \mathring{A} \subset A$

Sea $M \subset E$ caracterizado por $x \in M \Leftrightarrow \exists V_x \in \mathcal{B} : \ x + V_x \subset A$

Como $0 \in V$, se tiene que $x \in A$ y se tiene que:

$$\mathring{A} \subset M \subset A$$

Ahora quedaría ver que M es abierto. Sea $z \in M$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que

$$z + U \subset A$$

Sea $W \in \mathcal{B} : \ W + W \subset U$. Si $x \in z + W$, resulta que

$$x + W \subset z + W + W \subset z + U \subset A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + W \subset M$$

Así pues M es abierto, de lo que se deduce que

$$\mathring{A} = M$$

c.q.d.

5.2.4 Proposición

Dado $x \in E[\mathcal{U}]$,

$$\{x + V : \ V \in \mathcal{B}\}$$

es una base de entornos de x.

Demostración:

$$0+V=V\subseteq V\Rightarrow 0\in\overset{\circ}{V}$$

Por lo tanto se deduce que $x\in x+\overset{\circ}{V}$ que es un abierto, lo que implica que $x+V$ es un entorno de x. Por otra parte, si A es un entorno de x, se tiene que

$$x\in\overset{\circ}{A}$$

por lo tanto, existe $U\in\mathcal{B}$ tal que

$$x+U\subset\overset{\circ}{A}\subset A$$

c.q.d.

5.2.5 Proposición

Si $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$ y $V\in\mathcal{B}$, se tiene que λV es un entorno del origen en $E[\mathcal{U}]$.

Demostración:

Dado un entero no negativo n, vamos a ver que $\exists W_n\in\mathcal{B}$ tal que:

$$2^nW_n\subset V$$

Para ello, si $n=0$, ponemos $W_0=V$. Si $n>0$, procederemos por inducción. Supondremos cierto para un cierto $r\geq 0$, entonces

$$2^rW_r\subset V$$

hallamos W_{r+1} en $\mathcal{B}$ de forma que

$$W_{r+1}+W_{r+1}\subset W_r$$

entonces tenemos que

$$2^{r+1}W_{r+1}=2^r2W_{r+1}\subset 2^r(W_{r+1}+W_{r+1})\subset 2^rW_r\subset V$$

por consiguiente la propiedad es cierta.

Ahora determinamos un entero positivo n de forma que cumple que

$$\frac{1}{2^n|\lambda|}\leq 1$$

Para este n, según acabamos de ver, existe $W_n \in \mathcal{B}$ tal que $2^n W_n \subset V$. Como W_n es equilibrado

$$\frac{1}{2^n|\lambda|}W_n \subset W_n \subset 2^{-n}V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_n \subset |\lambda|V = \lambda V$$

por lo tanto, λV es un entorno del origen en $E[\mathcal{U}]$.

c.q.d.

5.2.6 Proposición

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ y $A \in E[\mathcal{U}]$ un abierto. Entonces λA también es abierto.

Demostración:

Si $x \in \lambda A$ y $\lambda \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\lambda}x \in A$$

Por lo tanto $\exists V \in \mathcal{B}$ tal que

$$\frac{1}{\lambda}x + V \subset A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \lambda V \subset \lambda A$$

Como λA es un entorno de x para cada $x \in \lambda A$, λA es abierto.

c.q.d.

5.2.7 Proposición

Sean $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ y $A \in E[\mathcal{U}]$ un cerrado. Entonces λA también es cerrado.

Demostración:

A cerrado, lo que implica que A' es abierto. Teniendo en cuenta la proposición anterior, $\lambda A' = (\lambda A)'$ es abierto o, lo que es lo mismo, λA es cerrado.

c.q.d.

5.2.8 Proposición

El espacio $E[\mathcal{U}]$ es de Hausdorff si, y sólo si

$$\cap\{V:\ V\in\mathcal{B}\}=\{0\}$$

Demostración:

Como $\mathcal{B}$ es una base de entornos del origen, si $E[\mathcal{U}]$ es de Hausdorff y $x\neq 0$ es un vector cualquiera de E, $\exists V\in\mathcal{B}:\ x\notin V$ y como consecuencia

$$\cap\{V:\ V\in\mathcal{B}\}=\{0\}$$

Recíprocamente, supongamos que

$$\cap\{V:\ V\in\mathcal{B}\}=\{0\}$$

Sean $x,y\in E:\ x\neq y$, lo que implica que $x-y\neq 0$, luego $\exists W\in\mathcal{B}$ que cumple que

$$x-y\notin W$$

Tomamos un $U\in\mathbb{B}:\ U+U\subset W$, vamos a ver que

$$(x+U)\cap(y+U)=\emptyset$$

Se puede comprobar que si no fuera así, existiría un $z\in(x+U)\cap(y+U)$, o lo que es lo mismo,

$$z\in x+U, z\in y+U$$

como U es equilibrado, podemos ponerlo como

$$x-z\in U, z-y\in U\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y=(x-z)+(z-y)\in U+U\subset W$$

lo que contradiría la hipótesis, por lo tanto $E[\mathcal{U}]$ es de Hausdorff.

c.q.d.

5.2.9 Proposición

Si A es un conjunto equilibrado de $E[\mathcal{T}]$, entonces $\overline{A}$ también es equilibrado (siendo $\overline{A}$ la adherencia en la topología $\mathcal{T}$).

Demostración:

Si $A = \emptyset$, entonces $\emptyset = A = \overline{A}$ que es equilibrado.

Si $A \neq \emptyset$, sean $x \in \overline{A}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un elemento tal que $|\lambda| \leq 1$. Si $\lambda = 0$, al ser A equilibrado $0 \in A$, por consiguiente tenemos que $\lambda x = 0 \in A \subset \overline{A}$. Si $\lambda \neq 0$, tenemos que si V es un entorno cualquiera del origen, entonces $\lambda^{-1}V$ también lo es, y por consiguiente

$$(x + \lambda^{-1}V) \cap A \neq \emptyset$$

de donde podemos deducir que

$$\emptyset \neq (\lambda x + V) \cap \lambda A \subset (\lambda x + V) \cap A$$

para cualquier entorno del origen V, lo que implica que

$$\lambda x \in \overline{A}$$

lo que implica que $\overline{A}$ es equilibrado.

c.q.d.

5.2.10 Proposición

Si A es un conjunto convexo de $E[\mathcal{T}]$, entonces $\overline{A}$ también es convexo (siendo $\overline{A}$ la adherencia en la topología $\mathcal{T}$).

Demostración:

Si $A = \emptyset$, entonces $\emptyset = A = \overline{A}$ que es convexo.

Si $A \neq \emptyset$, sean $x, y \in \overline{A}$ y $\alpha \in [0, 1]$.

Si V es un entorno del origen en $E[\mathcal{T}]$, hallamos otro entorno equilibrado del origen W de forma que $W + W \subset V$. Entonces se tiene que αW, $(1-\alpha)W \subset W$. Como $x, y \in \overline{A}$, se tiene que

$$(x + W) \cap A \neq \emptyset\,, (y + W) \cap A \neq \emptyset$$

por consiguiente

$$(\alpha x + \alpha W) \cap \alpha A \neq \emptyset\,, ((1-\alpha)y + (1-\alpha)W) \cap (1-\alpha)A \neq \emptyset$$

Sean

$$z_1 \in \alpha x + \alpha W,\ z_1 \in \alpha A$$

$$z_2 \in (1-\alpha)x + (1-\alpha)W,\ z_2 \in (1-\alpha)A$$

Entonces:

$$z_1+z_2 \in \alpha x+(1-\alpha)y+\alpha W+(1-\alpha)W \subset z_1+z_2 \subset \alpha x+(1-\alpha)y+W+W \subset \alpha x+(1-\alpha)y+V$$

$$z_1 + z_2 \in A + (1-\alpha)A = (\alpha + 1 - \alpha)A = A$$

de donde se deduce que

$$(\alpha x + (1-\alpha)y + V) \cap A \neq \emptyset$$

lo que implica que

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in \overline{A}$$

y por consiguiente, $\overline{A}$ es convexo.

c.q.d.

5.2.11 Proposición

En cualquier topología vectorial, cualquier entorno del origen es un conjunto absorbente

Demostración:

Sea $\mathcal{T}$ una topología vectorial de un espacio vectorial E. Sabemos entonces que tiene que existir un sistema fundamental de entornos del origen absorbentes y equilibrados $\mathcal{B}$ que cumple las propiedades del apartado 5.1, de forma que si un conjunto $U \subset E$ es un abierto de $E[\mathcal{T}]$, entonces para todo punto $p \in U$ existe un elemento $V \in \mathcal{B}$ de forma que $p + V \subset U$.

Sea U un conjunto abierto de $E[\mathcal{T}]$ tal que $0 \in U$. Entonces sabemos que existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que $0+V = V \subset U$, lo que implica que $U = U \cap V$. Como V es absorbente, entonces U también lo es por ser la unión de dos conjuntos donde uno de ellos es absorbente.

5.2.12 Proposición

Todo espacio vectorial topológico $E[\mathcal{T}]$ tiene un sistema fundamental de entornos del origen formado por conjuntos cerrados.

Demostración:

Sean $\mathcal{B}$ una familia formada por los conjuntos abiertos y equilibrados de $E[\mathcal{T}]$. Por la proposición 5.2.11, como los conjuntos son equilibrados, contienen al 0, luego también son absorbentes.

Vamos a considerar ahora la familia $\mathcal{M} = \{\overline{V}\}_{V\in\mathcal{B}}$, que es la familia formada por la adherencia de todos los conjuntos de la familia $\mathcal{B}$. Es trivial comprobar que los elementos de $\mathcal{M}$ son cerrados. Vamos a ver ahora que cumplen las condiciones del apartado 5.1:

1. Los elementos de $\mathcal{M}$ son equilibrados y absorbentes. Cualquier elemento de $\mathcal{M}$ es de la forma $\overline{V}$ donde $V \in \mathcal{B}$. V es equilibrado, luego por la proposición 5.2.9, $\overline{V}$ también lo es. Por otro lado, V es absorbente, como $V \subset \overline{V} \Rightarrow \overline{V} = \overline{V} \cup V$, que es absorbente por ser la unión de dos conjuntos donde uno es absorbente. Luego $\overline{V}$ es equilibrado y absorbente.

2. Para cualquier $A \in \mathcal{M}$ existe un elemento $B \in \mathcal{M}$ tal que $B + B \subset A$. Sean $V \in \mathcal{B}$ un conjunto cualquiera y $W, U \in \mathcal{B}$ tales que $U + U \subset W$ y $W + W \subset U$. Como U es un abierto, $\overline{U} \subset U + U$, lo que implica:
$$\overline{U} + \overline{U} \subset U + U + U + U \subset W + W \subset V \subset \overline{V}$$

3. Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}$ existe un elemento $C \in \mathcal{M}$ tal que $C \subset A \cap B$. Sean $V, W \in \mathcal{B}$ dos elementos cualesquiera, entonces sabemos que existe un elemento $Z \in \mathcal{B}$ tal que $Z \in V \cap W$. Vamos a ver que $\overline{Z} \subset \overline{V} \cap \overline{W}$. Por definición, $\overline{Z}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a Z. Como $Z \subset V$, la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a Z va a estar contenida en la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a V, luego $\overline{Z} \subset \overline{V}$, análogamente también tenemos que $\overline{Z} \subset \overline{W}$, lo que implica
$$\overline{Z} \subset \overline{V} \cap \overline{W}$$

Entonces la familia $\mathcal{M}$ genera una topología vectorial. Ahora queda por ver que la familia $\mathcal{M}$ y la familia $\mathcal{B}$ generan la misma topología. Sería suficiente con demostrar que cualquier conjunto de $\mathcal{M}$ contiene a uno de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Sea $A \in \mathcal{M}$, entonces A es de la forma $\overline{V}$, donde $V \in \mathcal{B}$, como $V \subset \overline{V}$, cualquier elemento de $\mathcal{M}$ contiene a uno de $\mathcal{B}$.

