**UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**Departamento de Estadística e Investigación Operativa**

# REGLAS DE DECISIÓN EN AMBIENTE DE RIESGO

Dra. Elena Almaraz Luengo

MASTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

Trabajo dirigido por el Dr. Ricardo Vélez Ibarrola

**Junio de 2010**

A papá, mamá, Quique y “Nuno”

# Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar las diferentes herramientas de las que se dispone a la hora de decidir en ambiente de riesgo entre una opción u otra. Se comienza con la explicación de los criterios más conocidos para poco a poco proponer otros criterios que ayudan en dicha elección cuando los clásicos no conducen a ninguna selección concreta. Se pone principal interés en las aplicaciones de carácter económico-financiero.

El trabajo está dividido en tres grandes bloques, que corresponden con las tres grandes herramientas que se pueden encontrar para la decisión entre una opción u otra.

En el Capítulo 1 se exponen los principales conceptos de Dominancia Estocástica y sus aplicaciones más importantes prestando especial atención en las aplicaciones económicas y financieras.

En el Capítuo 2 se estudian las reglas clásicas de Media Varianza para la selección de opciones y sus principales aplicaciones.

Finalmente en el Capítulo 3 se exponen las reglas de Cuasi Dominancia Estocástica y aplicaciones en el ámbito de la selección de activos.

**Palabras clave:** Cuasi Dominancia Estocástica, Dominancia Estocástica, Economía, Finanzas, reglas de Media Varianza.

# Agradecimientos

Me gustaría expresar mi sincera gratitud a mi padre, el Doctor Juan C. Almaraz Simón, a mi madre la Doctora Maribel Luengo y Dos Santos, a mis hermanos Enrique y Eduardo (Nuno) por su apoyo a la hora de realizar este trabajo.

# Índice general

**Resumen** I

**Agradecimientos** II

**Índice de Figuras** VII

**Notación Básica** IX

**1. Dominancia Estocástica** 1

1.1. Introducción . . . . . 1

1.2. Dominancia Estocástica de Primer Orden . . . . . 2

1.2.1. Variables aleatorias . . . . . 3

1.2.2. Vectores aleatorios . . . . . 6

1.2.3. Procesos estocásticos . . . . . 8

1.2.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de primer orden . . . . . 13

1.3. Dominancia Estocástica de Segundo Orden . . . . . 16

1.3.1. Variables aleatorias . . . . . 16

1.3.2. Vectores aleatorios . . . . . 19

1.3.3. Procesos estocásticos . . . . . 19

1.3.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de segundo orden . . . . . 20

1.4. Dominancia Estocástica de Tercer Orden . . . . . 24

1.4.1. Variables aleatorias . . . . . 24

1.4.2. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de tercer orden . . . . . 28
1.5. Otros tipos de dominancia estocástica . . . . . 29

**2. Reglas de Media Varianza** **33**
2.1. Introducción . . . . . 33
2.2. Principales resultados . . . . . 37

**3. Cuasi Dominancia Estocástica** **39**
3.1. Introducción . . . . . 39
3.2. Principales resultados . . . . . 43
3.3. Aplicaciones económicas de la Cuasi Dominancia Estocástica . . . . . 46

**Apéndice. Conclusiones** **56**

**Bibliografía** **57**

# Índice de figuras


1.1. *A la izquierda dos distribuciones $F$ y $G$ tales que $F \geq_{FSD} G$, y a la derecha situación en la que no se da la FSD.* . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.2. *Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de primer orden.* . . 6

1.3. *Distribuciones $F$ y $G$ tales que $F \geq_{SSD} G$.* . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

1.4. *Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de segundo orden.* . . 18

1.5. *Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de tercer orden.* . . . 27

1.6. *A la izquierda distribuciones $F$ y $G$ tales que $F \geq_{lr} G$. A la derecha el cociente de densidades decreciente* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

2.1. *Rendimientos y riegos de los activos.* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

3.1. *Distribuciones $F$ y $G$. A la derecha una representación en detalle de las mismas.* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

3.2. *Distribuciones $F^{(1)}$ y $G^{(1)}$.* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

3.3. *Distribuciones $F^{(2)}$ y $G^{(2)}$.* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

3.4. *Distribuciones $F^{(n)}$ y $G^{(n)}$, con $n = 1, ..., 10, 15$ y 20. Como se puede observar, el área de violación del criterio FSD, es decir, el área en la que $F^{(n)}$ está por encima de $G^{(n)}$-$A_1$ de la definición de $\varepsilon$-, va disminuyendo a medida que el horizonte de la inversión aumenta, el valor de $\varepsilon$ también disminuye, es decir, que a medida que aumenta el tiempo, los inversores van a preferir en mayor medida los activos que los bonos.* . . . . . . . . 52

3.5. *Valores de $\varepsilon$ para cada horizonte de la inversión.* . . . . . . . . . . . . . 53

3.6. *Valores de $\varepsilon$ y $\varepsilon_u$ para cada horizonte de la inversión.* . . . . . . . . . . 55

# Notación Básica

Este trabajo está dividido en capítulos que a su vez se componen de secciones y subsecciones.

Las Definiciones, Lemas, Teoremas y Corolarios se numeran de manera independiente haciendo referencia al capítulo, sección, subsección y un dígito de orden.

El símbolo ■ indica el fin de una demostración.

Los vectores y matrices se representan en negrita. Otra notación que se usará es la siguiente:

## Conjuntos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | conjunto de los números naturales incluyendo el 0 |
| $\mathbb{N}_+$ | conjunto de los números naturales (sin el 0) |
| $\mathbb{Z}$ | conjunto de los números enteros |
| $\mathbb{R}$ | conjunto de los números reales |
| $\mathbb{R}_+$ | conjunto de los números reales no negativos |

## Acrónimos

| | |
|---|---|
| i.i.d. | Independiente e idénticamente distribuido |
| v.a. (v.as.) | Variable(s) aleatoria(s) |
| u.m. | Unidades monetarias |
| SD | Criterios de dominancia estocástica |
| MV | Criterios de media varianza |
| ASD | Criterios de cuasi dominancia estocástica |

## Funciones

| | |
|---|---|
| $P$ | Función de probabilidad |
| $E(X)$ | Esperanza matemática de la variable aleatoria $X$ |
| $E(X^k)$ | Momento centrado en el origen de orden $k$ de la variable aleatoria $X$ |
| $Var(X)$ | Varianza de la variable aleatoria $X$ |
| $\sigma_X^2$ | Varianza de la variable aleatoria $X$ |
| $\sigma_X$ | Desviación típica de la variable aleatoria $X$ |
| $F^{-1}$ | Función inversa generalizada de la función de distribución $F$ |
| $\exp\{x\}$ | Función exponencial $e^x$ |
| $\log\{x\}$ | Función logarítmica. |

## Distribuciones

| | |
|---|---|
| $U(a, b)$ | Distribución Uniforme en el intervalo $(a, b)$, $a < b$ |
| $N(\mu, \sigma)$ | Distribución Normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$ |
| $G(a, b)$ | Distribución Gamma de parámetros $a$ y $b$ |
| $\exp(a)$ | Distribución exponencial de media $a$ |
| $LN(\mu, \sigma)$ | Distribución lognormal de parámetros $\mu$ y $\sigma$ |
| $X \sim F$ | La variable aleatoria $X$ tiene distribución $F$ |
| $X =^d Y$ | Las variables aleatorias $X$ e $Y$ están igualmente distribuidas |

# Órdenes Estocásticos

| | |
|---|---|
| $\leq_{FSD}$ | Dominancia estocástica de primer orden |
| $\leq_{st}$ | Dominancia estocástica en el sentido estocástico usual |
| $\leq_{SSD}$ | Dominancia estocástica de segundo orden |
| $\leq_{icx}$ | Dominancia estocástica en el sentido convexo creciente |
| $\leq_{TSD}$ | Dominancia estocástica de tercer orden |
| $\leq_{3-icv}$ | Dominancia estocástica en el sentido cóncavo creciente de orden 3 |
| $\leq_{Lo}$ | Dominancia estocástica en el sentido de Lorenz |
| $\leq_{lr}$ | Dominancia estocástica en el sentido de razón de verosimilitud |
| $\leq_{hr}$ | Dominancia estocástica según la función de tasa de fallo |
| $\leq_{rh}$ | Dominancia estocástica en el sentido inverso de la función de tasa de fallo |
| $\leq_{*}$ | Dominancia estocástica según el orden de estrella |
| $\leq_{SDR}$ | Dominancia estocástica en el caso de activos sin riesgo |
| $\leq_{ASD}$ | Cuasi dominancia estocástica |
| $\leq_{AFSD}$ | Cuasi dominancia estocástica de primer orden |
| $\leq_{ASSD}$ | Cuasi dominancia estocástica de segundo orden |
| $\leq_{MV}$ | Dominancia en el sentido de media varianza |

# Capítulo 1

# Dominancia Estocástica

## 1.1. Introducción

Una forma simple de comparar variables aleatorias (v.as.) es a través de sus valo-res esperados, no obstante, ello puede resultar poco informativo ya que se está usando únicamente dos valores, pudiéndose estar desaprovechando otra información que se posea, como pueda ser el comportamiento de las funciones de distribución, transformadas de Laplace, funciones generadoras de momentos, funciones de tasa de fallo, de razón de verosimilitudes, etc.

Por ello surge la necesidad de reglas de carácter estocástico que permitan la comparación de v.as. Estas reglas se dicen de Dominancia Estocástica (DE) o (SD) y su uso se ha generalizado a numerosas áreas de la Economía, Finanzas y Estadística.

El concepto SD se encuentra en los orígenes del cálculo de probabilidades, Bawa (1982) señala que los orígenes se remontan a Bernoulli (1713).

Históricamente debe citarse el trabajo pionero de Lorenz (1905) relativo al análisis de la desigualdad en la distribución de riquezas entre los miembros de una población.

Karamata (1932) estableció el concepto SD de segundo orden (SSD).

La ordenación estocástica tiene una larga historia, Mann y Whitney (1947) y Lehmann (1955) la usan en sus problemas de contraste estadístico. Blackwell (1951, 1953) comparó experimentos estadísticos mediante SSD. La aplicación en Teoría de la Decisión comenzó alrededor de 1950 (véase Allais (1953), Quirk y Saposnik (1962), Fishburn

(1964)) y ha seguido desarrollándose (ver Beccacece (2006)).

Karlin (1960) introduce el concepto en investigación operativa, en particular en problemas de inventario, problemas que han estudiado otros autores como Huergo y Moreno (2005).

La teoría de la SD y sus aplicaciones a la Economía y Finanzas se desarrolla en 1969-1970, con la publicación de numerosos artículos como los de Hadar y Russell (1969), Hanoch y Levy (1969), Rothschill y Stiglitz (1970), Kroll y Lévy (1980) y Withmore (1970), entre otros. Con posterioridad, se ha seguido trabajando en estas áreas y podemos encontrar numerosa bibliografía al respecto (ver Constantinides (2002), Xu (2006), Abhyankar (2008) y Kopa (2008), entre otros).

Las áreas de aplicación de mayor interés son:

(1) Desarrollos teóricos acerca de (i) la ordenación de determinadas opciones de riesgo (activos, derivados, diversificación de carteras en riesgo...), (ii) reglas SD en clases restringidas de funciones de utilidad y utilidades no lineales, (iii) SD en vectores multivariantes, (iv) análisis multivariante y (v) SD de la transformación de variables.

(2) Aplicación a datos empíricos (eficiencia y diseño de algoritmos).

(3) Desarrollos en Economía y Finanzas: (i) optimación del apalancamiento financiero cuando existe posibilidad de bancarrota, (ii) optimación de la producción, (iii) medidas de desigualdad de ingresos, (iv) análisis y definición de riesgo, (v) medida del riesgo de bancarrota, (vi) selección de carteras seguras y (vii) opciones de tasación.

(4) Aplicación a la Estadística: Selección de estimadores eficientes.

## 1.2. Dominancia Estocástica de Primer Orden

FSD corresponde a la noción de estocásticamente menor en sentido fuerte y clasifica los activos con riesgo de modo consistente para individuos que prefieren más a menos riqueza. En términos de funciones de utilidad $U$, esto implica que $U' \geq 0$.

### 1.2.1. Variables aleatorias

**Definición 1.2.1.1** *El activo $A$ domina a $B$ según FSD y se denota $A \geq_{FSD} B$ o también $A \geq_{st} B$ si se verifica que*

$$P[B > x] \leq P[A > x]$$

*o equivalentemente, si*

$$F(x) \leq G(x)$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$ y con al menos un $x_0$ en el que la desigualdad sea estricta. Siendo $F$ la función de distribución de $A$ y $G$ la de $B$.*

Dado que $F$ y $G$ son las funciones de distribución de los retornos de los activos $A$ y $B$, es mayor la probabilidad de obtener un rendimiento superior con el activo $A$ que con el activo $B$.

En los siguientes gráficos se muestran dos situaciones, en una de ellas se da FSD y en la otra no (ya que existe un punto de corte entre las distribuciones).

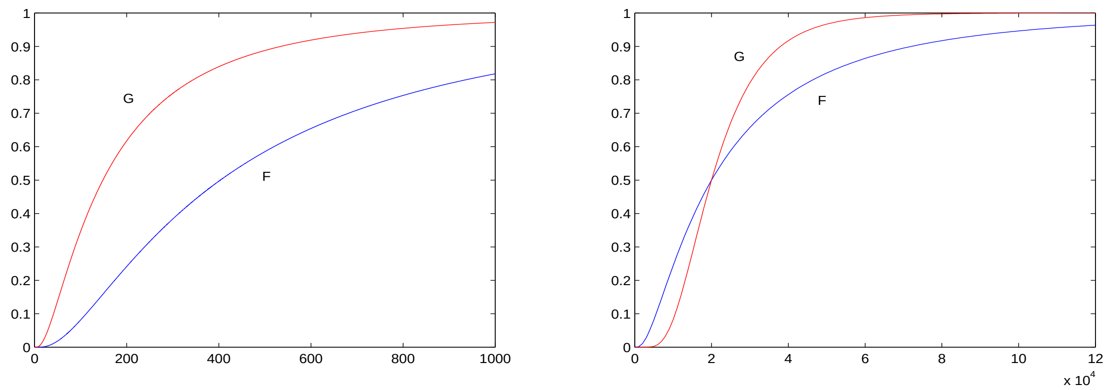



Figura 1.1: *A la izquierda dos distribuciones $F$ y $G$ tales que $F \geq_{FSD} G$, y a la derecha situación en la que no se da la FSD.*

Esta definición supone aversión al riesgo por parte del inversor y significa que se preferirá al activo $A$, pues acumula menor probabilidad en la cola izquierda de la distribución, que es la menos favorable, sin importar la renuncia a un mejor rendimiento.