Recíprocamente, sea $V \in \mathcal{B}$ y $W \in \mathcal{B}$ un elemento tal que $W + W \subset V$. Como los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos abiertos, se tiene que $\overline{W} \subset W + W \subset V$, como $\overline{W} \in \mathcal{M}$, tenemos que cualquier elemento de $\mathcal{B}$ contiene a uno de $\mathcal{M}$.

c.q.d.

5.2.13 Proposición

Si A es un conjunto abierto de E, y $0 \in A$, la envoltura equilibrada de A es abierta.

Demostración:

Sabemos que

$$[A] = \cup\{\lambda A : \ \lambda \in \mathbb{R}, \ |\lambda| \leq 1\}$$

Como $0 \in A$, se tiene que

$$[A] = \cup\{\lambda A : \ \lambda \in \mathbb{R}, \ 0 < |\lambda| \leq 1\}$$

Como para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^+$, λA es abierto, se tiene que $[A]$ también lo es.

c.q.d.

5.2.14 Proposición

Si A es un conjunto equilibrado de E, y $0 \in \mathring{A}$, entonces $\mathring{A}$ es equilibrado.

Demostración:

Como $0 \in \mathring{A}$, la envoltura equilibrada de $\mathring{A}$ será abierta. Por otro lado,

$$A \subset [\mathring{A}] \subset A$$

por lo tanto,

$$\mathring{A} = [\mathring{A}]$$

c.q.d.

5.3 Una caracterización de un espacio vectorial topológico

Sean E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos de E que cumple las propiedades del apartado 5.1, y $\mathcal{U}$ la topología definida por $\mathcal{B}$.

5.3.1 Proposición

La aplicación suma $+ : E[\mathcal{U}] \times E[\mathcal{U}] \to E[\mathcal{U}]$ definida por:

$$(x, y) \to x + y, \ \forall x, y \in E$$

es continua.

Demostración:

Sean P, Q dos conjuntos cualesquiera, definimos:

$$P \times Q = \{(x, y) : \ x \in P, y \in Q\}$$

Sea $(x_0, y_0) \in E \times E$. Dado un entorno B de $x_0 + y_0$ en $E[\mathcal{U}]$, hallamos 2 elementos $W, V \in \mathcal{B}$ que cumplen

$$W + W \subset V, x_0 + y_0 + V \subset B$$

Entonces $(x_0 + W) \times (y_0 + W)$ es un entorno de (x_0, y_0) en $E[\mathcal{U}] \times E[\mathcal{U}]$ y si

$$(x, y) \in (x_0 + W, y_0 + W)$$

se tiene que

$$x + y \in x_0 + W + y_0 + W \subset x_0 + y_0 + V \subset B$$

c.q.d.

5.3.2 Proposición

La aplicación producto $\times : \mathbb{R} \times E[\mathcal{U}] \to E[\mathcal{U}]$ definida por

$$(\lambda, x) \to \lambda x, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in E$$

es continua.

Demostración:

Sea (λ_0, x_0) un punto de $\mathbb{R} \times E$ se tiene que:

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0) \tag{1}$$

Sea $B \in E[\mathcal{U}]$ un entorno de $\lambda_0 x_0$. Existen $U, V, W \in \mathcal{B}$ de forma que

$$\lambda_0 x_0 + U \subset B, V + V \subset U, W + W \subset V$$

Si $\lambda_0 \neq 0$, cogemos $Z \subset \mathcal{B} : \ \ Z \subset \lambda_0^{-1} W \cap W$. Si $\lambda_0 = 0$, ponemos $Z = W$.

Por otro lado, como Z es absorbente, $\exists \alpha$ con $0 < \alpha < 1$ tal que

$$(\lambda - \lambda_0)x_0 \in Z \text{ si } |\lambda - \lambda_0| < \alpha$$

Definimos el conjunto T como

$$\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda - \lambda_0| < \alpha\}$$

se tiene que $T \times (x_0 + Z)$ es un entorno de (λ_0, x_0) en $\mathbb{R} \times E[\mathcal{U}]$. Si

$$(\lambda, x) \in T \times (x_0 + Z)$$

o lo que es lo mismo,

$$|\lambda - \lambda_0| < \alpha, \;\; x - x_0 \in Z$$

se obtiene que

$$(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) \in (\lambda - \lambda_0)Z \subset Z$$
$$(\lambda - \lambda_0)x_0 \in Z$$
$$\lambda_0(x - x_0) \in \lambda_0 Z \subset W$$

por consiguiente, y de acuerdo con (1), se obtiene

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in Z + Z + W \subset W + W + W \subset W + V \subset V + V \subset U$$

de aquí que

$$\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U \subset B$$

c.q.d.

5.3.3 Teorema

Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre E. Se tiene que $E[\mathcal{T}]$ es un espacio vectorial topológico si, y sólo si, las aplicaciones de $E[\mathcal{T}] \times E[\mathcal{T}]$ y de $\mathbb{R} \times E[\mathcal{T}]$ en $E[\mathcal{T}]$ definidas respectivamente por:

$$\left.\begin{array}{l} f : (x, y) \to x + y \\ g : (\lambda, x) \to \lambda x \end{array}\right\} x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$$

son continuas.

Demostración:

Si $E[\mathcal{T}]$ son espacios vectoriales topológicos, entonces las aplicaciones mencionadas anteriormente son continuas, según acabamos de ver.

Recíprocamente, si las aplicaciones anteriormente citadas son continuas, vamos a ver que eso implica que $E[\mathcal{T}]$ tiene que ser un espacio vectorial topológico. Si fijamos un $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \neq 0$, se deduce de la continuidad de g que las homotecias que

$$\left.\begin{array}{l} H_\lambda : x \to \lambda x \\ H_{\lambda^{-1}} : x \to \lambda^{-1} x \end{array}\right\} x \in E$$

son $\mathcal{T}$-continuas. Como la aplicación $H_{\lambda^{-1}}$ es la inversa de la aplicación H_λ, y es una homotecia sobre E de razón distinta de 0, es un homeomorfismo de $E[\mathcal{T}]$ sobre $E[\mathcal{T}]$. Entonces, si V es un entorno del origen de $E[\mathcal{T}]$, λV también es un entorno del origen de $E[\mathcal{T}]$.

De la continuidad, puesto que $0 \times 0 = 0$, se deduce que dado un entorno del origen de V en $E[\mathcal{T}]$, existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y un $\mathcal{T}$-entorno del origen W que cumple

$$\lambda x \in V \text{ si } \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \alpha,\ \ x \in W$$

es decir, si $|\lambda| \leq \alpha$,

$$\lambda W \subset V$$

lo que implica que

$$U = \cup\{\lambda W :\ \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \alpha\} \subset V$$

y además U es equilibrado. Por otra parte, como αW es un $\mathcal{T}$-entorno del origen y $U \supset \alpha W$, se tiene que U es un entorno del origen. Luego las familia $\mathcal{B}$ de todos los $\mathcal{T}$-entornos del origen que son equilibrados constituyen una base de $\mathcal{T}$-entornos del origen. Nótese que esta familia es cerrada por intersección finita.

Tomemos ahora un $\mathcal{T}$-entorno del origen V y un vector $x \in E$. de la continuidad de g se deduce que la aplicación de $\mathbb{K} \to \mathcal{T}$ definida por:

$$\lambda \to \lambda x,\ \ \lambda \in \mathbb{K}$$

es continua y, por consiguiente, puesto que $0 \to 0$, podemos hallar $\beta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\lambda x \in V \text{ si } \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \beta$$

por lo tanto, V es absorbente.

De la continuidad de f, puesto que $0 + 0 = 0$, se puede deducir que, dado $W \in \mathcal{B}$, existen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{B}$ de manera que

$$x + y \in W \text{ si } x \in Z_1, y \in Z_2$$

Sea $Z = Z_1 \cap Z_2$, resulta que $Z \in \mathcal{B}$ y

$$Z + Z \subset W$$

Por lo tanto, la familia $\mathcal{B}$ es no vacía, está formada por conjuntos equilibrados y absorbentes, y cumple las condiciones del apartado 5.1, por lo tanto $E[\mathcal{T}]$ es una topología vectorial.

Es inmediato comprobar que un conjunto $A \subset E$ es abierto si, y sólo si, para cada $x \in A$, existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + U \subset A$.

c.q.d.

5.4 Ejemplos

Ejemplo de espacio vectorial topológico

LLamaremos topología gruesa o topología trivial de un conjunto X a la topología $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, X\}$, es decir, la topología formada por el vacío y el propio conjunto. Esta topología tiene la propiedad de que cualquier función definida en un espacio topológico que tenga como imagen el conjunto X con esta topología es continua, sin importar la topología del espacio de origen.

Sea E un espacio vectorial, y su topología la gruesa, $\mathcal{T}(E) = \{\emptyset, E\}$. Esta topología es vectorial, porque, como las funciones del apartado 5.3.3 tienen como imagen E con la topología gruesa, van a ser siempre continuas, sin importar el cuerpo sobre el que el espacio vectorial está definido.

Ejemplo de espacio vectorial con topología pero no topológico

Definiremos como topología fina o topología discreta de un conjunto X, a la topología formada por el vacío, y todos los subconjuntos de X. Esta topología tiene la propiedad de que cualquier función que tenga como dominio al conjunto X con topología la topología fina, siempre va a ser continua.

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con la topología fina. Vamos a ver ahora si cumple las propiedades del apartado 5.3.3.

La función suma ($f : (x, y) \to x + y$), como va de $E[\mathcal{T}] \times E[\mathcal{T}] \to E[\mathcal{T}]$, y $E \times E$ tiene la topología fina, por lo tanto siempre va a ser continua.

Pero, por otro lado, la función producto ($g : (\lambda, x) \to \lambda x$), va de $\mathbb{R} \times E[\mathcal{T}] \to E[\mathcal{T}]$. Tenemos que $\{0\} \in E[\mathcal{T}]$ es un conjunto abierto, vamos a ver si su antiimagen es un conjunto abierto de $\mathbb{K} \times E[\mathcal{T}]$. El conjunto sería abierto si todo punto pertenece al interior del conjunto. Sea

$$V = \{(\lambda, x) : \ \lambda x \in \{0\} \ \lambda \in \mathbb{R}, x \in E\} = g^{-1}(\{0\})$$

Tenemos que $(0, v) \in V$ (siendo $v \neq 0$), vamos a ver que $(0, v) \notin \mathring{V}$. Sea U un abierto de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in U$. Sabemos que $\{0\}$ no es un abierto de $\mathbb{R}$, por lo tanto, si U es un abierto que contiene al 0, $\exists \alpha \neq 0 : \ \alpha \in U$. Por otro lado tenemos que en $E[\mathcal{T}]$ cualquier conjunto que contenga al v, es un entorno abierto de V. Pero

$$g(\alpha v) = \alpha v \notin \{0\}$$

en otras palabras, no existe nigún elemento W de la topología de $\mathbb{R} \times E[\mathcal{T}]$ tal que $(0, v) \in W \subset V$, lo que implica que el punto $(0, v) \notin \mathring{V}$, y por consiguiente, la función producto no es continua.

En resumen, la topología fina no es una topología vectorial.

Como observación, para ver que el conjunto E con la topología discreta no es un espacio vectorial topológico, hubiera bastado con ver que $\{0\}$ es un entorno del origen, pero no es un conjunto absorbente.

La topología usual de un espacio vectorial E normado es una topología vectorial, y también un sistema fundamental de entornos del origen formado por conjuntos abiertos y equilibrados

Una base de la topología usual de E viene dada por las bolas abiertas de centro $x \in E$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$, que llamaremos $B_x(r)$.

Supongamos que 0 es el origen. Consideraremos el conjunto $\mathcal{B}$ de bolas con centro el origen. Estas bolas complen que para todo $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$

1. $B_0(r)$ es equilibrado y absorbente.

2. $B_0(r_1) \cap B_0(r_2) = B_0(r)$ siendo $r = \min(r_1, r_2) > 0$.

3. $B_0(r/2) + B_0(r/2) = B_0(r)$.

Tenemos que la familia $\mathcal{B}$ cumple las condiciones del apartado 5.1 y son base de entornos del origen, y las bolas $x + B_0(r) = B_x(r)$ para todo $x \in E$ y $r \in \mathbb{R}^+$ es base de la topología. Por consiguiente la topología usual es una topología vectorial en un espacio normado.

Dar una topología vectorial que haga continuo el producto por escalar, pero que su suma no sea continua (funciones del apartado 5.3.3)

Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre $\mathbb{R}$, tal que los conjuntos abiertos en esta topología son el conjunto vacío y los conjuntos que son abiertos en la topología usual a los que pertenece el 0.

Es fácil ver que la operación suma no es continua. Para ello, consideremos el conjunto $U = (-1, 1)$, que es un abierto de $\mathcal{T}$. Vamos a ver que su antiimagen respecto a la operación suma, que llamaremos V, no es un abierto de $\mathbb{R}[\mathcal{T}] \times \mathbb{R}[\mathcal{T}]$. Consideremos el punto $p = (5, -5)$, sabemos que p pertenece a V, pero vamos a ver que p no pertenece al interior de V en la topología $\mathbb{R}[\mathcal{T}] \times \mathbb{R}[\mathcal{T}]$. Si así fuera, existiría un abierto W de $\mathbb{R}[\mathcal{T}]$ tal que $-5 \in W$ y además $5+W \subset U$. Como W es un abierto no vacío de $\mathbb{R}[\mathcal{T}]$, entonces $0 \in W$, por lo que $5 = 5+0 \in 5+W \notin U$, por lo que $p \notin \mathring{V}$, luego V no es abierto.

Veremos ahora que sí es continua la operación producto. Para ello, llamaremos $\mathbb{R}_u$ al cuerpo de los reales con la topología usual. Sea U un abierto de $\mathbb{R}[\mathcal{T}]$. Veremos que la antiimagen respecto a la operación producto de U, a la que llamaremos V, es un abierto de $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}[\mathcal{T}]$. Si $U = \emptyset$, su antiimagen va a ser el vacío, que es un abierto en cualquier topología. En caso contrario, sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $ab \in U$, veremos que el punto ab va a pertenecer siempre al interior de V. Tenemos que ver que existen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathbb{R}^+$ tales que el conjunto

$$(a - \epsilon_1, a + \epsilon_1) \times (-\epsilon_2, \epsilon_2) \cup (b - \epsilon_3, b + \epsilon_3) \subset V$$

Sabemos de un ejemplo anterior, que la topología usual es una topología vectorial, y que es más fina que la topología $\mathcal{T}$. Es decir, que U es un abierto de la topología usual, y que $ab \in U$, por lo que existen $\epsilon_{11}, \epsilon_3 \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$(a - \epsilon_{11}, a + \epsilon_{11}) \times (b - \epsilon_3, b + \epsilon_3) \subset V$$

Por otro lado, como $0 \in U$, y U es abierto de la topología usual, tenemos que el punto $(a, 0) \in V$. Como la topología usual es una topología vectorial, y U es un abierto de la topología vectorial, tenemos que existen $\epsilon_{12}, \epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$(a - \epsilon_{12}, a + \epsilon_{12}) \times (-\epsilon_2, \epsilon_2) \subset V$$

Sea $\epsilon_1 = \min\{\epsilon_{11}, \epsilon_{12}\} > 0$, por lo que tenemos que

$$(a - \epsilon_1, a + \epsilon_1) \times (-\epsilon_2, \epsilon_2) \cup (b - \epsilon_3, b + \epsilon_3) \subset V$$

Por lo tanto, el punto (a, b) pertenece al interior del conjunto V en la topología $\mathbb{R}_u \times \mathbb{R}[\mathcal{T}]$.

5.4.1 Proposición

Sea H la intersección de todos los conjuntos abiertos de una topología vectorial $E[\mathcal{T}]$ que contienen al 0. Ver que H es un subespacio vectorial

Demostración:

Por la proposición 5.2.8, si la topología $E[\mathcal{T}]$ es Hausdorff, entonces $H = \{0\}$, que es un espacio vectorial. Vamos a ver qué pasa si $E[\mathcal{T}]$ no lo es.

Para empezar esta demostración, sea Λ el conjunto de abiertos que contienen al 0. Sabemos que $E \in \Lambda$ porque $0 \in E$, y E siempre es un conjunto abierto en cualquier topología. Por otro lado, por definición

$$0 \in U \ \ \forall U \in \Lambda \Rightarrow 0 \in H = \bigcap_{U \in \Lambda} U$$

lo que implica que H es no vacío.

Vamos a suponer que $\exists u, v \in H : \quad u + v \notin H$. Esto implica que existe un conjunto $U \in \Lambda$ que no contiene a $u + v$, pero que todos los conjuntos de Λ contienen a u y a v. Sabemos que $E[\mathcal{T}]$ es una topología vectorial, lo que implica según el apartado 5.3.3 que la función suma es continua. Como la función suma es continua, la antiimagen de U tiene que ser un conjunto abierto. Sea U^{-1} la antiimagen de U por la operación suma. Sabemos que $0 \in U$, lo que implica que el punto $(0, 0) \in E[\mathcal{T}] \times E[\mathcal{T}]$ pertenece a U^{-1} y pertenece al interior de U^{-1}. Esto implica que existen dos conjuntos U_1, U_2 abiertos pertenecientes a la base de la topología de forma que

$$(0, 0) \in U_1 \times U_2 \subseteq U^{-1}$$

Pero como hemos dicho antes, si U_1 es abierto, y $0 \in U_1$, esto implica que $u \in U_1$. Análogamente $v \in U_2$, pero hemos dicho antes que $u + v \notin U$, lo que es una contradicción.

Por otra parte, vamos a suponer que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ y un $x \in H$ tales que $\lambda x \notin H$. Esto implica que existe $V \in \Lambda$ tal que $\lambda x \notin V$, lo que implica que $\lambda \neq 0$, puesto que $0x = 0 \in V$. Como V es abierto, y $\mathcal{T}$ es una topología vectorial, se tiene por la proposición 5.2.6 que $\lambda^{-1}V$ es abierto, lo que implica que $\lambda^{-1}V \in \Lambda$, además de $0 \in \lambda^{-1}V$. Si $x \in \lambda^{-1}V$, tendríamos que $\lambda x \in V$, que es una contradicción.

En resumen, tenemos que

1. $0 \in H$

2. si $u, v \in H$, $u + v \in H$
3. si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u \in H$, $\lambda u \in H$

En consecuencia, H es un subespacio vectorial de E.

6 Seminormas sobre un espacio vectorial

6.1 Definición y propiedades básicas

Dado un espacio vectorial E sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, una seminorma p sobre E es una aplicación de E en $\mathbb{R}$ de forma que, $\forall u, v \in E$, y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:

1. $p(u) \geq 0$.
2. $p(u+v) \leq p(u) + p(v)$
3. $p(\alpha u) = |\alpha| p(u)$

Si además p cumple que:

4. $p(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Se dirá que p es una norma.

A la primera propiedad se llama que p es definida positiva, a la segunda se le llama desigualdad triangular, y a la cuarta que p es no degenerada.

6.1.1 Proposición

Si f es una forma lineal sobre E, entonces $|f|$ es una seminorma.

Demostración:

Habría que ver que se cumplen las 3 propiedades mencionadas anteriormente. Como f es una forma lineal, entonces se cumple que para todo $u, v \in E$ y para todo $\alpha \in \mathbb{K}$

1. $|f(u)| \geq 0$
2. $|f(u+v)| = |f(u) + f(v)| \leq |f(u)| + |f(v)|$
3. $|f(\alpha u)| = |\alpha f(u)| = |\alpha||f(u)|$

6.1.2 Proposición

Si p es una seminorma sobre E, y $u, v \in E$, se tiene:

$$|p(u) - p(v)| \leq p(u - v)$$

Demostración:

Como p es una seminorma, aplicando la desigualdad triangular obtenemos que:

$$p(v) \leq p(u) + p(v - u)$$

$$p(u) \leq p(v) + p(u - v)$$

de donde se deduce que

$$p(v) - p(u) \leq p(v - u) = p(u - v)$$

y también que

$$p(u) - p(v) \leq p(u - v) = p(v - u)$$

de lo que podemos deducir que $|p(u) - p(v)| \leq p(u - v)$

c.q.d.

6.1.3 Proposición

Si p, q son dos seminormas sobre E tales que para todo u en E que cumple que $p(u) < 1$, también verifica que $q(u) < 1$, entonces se tiene que $q(v) \leq p(v)\ \forall v \in E$.

Demostración:

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists z \in E$: $p(z) < q(z)$. Sea entonces $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $p(z) < \alpha < q(z)$. Entonces el vector $\frac{1}{\alpha}z$ cumple que

$$p\left(\frac{1}{\alpha}z\right) = \frac{1}{\alpha}p(z) < 1$$

y por hipótesis debe ser

$$q\left(\frac{1}{\alpha}\right)z = \frac{q(z)}{\alpha} < 1$$

lo que es una contradicción.

c.q.d.

6.1.4 Proposición

Si p es una seminorma sobre E, y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se tiene que el conjunto

$$\{x \in E : p(x) < \alpha\}$$

es absolutamente convexo y absorbente.

Demostración:

Sean $u, v \in E$ de forma que

$$p(u) < \alpha, \;\; p(v) < \alpha$$

y $\alpha \in [0, 1]$. Se tiene:

$$p(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq p(\lambda u) + p((1 - \lambda)v) = \lambda p(u) + (1 - \lambda)p(v) < \alpha$$

de lo que se deduce que $\{x \in E : p(x) < \alpha\}$ es convexo.

Por otro lado, sea $\beta \in K : |\beta| \leq 1$, se tiene que

$$p(\beta u) = |\beta|p(u) \leq p(u) < \alpha$$

lo que indica que $\{x \in E : p(x) < \alpha\}$ es equilibrado.