La ordenación estocástica puede caracterizarse por la función de distribución inversa relativa $\Phi_{F,G}(t)$ definida como:

$$\Phi_{F,G}(t) = G^{-1}(F(t)) \tag{1.1}$$

Esta función está fuertemente relacionada con el diseño cuantil-cuantil (Q-Q plot), que se obtiene dibujando los cuantiles de las distribuciones $G^{-1}$ y $F^{-1}$ una frente a otra para todo $0 < p < 1$. En distribuciones continuas el diseño Q-Q y la gráfica de la función $\Phi_{F,G}$ son idénticas. En general, la función del diseño Q-Q forman sólo un subconjunto del grafo de $\Phi_{F,G}$.

**Teorema 1.2.1.1** *Sean $F$ y $G$ las funciones de distribución de los activos $A$ y $B$ respectivamente. Entonces $B \leq_{st} A$ si y sólo si*

$$\Phi_{F,G}(x) \leq x \tag{1.2}$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$.*

**Demostración.** Por definición $G^{-1}(G(x)) \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $G(G^{-1}(x)) \geq x$, $\forall x \in (0,1)$.

Entonces si $B \leq_{st} A$, se tiene que $F(x) \leq G(x), \forall x \in \mathbb{R}$, y de aquí

$$G^{-1}(F(x)) \leq G^{-1}(G(x)) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Recíprocamente si $G^{-1}(F(x)) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$, entonces

$$G(x) \geq G(G^{-1}(F(x))) \geq F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

El teorema permite un procedimiento gráfico simple para validar la ordenación estocástica entre dos funciones distintas. Es decir, $B \leq_{st} A$ si el diseño Q-Q de $G^{-1}$ frente a $F^{-1}$ permanece por debajo de la bisectriz.

**Definición 1.2.1.2** *(FSD con utilidad esperada). El activo $A$ domina a $B$ en este sentido cuando $E[U(r_A)] \geq E[U(r_B)]$ con $U' \geq 0$ (o también $E_F[U(x)] \geq E_G[U(x)]$), siendo $U$ la función de utilidad esperada y $r_A$ y $r_B$ los rendimientos de $A$ y $B$ respectivamente.*

Otra caracterización de la dominancia estocástica de primer orden es a través de los cuantiles de la distribución. Si denotamos por $Q_F(p)$ y $Q_G(p)$ a los cuantiles de orden $p$ de las distribuciones $F$ y $G$ respectivamente, esto es:

$$P_F[A \leq Q_F(p)] = p \quad y \quad P_G[A \leq Q_G(p)] = p$$

**Definición 1.2.1.3** *Diremos que la distribución $F$ domina a la distribución $G$ según FSD si y sólo si $Q_F(p) \geq Q_G(p)$, con desigualdad estricta para al menos un valor de $p$.*

La caracterización a través de los cuantiles permite establecer un algoritmo para comprobar si dadas dos muestras de las distribuciones, una domina a la otra según FSD. En concreto, sean $X$ e $Y$ dos v.as. de distribuciones $F$ y $G$ respectivamente, de las que se obtienen sendas muestras de tamaño $n$: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Dadas las observaciones anteriores, se obtienen sendas muestras ordenadas, que denotaremos por $\left\{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right\}$ e $\left\{y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(n)}\right\}$ respectivamente, es decir, que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$ e $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq ... \leq y_{(n)}$.

Se le asigna una probabilidad de $1/n$ a cada observación (si hubiera dos observaciones idénticas, se sitúa una detrás de la otra y se asignará probabilidad $1/n$ a cada una).

El algoritmo para comprobar FSD se enuncia como sigue:

| |
|---|
| **Input:** Sendas muestras $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. |
| **Paso 1, Ordenación de las muestras:** |
| $\{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\}$ e $\{y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(n)}\}$ |
| **Paso 2, Comprobación:** $F$ (o $X$) domina a $G$ (o $Y$) según FSD si y sólo si $x_{(i)} \geq y_{(i)}$ para todo $i = 1, 2, ..n$ y existe al menos una desigualdad estricta. |
| **Output:** La respuesta indicará si existe o no FSD entre las muestras. |

Figura 1.2: *Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de primer orden.*

Esto implica que $x_{(i)} \geq y_{(i)}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ y que $\exists i_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $x_{i_0} > y_{i_0}$, entonces, dado que a cada observación se la ha asignado una probabilidad de $1/n$, $F$ debe estar por debajo de $G$ y en alguna zona del rango debe ser estrictamente menor, que es precisamente la definición de FSD.

En efecto:

$F(x_{(i)}) = i/n$, para todo $i = 1, ..., n$, entonces, para todo $p \in \left\{\frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$, se tendrá que $Q_F(p) \geq Q_G(p)$ y para algún $p_0$: $Q_F(p_0) > Q_G(p_0)$, es decir, se tiene la definición de FSD utilizando los cuantiles.

De manera análoga, si $x_{(i)} \geq y_{(i)}$ con desigualdad estricta para algún índice, pero $\exists j \in \{1, ..., n\}$ tal que $x_{(j)} < y_{(j)}$, entonces $F$ debe cortar a $G$, por tanto, no existe FSD.

### 1.2.2. Vectores aleatorios

El concepto de dominancia estocástica en el sentido usual en el caso de vectores aleatorios puede establecerse en la forma siguiente observando el concepto de “conjunto creciente ”. Diremos que un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es creciente si $y \in U$ siempre que exista un $x \in U$ tal que $x \leq y$, siendo $\leq$ el orden definido sobre los elementos de un vector.

**Definición 1.2.2.1** *Dados dos vectores reales aleatorios* $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ *e* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$*, diremos que* $\boldsymbol{X}$ *es estocásticamente menor que* $\boldsymbol{Y}$ *según FSD y escribiremos* $\boldsymbol{X} \leq_{st} \boldsymbol{Y}$ *o también* $\boldsymbol{X} \leq_{FSD} \boldsymbol{Y}$*, si y sólo si*

$$P[\boldsymbol{X} \in U] \leq P[\boldsymbol{Y} \in U]$$

*para todo conjunto creciente* $U \in \mathbb{R}^n$*.*

**Observación 1.2.2.1** *En el caso particular de considerar dos variables aleatorias reales, la definición anterior corresponde a la Definición 1.2.1.1 con* $U$ *de la forma* $[0, \infty)$ *ó* $(u, \infty)$*, con* $u \in \mathbb{R}$*.*

A continuación se presentan caracterizaciones alternativas para FSD en el caso de vectores aleatorios.

**Proposición 1.2.2.1** *Dados dos vectores reales aleatorios* $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ *e* $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)$*, entonces* $\boldsymbol{X} \leq_{FSD} \boldsymbol{Y}$ *equivale a que se tengan cualquiera de las siguientes dos condiciones:*

*a. Existen vectores aleatorios* $\widehat{\boldsymbol{X}}$ *e* $\widehat{\boldsymbol{Y}}$*, definidos en un espacio de probabilidad común* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, tales que* $\widehat{\boldsymbol{X}} =_{FSD} \boldsymbol{X}$*,* $\widehat{\boldsymbol{Y}} =_{FSD} \boldsymbol{Y}$ *y* $\widehat{\boldsymbol{X}}(\omega) \leq \widehat{\boldsymbol{Y}}(\omega)$ *para casi todo* $\omega \in \Omega$*.*

*b.* $E[f(\boldsymbol{X})] \leq E[f(\boldsymbol{Y})]$ *para toda función creciente real* $f$ *en* $\mathbb{R}^n$ *siempre que dicha esperanza exista.*

**Demostración.** Para la demostración ver Stoyan (1983) o Szekli (1995). ■

### 1.2.3. Procesos estocásticos

En lo que sigue, $\Gamma$ se referirá a uno de los siguientes conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_+$ o $\mathbb{R}_+$.

**Definición 1.2.3.1** *Dados dos procesos estocásticos $X = (X_t)_{t\in\Gamma}$ e $Y = (Y_t)_{t\in\Gamma}$ con espacio de estados común $I$, diremos que $X$ es estocásticamente menor que $Y$ según FSD y denotaremos $X \leq_{FSD} Y$, si y sólo si*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \leq_{FSD} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$$

*para todo $n \in \mathbb{N}_+$ y $t_1, t_2, ..., t_n \in \Gamma$.*

Stoyan (1983, Definición 4.1.2.) lo denomina dominancia estricta de procesos estocásticos en contraposición con la dominancia débil, que también presenta en su Definición 4.1.2., en la que sólo se requiere $X_t \leq_{FSD} Y_t$, para todo $t \in \Gamma$. (Ver también Muller y Stoyan (2002, Definición 5.1.2.)).

Tenemos la siguiente caracterización de FSD en el caso de procesos estocásticos.

**Proposición 1.2.3.1** *Dados dos procesos estocásticos $X = (X_t)_{t\in\Gamma}$ e $Y = (Y_t)_{t\in\Gamma}$ con espacio de estados común $I$, entonces $X \leq_{FSD} Y$, si y sólo si se da alguna de las condiciones siguientes:*

*a. Existen procesos estocásticos $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$, definidos en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, tales que $\widehat{X} =_{FSD} X$, $\widehat{Y} =_{FSD} Y$ y $\widehat{X_t}(\omega) \leq \widehat{Y}_t(\omega)$ para casi todo $\omega \in \Omega$.*

*b. $E[f(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})] \leq E[f(Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})]$ con $n \in \mathbb{N}_+$, $t_1, t_2, ..., t_n \in \Gamma$ y para toda función creciente real $f$, siempre que dicha esperanza exista.*

**Demostración.** Para la demostración ver Stoyan (1983) o Szekli (1995). ■

El siguiente resultado es una propiedad muy importante de la dominancia según FSD.

**Teorema 1.2.3.1** *Dos procesos estocásticos $X = (X_t)_{t\in\Gamma}$ e $Y = (Y_t)_{t\in\Gamma}$ con espacio de estados común $I$ satisfacen $X \leq_{FSD} Y$ si y sólo si existen dos procesos $\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t\in\Gamma}$ e $\hat{Y} = (\hat{Y}_t)_{t\in\Gamma}$, definidos en el mismo espacio de probabilidad, tales que*

$$\hat{X} =_{FSD} X \tag{1.3}$$

$$\hat{Y} =_{FSD} Y \tag{1.4}$$

*y*

$$P[\hat{X}(t) \leq \hat{Y}(t), t \in \Gamma] = 1 \tag{1.5}$$

**Demostración.** Se trata de una generalización de la Proposición. 1.2.2.1 (a), ver Stoyan (1983). ■

**Teorema 1.2.3.2** *Sean $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos procesos estocásticos en tiempo discreto. Si*

$$X(0) \leq_{FSD} Y(0) \tag{1.6}$$

*y*

$$[X(i)|X(1) = x_1, ..., X(i-1) = x_{i-1}] \leq_{FSD} [Y(i)|Y(1) = y_1, ..., Y(i-1) = y_{i-1}], \tag{1.7}$$

*siempre que $x_j \leq y_j, j = 1, 2, ..., i-1, i = 1, 2, ....$*

*Entonces*

$$X \leq_{FSD} Y$$

**Demostración.** Primeramente se construyen $\hat{X}(0)$ e $\hat{Y}(0)$ definidos en el mismo espacio de probabilidad[1]. Esto es posible por (1.6). Cualquier realización $(x, y)$ de $(\hat{X}, \hat{Y})$ cumple $x \leq y$.

Condicionado en toda posible realización $(x, y)$, se construye $(\hat{X(1)}, \hat{Y(1)})$ en el mismo espacio de probabilidad. Esto es posible por (1.7). Cualquier posible realización $((x, y), (z, t))$ de $((\hat{X(0)}, \hat{X}(1)), (\hat{Y}(0), \hat{Y}(1)))$ cumple $x \leq z$ e $y \leq t$.

[1]Se usa la siguiente propiedad: Si $F$ es una función de distribución y $U \sim U(0, 1)$, entonces $F^{-1}(U) \sim F$.

Y así sucesivamente se construyen los procesos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ tal y como se ha descrito. De esta manera se obtienen dos procesos $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ que cumplen $P[\hat{X} \leq \hat{Y}] = 1$. Por construcción, también cumplen $\hat{X} =_{FSD} X$ e $\hat{Y} =_{FSD} Y$. Así, usando Teorema 1.2.3.1 se tiene que $X \leq_{FSD} Y$. ■

El orden FSD para procesos estocásticos es cerrado bajo transformaciones crecientes, al igual que en el caso FSD para v.as. y vectores aleatorios, es decir, que si

$$X \leq_{FSD} Y$$

entonces

$$g(X) \leq_{FSD} g(Y)$$

siendo $g$ una función creciente y $X$ e $Y$ dos procesos estocásticos. También se verifica que esta ordenación es cerrada bajo mixturas.

Sean ahora dos procesos de Markov homogéneos en tiempo discreto

$$X = (X(n))_{n\in\mathbb{N}} \quad e \quad Y = (Y(n))_{n\in\mathbb{N}}$$

con espacio de estados común $I \subseteq \mathbb{R}$. Denotemos por $Z_X(x) =_{FSD} [X(n+1)|X(n) = x]$ y $Z_Y(x) =_{FSD} [Y(n+1)|Y(n) = x]$, $x \in I$.

**Teorema 1.2.3.3** *Sean $X$ e $Y$ dos procesos de Markov en las condiciones anteriores. Supongamos que $X(0) \leq_{FSD} Y(0)$ y que*

$$Z_X(x) \leq_{FSD} Z_Y(y), \quad x \leq y, \tag{1.8}$$

*entonces*

$$X \leq_{FSD} Y.$$

**Demostración.** La demostración se deduce directamente del Teorema 1.2.3.2. ■

Una variante del resultado anterior para el caso de cadenas de Markov (es decir, para procesos de Markov homogéneos en tiempo discreto y con espacio de estados en $\mathbb{N}$), se deduce de considerar una cadena de Markov skip free positiva, es decir, una cadena que no tiene saltos positivos de amplitud mayor que uno. Para una cadena de Markov $X = (X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados $I \subseteq \mathbb{N}$, sea $Z_X(i) =_{FSD} [X(n+1)|X(n) = i]$, $i \in I$.