Por último, dado un elemento cualquiera $z \in E$, entoces

$$\exists \rho \in \mathbb{R}^+ : \frac{\rho}{\alpha} p(z) < 1$$

entonces

$$p(\rho z) = \rho p(z) < \alpha$$

luego $\{x \in E : p(x) < \alpha\}$ es absorbente.

Nótese que hemos probado antes que este conjunto es equilibrado.

c.q.d.

6.2 Funcional de Minkowski

Sea A un subconjunto absorbente y absolutamente convexo en un espacio vectorial E. Para cada $x \in E$ definimos:

$$p_A(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+, x \in \lambda A\}$$

6.2.1 Proposición

Se tiene que p_A es una aplicación bien definida de E en $\mathbb{R}^+ \cup 0$.

Demostración:

Hay que ver que la aplicación está bien definida.

Tomamos $x \in E$, puesto que A es absorbente,

$$\exists \alpha > 0 \; \alpha x \in A$$

Por lo tanto se tiene que que

$$x \in \frac{1}{\alpha} A$$

Así el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \; : \; x \in \lambda A\}$ es no vacío y, puesto que está acotado inferiormente, tiene extremo inferior $p_A(x)$, que debe ser mayor o igual es 0 y es único.

c.q.d.

La aplicación p_A se le llama *funcional de Minkowski* o *calibrador*.

6.2.2 Proposición

La aplicación p_A es una seminorma sobre E.

Demostración:

Bastaría con ver que se cumplen las propiedades de seminorma.

Sean

$$u, v \in E, \alpha \in \mathbb{R}$$

De la definición de p_A se tiene:

$$p_A(u) \geq 0$$

Como A es equilibrado y absorbente entonces $0 \in A$, luego $0 \in \lambda A \; \forall \lambda > 0$. Por lo tanto $p_A(0) = 0$.

Por otra parte, si $\alpha = 0$, se tiene que:

$$p_A(\alpha u) \; = \; p_A(0) \; = \; 0 \; = \; |\alpha| \, p_A(u)$$

Si $\alpha \neq 0$, $\frac{\lambda}{\alpha} A \; = \; \frac{\lambda}{|\alpha|} A$ porque A es equilibrado. Por lo tanto:

$$p_A(\alpha u) = \inf\{\lambda : \lambda > 0, \; \alpha u \in \lambda A\} = \inf\left\{\lambda : \lambda > 0, \; u \in \frac{\lambda}{\alpha} A\right\} = \inf\left\{\lambda : \lambda > 0, \; u \in \frac{\lambda}{|\alpha|} A\right\}$$

$$= \ |\alpha| \inf \left\{ \frac{\lambda}{|\alpha|} : \lambda > 0, \ u \in \frac{\lambda}{|\alpha|} A \right\} \ = \ |\alpha| \, p_A(u)$$

Por último, sean

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ : u \in \lambda A, \ v \in \ \mu A$$

Entonces:

$$u + v \in \lambda A + \mu A$$

Como A es convexo, se tiene que

$$\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu) A$$

por consiguiente

$$u + v \in (\lambda + \mu) A \Rightarrow p_A(u + v) \leq \lambda + \mu$$

De la definición del funcional de Minkowski resulta que, dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\lambda - \frac{\epsilon}{2} < p_A(v) \leq \lambda, \ u \in \lambda A, \ v \in \mu A, \ \mu - \frac{\epsilon}{2} < p_A(v) \leq \mu$$

Por lo tanto, según hemos visto antes,

$$p_A(u + v) \leq \lambda + \mu < p_A(u) + \frac{\epsilon}{2} + p_A(v) + \frac{\epsilon}{2} = p_A(u) + p_A(v) + \epsilon$$

Ya que $\epsilon > 0$, se tiene que $p_A(u + v) \leq p_A(u) + p_A(v)$.

c.q.d.

6.3 Continuidad en seminormas

6.3.1 Proposición

Sea p una seminorma sobre un espacio vectorial topológico E. Si p es continua en el origen, entonces p es uniformemente continua en E.

Demostración:

Si p es contínua en el origen $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un conjunto U_ϵ de E de forma que

$$p(x) < \epsilon \, \forall x \in U_\epsilon$$

Sean

$$u, v \in E : \ u - v \in U_\epsilon$$

Se tiene que:

$$|p(u) - p(v)| \leq p(u-v) < \epsilon$$

Esto implica que p es uniformemente continua.

Obviamente el recíproco también es cierto.

c.q.d.

6.3.2 Proposición

Sea U un conjunto absolutamente convexo y absorbente de un espacio vectorial topológico E, p el calibrador de U. p es continuo si, y sólo si U es un entorno del origen.

Demostración:

Sea V el conjunto:

$$\{x \in E : \ p(x) < 1\}$$

Si p es continuo, V es abierto. De acuerdo la definición de p, $V \subset U$, lo que implica que U es entorno del origen de 0, porque V es abierto y $0 \in V$ (nótese que U es equilibrado).

Recíprocamente, como p es una seminorma, bastaría con ver que es continua en el origen. Como E es un espacio vectorial topológico, si U es un entorno del origen, entonces $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\epsilon}{2}U$ también es un entorno del origen. Por otro lado tenemos que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\epsilon}{2}U \subset p^{-1}[0, \epsilon)$ que es un entorno del origen, lo que implica que p es continua en el origen.

c.q.d.

6.3.3 Proposición

Sea U un entorno abierto del origen, entonces

$$U = \{x \in E \ : \ p(x) < 1\}$$

Demostración:

Si $x \in U$, entonces, como el producto rpor escalar es una aplición continua, y $1x = x \in U$, entonces existe un $r > 1$ tal que $rx \in U$, por lo tanto $x \in \frac{1}{r}U$. Como $0 < r < 1$, se tiene que $p(x)\frac{1}{r} < 1$ y $U \subset \{x \in E \ : \ p(x) < 1\}$.

Por otro lado, si $p(x) < 1$, entonces existe un $r > 0$ y $r < 1$ tal que $x \in rU$. Ya que $r < 1$ y U es equilibrado y $rU \subset U$, luego $x \in U$.

De ambas inclusiones se deduce la igualdad.

c.q.d.

Dado un espacio vectorial E, sea $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$ una familia de seminormas no vacía sobre E. $\forall i \in I, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$A_{i\epsilon} = \{x \in E : p_i(x) < \epsilon\}$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos de E que son intersecciones de un número finito de subconjuntos de la forma $A_{i\epsilon}$ al variar $i \in I$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

6.3.4 Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

1. Cada elemento de $\mathcal{B}$ es convexo, equilibrado y absorbente.
2. La intersección finita de elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{B}$.
3. Si $V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B} : \ W + W \subset V$

Demostración:

1. De acuerdo con la proposición 6.1.4, cada conjunto $A_{i\epsilon}$ es convexo, equilibrado y absorbente. La intersección de conjuntos convexos y equilibrados es convexo y equilibrado, y la intersección finita de conjuntos absorbentes es absorbente, lo que implica que cada elemento de $\mathcal{B}$ es convexo, equilibrado y absorbente.
2. Por definición, la intersección de dos elementos de elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{B}$, y lo mismo ocurre con cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{B}$.
3. Si $V \in \mathcal{B}$, existe un número finito de índices $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ y otro finito $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \mathbb{R}^+$ de forma que

$$V = \bigcap_{q=1}^{n} \{x \in E : \ p_{i_q}(x) < \epsilon_q\}$$

Sea

$$W = \bigcap_{q=1}^{n} \left\{x \in E : \ p_{i_q}(x) < \frac{1}{2}\epsilon_q\right\}$$

Sean $u, v \in W \Rightarrow u, v \in W_q,\ \forall q \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$p_{i_q}(u+v) \leq p_{i_q}(u) + p_{i_q}(v) < \frac{1}{2}\epsilon_q + \frac{1}{2}\epsilon_q = \epsilon_q$$

Lo que implica que $u + v \in V_{i_q}\ \ q = 1, 2, \dots, n$, o lo que es lo mismo, $u + v \in V$, luego $W + W \subset V$.

c.q.d.

6.4 Ejemplos

A continuación vamos a poner ejemplos de conjuntos que admiten un funcional de Minkowski, además vamos a ilustrar con ejemplos qué pasa si el conjunto no es equilibrado o convexo. Nótese que para que la definición del funcional de Minkowski de un conjunto A tenga sentido, sólo es necesario que el conjunto A tiene que ser absorbente.

Conjunto absorbente y convexo, pero no equilibrado

Supongamos en la recta real el conjunto $A = [-1, 2]$
Si p_A fuera seminorma, se cumpliría que $p_A(2) = p_A(-2)$, pero:

$$p_A(2) = 1$$

$$p_A(-2) = 2$$

Este ejemplo muestra que, si el conjunto A no es equilibrado, aunque sea convexo, el funcional de Minkowski no tiene por qué ser una seminorma.

Por otra parte, el conjunto $B = [-1, 1)$ de la recta real sería un claro ejemplo de un conjunto no equilibrado, pero en cual el funcional de Minkowski sí es una seminorma.

Conjunto equilibrado y absorbente, pero no convexo

Esta vez en el plano real, supongamos el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vamos a ver que no es una seminorma porque no cumple la desigualdad triangular:

$$p_C((1, 1)) = \sqrt{2}$$

$$p_C((1,0)) = 1$$
$$p_C((0,1)) = 0$$

Como
$$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$

debería cumplirse que

$$p_C((1,1)) \leq p_C((1,0)) + p_C((0,1))$$

pero se tiene que
$$\sqrt{2} > 1 + 0 = 1$$

Este ejemplo muestra que, si el conjunto C no es convexo, el funcional de Minkowski no tiene por qué ser una seminorma, aunque C sea equilibrado.

Conjunto absolutamente convexo y equilibrado
Sea E un espacio vectorial cualquiera, podemos comprobar que

$$p_E(x) = 0 \, \forall x \in E$$

Este ejemplo muestra que la seminorma p_A puede no ser una norma.

Ver cuáles son todas la topologías vectoriales de la recta real
Para empezar esta demostración, es fácil comprobar que la topología gruesa y la topología usual son topologías vectoriales en la recta real.

Sabemos del tema anterior, que para una topología ser vectorial, necesita tener, entre otras propiedades, un sistema fundamental de entornos del origen formado por conjuntos absorbentes y equilibrados.

Por otro lado, es fácil probar que en $\mathbb{R}$, cualquier entorno equilibrado y absorbente del origen es de la forma $(-a,a)$, $[-a,a]$ o $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}^+$. Si el único entorno equilibrado y absorbente es $\mathbb{R}$, entonces daría lugar a la topología trivial. En cualquier otro caso, si $\mathcal{T}$ tiene un sistema fundamental de entornos del origen absorbentes y equilibrados de la forma $(-a,a)$ o $[-a,a]$ con $a \in \mathbb{R}^+$, entonces se tiene que esta topología $\mathcal{T}$ coincide con la topología usual $\mathcal{T}_u$, como es inmediato comprobar.

6.4.1 Ejercicio

Sea $E = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial, $v \in E = (v_i)$ y $||v||_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^n v_i^2}$. Ver que la aplicación $||.||_2$ es una norma.

Solución:

Lo primero que hay que ver es que la aplicación $||.||_2$ está bien definida. Sea $v \in \mathbb{R}^n = (v_i)$. Como cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ cumple que $\alpha^2 \geq 0$, se tiene que $\sum_{i=0}^n v_i^2 \geq 0$, lo que implica que tiene sentido hacer la raíz cuadrada. Entonces hay que probar que:

1. $||v||_2 \geq 0 \forall v \in E$. Es trivial, puesto que la raíz cuadrada de un número nunca puede ser negativo.

2. $||\lambda v||_2 = |\lambda|\,||v||_2\; \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in E$. Se tiene que

$$||\lambda v||_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda v_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=0}^n v_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=0}^n v_i^2} = |\lambda|\,||v||_2$$

3. $||u+v||_2 \leq ||u||_2 + ||v||_2$. Para este apartado vamos a definir el producto escalar de dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ como $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. Se puede comprobar que el producto escalar es una forma bilineal, simétrica, definida positiva y no degenerada, y que $\sqrt{\langle v, v\rangle} = ||v||_2$.

   Pongamos ahora, para un $\lambda \in \mathbb{R}$, y consideremos el valor de $||u + \lambda v||_2$.

$$||u+\lambda v||_2 = \sqrt{\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle}$$

   En caso de que $v = 0$, se tiene que $\langle v, v\rangle = 0$ y que $\langle u, v\rangle = 0$, por lo que $0 = \langle u, v\rangle = \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}$.

   Si $v \neq 0$, ponemos $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$y tenemos que:

$$||u+\lambda v||_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} + \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle}} =$$

$$= \sqrt{\langle u, u\rangle - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle}}$$

Como $0 \leq ||u + \lambda v||_2$, tenemos que

$$\frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle v, v\rangle} \leq \langle u, u\rangle \Rightarrow \langle u, v\rangle \leq \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Consideremos ahora:

$||u+v||_2^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle+2\langle u, v\rangle+\langle v, v\rangle \leq \langle u, u\rangle+2\sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}+\langle v, v\rangle = (\sqrt{\langle u, u\rangle}$

Lo que implica que

$$||u + v||_2 \leq ||u||_2 + ||v||_2$$

4. $||u||_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Si $u = 0$, es evidente que $||u||_2 = 0$. Por otro lado, para cualquier número $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, y que $0 \leq \alpha^2$, por lo que $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0 \Leftrightarrow u_i = 0$ para todo $i < n$, o lo que es lo mismo, $u = 0$.

6.4.2 Ejercicio

Diremos que una matriz A cuadrada de dimensión n es semidefinida sobre $\mathbb{R}$ es semidefinida positiva si para cualquier vector $u \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $u^tAu \geq 0$.

Sea A una matriz cuadrada simétrica sobre $\mathbb{R}$, semidefinida positiva de dimensión n, y E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n. Veremos que la aplicación $q_A(v) = \sqrt{v^tAv}$ con $v \in E$ es una seminorma.

Solución:

Primero hay que ver que la aplicación está bien definida, es decir, que $v^tAv \geq 0$ para que tenga sentido la raíz cuadrada. En efecto, si A es semidefinida positiva, por definición, $v^tAv \geq 0$ siempre.

Hay que ver entonces:

1. $v^tAv \geq 0 \Rightarrow q_A(v) = \sqrt{v^tAv} \geq 0$

2. Tenemos que la matriz A es simétrica, entonces por el teorma espectral del álgebra lineal, existe P matriz ortonormal, y D matriz diagonal tales que $A = P^{-1}DP$. Recordemos que una matriz P es ortonormal si es una matriz invertible tal que $P^{-1} = P^t$, es decir, $A = P^tDP$. Como A es semidefinida positiva, todos los autovalores de A, que son los mismos que los de D, son mayores o iguales a 0, es decir, si $D = (D_{i,j})$

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \lambda_i \text{ , } \lambda_i \geq 0 \text{ , si } i = j \end{cases}$$

nótese que, si $w = Pv$, tenemos que

$$q_A(v) = \sqrt{v^t A v} = \sqrt{v^t P^t D P v} = \sqrt{(Pv)^t D (Pv)} = \sqrt{w^t D w}$$

Sea la matriz $C = (C_{i,j})$ una matriz diagonal de forma que $C_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$. Está bien definida porque $D_{i,i} \geq 0$. Como es diagonal, tenemos que $C^t = C$, y por otra parte tenemos que $D = C \times C = C^t \times C$. Definimos para cada $w \in E$ el vector u como $u = Cw$, por tanto, $w^t D w = w^t C^t C w = (Cw)^t (Cw) = u^t u$

En resumen, mediante aplicaciones lineales (multiplicaciones de matrices) tenemos

$$v^t A v = w^t D w = u^t u, \text{ donde } w = Pv, u = Cw$$

Por otro lado, Sea $w_1 = Pv_1, w_2 = Pv_2$, como el producto por P es una transformación lineal, $P(v_1+v_2) = Pv_1+Pv_2 = w_1+w_2, w_1 = Cw_1, u_2 = Cw_2$ tenemos $C(w_1 + w_2) = Cw_1 + Cw_2 = u_1 + u_2$. Por consiguiente, $CP(v_1 + v_2) = CPv_1 + CPv_2 = u_1 + u_2$.

Por último, puede probarse que la aplicación dada por $||v||_2 = \sqrt{v^t v}$, se cumple la desigualdad triangular, es decir, $||v_1 + v_2||_2 \leq ||v_1||_2 + ||v_2||_2$. De hecho $||.||_2$ es la norma habitual de E. Por tanto,

$$q_A(v_1+v_2) = \sqrt{(v_1 + v_2)^t A (v_1 + v_2)} = \sqrt{\big((v_1 + v_2)CP\big)^t \big((v_1 + v_2)CP\big)} =$$

$$= \sqrt{(u_1 + u_2)^t (u_1 + u_2)} = ||u_1+u_2||_2 \leq ||u_1||_2+||u_2||_2 = \sqrt{u_1^t u_1}+\sqrt{u_2^t u_2} =$$

$$= \sqrt{v_1^t A v_1} + \sqrt{v_2^t A v_2} = q_A(v_1) + q_A(v_2)$$

3. $q_A(\lambda v) = \sqrt{(\lambda v)^t A (\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 (v^t A v)} = |\lambda| \sqrt{v^t A v} = |\lambda| q_A(v)$

6.4.3 Ejercicio

Sea p una seminorma en un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$. Sea $v \in E$ un vector tal que $p(v) = 0$. Probar que

$$p(x) = p(x + v) \ \forall x \in E$$

Solución:

Sabemos que p al ser una seminorma cumple la desigualdad triangular:

1. $p(x+v) \leq p(x) + p(v) = p(x) \ \forall x \in E$

2. $p(x) = p(x+v-v) \leq p(x+v) + p(v) = p(x+v) \ \forall x \in E$

Como $p(x) \leq p(x+v) \leq p(x)$ tenemos que $p(x) = p(x+v) \ \forall x \in E$.

6.4.4 Ejercicio

Probar que si p es una norma sobre un espacio vectorial E, que la topología que genera es de Hausdorff.

Solución:

p es una norma, luego $p(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Sean $u, w \in E$ dos puntos tales que $u \neq w$. Entonces tenemos que $p(u-w) = \alpha > 0$. Sea $V = \{x \in E : p(x) < \frac{1}{2}\alpha\}$ un abierto de la topología (nótese que V es equilibrado). Sabemos que $0 \in V$ porque $p(0) = 0 < \frac{1}{2}\alpha$. Sean $U = u + V$ y $W = w + V$, como $0 \in V$, $u \in U$ y $w \in W$. Tenemos que U, W son dos abiertos que contienen a u y w respectivamente, vamos a ver que $U \cap W = \emptyset$. Supongamos un punto $p \in U \cap W$. Eso implica que $p = u + v_1 = w + v_2, \ v_1, v_2 \in V$, que implica que

$$u - w = v_2 - v_1 \in V + V = 2V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = p(u-w) = p(v_2 - v_1) \leq p(v_1) + p(v_2) < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$$

que es una contradicción, luego la topología que genera p es de Hausdorff.

6.4.5 Ejercicio

Dar dos seminormas que generen topologías vectoriales distintas, y que estas topologías sean de Haussdorff.

Solución:

Sea $\mathbb{R}(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \ \ a_i \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales. Sean $p_1(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i \geq 0} |a_i|$ y $p_2(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i) = \sum_{i \geq 0}(i+1)|a_i|$. Como son dos normas, la topología generada es de Haussdorff en ambos casos. Sea

$$U = \{x \in E : \ p_2(x) < 1\}$$

U es un abierto en la topología inducida por p_2, pero vamos a ver que no lo es en la topología inducida por p_1. Si así fuera, ya que $0 \in U$, existiría un $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que la bola en la norma p_1 de centro 0, y radio ϵ, a la que llamaremos B_ϵ, verificaría que

$$0 + B_\epsilon = B_\epsilon \subseteq U$$

Por otra parte, como $\epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : \ \epsilon > \frac{1}{M}$, es decir, que el polinomio $f(X) = \frac{1}{M} X^M \in B_\epsilon$, pero

$$p_2\left(\frac{1}{M} X^M\right) = (M+1)\frac{1}{M} = 1 + \frac{1}{M} > 1 \Rightarrow f(X) \notin U$$

luego $0 \notin \mathring{U}$, por consiguiente las topologías inducidas por p_1 y p_2 no son equivalentes.

7 Espacios vectoriales topológicos localmente convexos

Se dice que el espacio vectorial topológico E es localmente convexo si el origen de E tiene un sistema fundamental de entornos formado por conjuntos convexos.

7.0.1 Proposición

Si E es un espacio vectorial topológico localmente convexo, el origen de E posee un sistema fundamental de entornos formado por conjuntos absolutamente convexos y cerrados.
Demostración:

Sea $\mathcal{N}$ un sistema fundamental de entornos del origen en E, cerrados y equilibrados. Por la proposición 5.2.12, sabemos que esta familia existe. Sea $\mathcal{M}$ un sistema fundamental de entornos convexos del origen en E. Para cada $A \in \mathcal{N}$, elegimos un $M(A) \in \mathcal{M}$ de forma que $M(A) \subset A$, lo que implica que $\overline{M(A)} \subset \overline{A} = A$, por lo que

$$\mathcal{P} = \{\overline{M(A)} \ : \ A \in \mathcal{N}\}$$

es un sistema fundamental de entornos del origen en E, convexos y cerrados (Proposición 5.2.9). Para cada $P \in \mathcal{P}$ hallamos un $B(P) \in \mathcal{N}$ tal que $B(P) \subset P$. Si $H(P)$ es la clausura de la envoltura convexa de $B(P)$, entonces $H(P) \subset P$, y por consiguiente

$$\{H(P) \ : \ P \in \mathcal{P}\}$$

es un sistema fundamental de entornos del origen en E, absolutamente convexos y cerrados.

c.q.d.

7.0.2 Proposición

Si E es un espacio vectorial topológico localmente convexo, el origen de E posee un sistema fundamental de entornos absolutamente convexos y abiertos.
Demostración:

Sea $\mathcal{F}$ un sistema fundamental de entornos absolutamente convexos del origen en E.

La familia:

$$\{\mathring{A} \ : \ A \in \mathcal{F}\}$$

es un sistema fundamental de entornos del origen en E, absolutamente convexos y abiertos (Proposición 5.2.13).

c.q.d.