**Teorema 1.2.3.4** *Sean $X = (X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $Y = (Y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dos cadenas de Markov. Supóngase que $X(0) \leq_{FSD} Y(0)$, que*

$$Z_X(i) \leq_{FSD} Z_Y(i), \forall i \tag{1.9}$$

*y*

$$Z_Y(i) \geq i, \forall i \tag{1.10}$$

*y que $X = (X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es skip-free positiva. Entonces $X \leq_{FSD} Y$.*

**Demostración.** Se trata de la aplicación del Teorema 1.2.3.3 para el caso de cadenas de Markov. La demostración se basa en la construcción de dos cadenas de Markov subyacentes en el mismo espacio de probabilidad y después usar el Teorema 1.2.3.1. ■

Si dos procesos estocásticos $X = (X_t)_{t\in\Gamma}$ e $Y = (Y_t)_{t\in\Gamma}$ verifican $X \leq_{FSD} Y$, entonces, en virtud del Teorema 1.2.3.1, los tiempos de primer paso

$$T_X(a) = \text{ínf}\,\{t : X(t) \geq a\} \tag{1.11}$$

y

$$T_Y(a) = \text{ínf}\,\{t : Y(t) \geq a\} \tag{1.12}$$

(con $\text{ínf}\,\emptyset = \infty$) satisfacen $T_X(a) \geq_{FSD} T_Y(a)$. El recíproco no es necesariamente cierto. Usando el Teorema 1.2.3.1 y el Teorema 1.2.3.4 podemos enunciar el siguiente resultado, cuya demostración se basa en construir de manera apropiada las cadenas de Markov subyacentes en el mismo espacio de probabilidad y aplicar el Teorema 1.2.3.1.

**Teorema 1.2.3.5** *Sean* $X = (X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $Y = (Y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *dos cadenas de Markov. Supóngase que* $X(0) \leq_{FSD} Y(0)$*,* $Z_Y(i) \geq i$*,* $\forall i$*, que*

$$Z_X(i) \leq_{FSD} Z_Y(i), \forall i \in I \tag{1.13}$$

*y que* $X = (X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es skip-free positiva. Entonces*

$$T_X(a) \geq_{FSD} T_Y(a),$$

*para todo* $a$*.*

**Demostración.** La demostración se construye a partir del Teorema 1.2.3.1 y el Teorema 1.2.3.4. ∎

Supóngase ahora que se desea comparar dos procesos $M(t)$ y $N(t)$, que representan el número de saltos que dos procesos estocásticos $X$ e $Y$ dan en un intervalo de tiempo $(0, t]$. Además de compararlos en el sentido FSD, se puede definir otro tipo de ordenaciones como el siguiente.

Para todo entero $m$, consideremos la sucesión $(B_n)_{n=1,2,...,m}$ de conjuntos borelianos sobre el conjunto $\mathbb{R}_+$. Sean $M(B_i)$ y $N(B_i)$ el número de saltos que los procesos dan en un conjunto $B_i$, $i = 1, ..., m$. Supongamos que para cualquier elección del entero $m$ y cualesquiera que sean los borelianos $B_1, ..., B_m$ se cumpliera que:

$$(M(B_1), ..., M(B_m)) \leq_{FSD} (N(B_1), ..., N(B_m)) \tag{1.14}$$

entonces diremos que el proceso $M(t)$ es menor que $N(t)$ en el sentido usual sobre el espacio de medidas aleatorias entero valuadas $\mathcal{N}$, y se denota por $M \leq_{FSD-\mathcal{N}} N$.

Terminamos este apartado con la noción de monoticidad interna de un proceso estocástico que ayuda a comprender el comportamiento del proceso en el tiempo.

**Definición 1.2.3.2** *Un proceso estocástico* $X = (X_t)_{t\in\Gamma}$ *es estocásticamente monótono creciente (decreciente) en el sentido usual si y sólo si* $X_{t_1} \leq_{FSD} (\geq_{FSD}) X_{t_2}$ *para todos* $t_1, t_2 \in \Gamma$ *tales que* $t_1 < t_2$*.*

Podemos aplicar la definición anterior al caso de procesos de Markov homogéneos en tiempo discreto. Un proceso de Markov homogéneo en tiempo discreto se dice estocásticamente monótono si $Z_X(x) =_{FSD} [X(n+1)|X(n)=x]$ es estocásticamente creciente en $x \in I$.

**Teorema 1.2.3.6** *Sea $X = (X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso de Markov homogéneo en tiempo discreto con $X(0) = x$. Entonces*

$$\left\{X^{(x)}(n), n \in \mathbb{N}\right\} \leq_{FSD} \left\{X^{(y)}(n), n \in \mathbb{N}\right\} \tag{1.15}$$

*siempre que $x \leq y$, con $\left\{X^{(x)}(n), n \in \mathbb{N}\right\}$ indicando el proceso $\{X(n), n \in \mathbb{N}\}$ bajo la condicón $X(0) = x$.*

**Demostración.** Es consecuencia directa del Teorema 1.2.3.3. ■

### 1.2.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de primer orden

Arbitraje

La relación de la FSD y el Arbitraje fue analizada por Jarrow (1986).

Desigualdad social

El análisis actual de la desigualdad social y económica y los conceptos relacionados de pobreza, se efectúa a través de los criterios de dominancia estocástica.

Los trabajos pioneros de Kolm (1969,1976) y Atkinson (1970) sobre la desigualdad económica son el punto de partida en el contexto de la economía del bienestar. El concepto de desigualdad ha sido tratado desde distintos puntos de vista como la Ética, la Sociología o la Filosofía.

En Economía no existe unanimidad en su significado, ni en su implementación práctica en lo referente a la desigualdad entre los distintos hogares.

La importancia de un análisis riguroso de la desigualdad económica es obvia, ya que los análisis de los modelos económicos actuales deben responder no sólo a criterios de eficiencia económica sino a criterios distributivos, debido a la fuerte presencia del Sector Público y de las Economías Regionales en el contexto actual.

Se sabe, en la teoría del bienestar social, que el teorema de imposibilidad de Arrow (1963) impide agregar preferencias ordinales individuales para obtener una función del bienestar social de acuerdo con unas propiedades razonables o criterios éticos. El conjunto de criterios éticos se representa por un conjunto de restricciones o supuestos, que reflejan las preferencias sociales sobre las distribuciones de renta, estableciendo órdenes parciales o incompletos en la comparación de la desigualdad.

La forma de resolver la imposibilidad consiste en definir una función del bienestar social individual sobre las utilidades de los individuos, independiente de los precios relativos, (Roberts (1980)), $W(U_1(Y_1)), ..., U_H(Y_H))$ siendo $Y = (Y_1, ..., Y_H)$ el vector de rentas iniciales de $H$ hogares, $U_i(Y_i)$ la utilidad de las preferencias individuales y $W(.)$ las preferencias sociales en el proceso de agregación.

**Definición 1.2.4.1** *La función de bienestar social $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de las distribuciones de renta, de forma tal que si " $\leq_W$ " indica el orden de preferencias sociales sobre $X$ e $Y$, perspectivas aleatorias, (es decir $X \geq_W Y$, $X$ domina débilmente a $Y$ desde el punto de vista social), en $\mathbb{R}$, entonces:*

$$X \geq_W Y \Leftrightarrow W(X) \geq W(Y)$$

**Definición 1.2.4.2** *Un índice de desigualdad $I(Y)$ es consistente con las distribuciones de bienestar social o con el orden de preferencias $W(Y)$, si dadas dos distribuciones $X$ e $Y$ cualesquiera definidas sobre $H$ hogares, con la misma renta media $\mu(X) = \mu(Y)$ es tal que:*

$$W(Y) \geq W(X) \equiv I(Y) \leq I(X)$$

La función de bienestar social es invariante ante permutaciones de niveles de renta, y por tanto, es simétrica, de lo que se deduce que los índices de desigualdad basados en estas funciones deben ser simétricos.

El principio de Pareto establece que dadas dos distribuciones de renta, si en una de ellas no se observan hogares con renta menor y se observa al menos un hogar con renta mayor, tendrá un nivel de bienestar no inferior a la otra, de ahí, la función de bienestar social es no decreciente.

**Definición 1.2.4.3** *Dadas dos distribuciones de renta $X$ e $Y$ de $H$ hogares, la distribución $X$ domina en primer grado a $Y$, es decir, $W(X) \geq W(Y)$ para toda función de bienestar social simétrica y no decreciente $W$, si y sólo si la función de distribución de $X$ no está nunca por encima de la de $Y$.*

Saposnik (1981, 1983) analiza en el contexto del bienestar la dominancia de primer grado.

En la teoría de la economía del bienestar o de la desigualdad, la dominancia de primer grado sólo considera la eficiencia en el sentido de Pareto, pero no sobre la desigualdad, ya que si se mantiene la renta constante, la comparación entre distribuciones diferentes, lo es entre distribuciones no comparables y el principio de anonimato establece que el bienestar es independiente de qué hogar recibe qué renta. Por ello interesa añadir restricciones que afecten a la desigualdad o a la dispersión, basándose en el principio de transferencias, Pigou (1912)-Dalton (1920), o desplazamientos que mantienen la media constante o transferencias progresivas.

**Definición 1.2.4.4** *(Principio de transferencias progresivas): Si dada una distribución de renta $X$ con $H$ hogares pasamos a otra $Y$ mediante una transferencia de un hogar rico a otro más pobre, sin que se altere el orden entre ellos, el bienestar de $Y$ será no inferior al de $X$. Ello requiere que la función de bienestar social sea s-cóncava.*

**Definición 1.2.4.5** *Una función $W(Y)$ es s-cóncava si $W(AY) \geq W(Y)$ para toda $A$ matriz biestocástica.*

La s-concavidad es una condición más débil que la concavidad y la simetría. Toda función s-cóncava es simétrica.

<u>Retorno de un activo</u>

Si $A \geq_{FSD} B$ entonces el retorno del activo dominante $A$ es la suma del retorno del activo $B$ más una v.a. positiva, i.e., $r_A = r_B + \vartheta$, donde $\vartheta$ representa la v.a. Esta relación se cumple ya que $E[U(r_A)] = E[U(r_B + \vartheta)] \geq E[U(r_B)]$ por ser $U$ una función no decreciente.

## 1.3. Dominancia Estocástica de Segundo Orden

SSD clasifica a los individuos que prefieren más a menos riqueza ($U' \geq 0$) y que son adversos o neutrales al riesgo ($U'' \leq 0$).

### 1.3.1. Variables aleatorias

Por simplicidad se consideran distribuciones con la misma media, ya que si las variables aleatorias con la misma media describen los retornos de dos inversiones con riesgo, entonces el decisor con aversión al riesgo elegirá aquella inversión con variabilidad más baja. De ahí que las ordenaciones de la variabilidad sean de gran interés en el contexto de la decisión bajo riesgo.

**Definición 1.3.1.1** *El activo $A$ domina a $B$ según SSD, y se denota $A \geq_{SSD} B$ si*

$$\int_{-\infty}^{x} (G(t) - F(t))\, dt \geq 0$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$ y con desigualdad estricta para al menos un valor de $x$. Siendo $F$ la función de distribución de $A$ y $G$ la de $B$.*

En el caso discreto la integral puede aproximarse por sumas, siempre que sea posible.

**Definición 1.3.1.2** *(SSD con utilidad esperada). El activo $A$ domina a $B$ en este sentido cuando $E[U(r_A)] \geq E[U(r_B)]$, $U'' \leq 0$, siendo $U$ la función de utilidad esperada y $r_A$ y $r_B$ los rendimientos de $A$ y $B$ respectivamente.*

Una caracterización importante de este tipo de dominancia a través de la construcción de espacios de probabilidad comunes es la siguiente.

**Teorema 1.3.1.1** *Dos variables aleatorias $X$ e $Y$ satisfacen $X \leq_{SSD} Y$ si y sólo si existen dos variables aleatorias $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ definidas en el mismo espacio de probabilidad, tales* *que* $\widehat{X} =_{FSD} X$*,* $\widehat{Y} =_{FSD} Y$*, y* $\left\{\widehat{Y}, \widehat{X}\right\}$ *es una supermartingala, es decir,* $E(\widehat{X}|\widehat{Y}) \leq \widehat{Y}$ *casi seguro.*

*Además las variables* $\widehat{X}$ *y* $\widehat{Y}$ *se pueden seleccionar de forma que* $[\widehat{X}|\widehat{Y} = x]$ *sea creciente en* $x$ *en el sentido de ordenación usual (FSD).*

**Demostración.** Ver Shaked y Shanthikumar (2007). ∎

A continuación se muestran ejemplos gráficos de SSD.

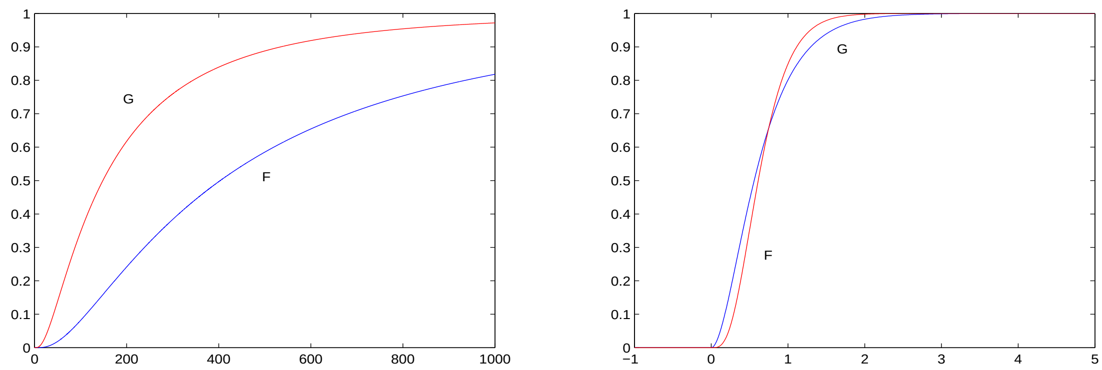



Figura 1.3: *Distribuciones* $F$ *y* $G$ *tales que* $F \geq_{SSD} G$*.*

En el gráfico de la izquierda se da FSD y SSD entre las distribuciones, se han dibujado dos lognormales $X \sim LN(6,1)$ e $Y \sim LN(5,1)$ ($G \leq_{FSD} F$ y $G \leq_{SSD} F$). En el gráfico de la derecha sólo se verifica el criterio SSD ($G \leq_{SSD} F$), en este caso se han representado dos distribuciones Gamma, $X \sim G(2, 1/3)$ e $Y \sim G(4, 1/6)$. Como se deriva de estos gráficos $FSD$ implica $SSD$ pero no al revés.