7.1 Espacios localmente convexos y seminormas

Dado un espacio vectorial E, sea $\mathcal{P} = \{p_i \,:\, i \in I\}$ una familia de seminormas no vacía de E. Para cada $i \in I$ y para cada $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$A_{i\epsilon} = \{x \in E \,:\, p_i(x) < \epsilon\}$$

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos de E que son intersecciones de un número finitos de conjuntos de la forma $A_{i\epsilon}$ variando i en I y ϵ en $\mathbb{R}^+$.

La proposición 6.3.4 permite construir una topología vectorial τ utilizando el método habitual a partir de la familia $\mathcal{B}$. De esta forma, los elementos de $\mathcal{B}$ forman un sistema fundamental de entornos absolutamente convexos del origen. Es inmediato comprobar que todas las seminormas de la familia $\mathcal{P}$ son continuas en la topología τ. Se dice que la topología τ está definida por la familia de seminormas $\mathcal{P}$.

Veamos ahora que cualquier topología vectorial, localmente convexa, $\mathcal{V}$ sobre E puede definirse por una familia de seminormas. Sea $\mathcal{U}$ la familia de todos los entornos del origen abiertos y absolutamente convexos.

Si $U \in \mathcal{U}$, entonces llamamos p_U al calibrador de U, y consideramos la familia de seminormas sobre E:

$$\{p_U \,:\, U \in \mathcal{U}\}$$

y aplicamos el método anterior para obtener una topología vectorial $\mathcal{W}$. Ahora vamos a ver que ambas topologías coinciden.

Para empezar, cualquier $U \in \mathcal{U}$, p_U es una seminorma $\mathcal{V}$-continua, por lo que la topología $\mathcal{V}$ es más fina que la topología $\mathcal{W}$.

Por otra parte, sea V un entorno del origen en $E[\mathcal{V}]$, podemos hallar por tanto un elemento $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que U_1 está contenido en V, se tiene que

$$U_1 = \{x \in E \,:\, p_{U_1}(x) < 1\}$$

y, por lo tanto, U_1 es un entorno del origen en $E[\mathcal{W}]$, lo que implica que la topología $\mathcal{W}$ es más fina que $\mathcal{V}$.

De lo cual se deduce que ambas topologías coinciden.

7.2 Ejemplos

7.2.1 Familia de entornos del origen no convexa que da lugar a una topología localmente convexa

Sean $E = \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $V_\alpha = \{(x,y) \in R \ : \ \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 < \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Vamos a considerar ahora la familia $\mathcal{B} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$. Este conjunto es claramente equilibrado. No es convexo porque los puntos $\left(\frac{9}{10}\alpha, 0\right)$ y $\left(0, \frac{9}{10}\alpha\right)$ pertenecen a V_α, pero el punto $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\alpha, 0\right) + \frac{1}{2}\left(0, \frac{9}{10}\alpha\right) = \left(\frac{9}{20}\alpha, \frac{9}{20}\alpha\right)$ no pertenece a V_α porque

$$\left(\sqrt{\frac{9}{20}\alpha} + \sqrt{\frac{9}{20}\alpha}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{9}{5}\alpha}\right)^2 = \frac{9}{5}\alpha > \alpha$$

Por otra parte, la bola de centro 0 y radio $\frac{1}{8}\alpha$ está dentro de ese conjunto porque si (x,y) pertenece a esa bola, entonces $|x| \leq \frac{1}{8}\alpha$ y $|y| \leq \frac{1}{8}\alpha$, con lo que $\left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2 \leq \left(\sqrt{|\frac{1}{8}\alpha|} + \sqrt{|\frac{1}{8}\alpha|}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha < \alpha$. Como $B_{\frac{1}{8}\alpha} \subset V_\alpha$ y además es absorbente, entonces V_α es absorbente. Es inmediato comprobar que se cumplen las otras propiedades que aparecen en el apartado 5.1.

Esa familia no tiene elemento convexos, pero la topología a la que da lugar es localmente convexa porque es la topología usual. Para ello habría que ver que para cada $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existen r_1 y r_2 reales positivos tales que $B_{r_1} \subset V_\alpha \subset B_{r_2}$. Como acabamos de ver $r_1 = \frac{1}{8}\alpha$ cumple con $B_{r_1} \subset V_\alpha$. Por otro lado, el conjunto V_α es acotado, luego tiene que existir un R_α tal que $V_\alpha \subset B_{R_\alpha}$.

7.2.2 Topología vectorial que no es localmente convexa

Sea $E = \mathcal{R}(X)$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales, y sea

$$V_\alpha = \left\{p \in \mathcal{R}(X) \ : \ \left(\sum \sqrt{|p_i|}\right)^2 < \alpha\right\}, \ \ \alpha \in \mathbb{R}^+$$

y sea $\mathcal{B} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+\}}$. La topología vectorial que genera $\mathcal{B}$ no es localmente convexa como veremos.

Supongamos que esta topología fuera localmente convexa, entonces tiene que existir un sistema fundamental de entornos del origen convexos que cumple las propiedades del apartado 5.1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces existiría un entorno del origen convexo A, y un número natural n tales que

$$V_{\frac{1}{n}\alpha} \subset A \subset V_\alpha$$

Por otra parte, A al ser convexo con $0 \in A$ cumple que para cualquier número natural m,

$$\underbrace{A + A + \ldots + A}_{m} = mA$$

Por otro lado tenemos que

$$\underbrace{V_{\frac{1}{n}\alpha} + V_{\frac{1}{n}\alpha} + \ldots + V_{\frac{1}{n}\alpha}}_{n+1} \subset \underbrace{A + A + \ldots + A}_{n+1}$$

y además

$$(n+1)A \subset (n+1)V_\alpha$$

Lo que implica que

$$\underbrace{V_{\frac{1}{n}\alpha} + V_{\frac{1}{n}\alpha} + \ldots + V_{\frac{1}{n}\alpha}}_{n+1} \subset \underbrace{A + A + \ldots + A}_{n+1} = (n+1)A \subset (n+1)V_\alpha$$

Sea la sucesión de polinomios $(q_i) = \frac{1}{n}\alpha x^i$. Tenemos que $q_i \in V_{\frac{1}{n}\alpha}$, por lo que

$$\sum_{i=0}^{n} q_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}\alpha x^i$$

tiene que pertenecer a $(n+1)V_\alpha$, o lo que es lo mismo, que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n}\alpha x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n(n+1)}\alpha x^i$$

tiene que pertenecer a V_α, pero tenemos que

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}\alpha}\right)^2 = \left((n+1)\sqrt{\frac{1}{n(n+1)}\alpha}\right)^2 = \frac{n+1}{n}\alpha > \alpha$$

por lo que ese polinomio no pertene a V_α, que es una contradicción, por lo tanto la familia $\mathcal{B}$ no genera una topología vectorial localmente convexa.

8 Topologías vectoriales en $\mathbb{R}^n$

En esta sección vamos a analizar las distintas topologías vectoriales que existen en espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales. Para ello, empezaremos analizando las distintas topologías vectoriales de Hausdorff en $\mathbb{R}^2$, luego generalizaremos para las topologías vectoriales de Hausdorff de $\mathbb{R}^n$, y por último veremos las topologías vectoriales que no son Hausdorff de $\mathbb{R}^n$.

Durante toda esta sección cuando hablemos de conjunto acotado, adherencia, compacidad, etcétera, serán sobre la topología usual.

8.1 Topologías vectoriales de Hausdorff en $\mathbb{R}^2$

En esta sección supondremos que $E = \mathbb{R}^2$, y que τ es una topología vectorial de Hausdorff sobre E. Por otra parte, supondremos que $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de entornos del origen de τ que cumple las propiedades del apartado 5.1.

8.1.1 Proposición

La topología usual es más fina que τ.
Demostración:

Sea $V \in \mathcal{B}$. Sabemos que $\exists W \in \mathcal{B} \ : \ W + W \subset V$. Sabemos que W es equilibrado y absorbente, por lo que absorbe el punto $(1, 0)$, es decir, $\exists \epsilon_x \in \mathbb{R}^+ \ :$ $\forall \lambda \in [0, \epsilon_x], \ \lambda(1, 0) = (\lambda, 0) \in W$. Como W es equilibrado, se tiene que el segmento abierto de extremos en $(-\epsilon_x, 0)$ y $(\epsilon_x, 0)$ pertenece a W.

Análogamente para el punto $(0, 1)$, existe un $\epsilon_y \in \mathbb{R}^+$ tal que el segmento de extremos en $(0, -\epsilon_y)$ y $(0, \epsilon_y)$ pertenece a W. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_x, \epsilon_y\}$, tenemos que los segmentos de extremos en $(-\epsilon, 0)$ y $(\epsilon, 0)$ y el de extremos en $(0, -\epsilon)$ y $(0, \epsilon)$ pertenecen ambos a W. Llamaremos A al primer segmento, y B al segundo.

El conjunto $A+B$ es el cuadrado cuyos puntos está en los puntos (ϵ, ϵ), $(-\epsilon, \epsilon)$, $(-\epsilon, -\epsilon)$ y $(\epsilon, -\epsilon)$. Sabemos que la bola de centro 0 y radio ϵ, verifica que

$$B_\epsilon \subset A + B \subset W + W \subset V$$

Y por tanto, V es un entorno del origen en la topología usual.

c.q.d.

Entonces tenemos que la topología usual es más fina que τ. Nótese que no hemos utilizado en ningún momento que la topología es de Hausdorff, lo que implica que la topología usual siempre va a ser más fina que cualquier topología vectorial en $\mathbb{R}^2$.

8.1.2 Proposición

Si existe en $\mathcal{B}$ un cojunto acotado, entonces τ es más fina que la topología usual.
Demostración:

Sea B_r una bola de centro 0 y radio r. Bastaría con ver que existe un conjunto $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset B_r$.

Sabemos que existe en $\mathcal{B}$ un conjunto V que es acotado, es decir, que existe un número R real positivo tal que $V \subset B_R$. Por consiguiente, existe un número natural m tal que $2^m r > R$, o lo que es lo mismo, $\frac{1}{2^m} B_R \subset B_r$.

Sea $W_1 \in \mathcal{B}$ tal que $W_1 + W_1 \subset V$. Luego $2W_1 \subset W_1 + W_1 \subset V \subset B_R$. Por otro lado, si seguimos la sucesión, $W_{i+1} + W_{i+1} \subset W_i$ con $W_{i+1} \in \mathcal{B}$ si $i > 1$, tenemos que $W_i \subset \frac{1}{2^i} B_R$. Tenemos que para $i = m$, $W_m \subset \frac{1}{2^m} B_R \subset B_r$

c.q.d.

Es decir, que utilizando estas proposiciones, se puede deducir que τ es la topología usual si existe un conjunto acotado en $\mathcal{B}$. Las siguientes proposiciones van destinadas a demostrar que al menos va a existir un conjunto acotado en $\mathcal{B}$.

8.1.3 Proposición

Sea A un conjunto equilibrado y no acotado de E, entonces existe una recta que pasa por el origen H tal que $H \subset \overline{A}$
Demostración:

Sabemos que A no es acotado, luego para cualquier $R \in \mathbb{R}^+$, siempre existe un punto $p \in A$ tal que $p \notin B_R$. Por el hecho de ser A equilibrado, el segmento de extremos 0 y p, tiene que cortar a la circunferencia de centro 0 y radio R en, al menos, un punto q y, además, ese segmento está contenido en A.

Se puede deducir que para cualquier radio $R > 0$, $B_R \cap A \neq \emptyset$. Por otro lado, vamos a considerar la siguiente sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida de la siguiente forma, sea $q_n \in A \cap B_n$, un punto de la intersección, entonces $x_n = \frac{1}{n} q_n$. Se deduce fácilmente que la sucesión (x_n) está contenida en la circunferencia de centro 0 y radio 1, que denominaremos D_1, y que la sucesión $(n x_n)$ está contenida en A.

Sabemos que D_1 es un conjunto compacto, luego existe una subsucesión convergente (y_n) de (x_n) tal que el límite de esa sucesión, y, pertenece a D_1. Dicho de otra forma, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un $m \geq n \,:\, m \in \mathbb{N}$ y $y_n = x_m$. Como hemos dicho antes, $mx_m \in A$, lo que implica que $nx_m = ny_n \in A$. Como A es equilibrado, tenemos que el segmento de extremos 0 y y_n pertenece a A.

Puesto que y es el límite de una sucesión de elementos de A, para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un n_0 tal que $\forall n > n_0$, el punto y_n pertenece a la bola de centro y y radio ϵ.

Sea m un número natural cualquiera, y ϵ un número real positivo cualquiera. Tenemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, y_n pertenece a la bola de centro y y radio ϵ/m. Sea ahora k un número natural tal que $k > m$ y $k > n_0$, tenemos pues que y_k pertenece a la bola de centro y y radio ϵ/m. Como hemos mencionado anteriormente, el segmento de extremos 0 y ky_k pertenece a A. Como $m < k$ y A es equilibrado, $my_k \in A$ y, además, my_k pertence a la bola de centro en my y radio ϵ.

Es decir, que $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+$ la intesección de la bola de centro my y radio ϵ con A nunca va a ser vacía, lo que implica que $my \in \overline{A}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

También sabemos que si A es equilibrado, entonces $\overline{A}$ también lo es. Lo que implica que $\lambda y \in A \forall \lambda \in \mathbb{R}$. También sabemos que $y \in D_1$ por lo que $y \neq 0$. Es decir, que la recta que pasa por el origen y por y está contenida en la adherencia de A.

c.q.d.

8.1.4 Proposición

Sean $V, W \in \mathcal{B}$ tales que $W + W \subset V$ y además W es no acotado, entonces existe una recta H que pasa por el origen tal que $H \subset V$

Demostración:

Por la proposición 8.1.1, sabemos que $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+ \ : \ B_\epsilon \subset W$.

Por otro lado, como W es un conjunto equilibrado no acotado, tenemos por la proposición 8.1.3, que existe una recta H que pasa por el origen tal que $H \subset \overline{W}$, es decir:

$$H \subset \overline{W} \subset W + B_\epsilon \subset W + W \subset V$$

c.q.d.

8.1.5 Proposición

Sean H y F dos rectas distintas que pasan por el origen, y A un conjunto tal que $H \subset A$ y $F \subset A$, entonces $A + A = E$.

Demostración:

Los puntos de la recta H son de la forma $\alpha v_H,\ \alpha \in \mathbb{R}$ con $v_H \neq 0$, y los de la recta F son de la forma $\beta v_F,\ \beta \in \mathbb{R}$ y $v_F \neq 0$.

Como v_H y v_F son linealmente independientes, puesto que H y F son distintas, cualquier punto $x \in E$ se puede poner de la forma $x = \alpha v_H + \beta v_F$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lo que implica que $A + A = E$.

c.q.d.

8.1.6 Proposición

Existe en $\mathcal{B}$ un conjunto acotado.

Demostración:

Vamos a suponer que no existe ningún conjunto acotado en $\mathcal{B}$.

De la proposición 8.1.4 se deduce que cualquier elemento de $\mathcal{B}$ tiene que contener al menos una recta, puesto que ningún elemento de esta familia está acotado.

Sabemos que τ al ser de Hausdorff, va a existir al menos un conjunto $V \in \mathcal{B}$: $V \neq E$, porque si no fuera así, τ sería la topología trivial, que no es Hausdorff.

Sea $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \neq E$, sabemos por lo tanto que existe un conjunto $W_1 \in \mathcal{B}$ tal que $W_1 + W_1 \subset V$. Sabemos que W_1 tiene que contener a alguna recta que llamaremos H, pero por la proposición anterior sabemos que sólo puede contener a una única recta, porque si contuviera dos distintas, entonces $W_1 + W_1 = E \not\subset V$.

Como la topología τ es de Hausdorff, tenemos que tiene que existir al menos un conjunto $W_2 \in \mathcal{B}$ tal que $H \not\subset W_2$.

Sabemos que existe un conjunto $Z \in \mathcal{B}$ tal que $Z \subset W_1 \cap W_2$. Es decir, tenemos que $Z \subset W_1$ y que $Z \subset W_2$. Como $Z \in \mathcal{B}$, sabemos que tiene que contener al menos a una recta que pase por el origen, sea F esa recta. Por otro lado, tenemos que $Z \subset W_1$, como W_1 puede contener a una única recta, implica que $F = H$, y además que no puede contener ninguna otra recta el conjunto Z. Pero por otro lado tenemos que $Z \subset W_2$, es decir, tenemos que $H \subset Z \subset W_2$, lo que implicaría que $H \subset W_2$, que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{B}$ tiene que contener al menos a un conjunto acotado.

c.q.d.

Entonces hemos demostrado que en $\mathbb{R}^2$, la topología usual va a ser más fina siempre que cualquier topología vectorial, que una topología vectorial de Hausdorff en $\mathbb{R}^2$ tiene siempre un conjunto acotado como mínimo, y que si tiene un conjunto acotado, ésta topología va a ser más fina que la usual (proposición 8.1.2). Esto implica que la única topología vectorial de Hausdorff que hay en el plano es la topología usual.

Esto podría ser una forma alternativa de demostrar que en el plano, dos normas son siempre equivalentes. Para ello basta con ver que el espacio topológico generado por cada una de ellas es un espacio vectorial topológico de Hausdorff, por lo tanto ambas topologías son la usual. También otra conscuencia que tiene es que no existe ninguna otra topología vectorial localmente convexa en $\mathbb{R}^2$ que sea de Hausdorff.

8.2 Topologías vectoriales Hausdorff en $\mathbb{R}^n$

Veremos cómo son las topologías vectoriales de Hausdorff en $\mathbb{R}^n$, siendo n un número entero tal que $n > 2$ (los casos $n = 1$ y $n = 2$ ya han sido analizados, la primera en el capítulo 6). En esta sección, $E = \mathbb{R}^n$, y τ es una topología vectorial de Hausdorff de E, y también supondremos que estamos utilizando la topología usual al hablar de acotados.

8.2.1 Proposición

La topología usual es más fina que τ.
Demostración:

Hay que ver que para cada elemento de $\mathcal{B}$ existe un $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que la bola de centro 0 y radio ϵ (B_ϵ) está contenida en V.

Sea m un número entero tal que $2^m \geq n$, y W_i con $i \leq m$, $i \in \mathbb{N}$ una serie de conjuntos que cumplen que $W_i \in \mathcal{B}$ y además si $i = 1$, $W_1 + W_1 \subset V$, y si $i > 1$, $W_i + W_i \subset W_{i-1}$. Tenemos por lo tanto que

$$\underbrace{W_m + W_m + \ldots + W_m}_{2^m} \subset V$$

Como $2^m \geq n$, tenemos que

$$\underbrace{W_m + W_m + \ldots + W_m}_{n} \subset \underbrace{W_m + W_m + \ldots + W_m}_{2^m} \subset V$$

Aplicando un razonamiento análogo al de la proposición 8.1.1, tenemos que como W_m es absorbente, en cada eje existe un $\epsilon_i \in \mathbb{R}^+$ tal que el segmento de extremos $-\epsilon_i$ y ϵ_i del eje pertenece al conjunto W_m. Sea $\epsilon = \min_{i \leq n}\{\epsilon_i\} > 0$, tenemos que en cada eje el segmento de extremos $-\epsilon$ y ϵ pertenece al conjunto, lo que implica que el conjunto de los elementos de E tales que todas sus coordenadas son menores que epsilon pertenece a la suma de n veces W_m, lo que implica que

$$B_\epsilon \subset \underbrace{W_m + W_m + \ldots + W_m}_{n} \subset V$$

c.q.d.

Acabamos de demostrar que en $\mathbb{R}^n$ la topología usual siempre va a ser más fina que cualquier otra topología vectorial.

8.2.2 Proposición

Si existe en $\mathcal{B}$ un cojunto acotado, entonces τ es más fina que la topología usual.
Demostración:
Análoga a la demostración del apartado 8.1.2.

c.q.d.

8.2.3 Proposición

Sea A un conjunto equilibrado y no acotado de E, entonces existe una recta que pasa por el origen H tal que $H \subset \overline{A}$
Demostración:
Análoga a la demostración del apartado 8.1.3.

c.q.d.

8.2.4 Proposición

Sean $V, W \in \mathcal{B}$ tales que $W + W \subset V$ y además W es no acotado, entonces existe una recta H que pasa por el origen tal que $H \subset V$
Demostración:
Análoga a la demostración del apartado 8.1.4.

c.q.d.

8.2.5 Proposición

Sea $V \in \mathcal{B}$ un conjunto tal que contiene, al menos, a un subespacio vectorial de dimensión $m < n$, pero no a uno de dimensión $m + 1$, y $W \in \mathcal{B}$ otro conjunto que contiene a un subespacio vectorial de dimensión m y que cumple que $W + W \subset V$. Entonces W contiene a un único espacio vectorial de dimensión m.
Demostración:

Supongamos que W contiene a dos subespacios vectoriales distintos de dimensión m, H_1 y H_2. Entonces implica que existe una recta F que pasa por el origen en H_1 que no está en H_2, por lo tanto el subespacio vectorial formado por $F + H_2$ tiene dimensión $m + 1$, es decir,

$$F + H_2 \subset H_1 + H_2 \subset W + W \subset V$$

lo que implicaría que V contiene a un subespacio de dimensión $m + 1$, lo que es una contradicción.

c.q.d.

8.2.6 Proposición

Existe en $\mathcal{B}$ un conjunto acotado.

Demostración:

Por la proposición 8.2.4 sabemos que cada conjunto de la familia $\mathcal{B}$ contiene, al menos, a una recta. Ahora vamos a ver por inducción, que si cada conjunto de $\mathcal{B}$ contiene a un subespacio de dimensión m siendo $m < n$, tiene que contener a uno de dimensión $m + 1$.

El caso base del que partimos es $m = 1$, es decir, hay que ver que si los conjuntos tienen una recta, también todos tienen que contener a un plano. Sea $V \in \mathcal{B}$ un conjunto que no contenga a ningún plano. Si no existiera, esta parte ya estaría demostrada. Por otro lado, sabemos que tiene que contener V a una recta. Sea $W \in \mathcal{B}$ un conjunto tal que $W + W \subset V$, sabemos que W no puede contener a ningún plano que pase por el origen, porque eso implicaría que V también lo tiene. Por otro lado, por la proposición anterior, sabemos que W sólo puede contener a una única recta, sea H esa recta. Como la topología τ es de Hausdorff, tiene que existir un conjunto $U \in \mathcal{B}$ tal que $H \not\subset U$. Sea $Z \in \mathcal{B}$ tal que $Z \subset W \cap U$, luego $Z \subset W$ y $Z \subset U$. Como W contiene a una única recta, y Z tiene que contener, al menos, a una recta, tenemos que $H \subset Z$, lo que implica que

$$H \subset Z \subset U$$

lo que es una contradicción. Luego si los conjuntos de $\mathcal{B}$ contienen a una recta, también tienen que contener a un plano.