Al igual que en el caso FSD, SSD también puede caracterizarse a través de los cuantiles.

**Definición 1.3.1.3** *Diremos que* $F$ *domina a* $G$ *según* $SSD$ *si y sólo si*

$$\int_0^p [Q_F(t) - Q_G(t)]dt \geq 0$$

*para todo* $p$*, con desigualdad estricta para al menos algún valor* $p$*.*

La caracterización a través de los cuantiles permite establecer un algoritmo para comprobar si dadas dos muestras, una domina a la otra según SSD. En concreto, sean $X$ e $Y$ dos v.as. de distribuciones $F$ y $G$ respectivamente, de las que se obtienen sendas muestras de tamaño $n$: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

El procedimiento es parecido al del caso FSD, lo primero que se debe hacer es ordenar las muestras, denotadas por: $\left\{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right\}$ e $\left\{y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(n)}\right\}$ respectivamente, es decir, que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$ e $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq ... \leq y_{(n)}$.

Se le asigna una probabilidad de $1/n$ a cada observación (si hubiera dos observaciones idénticas, se sitúa una detrás de la otra y se asignará probabilidad $1/n$ a cada una).

Se construyen las secuencias $\{s_i\}_{i=1,...,n}$ y $\{s'_i\}_{i=1,...,n}$ como sigue:

$$\begin{cases} s_1 = x_{(1)} \\ s_2 = x_{(1)} + x_{(2)} \\ \vdots \\ s_k = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)} \\ \vdots \\ s_n = \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} s'_1 = y_{(1)} \\ s'_2 = y_{(1)} + y_{(2)} \\ \vdots \\ s'_k = \sum_{i=1}^{k} y_{(i)} \\ \vdots \\ s'_n = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)} \end{cases}$$

El algoritmo para comprobar SSD se enuncia así:

| |
|---|
| **Input:** Sendas muestras $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. |
| **Paso 1, Ordenación de las muestras:** $\left\{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right\}$ e $\left\{y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(n)}\right\}$ |
| **Paso 2:** Construcción de las secuencias $\{s_i\}_{i=1,...,n}$ y $\{s'_i\}_{i=1,...,n}$ |
| **Paso 3, Comprobación:** $F$ (o $X$) domina a $G$ (o $Y$) según SSD si y sólo si $s_i \geq s'_i$ para todo $i = 1, ..., n$ y existe al menos una desigualdad estricta. |
| **Output:** La respuesta indicará si existe o no SSD. |

Figura 1.4: *Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de segundo orden.*

### 1.3.2. Vectores aleatorios

**Definición 1.3.2.1** *Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ vectores aleatorios $n$ dimensionales tales que*

$$E[\Phi(\boldsymbol{X})] \leq E[\Phi(\boldsymbol{Y})]$$

*para toda función creciente y cóncava $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siempre y cuando exista dicha esperanza. En ese caso se dice que $\boldsymbol{X}$ es menor que $\boldsymbol{Y}$ según SSD (o en el sentido creciente cóncavo) y escribiremos $\boldsymbol{X} \leq_{SSD} \boldsymbol{Y}$.*

**Teorema 1.3.2.1** *Dos vectores aleatorios $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ satisafacen $\boldsymbol{X} \leq_{SSD} \boldsymbol{Y}$ si y sólo si existen vectores aleatorios $\widehat{\boldsymbol{X}}$ e $\widehat{\boldsymbol{Y}}$ definidos en el mismo espacio de probabilidad, tales que $\widehat{\boldsymbol{X}} =_{FSD} \boldsymbol{X}$, $\widehat{\boldsymbol{Y}} =_{FSD} \boldsymbol{Y}$, y $\left\{\widehat{\boldsymbol{Y}}, \widehat{\boldsymbol{X}}\right\}$ es una supermartingala, es decir,*

$$E(\widehat{\boldsymbol{X}}|\widehat{\boldsymbol{Y}}) \leq \widehat{\boldsymbol{Y}} \quad casi \quad seguro.$$

**Demostración.** Se trata de una generalización del Teorema 1.3.1.1, ver Shaked y Shantikumar (2007). ∎

### 1.3.3. Procesos estocásticos

En esta subsección se introduce el concepto de dominancia estocástica de segundo orden para procesos estocásticos en tiempo discreto y se establece un resultado básico que afirma que dos procesos estocásticos son comparables en este sentido, si y sólo si cualesquiera martingalas de dimensión finita asociadas a cada uno de ellos son comparables en dicho sentido.

**Definición 1.3.3.1** *Sean $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ e $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ dos procesos estocásticos en tiempo discreto y con espacio de estados $\mathbb{R}$. Supóngase que para cualquier elección de un entero $m$, ocurre que:*

$$(X(1), X(2), ..., X(m)) \leq_{SSD} (Y(1), Y(2), ..., Y(m))$$

*entonces se dice que el proceso $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ es menor según SSD que el proceso $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ y se escribe $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\} \leq_{SSD} \{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$.*

En el siguiente teorema se hará uso de funcionales cóncavos. He aquí su definición: se dice que un funcional $g$ es cóncavo si

$$g\left(\{\alpha x(n) + (1-\alpha)y(n), n \in \mathbb{N}_+\}\right) \geq \alpha g\left(\{x(n), n \in \mathbb{N}_+\}\right) + (1-\alpha) g\left(\{y(n), n \in \mathbb{N}_+\}\right)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$ y $\{x(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ e $\{y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$.

**Teorema 1.3.3.1** *Sean $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ e $\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ procesos estocásticos en tiempo discreto y con espacio de estados $\mathbb{R}$. Entonces $\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\} \leq_{SSD} \{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}$ si y sólo si*

$$E[g\left(\{X(n), n \in \mathbb{N}_+\}\right)] \leq E[g\left(\{Y(n), n \in \mathbb{N}_+\}\right)] \tag{1.16}$$

*para todo funcional continuo (con respecto a la topología producto de $\mathbb{R}^{\infty}$) y cóncavo creciente, siempre que dicha esperanza exista.*

**Demostración.** Ver Shaked y Shanthikumar (2007). ∎

### 1.3.4. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de segundo orden

Retorno de un activo

Stiglitz (1970) demostró que $A \geq_{SSD} B$ si y sólo si $r_B = r_A + \xi \Rightarrow E[\xi | r_A] = 0$ . Es decir, el retorno del activo $B$ es igual al retorno del activo $A$ más una variable aleatoria ortogonal al retorno de $A$. Obsérvese que $r_A$ y $r_B$ tienen igual media, pero el retorno del activo $B$ tiene mayor varianza y por lo tanto más riesgo.

Una conexión natural entre la variabilidad de las v.as. y las ordenaciones estocásticas se basan en las funciones reales convexas.

En otros contextos, a este tipo de dominancia se la denota por " $\leq_{icv}$" (incresing concave order). En Ross (1983) se dice estocásticamente más variable y se indica por " $\leq_v$". Stoyan (1983) la denomina menor en vida residual media y la designa por "$\leq_c$". En las ciencias actuariales se conoce como orden de pérdida-parada (stop-loss order) y se indica por " $\leq_{sl}$". El orden convexo se conoce en ese campo como el orden de pérdida-parada con medias idénticas y se indica por " $\leq_{sl,=}$ ".

Desigualdad social

Desde el punto de vista de la Economía del bienestar se tiene lo siguiente:

**Definición 1.3.4.1** *Dadas dos distribuciones de renta de $H$ hogares $X$ e $Y$, con la misma renta media, la distribución $X$ domina en segundo orden a $Y$ si y sólo si las funciones de distribución acumuladas verifican*

$$\sum_{0}^{x_i} F_X(x_i) \leq \sum_{0}^{y_j} F_Y(y_j), \forall x_i = y_j$$

El criterio se establece de forma equivalente en términos de la curva de Lorenz, que es la proporción de renta acumulada que recibe el porcentaje $p$ más pobre de la población. La curva de Lorenz $L_X$ se calcula como:

$$L_X(p) = \frac{\sum_0^{x_i} x_j}{H\mu(X)} \tag{1.17}$$

siendo $p = F_X(H_i) = i/H$ y $\mu(X)$ la renta media de la distribución.

Otra forma de definir la curva de Lorenz asociada a una v.a. $X$ en la que se hace uso de la inversa de su función de distribución $F$ y su esperanza, siempre que esta exista y sea no nula, es la siguiente:

$$L_X(p) = \frac{1}{E(X)} \int_0^p F^{-1}(u)du, p \in [0, 1] \tag{1.18}$$

Esta función es convexa en $(0, 1)$.

Dadas dos distribuciones de renta de $H$ hogares $X$ e $Y$, con la misma renta media, la distribución $X$ domina en segundo grado a $Y$ si y sólo si la curva de Lorenz de $X$ no va nunca por debajo de la de $Y$, es decir, $L_X(p) \geq L_Y(p), \forall p \in (0, 1)$.

Este test de dominancia genera un orden parcial o incompleto, pues situaciones con la misma renta, en que estas funciones transformadas se cortan, son incomparables.

Haciendo uso de la definición de la curva de Lorenz dada en (1.18), se puede definir un nuevo tipo de ordenación estocástica entre v.as., conocida como ordenación en el sentido de Lorenz.

**Definición 1.3.4.2** *Dadas $X$ e $Y$ v.as. con curvas de Lorenz asociadas $L_X$ y $L_Y$ respectivamente, se dice que $X$ es menor que $Y$ en el sentido de Lorenz ($X \leq_{Lo} Y$) si*

$$L_Y(p) \leq L_X(p)$$

*para todo $p \in [0,1]$.*

**Observación 1.3.4.1** *Si las v.as. $X$ e $Y$ con distribuciones $F$ y $G$ respectivamente, verifican $X \geq_{SSD} Y$ y $E(X) \leq E(Y)$, entonces se tiene la siguiente equivalencia*

$$X \geq_{SSD} Y \Longleftrightarrow X \leq_{Lo} Y \tag{1.19}$$

**Demostración.** Basta observar que

$$X \geq_{SSD} Y \Longleftrightarrow \int_0^p F^{-1}(u)du \geq \int_0^p G^{-1}(u)du, \quad \forall u,$$

y la definición de dominancia en el sentido de Lorenz. ■

**Observación 1.3.4.2** *Algunos autores definen la ordenación de Lorenz variando el sentido de la desigualdad, es decir $X \geq_{Lo} Y$ si y sólo si $L_X(p) \geq L_y(p)$, para todo $p \in [0,1]$.*

Shorrocks (1983) y Kakwani (1984) consideran restricciones para analizar la dominancia de segundo grado con renta media variable, que afectan a la desigualdad y eficiencia.

**Definición 1.3.4.3** *Dadas dos distribuciones de renta de $H$ hogares $X$ e $Y$ la distribución $X$ domina en segundo grado a $Y$, para toda función de bienestar social no decreciente s-cóncava, $W$ si y sólo si $GL_X(p) \geq GL_Y(p), \forall p \in (0,1)$ donde $GL$ es la curva de Lorenz generalizada (Shorrocks (1983)), con $GL_X(p) = \mu(X)L_X(p)$, siendo $\mu(X)$ la esperanza matemática de $X$.*

Cuando las curvas de Lorenz generalizadas se cortan las situaciones son incomparables de acuerdo con este principio de dominancia.

Una generalización de la curva de Lorenz es la función de distribución ponderada $\hat{F}_\omega$ asociada a una distribución $F$ de una v.a. $X$. Dicha distribución ponderada estará asociada a una v.a. a la que llamaremos v.a. ponderada y se denota $\hat{X}_\omega$.

**Definición 1.3.4.4** *Sea $X$ una v.a. con distribución $F$. Sea $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función tal que $0 < E[\omega(X)] < \infty$. Entonces*

$$\hat{F}_\omega(x) = \frac{1}{E[\omega(X)]}\int_{-\infty}^{x} \omega(u)dF(u) = \frac{1}{E[\omega(X)]}\int_{0}^{F(x)} \omega F^{-1}(z)dz$$

*es una función de distribución, llamada función de distribución ponderada asociada a $F$. En el caso de que existiera densidad $f$, entonces la densidad ponderada es*

$$\hat{f}_\omega = \frac{\omega(x)f(x)}{E[\omega(x)]}$$

*Si $F(0) = 0$ y $\omega(x) = x^k, k \in \mathbb{Z}_+$, diremos que $\hat{F}_\omega$ es una distribución de longitud sesgada de orden $k$ y se denota $\hat{F}_{(k)}$ y si $k = 1$, $\hat{F}$ (en caso de existir densidad, $\hat{f}_{(k)}$ y $k = 1$, $\hat{f}$, respectivamente)*

**Observación 1.3.4.3** *En el caso de que la función de ponderación $\omega(x)$ fuera la identidad y $0 < E(X) < \infty$ se tendría la expresión de la curva de Lorenz vista anteriormente.*

Existen numerosas aplicaciones que utilizan este tipo de distribuciones, especialmente las relacionadas con el análisis de datos relativos a poblaciones y ecología (ver Patil y

Rao (1977), (1978)). También en el ámbito de la fiabilidad (Gupta y Keating (1986)) y en el estudio de distribuciones de vida (Jain (1989), Bartoszewicz y Skolimowska (2004)(a), (b) y Belzunce (2004)).

Muchas distribuciones muy conocidas en estadística se pueden expresar usando este tipo de distribuciones ponderadas, por ejemplo, distribuciones de estadísticos de orden, funciones truncadas, procesos de renovación, etc.

## 1.4. Dominancia Estocástica de Tercer Orden

### 1.4.1. Variables aleatorias

El concepto de Dominancia Estocástica de Tercer Orden fue introducido por Withmore en 1970.

**Definición 1.4.1.1** *Diremos que el activo $A$ domina a $B$ según TSD y se denota por $A \geq_{TSD} B$ si*

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{v} (G(t) - F(t))\, dtdv \geq 0$$

*para todo $x$ y $E_F(A) \geq E_G(A)$.*

Al igual que en los casos FSD y SSD, se puede caracterizar TSD según las funciones de utilidad.