Si lo suponemos cierto hasta un cierto $i < n$, tenemos que cualquier conjunto contiene a un subespacio de dimensión i. Habría que ver, que entonces también contiene a uno de dimensión $i + 1$. Sea $V \in \mathcal{B}$, si ese conjunto contiene a un subespacio de dimensión $i+1$, ya hemos acabado, en caso contrario, si no contiene a uno de dimesión $i+1$ pero sí a uno de dimensión i, tenemos que tiene que existir un conjunto $W \in \mathcal{B}$ tal que $W+W \subset V$. Como hemos dicho, W como cualquier elemento de $\mathcal{B}$ contiene a un subespacio de dimensión i. Si W contuviera a un subespacio de dimensión $i+1$, implicaría que V también lo contendría. Aplicando la proposición anterior, tenemos que W sólo puede contener a un único subespacio de dimensión i. Sea H este subespacio: Como τ es Hausdorff, tenemos que tiene que existir un elemento $U \in \mathcal{B}$ tal que $H \not\subset U$, y otro $Z \in \mathcal{B}$ tal que $Z \subset W \cap U$, lo que implica que $Z \subset W$ y $Z \subset U$. Tenemos que W contiene a un único subespacio de dimensión i (H), y que Z contiene un subespacio de dimensión i, lo que implica que $H \subset Z$, por lo que tenemos que

$$H \subset Z \subset U$$

que es una contradicción porque H no puede estar contenido en U.

Luego tenemos que si todos los elemento contienen al menos un subespacio de dimensión $i < n$, también tienen que contener a otro de dimensión $i+1$.

Como hemos supuesto que ningún elemento de $\mathcal{B}$ es acotado, aplicando la proposición 8.2.4, cualquier elemento contiene al menos una recta. Aplicando entonces lo mencionado anteriormente, también tienen que contener, al menos a un plano. Si seguimos aplicando esta lógica, tenemos que si contienen a un hiperplano, también tienen que contener a todo el espacio E, o lo que es lo mismo, $\mathcal{B} = \{E\}$, lo que implicaría que τ no es de Hausdorff. Luego $\mathcal{B}$ tiene que contener, al menos, a un conjunto acotado.

c.q.d.

Aplicando la proposición 8.2.2, tenemos que la topología τ es más fina que la usual. Como hemos visto en la proposición 8.2.1, la topología usual es más fina que cualquier topología vectorial. Es decir, que la única topología vectorial de Hausdorff que existe en $\mathbb{R}^n$ es la topología usual.

Esto implica un resultado conocido, que es que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, además de que no existe ninguna topología vectorial localmente convexa en $\mathbb{R}^n$ que sea de Hausdorff.

8.3 Topologías vectoriales en $\mathbb{R}^n$

Acabamos de ver en la sección anterior cómo son las topologías vectoriales de Hausdorf en $\mathbb{R}^n$, la única que existe es la usual. En esta sección vamos a ver cómo son, en general, las topologías vectoriales en $\mathbb{R}^n$. En esta sección consideraremos $E = \mathbb{R}^n$, y el espacio ortonormal es el que viene definido por el producto escalar ordinario.

Sea τ una topología vectorial de E, y sea ahora H la intersección de todos los entornos abiertos del origen. Como τ es una topología vectorial, por la proposición 5.4.1, H tiene que ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$. Sea F el espacio ortogonal de H en E. Sabemos que para cualquier elemento $x \in E$ existen un único elemento de $u \in H$ y otro $v \in F$ tales que $x = u + v$. Es inmediato probar que si $V \subset E$ es un conjunto abierto y $p \in V$, entonces $p + H \subset V$.

8.3.1 Proposición

Sea $V \subset E$ un abierto en la topología τ, entonces

$$V = (V \cap F) + H$$

Demostración:

Sea $x \in V$, entonces $x = u + v$ donde $u \in H$ y $v \in F$, lo que implica que $x - u = v$. Como y V es abierto, tenemos que $x + H \subset V$, lo que implica ya que $u \in H$, que $x - u = v \in x + H \subset V$. Como $v \in F$, tenemos que $v \in V \cap F$, como además $v \in V$, tenemos que $v + H \subset V$. Es decir, tenemos que $x - u \in (V \cap F) + H$, como $u \in H$ se deduce que $x \in (V \cap F) + H + u = (V \cap F) + H$, por lo que $V \subset (V \cap F) + H$.

Por otro lado, tenemos que si $q \in V \cap F$ entonces por ser V abierto, que $q + H \subset V$, con lo que $(V \cap F) + H \subset V$.

Luego se tiene que $V = (V \cap F) + H$

c.q.d.

Sea $\tau_{|F}$ la topología de τ restringida al conjunto F.

8.3.2 Proposición

$\tau_{|F}$ es una topología vectorial y de Hausdorf en F.

Demostración:

$\tau_{|F}$ es una topología en F, ahora hay que ver que es vectorial y de Hausdorff.

Sabemos que τ es una topología vectorial, si existe un sistema fundamental de entornos del origen $\mathcal{B}$ formado por conjuntos que cumplen las condiciones del apartado 5.1. Vamos a ver que la familia $\mathcal{B}'$ formada por la intersección de los elementos de $\mathcal{B}$ con F cumple las condiciones del apartado 5.1.

Sea $V \in \mathcal{B}$, V es equilibrado y absorbente. Como F es equilibrado, se tiene que $V \cap F$ es equilibrado por ser intersección de dos conjuntos equilibrados. Como

V es absorbente en E, y $F \subset E$, entonces $V \cap F$ es absorbente en F, ya que F es un subespacio vectorial de E.

Para cualquier $V_1, V_2 \in \mathcal{B} \, \exists W \in \mathcal{B} \, : \, W \subset V_1 \cap V_2$. Por lo tanto,

$$W \cap F \subset (V_1 \cap \, V_2) \cap F = (V_1 \cap \, F) \cap (V_2 \cap \, F)$$

Por último, para todo $V \in \mathcal{B}, \, \exists W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$. Luego

$$(W + W) \cap F \subset V \cap F$$

Como $W \cap F + W \cap F \subset (W + W) \cap F$, se deduce que

$$W \cap F + W \cap F \subset V \cap F$$

Luego la familia $\mathcal{B}' = \{V \cap F\}_{V \in \mathcal{B}}$ es un sistema fundamental de entornos del origen que cumple las condiciones del apartado 5.1 y, por lo tanto, $\tau_{|F}$ es una topología vectorial.

Ahora quedaría ver que esta familia es de Hausdorff. Supongamos que no lo es, entonces $\exists p \neq 0 \, : \, p \in \cap_{V \in \mathcal{B}'} V$. Sabemos entonces que $p \in F$, pero también sabemos que $p \in \cap_{V \in \mathcal{B}} V$, por lo que $p \in H$. Como F es el espacio ortohonal de H, $F \cap H = \{0\}$, lo que contradice que $p \neq 0$. Por lo tanto la topología vectorial $\tau_{|F}$ es de Hausdorff.

c.q.d.

En resumen, hemos visto que la topología vectorial τ restringida en F es una topología vectorial de Hausdorff. Por otra parte hemos visto que para cualquier abierto A de $\tau_{|F}$, $A + H$ es un abierto de τ, puesto que, como hemos visto en la proposición 8.3.1, si V es un abierto de τ, y $A = V \cap F$, entonces

$$A + H = (V \cap F) + H$$

8.3.3 Proposición

Sean τ_1 y τ_2 dos topologías vectoriales de E, tales que la intersección de los conjuntos abiertos que contienen al origen es el mismo conjunto en ambas topologías. Entonces ambas topologías son la misma.

Demostración:

Sea V un conjunto abierto de τ_1. Sea H la intersección de todos los conjuntos que contienen al origen en τ_1, que por el enunciado coincide con la intersección de los de τ_2. Sea F en espacio ortogonal de H, y m la dimensión de F. Sabemos que F es isomorfo a $\mathbb{R}^m$, que $\tau_{1|F}$ y $\tau_{2|F}$ son topologías vectoriales y de Hausdorff en F, y que al ser isomorfo F a $\mathbb{R}^m$, sabemos pues que las topologías $\tau_{1|F}$ y $\tau_{2|F}$ son la misma.

Entonces $V \cap F$ es un abierto de $\tau_{1|F}$, por lo tanto también tiene que ser un abierto de $\tau_{2|F}$, es decir, que existe un conjunto W abierto de τ_2 tal que $W \cap F = V \cap F$. Por la proposicion 8.3.1 sabemos que $(V \cap F) + H = V$ y que $(W \cap F) + H = W$, lo que implica que $V = W$, es decir, que cualquier abierto de τ_1 es abierto de τ_2.

Para ver que cualquier abierto de τ_2 es abierto de τ_1, la demostración es análoga.

c.q.d.

8.3.4 Proposición

En $\mathbb{R}^n$ cualquier topología vectorial está generada por una seminorma.

Demostración:

Sea H un subespacio vectorial cualquiera de E, veremos que existe una seminorma p tal que $p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in H$.

Consideremos ahora una familia de hiperplanos $\Lambda = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ tal que $\cap_{H_i \in \Lambda} H_i = H$. Para cada $H_i \in \Lambda$ consideramos una forma lineal $h_i : E \to \mathbb{R}$ de forma que $h_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in H_i$. Por la proposición 6.1.1 sabemos que $|h_i|$ es una seminorma. Sea $p = \sum_{i=i}^{m} |h_i|$ una aplicación de E a $\mathbb{R}$. Claramente p es una seminorma por ser suma de seminormas. Veremos que $x \in H \Leftrightarrow p(x) = 0$.

Por un lado tenemos que

$$x \in H = \bigcap_{H_i \in \Lambda} H_i \Rightarrow x \in H_i \; \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

lo que implica que

$$h_i(x) = 0 \; \forall i = 1, 2, \ldots m \Rightarrow p(x) = \sum_{i=i}^{m} |h_i(x)| = 0$$

es decir, $x \in H \Rightarrow p(x) = 0$.

Consideremos ahora que $p(x) = 0$. Como el valor absoluto de un número es siempre mayor o igual a 0, y como $p = \sum_{i=i}^{m} |h_i|$ tenemos que

$$p(x) = 0 \Rightarrow h_i(x) = 0 \; \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

como $h_i(x) = 0 \Leftrightarrow x \in H_i$ nos queda que

$$x \in H_i \; \forall i = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i = H$$

Entonces, la seminorma p genera una topología vectorial, y la intersección de los entornos del origen es H. Como hemos visto en la proposición anterior, en E, si la intersección de los entornos del origen de dos topologías vectoriales es el mismo subespacio vectorial, entonces ambas topologías son la misma. Esto implica que p genera esta topología.

c.q.d.

Cabe destacar que de aquí se puede deducir que en $\mathbb{R}^n$ todas las topologías vectoriales son localmente convexas.

9 Bibliografía

- Valdivia Ureña, M. (1988) Análisis Matemático V, Volumen I, 6ª edición UNED, Madrid.
- Schaefer, H.H. (1971) Topological Vector Spaces. Third printing corrected. Graduate Texts in Mathematics.