**Definición 1.4.1.2** *(TSD con utilidad esperada). El activo $A$ domina a $B$ en este sentido cuando $E[U(r_A)] \geq E[U(r_B)]$, siendo $U$ la función de utilidad esperada cumpliendo $U' \geq 0, U'' \leq 0, U''' \geq 0$ y $r_A$ y $r_B$ los rendimientos de $A$ y $B$ respectivamente.*

En otros contextos, a este tipo de dominancia se la denota por $\leq_{3-icv}$ (increasing 3-concave order).

En este caso también existe una caracterización a través de cuantiles.

**Definición 1.4.1.3** *Diremos que la distribución $F$ domina a la distribución $G$ según TSD si y sólo si:*

$$\int_0^p \int_0^t [Q_F(z) - Q_G(z)] dz dt \geq 0$$

*para todo p, con desigualdad estricta para al menos para algún valor p y*

$$\int_0^1 [Q_F(t) - Q_G(t)] dt \geq 0$$

En este caso, la construcción del algoritmo resulta más compleja que en los casos FSD y SSD, debido principalmente a la propia definición de dominancia de tercer orden en la que aparece una integral doble. Por ello, no es posible realizar comparaciones sólo en los puntos donde se produce el salto de la función de distribución (como en el caso FSD y SSD), ya que en este caso la integral no es lineal, cosa que sí ocurría en los dos casos anteriores y por ello un punto interior puede violar la condición de TSD.

Uno de los primeros autores en hacer notar este punto fue Fishburn (1970). El algoritmo propuesto inicialmente en la literatura realizaba comparaciones sólo en los puntos donde se producían los saltos, lo cual es erróneo.

El algoritmo descrito resuelve el problema planteado, la resolución mediante la comparación de una cierta función en los puntos interiores.

Sean:

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t) dt \quad y \quad F_3(x) = \int_{-\infty}^{x} F_2(t) dt$$

con $F$ la función de distribución de la v.a. $X$. De manera análoga se definen $G_2$ y $G_3$.

Sean sendas muestras ordenadas que provienen de dos v.as. $X$ e $Y$: $\left\{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right\}$ e $\left\{y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(n)}\right\}$ respectivamente, es decir que $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(n)}$ e $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq ... \leq y_{(n)}$. Considérese la muestra conjunta $\{z_1, z_2, ..., z_{2n}\}$, en la que todo $z_k$ coincide o bien con un $x_{(i)}$ o bien con un $y_{(i)}$.

De esta manera, las funciones pueden expresarse como:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x < x_{(1)} \\ \frac{1}{n}, & si \quad x_{(1)} \leq x < x_{(2)} \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n}, & si \quad x_{(n-1)} \leq x < x_{(n)} \\ 1, & si \quad x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \leq x_{(1)} \\ \frac{(x - x_{(1)})}{n}, & si \quad x_{(1)} \leq x \leq x_{(2)} \\ \vdots & \\ \frac{kx}{n} - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} x_{(i)}\right), & si \quad x_{(k)} \leq x \leq x_{(k+1)} \\ \vdots & \\ x - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\right), & si \quad x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \leq x_{(1)} \\ \frac{1}{2n}(x - x_{(1)})^2, & si \quad x_{(1)} \leq x \leq x_{(2)} \\ \vdots & \\ F_3(x_{(k)}) + \frac{k}{2n}(x^2 - x_{(k)}^2) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} x_{(i)}\right)(x - x_{(k)}), & si \quad x_{(k)} \leq x \leq x_{(k+1)} \\ \vdots & \\ F_3(x_{(n)}) + \frac{1}{2}(x^2 - x_{(n)}^2) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}\right)(x - x_{(n)}), & si \quad x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

Y finalmente sea $H(x) = G_3(x) - F_3(x)$

Se supone, sin pérdida de generalidad, que $G$ no domina a $F$ según TSD y probemos si $F$ domina a $G$ según este criterio.

Para comprobar si $F$ domina a $G$ según TSD es suficiente verificar las tres condiciones siguientes:

1. $E_F(X) \geq E_G(X)$
2. $F_3(z) \leq G_3(z)$ para todo $z \in \left\{x_{(i)}, y_{(i)}\right\}_{i=1,\ldots,n}$. (Comprobación de la integral en los puntos de salto) .
3. Si para algún $k$,
$$0 \geq H'(z_k) = G_2(z_k) - F_2(z_k)$$
y
$$0 \leq H'(z_{k+1}) = G_2(z_{k+1}) - F_2(z_{k+1})$$
comprobar si $H(\frac{-b}{2a}) \geq 0$, siendo $\frac{-b}{2a}$ el vértice de la parábola $H$, que está en el intervalo $[z_k, z_{k+1}]$.

De esta manera se puede escribir el siguiente algoritmo de comprobación de TSD:

**Input:** Dos muestras: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ proviene de una v.a. $X$ con distribución $F$ e $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ proviene de una v.a. $Y$ de distribución $G$.
**Paso 1, Ordenación de las muestras:**
$\left\{x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}\right\}$ e $\left\{y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{(n)}\right\}$
**Paso 2:** Construcción de la secuencia $\{z_i\}_{i=1,\ldots,2n}$
**Paso 3:** Construcción de las funciones $F_2$, $F_3$, $G_2$, $G_3$ y $H$.
**Paso 4, Comprobación:** $F$ (o $X$) domina a $G$ (o $Y$) según TSD si se verifican las tres condiciones anteriores (1., 2. y 3.)
**Output:** La respuesta indicará si existe o no TSD de $F$ sobre $G$.

Figura 1.5: *Algoritmo de contraste de la dominancia estocástica de tercer orden.*

### 1.4.2. Aplicaciones económicas de la dominancia estocástica de tercer orden

Desigualdad social y economía del bienestar

Dada una transferencia fija progresiva entre dos individuos separados por la misma renta, esta tiene un mayor impacto sobre la reducción de la desigualdad de producirse en un tramo bajo de renta que en un tramo más alto (Kolm (1976)), este principio se denomina principio de las transferencias decrecientes.

Shorrocks y Foster (1987) y Dardoni y Lambert (1988), establecen las condiciones para la dominancia de tercer grado cuando se produce un único corte de las curvas de Lorenz y las distribuciones tienen la misma renta media.

**Definición 1.4.2.1** *Dadas dos distribuciones de renta de $H$ hogares $X$ e $Y$ con la misma media y la curva de Lorenz generalizada de $X$ corta a la de $Y$ una única vez desde arriba y por la izquierda, diremos que la distribución $X$ domina en tercer grado a $Y$, es decir, $W(X) \geq W(Y), \forall W = \sum U(Y_i)$ con $U' \geq 0, U'' \leq 0, U''' \geq 0$ si y sólo si la varianza es menor, es decir, $\sigma^2(X) \leq \sigma^2(Y)$.*

Davies y Hoy (1995) estudiaron el caso de cruces múltiples entre las curvas de Lorenz y renta media constante y Lambert (1988) el caso en que la renta media fuera variable.

Por tanto, para la dominancia de tercer grado se requieren como condiciones necesarias y suficientes que la curva de Lorenz de $X$ corte a la de $Y$ por arriba (lo que implica que la renta mínima de $X$ es no menor a la de $Y$), que la media de $X$ no sea menor a la de $Y$ y que la varianza de $X$ de todas las subpoblaciones acumuladas en los puntos en los que las curvas de Lorenz generalizadas se cortan, no sean mayores a los de $Y$. Por tanto, si estas condiciones se verifican, entonces la distribución de $X$ puede obtenerse de la distribución de $Y$ mediante un conjunto de transferencias simétricas de Pareto, un conjunto de transferencias progresivas y de transferencias compuestas que mantienen la media y la varianza constantes y que en su conjunto no disminuyen el bienestar.

## 1.5. Otros tipos de dominancia estocástica

Además de las relaciones de dominancia anteriores, existen muchas otras. En este apartado se muestran algunas de ellas poniendo especial interés en aquellas que son de utilidad en el campo de la Economía.

Ordenación según la razón de verosimilitud

Este tipo de dominancia es utilizada en el campo de la fiabilidad.

**Definición 1.5.0.2** *Sean $X$ e $Y$ v.as. con densidades $f_X$ y $f_Y$ respectivamente. Se dice que $X$ es estocásticamente menor que $Y$ según la razón de verosimilitud si $f_X(t)/f_Y(t)$ es decreciente en la unión de los soportes de $X$ e $Y$, denotándose $X \leq_{lr} Y$.*

Un ejemplo de este tipo de ordenación es el siguiente:

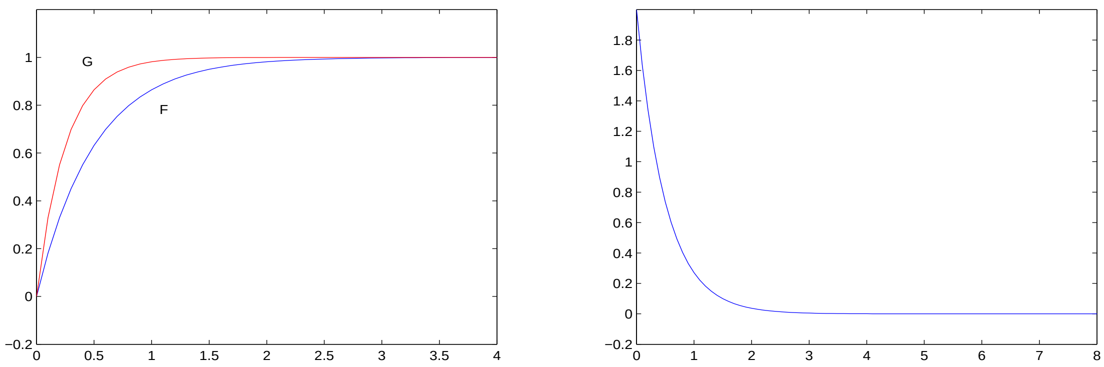



Figura 1.6: *A la izquierda distribuciones $F$ y $G$ tales que $F \geq_{lr} G$. A la derecha el cociente de densidades decreciente*

A la izquierda se representan dos distribuciones $F$ que proviene de $X \sim \exp(1/2)$ y $G$ que proviene de una $Y \sim \exp(1/4)$. A la derecha se muestra el gráfico correspondiente al cociente de las densidades de dichas v.as. y como se puede observar, es una función decreciente, luego $X \geq_{lr} Y$.

El siguiente lema nos relaciona la dominancia en este sentido con la convexidad.

**Lema 1.5.0.1** *$X \leq_{lr} Y$ si y sólo si la función $F_Y[F_X^{-1}(x)]$ es convexa.*

**Demostración.** Se probará el caso continuo. $F_Y[F_X^{-1}(x)]$ es convexa si y sólo si $\frac{f_Y(f_X^{-1}(x))}{f_X(f_X^{-1}(x))}$ es creciente, y de aquí, si y sólo si $X \leq_{lr} Y$. ■

La dominancia según la razón de verosimilitud implica la dominancia estocástica de primer orden, pero el recíproco no es cierto.

En el ámbito de la fiabilidad se pretende caracterizar el envejecimiento de cualquier item y esto se realiza normalmente en función de su tasa de fallo y comparaciones estocásticas entre dichas funciones.

Dominancia estocástica en el sentido de tasa de fallo

**Definición 1.5.0.3** *Sean $X$ e $Y$ v.as., siendo $X$ continua e $Y$ discreta. Entonces se definen sus respectivas funciones de tasa de fallo por*

$$r_X(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$$

$$r_Y(y) = \frac{P[Y = y]}{P[Y \geq y]}$$

Al comparar las funciones de tasa de fallo de dos v.as. se establece otra relación de orden estocástica.

**Definición 1.5.0.4** *Sean $X$ e $Y$ v.as. con funciones de tasa de fallo $r_X$ y $r_Y$ respectivamente. $X$ es estocásticamente menor que $Y$ según la tasa de fallo y se denota por $X \leq_{hr} Y$ si y sólo si $r_X(t) \geq r_Y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Esta condición se formula en el caso continuo como $\frac{\bar{F}_X(t)}{\bar{F}_Y(t)}$ decreciente en $t$, y en el caso discreto como $\frac{P[X \geq t]}{P[Y \geq t]}$ decreciente para todo $t$ que pertenezca a la unión de los soportes de $X$ e $Y$.

Dominancia estocástica en el sentido de orden inverso de tasa de fallo

**Definición 1.5.0.5** *Sean $X$ e $Y$ v.as. con distribuciones $F$ y $G$ respectivamente. Diremos que $X$ es menor que $Y$ según el orden inverso de tasa de fallo y denotaremos $X \leq_{rh} Y$, si $G(t)/F(t)$ es creciente en $t \in \mathbb{R}$ o $\check{r}_F(t) \geq \check{r}_G(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, si $X$ e $Y$ son absolutamente continuas, siendo $\check{r}_F(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ la función de tasa de fallo (o tasa de azar) inversa de $X$ (análogamente para $Y$).*

La cadena de implicaciones entre los tipos de dominancia vistos hasta ahora es:

$$lr \Longrightarrow \begin{cases} hr \\ \\ rh \end{cases} \Longrightarrow FSD \Longrightarrow SSD \Longrightarrow TSD.$$

Orden de estrella

**Definición 1.5.0.6** *Dadas $X$ e $Y$ v.as. diremos que $X$ es menor que $Y$ según el orden de estrella y lo denotaremos por $X \leq_* Y$, si $G^{-1}F$ tiene forma de estrella (star-shaped), es decir, si $\frac{G^{-1}F(x)}{x}$ es creciente en $x > 0$, siendo $F$ y $G$ las funciones de distribución de $X$ e $Y$ respectivamente.*

En la selección óptima de carteras, se suelen utilizar los criterios básicos de dominancia estocástica (SD) FSD, SSD y TSD. En el caso de selección de activos sin riesgo, los criterios de SD se denotan por SDR.

Dominancia estocástica en el caso de activos sin riesgo

**Definición 1.5.0.7** *Diremos que el activo $A$ domina al $B$ en el sentido SDR si y sólo si para todo elemento de $\{B_\beta\}$ existe por lo menos un elemento en $\{A_\alpha\}$ que le domina en el sentido SD, donde $\{A_\alpha\}$ y $\{B_\beta\}$ contienen todas las combinaciones lineales de los bienes sin y con riesgo dadas por: $A_\alpha = \alpha A + (1-\alpha)r$ y $B_\beta = \beta B + (1-\beta)r$ con $\alpha, \beta > 0$ y $r$ la prima de riesgo.*

De manera análoga, denotaremos las reglas FSD, SSD y TSD cuando existen activos sin riesgo por FSDR, SSDR, y TSDR respectivamente.

SDR proporciona una decisión precisa relativa a SD. Supongamos que las distribuciones $F$ y $G$ intersecan, en este caso no se puede aplicar la regla FSD. Sea $F_\alpha$, obtenida a partir de $F$ teniendo en cuenta los activos de riesgo, esta $F_\alpha$ corresponde a la variable $A_\alpha$. $F_\alpha$ gira alrededor de la línea vertical $A = r$. Si se logra una combinación tal que $F_\alpha$ se localiza completamente por debajo de $G$, se tendrá que $F_\alpha$ domina a $G$ en el sentido FSD.

Es fácil probar que ese valor $\alpha$ existe y que para cualquier valor $\beta$ existe un $\gamma = \alpha \cdot \beta$ tal que $F_\gamma$ domina a $G_\beta$ y de aquí que $F$ domina a $G$. De esta forma, $F$ domina a $G$ incluso cuando existe riesgo y también en el caso en que no exista.

Se tiene en general SD$\Longrightarrow$ SDR, y FSDR$\Longrightarrow$ SSDR$\Longrightarrow$ TSDR.

# Capítulo 2

# Reglas de Media Varianza

## 2.1. Introducción

Las aproximaciones más usuales para comparar inversiones en riesgo están basadas en la media o esperanza matemática y en la varianza de las variables aleatorias que modelizan los activos.

**Definición 2.1.0.8** *Sean dos v.as. $X$ e $Y$ con esperanzas $\mu_X$ y $\mu_Y$ y varianzas $\sigma_X^2$ y $\sigma_Y^2$ respectivamente. Se dice que $X$ domina, o espreferida a $Y$ según las reglas de media varianza (MV) y se denota $X \geq_{MV} Y$ si $\mu_X \geq \mu_Y$ y $\sigma_X \leq \sigma_Y$, con al menos una desigualdad estricta.*

Por ejemplo, en el caso de poblaciones Normales:

**Ejemplo 2.1.0.1** *Considérense las v.as. $X$ e $Y$ que representan los retornos de dos activos, tales que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, entonces:*

- *El activo $X$ domina al activo $Y$ en primer orden si $\mu_1 \geq \mu_2$ y $\sigma_1 = \sigma_2$. Es decir, dado un nivel de riesgo, se elegirá el activo o cartera de mayor rendimiento.*
- *El activo $X$ domina al activo $Y$ en segundo orden si $\mu_1 = \mu_2$ y $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Es decir, dado un nivel de rendimiento, se elegirá el activo o cartera de menor riesgo.*

*Si se trabaja con el caso concreto de los siguientes activos:*

| Activo | Rendimiento (%) | Riesgo (%) |
|---|---|---|
| A | 25 % | 10 % |
| B | 25 % | 40 % |
| C | -2 % | 7 % |
| D | 16 % | 7 % |

Figura 2.1: *Rendimientos y riegos de los activos.*

*Dado un nivel de riesgo del 7 %, se elegirá D frente a C, ya que D proporciona mayor rendimiento según FSD. Dado un nivel de rendimiento del 25 %, se elegirá A frente a B, pues A tiene menor riesgo que B según SSD. Pero si se quiere elegir entre A y D, es necesario basarse en la función de utilidad del individuo, y se eligirá aquel que proporcione un mayor nivel de utilidad esperada.*

Esta metodología fue introducida por Markovitz en 1959. En esta aproximación, un inversor adverso al riesgo asigna una utilidad al activo, modelizado por la variable aleatoria $X$, que se define como:

$$U(X) = E(X) - \alpha Var(X), \alpha > 0 \tag{2.1}$$

donde $\alpha$ indica el grado de aversión al riesgo por parte del inversor.

La expresión (2.1) de la función de utilidad tiene sus inconvenientes ya que, el considerar la varianza en dicha expresión provoca inconsistencia con la regla de dominancia estocástica de primer orden. Veamos ejemplos de esta situación:

**Ejemplo 2.1.0.2** *Sea una v.a. $X$ con distribución de probabilidad dada por $P[X = 0] = P[X = x] = 0{,}5$ para algún $x > 0$. Considérese la v.a. $Y = 2X$. En este caso $X \leq_{FSD} Y$, pero para una utilidad definida como la expresión (2.1), entonces $U(X) > U(Y)$ para $x > 2/(3\alpha)$, con lo que $X$ sería preferida a $Y$.*

**Ejemplo 2.1.0.3** *La varianza no es una buena medida de riesgo ya que puede darse el caso de que se tengan dos opciones $X$ e $Y$ de igual media con varianza de $X$ mayor que la varianza de $Y$ y que exista una función de utilidad $u$ creciente y cóncava de manera que $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$, más aún, puede darse el caso en el que $E(X) < E(Y)$ y $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ y, en cambio, $Y$ no domina a $X$ para todos aquellos que tengan aversión al riesgo. Supónganse las v.as. $X$ e $Y$ tales que $P[X = 10] = 0{,}99$, $P[X = 1000] = 0{,}01$ y $P[Y = 1] = 0{,}8$, $P[Y = 100] = 0{,}2$. Como $E(X) = 19{,}9 < 20{,}8 = E(Y)$ y $\sigma_X^2 = 9703 > 1468 = \sigma_Y^2$, $Y$ domina a $X$ según MV, pero si por ejemplo el inversor tiene una función de utilidad de tipo logarítmica, $u(z) = \log(z)$, entonces, $E[u(X)] = 1{,}02 \geq 0{,}4 = E[u(Y)]$ y, por tanto, se prefiere $X$ frente a $Y$.*

Debido a esto, se ha intentado generalizar este concepto atendiendo a otras medidas de riesgo diferentes a la varianza y utilizando, por tanto, la siguiente expresión:

$$U(X) = E(X) - \alpha R(X), \alpha > 0 \tag{2.2}$$

siendo $R(X)$ otra medida de riesgo como puede ser la semi-varianza inferior, un momento de orden $r$, un cuantil, o una expresión funcional de cualquiera de las anteriores.

No obstante, el uso de la varianza como medida del riesgo proporciona buenos resultados si:

1. La función de utilidad es creciente, cóncava y cuadrática.
2. La función de utilidad es creciente, cóncava y las distribuciones son normales.
3. La función de utilidad es creciente, cóncava y las distribuciones son lognormales.

supuesto que $E(X) = E(Y)$.

Es de interés preguntarse si dichas funciones de utilidad propuestas son consistentes o no con las reglas de dominancia estocástica, es decir, si $X \leq_{SD} Y$, ¿se verificará que $U(X) \leq U(Y)$?, ¿bajo qué condiciones?

Existe una medida de riesgo consistente con los criterios de dominancia estocástica de primer y segundo orden:

$$\delta^{(1)}(X) = E[X - E(X)]_{-} = (E\left[max\left\{E(X) - X, 0\right\}\right]) = \frac{1}{2}E\left|X - E(X)\right| \tag{2.3}$$

que se puede generalizar a grado $k \in \mathbb{N}$ como sigue:

$$\delta^{(k)}(X) = \left(E\left[max\left\{E(X) - X, 0\right\}^{k}\right]\right)^{1/k} \tag{2.4}$$

Las fases de estudio del modelo de Markowitz son las siguientes:

1. Determinación de la frontera eficiente: es decir, del conjunto de opciones que maximizan la rentabilidad esperada dado un nivel de riesgo, o bien minimizan el riesgo dado un nivel de rentabilidad esperada, teniendo en cuenta las restricciones presupuestarias y siempre en base al supuesto de racionalidad del inversor (rentabilidad esperada positiva y el riesgo es un elemento no deseado). Este problema se resuelve mediante un problema de programación matemática.

2. Determinación del mapa de curvas de indiferencia: es decir, de los conjuntos de combinaciones rentabilidad-riesgo que son indiferentes para el inversor. Las curvas de indiferencia son crecientes, convexas, cortan al eje de ordenadas en la zona positiva y no se pueden cortar dos líneas entre sí.

3. Determinación de la cartera óptima: aquella que maximiza la satisfacción del inversor. Esta cartera deberá pertenecer a la frontera eficiente y debe ser el punto tangente de dicha frontera eficiente con la curva de indiferencia más alejada posible del eje de abcisas.

## 2.2. Principales resultados

En esta sección se comentarán los principales resultados relativos a la relación que se puede establecer entre las reglas SD y las de MV.

Recuérdese en primer lugar la definición de SD de un cierto orden $k \in \mathbb{N}$:

**Definición 2.2.0.9** *Se dice que la v.a. $X$ con distribución $F$ domina a la v.a. $Y$ con distribución $G$ según kSD ($X \geq_{kSD} Y$) si $F^{(k)}(z) \leq G^{(k)}(z)$ para todo $z$ y con al menos una desigualdad estricta para un $z_0$. Siendo $H^{(k)}(z) = \int_{-\infty}^{z} H^{(k-1)}(u)du$, $H = F, G$ y suponiéndose éstas bien definidas, es decir $E|X^{(k-1)}| < \infty$ y $E|Y^{(k-1)}| < \infty$.*

**Proposición 2.2.0.1** *Sea $k \geq 1$ y $X$ e $Y$ sendas v.as. tales que $E|X^{(k)}| < \infty$ y $E|Y^{(k)}| < \infty$ y esperanzas $\mu_X$ y $\mu_Y$ respectivamente. Si $X \geq_{kSD} Y$ entonces $\mu_X > \mu_Y$.*

**Demostración.** Se deriva directamente de las definiciones involucradas. ■

**Teorema 2.2.0.1** *Sea $k \geq 1$ y $X$ e $Y$ sendas v.as. tales que $E|X^{(k)}| < \infty$ y $E|Y^{(k)}| < \infty$ y esperanzas $\mu_X$ y $\mu_Y$ respectivamente. Si $X \geq_{(k+1)SD} Y$ entonces $\mu_X > \mu_Y$ y $\mu_X - \delta_X^{(k)} \geq \mu_Y - \delta_Y^{(k)}$, con al menos una desigualdad estricta cuando $\mu_X > \mu_Y$.*

**Demostración.** Véase Ogryczak y Ruszcynski (2001). ■

**Corolario 2.2.0.1** *Sea $k \geq 1$ y $X$ e $Y$ sendas v.as. tales que $E|X^{(k)}| < \infty$ y $E|Y^{(k)}| < \infty$ y esperanzas $\mu_X$ y $\mu_Y$ respectivamente. Si $X \geq_{(k+1)SD} Y$ para algún $k$, entonces, $\mu_X > \mu_Y$ y $\mu_X - \delta_X^{(m)} \geq \mu_Y - \delta_Y^{(m)}$, para $m \geq k$ tal que $E|X|^m < \infty$.*

Formalicemos el concepto de consistencia.

**Definición 2.2.0.10** *En general, se dice que un modelo MV es consistente con las reglas de SD de orden $k$, $k \in \mathbb{N}$ si dadas dos v.as. $X$ e $Y$ verificando $X \geq_{kSD} Y$, entonces, $X \geq_{MV} Y$.*

Como ya se comentó al inicio de este capítulo, las medidas de variablidad $\delta^{(k)}$ proporcionaban consistencia con las reglas SD. Veámoslo:

**Teorema 2.2.0.2** *(Ogryczak y Ruszczynski, 1999) Sean $X$ e $Y$ dos v.as., sea $U(\xi) = E(\xi) - \alpha\delta^{(1)}(\xi), \alpha \in (0, 1]$, con $\xi = X, Y$. Entonces*

$$X \leq_{SSD} Y \Rightarrow U(X) < U(Y)$$

*El resultado es válido para cualquier medida*

$$\delta^{(k)}(\xi) = \left(E\left[max\left\{E(\xi) - \xi, 0\right\}^k\right]\right)^{1/k},$$

*con $k \in \mathbb{N}$.*

**Demostración.** Obsérvese que

$$0 \leq E[X - t]_- - E[X - s]_- \leq t - s, \forall s \leq t \tag{2.5}$$

Además, $X \leq_{SSD} Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$ y $E[X - t]_- \geq E[Y - t]_-$ ya que la función $x \mapsto -(x-t)_-$ es cóncava creciente. Tomando en (2.5) $s = E(X)$ y $t = E(Y)$, obtenemos lo siguiente:

$$E(Y) - E(X) \geq E[X - E(Y)]_- - E[X - E(X)]_- \geq \alpha\left(E[X - E(Y)]_- - E[X - E(X)]_-\right)$$

$$\geq \alpha\left(E[Y - E(Y)]_- - E[X - E(X)]_-\right)$$

y de ahí $U(X) \leq U(Y)$. ■

**Definición 2.2.0.11** *Dada una constante $\alpha \geq 0$, se dice que un modelo MV es $\alpha$-consistente si se verifica la siguiente relación:*

$$X \geq_{kSD} Y \Longrightarrow \mu_X \geq \mu_Y \quad y \quad \mu_X - \alpha R(X) \geq \mu_Y - \alpha R(Y) \tag{2.6}$$

*Siendo $X$ e $Y$ v.as de esperanzas $\mu_X$ y $\mu_Y$ y $R$ la medida de riesgo con la que se trabaja.*

La definición consistencia, tal y como se definió en (2.2.0.10), implica la $\alpha$-consistencia de la definición (2.2.0.11) para todo $\alpha \geq 0$.

# Capítulo 3

# Cuasi Dominancia Estocástica

## 3.1. Introducción

El uso de las reglas de Media-Varianza (MV) o de Dominancia Estocástica (SD) puede en algunos casos no resultar del todo útil, ya que se puede dar el caso en que dichos criterios no conduzcan a una selección de una opción sobre la otra. Por ejemplo, supóngase que se tienen dos opciones $X$ e $Y$ con las siguientes características:

$$E(X) = 20000, \sigma_X = 20{,}2$$

$$E(Y) = 1, \sigma_Y = 20$$

$X$ no es preferida sobre $Y$, ni $Y$ lo es sobre $X$ según los criterios de MV, ya que $E(X) > E(Y)$ pero $\sigma_X > \sigma_Y$. Pero no cabe duda de que casi todos los decisores seleccionarían la opción $X$. Es decir, que las reglas MV no han sido capaces de elegir una opción sobre otra a pesar de que la mayoría de los decisores hubieran seleccionado $X$.

La imposibilidad de seleccionar en ocasiones una opción sobre otra usando las reglas MV no es problema nuevo, ya Baumol en 1963 se percató de ello y propuso un criterio diferente de selección de opciones conocido como "Expected Gain-Confidence Limit Criterion" como sustitutivo de las reglas de decisión MV. Baumol argumentó que una inversión con una cierta elevada desviación típica $\sigma$ será relativamente segura si su valor esperado $\mu$ es suficientemente grande. Él propuso el siguiente índice de riesgo: $RI = \mu - k\sigma$, donde $k$ es una constante positiva que representa el nivel de aversión al riesgo por parte del inversor.

Supóngase ahora un ejemplo en el que se aplicarán las reglas de SD. Sea el activo $X$ que muestra un valor 1 euro con una probabilidad de 0.01 y muestra el valor 1000000 euros con probabilidad 0.99 y sea el activo $Y$ que presenta el valor 2 euros con pro-babilidad 1. No sería raro el esperar que prácticamente el 100 % de los inversores preferirían el activo $X$ sobre el $Y$, pero las reglas SD no son concluyentes en este sentido. Por ejemplo, supóngase la función de utilidad:

$$U(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \leq 1 \\ 1, & si \quad x > 1 \end{cases}$$

En este caso, es fácil comprobar que los inversores que posean esta función de utilidad preferirán $Y$ sobre $X$. De esto se puede deducir que esos inversores poseen una "utilidad extrema", no representan a la mayoría de los inversores.

Debido a las razones anteriormente comentadas, se ha visto necesario el establecimiento de otras reglas de decisión alternativas que ayuden a decidir en los casos en los que las reglas mencionadas MV y SD no permitan la selección de una opción sobre otra. A estas reglas se las conoce como reglas de "Cuasi Dominancia Estocástica"(Almost Stochastic Dominance criteria, ASD). Gracias a la ASD es posible que, dados dos activos $X$ e $Y$ cuyas funciones de distribución no presenten ninguna preferencia según SD, pero que con un "pequeño cambio" en las mismas revelen alguna preferencia, se pueda selccionar uno sobre otro. Este pequeño cambio en las distribuciones elimina las preferencias (utilidades) extremas, considerando las utilidades que son más usuales entre los inversores. La función de utilidad del ejemplo anterior es un caso de utilidad extrema.

Las ventajas de ASD sobre SD y MV son:

1. ASD es capaz de ordenar opciones en los casos en los que SD y MV no son concluyentes.

2. ASD elimina del conjunto eficiente que proporciona SD, aquellas alternativas que

puedan ser peores para la mayoría de los inversores.

3. ASD arroja luz al problema de la selección de la cartera eficente y el problema del horizonte de la inversión. Es posible establecer una relación entre el porcentaje de equidad en la cartera eficiente y el horizonte de la inversión. Es decir, ASD puede ayudar a los inversores en la elección de su cartera de inversión.

Retomemeos el ejemplo de los activos $X$ e $Y$ descritos más arriba. Sea $F$ la función de distribución de $X$ que viene definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad si \quad x < 1 \\ 1/100, \quad si \quad 1 \leq x < 1000000 \\ 1, \quad si \quad x \geq 1000000 \end{cases}$$

y sea $G$ la distribución de $Y$ definida como:

$$G(x) = \begin{cases} 0, \quad si \quad x < 2 \\ 1, \quad si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

La representación de las mismas viene dada por la siguiente figura, en ella se puede observar cómo las distribuciones se cortan, representándose asímismo el área comprendida entre ambas distribuciones.:

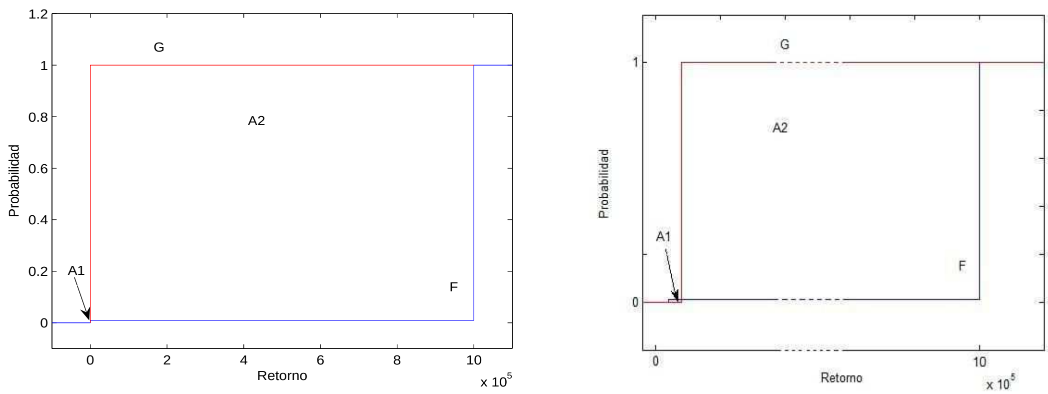



Figura 3.1: *Distribuciones F y G. A la derecha una representación en detalle de las mismas.*

Aunque como ya se observó, la mayoría de los inversores iban a preferir $F$ $(X)$ sobre $G$ $(Y)$, técnicamente, y según la definición FSD, no existe dominancia en ese sentido de un activo sobre otro ya que las distribuciones se cruzan. Anteriormente se puso de manifiesto este hecho haciendo notar que existían algunas preferencias (utilidades) extremas que hacían preferible a $G$ sobre $F$. Además, en este ejemplo, tampoco existe dominancia según SSD o en el sentido MV. Los criterios ASD, como ya se viene comentando, han surgido como extensión de los criterios SD para ayudar en estas situaciones. Intuitivamente, si el área comprendida entre las dos distribuciones que causa la violación del criterio FSD (área $A_1$ del ejemplo) es muy pequeña en relación al área total comprendida entre las mismas (área $A_1 + A_2$ de la figura), entonces existe dominancia de una sobre otra para casi todos los inversores (es decir, aquellos con preferencias razonables). De aquí el nombre de ASD de estos criterios.

Formalmente, denótese por $S$ al rango de posibles valores que pueden tomar ambos activos (o en general ambas v.as.) y se define por $S_1$ al rango de valores en los que se viola la regla FSD:

$$S_1(F, G) = \{t : G(t) < F(t)\} \tag{3.1}$$

donde $F$ y $G$ son las funciones de distribución de los activos (o v.as.) bajo comparación. Se define $\varepsilon$ como el cociente entre el área de violación del criterio FSD y el área total comprendida entre $F$ y $G$, es decir:

$$\varepsilon = \frac{\int_{S_1} (F(t) - G(t))dt}{\int_S |F(t) - G(t)|dt} \tag{3.2}$$

Otra manera de escribirse:

$$\varepsilon = \frac{\int_{S_1} (F(t) - G(t))dt}{\int_{S_1} (F(t) - G(t))dt + \int_{\bar{S}_1} (F(t) - G(t))dt} = \frac{A_1}{A_1 + A_2} \tag{3.3}$$

donde $\bar{S}_1$ indica el conjunto complementario de $S_1$.

Para $0 < \varepsilon < 0{,}5$, se dice que $F$ domina a $G$ según $\varepsilon - AFSD$. A menor valor de $\varepsilon$ mayor grado de dominancia. El criterio AFSD (Almost First Stochastic Dominance) es el siguiente:

**Definición 3.1.0.12** *Sean $F$ y $G$ dos funciones de distribución que toman valores en el rango $S$. Se dice que $F$ domina a $G$ según AFSD y se denota $F \geq_{AFSD} G$ si y sólo si:*

$$\int_{S_1} [F(t) - G(t)]dt \leq \varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt \tag{3.4}$$

*donde* $0 < \varepsilon < 0{,}5$.

Y la definición del criterio ASSD es:

**Definición 3.1.0.13** *Sean $F$ y $G$ dos funciones de distribución que toman valores en el rango $S$. Se dice que $F$ domina a $G$ según ASSD y se denota $F \geq_{ASSD} G$ si y sólo si:*

$$\int_{S_2} [F(t) - G(t)]dt \leq \varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt \tag{3.5}$$

*y* $E_F(X) \geq E_G(Y)$.

*Donde* $0 < \varepsilon < 0{,}5$ *y* $S_2(F,G) = \{t \in S_1(F,G) : \int_{\text{ínf}\, S}^t G(x)dx < \int_{\text{ínf}\, S}^t F(x)dx\}$.

Se puede probar que AFSD implica la condición $E_F(X) \geq E_G(Y)$, pero en (3.5) esa implicación no es cierta y por ello en la definición ASSD debe imponerse.

## 3.2. Principales resultados

En esta sección se tratarán los resultados más notables relativos a los conceptos ASD.

**Proposición 3.2.0.2** *Sean $X$ e $Y$ dos v.as. con distribuciones $F$ y $G$ respectivamente. Entonces:*

1. *$F$ domina a $G$ según AFSD si y sólo si existe una distribución $\widetilde{F}$ tal que $\widetilde{F} \geq_{FSD} G$ y ocurre que:*
$$\int_S |F(t) - \widetilde{F}(t)|dt \leq \varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt \tag{3.6}$$

2. *$F$ domina a $G$ según ASSD si y sólo si existe una distribución $\widetilde{F}$ tal que $\widetilde{F} \geq_{SSD} G$ y ocurre que:*
$$\int_S |F(t) - \widetilde{F}(t)|dt \leq \varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt \tag{3.7}$$

Es decir, que la diferencia entre $F$ y $\widetilde{F}$ debe ser relativamente pequeña ($0 < \varepsilon < 0{,}5$). Teniendo la condición $\varepsilon < 0{,}5$ se asegura que es imposible que ambas distribuciones $F$ y $G$ se dominen mutuamente según AFSD, porque si $F$ domina a $G$ según AFSD, entonces $E_F(X) > E_G(Y)$ (véase proposición de abajo).

**Demostración.** Véase Leshno y Levy (2002). ∎

**Proposición 3.2.0.3** *Sean $X$ e $Y$ dos v.as. con distribuciones $F$ y $G$ respectivamente. Si $F$ domina a $G$ según $\varepsilon - AFSD$ y $F$ y $G$ no son idénticas, entonces $E_F(X) > E_G(Y)$. Por tanto, es imposible que $F$ domine a $G$ según $\varepsilon - AFSD$ y que $G$ domine a $F$ según $\varepsilon - AFSD$.*

**Demostración.** Supóngase que $F$ domina a $G$ según $\varepsilon - AFSD$ pero que no lo hace según FSD y que $F$ y $G$ no son idénticas. Entonces se tiene:

$$0 < \int_{S_1} [F(t) - G(t)]dt \leq \varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt = \varepsilon \left[ \int_{\bar{S}_1} [G(t) - F(t)]dt - \int_{S_1} [G(t) - F(t)]dt \right]$$

donde $0 < \varepsilon < 0{,}5$, o

$$0 < \varepsilon \int_{\bar{S}_1} [G(t) - F(t)]dt + (1 - \varepsilon) \int_{S_1} [G(t) - F(t)]dt$$

o

$$0 < \varepsilon \int_{\bar{S}_1} [G(t) - F(t)]dt + \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \int_{S_1} [G(t) - F(t)]dt$$

Como $\varepsilon < 0{,}5$, entonces $\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} > 1$ y como $\int_{S_1} [G(t) - F(t)]dt < 0$ se tiene que:

$$0 < \int_{\bar{S}_1} [G(t) - F(t)]dt + \frac{(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \int_{S_1} [G(t) - F(t)]dt <$$

$$< \int_{S_1} [G(t) - F(t)]dt + \int_{\bar{S}_1} [G(t) - F(t)]dt = E_F(X) - E_G(Y)$$

Como se quería demostrar. ∎

Al igual en el caso de la SD también existe una caracterización de los criterios ASD a través de funciones de utilidad. Para tratar este tema de debe definir previamente unos conjuntos:

**Definición 3.2.0.14** *Sea $S$ el conjunto en el que toman valores sendas v.as. $X$ e $Y$, se definen los siguientes conjuntos:*

- *Sea $U_1$ el conjunto de todas las funciones de utilidad no decrecientes y diferenciables, $U_1 = \{u : u' \geq 0\}$.*
- *Sea $U_2$ el conjunto de todas las funciones de utilidad cóncavas y dos veces diferenciables, $U_2 = \{u : u' \geq 0, u'' \leq 0\}$.*
- $U_1^*(\varepsilon) = \{u \in U_1 : u' \leq \text{ínf}\{u'(x)\}[\frac{1}{\varepsilon} - 1], \forall x \in S\}$.
- $U_2^*(\varepsilon) = \{u \in U_2 : -u'' \leq \text{ínf}\{-u''(x)\}[\frac{1}{\varepsilon} - 1], \forall x \in S\}$.

**Teorema 3.2.0.3** *Sean $X$ e $Y$ dos v.as. con distribuciones $F$ y $G$ respectivamente.*

1. *$F$ domina a $G$ según $\varepsilon - AFSD$ si y sólo si para toda función $u \in U_1^*(\varepsilon)$ se tiene $E_F(u) \geq E_G(u)$.*
2. *$F$ domina a $G$ según $\varepsilon - ASSD$ si y sólo si para toda función $u \in U_2^*(\varepsilon)$ se tiene $E_F(u) \geq E_G(u)$.*

**Demostración.** Véase Leshno y Levy (2002). ∎

**Proposición 3.2.0.4** *Sean $X$ e $Y$ dos v.as. con distribuciones $F$ y $G$ respectivamente.*

1. *$F$ domina a $G$ según FSD si y sólo si para todo $0 < \varepsilon < 0{,}5$, $F$ domina a $G$ según $\varepsilon - AFSD$.*
2. *$F$ domina a $G$ según SSD si y sólo si para todo $0 < \varepsilon < 0{,}5$, $F$ domina a $G$ según $\varepsilon - ASSD$.*

**Demostración.** Se probará la parte primera de la proposición.

Supóngase que $F$ domina a $G$ según FSD, entonces para todo $t$ se tiene que $S_1(F,G) = \emptyset$, de esta manera para todo $0 < \varepsilon < 0{,}5$:

$$\int_{S_1} [F(t) - G(t)]dt = 0 \leq \varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt,$$

y $F$ domina a $G$ según $\varepsilon - AFSD$. Supóngase ahora que para todo $0 < \varepsilon < 0{,}5$, $F$ domina a $G$ según $\varepsilon - AFSD$. Si $\mu(S_1) = 0$, donde $\mu$ indica la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$, entonces como $F$ y $G$ son funciones no decrecientes y continuas por la derecha, para todo $t$, $F(t) \leq G(t)$, es decir, $F$ domina a $G$ según FSD. Si $\mu(S_1) > 0$ y no existe FSD, se demostrará que tampoco hay AFSD para algún $\varepsilon > 0$.

Se denota por $\varepsilon_0 = \int_{S_1} [F(t) - G(t)]dt > 0$. Para $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2\int_S |F(t)-G(t)|dt}$, se tiene que $\varepsilon_0 = 2\varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt > \varepsilon \int_S |F(t) - G(t)|dt$. Es decir, $F$ no domina a $G$ para ningún $\varepsilon$, como se quería demostrar.

La parte 2 es análoga. ∎

## 3.3. Aplicaciones económicas de la Cuasi Dominancia Estocástica

Muchos autores afirman que a medida que el horizonte de la inversión aumenta, una cartera de inversión con una mayor proporción de activos dominará, o será preferida, a una cartera en la que predominen los bonos del Estado, aunque esto no está de acuerdo con las reglas SD, es decir, que en este caso existe un cierto tipo de dominancia, ASD. Por tanto, a largo plazo los inversores prefieren activos frente a bonos, más aún, a medida que el horizonte de la inversión aumenta, el conjunto de "casi todos" los inversores se transforma en el conjunto de "todos" los inversores. (Véase Leshno y Levy (2002), Brigida (2007) y Bali y otros, (2009)).[1]

Propondremos ejemplos de este hecho.

[1]Se matizará más adelante este aspecto.

**Ejemplo 3.3.0.4** *Considéresen dos inversiones simples: un bono que tiene un rendimiento anual del* $9\,\%$ *con probabilidad 1 y un activo que tiene un rendimiento anual del* $-5\,\%$ *con probabilidad 0.5 y del* $35\,\%$ *con probabilidad 0.5. El objetivo consiste en conocer qué inversión es más favorable para los intereses del inversor. Se va a poder comprobar el hecho que se comentó en líneas anteriores, a medida que avanza el horizonte de la inversión se va a preferir de manera más clara el activo frente al bono.*

*Sea* $X$ *la v.a. que representa el rendimiento anual del activo e* $Y$ *la v.a. que representa el rendimiento anual del bono. Sea* $F$ *la distribución de* $X$ *y* $G$ *la de* $Y$*. El rendimiento del primer año de los activos vendrá dado por* $X^{(1)} = 1 + X_0$*, siendo* $X_0$ *el capital inicial destinado a la inversión en activos y para el caso de la inversion en bonos, éste será* $Y^{(1)} = 1 + Y_0$ *con* $Y_0$ *el capital inicial destinado a la inversión en bonos. El rendimiento después de* $n$ *períodos (en este caso años) será* $X^{(n)} = \prod_{i=1}^{n}[1 + X^{(i)}]$ *e* $Y^{(n)} = \prod_{i=1}^{n}[1 + Y^{(i)}]$ *en activos y bonos respectivamente.*

*Para este ejemplo se supondrá sin pérdida de generalidad que* $X_0 = 1 = Y_0$*. El procedimiento que se seguirá será el de ir calculando para cada año* $n$ *los posibles retornos de la inversión en activos y en bonos; ésto proporciona una serie de valores de las v.as. con sus respectivas probabilidades. Posteriormente se calcularán las distribuciones asociadas a las que se denominará* $F^{(n)}$ *y* $G^{(n)}$ *para activos y bonos respectivamente.*

*Por ejemplo para el primer año los rendimientos que se obtienen en el caso de la inversión en activos serán:*

$$1 \quad u.m. \begin{cases} 1 - 0{,}05 * 1 = 0{,}95 \quad u.m. \\ 1 + 0{,}35 * 1 = 1{,}35 \quad u.m. \end{cases}$$

*donde u.m. indica unidades monetarias y para los bonos:*

$$1 \quad u.m. \longrightarrow 1 + 0{,}09 * 1 = 1{,}09 \quad u.m.$$

*Así:*

$$F^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x < 0{,}95 \\ 0{,}5, & si \quad 0{,}95 \leq x < 1{,}35 \\ 1, & si \quad x \geq 1{,}35 \end{cases}$$

*y*

$$G^{(1)}(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x < 1{,}09 \\ 1, & si \quad x \geq 1{,}09 \end{cases}$$

*Estas distribuciones no verifican la condición FSD ya que se cortan como se puede comprobar en el siguiente gráfico:*

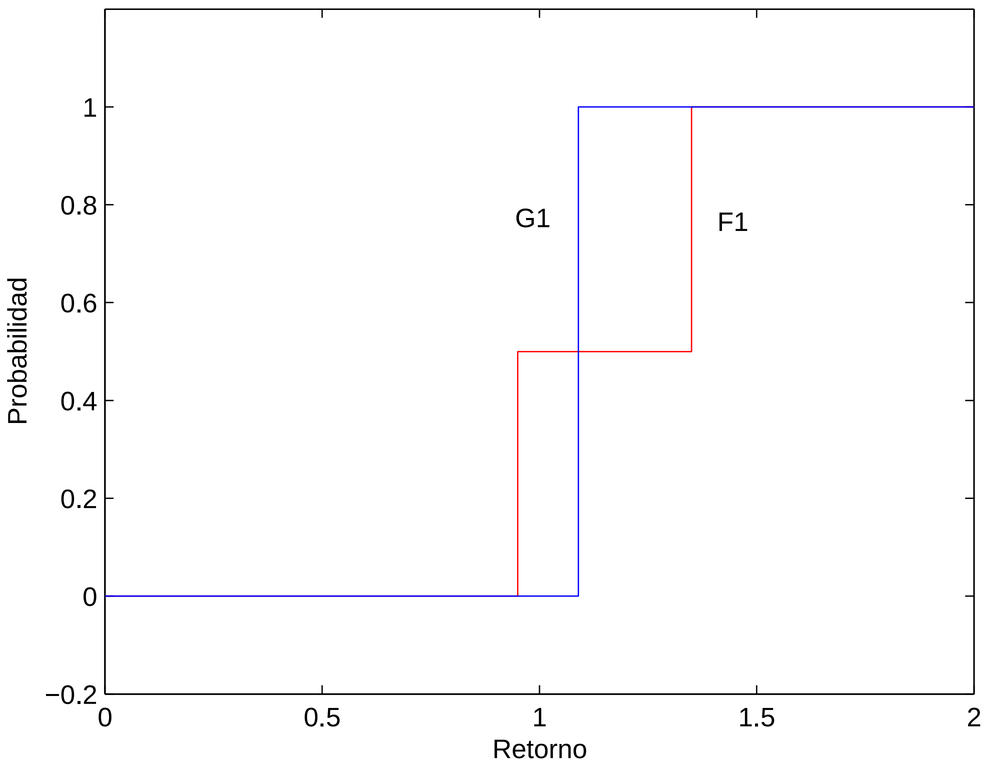



Figura 3.2: *Distribuciones* $F^{(1)}$ *y* $G^{(1)}$.

*Para el segundo año los rendimientos que se obtienen en el caso de la inversión en activos serán:*

$$\begin{cases} 0{,}95 \quad u.m. \begin{cases} 0{,}9025 \quad u.m. \\ 1{,}2825 \quad u.m. \end{cases} \\ 1{,}35 \quad u.m. \begin{cases} 1{,}2825 \quad u.m. \\ 1{,}8225 \quad u.m. \end{cases} \end{cases}$$

*y para los bonos:*

$$1{,}09 \quad u.m. \longrightarrow 1{,}1881 \quad u.m.$$

*Así:*

$$F^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, \quad si \quad x < 0{,}9025 \\ 1/4, \quad si \quad 0{,}9025 \leq x < 1{,}2825 \\ 3/4, \quad si \quad 1{,}2825 \leq x < 1{,}8225 \\ 1, \quad si \quad x \geq 1{,}8225 \end{cases}$$

*y*

$$G^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, \quad si \quad x < 1{,}1881 \\ 1, \quad si \quad x \geq 1{,}1881 \end{cases}$$

*En este caso el gráfico es:*

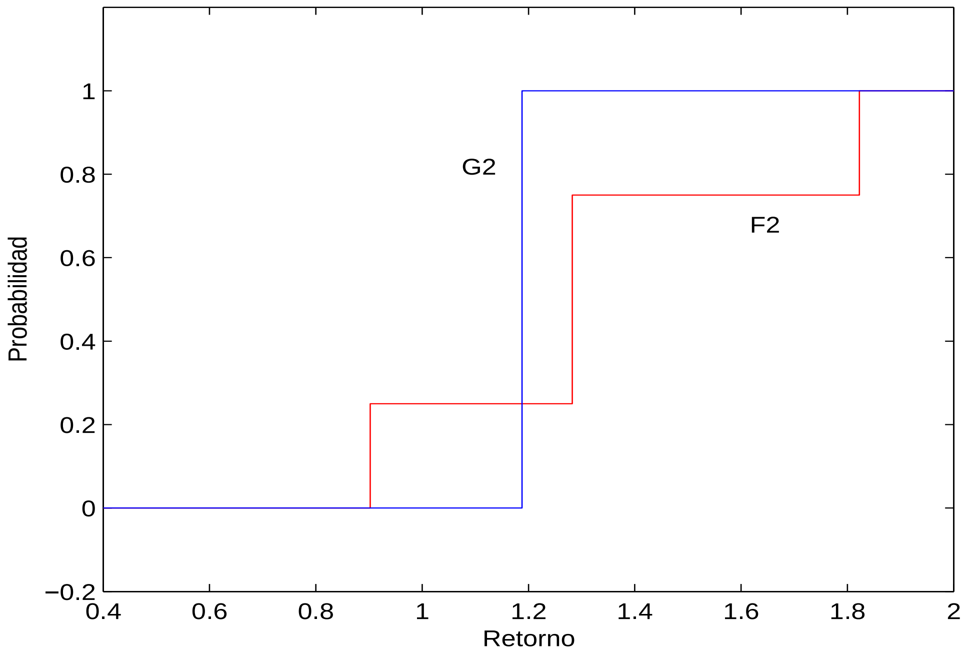
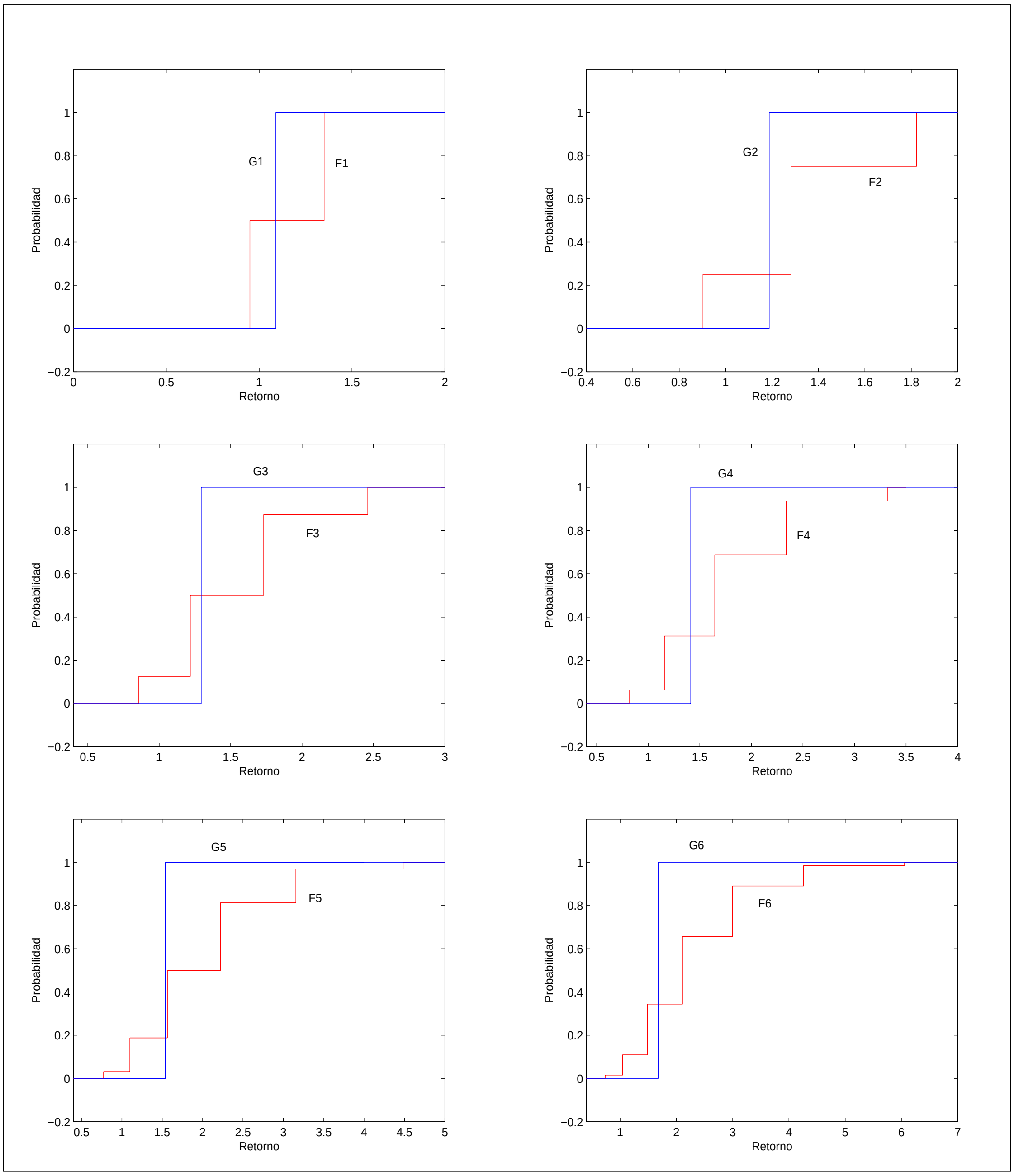



Figura 3.3: *Distribuciones* $F^{(2)}$ *y* $G^{(2)}$.

*Y así sucesivamente.*

*Se considerarán horizontes de inversión de períodos 1, 2,..., 10, 15 y 20 años considerando que se comenzó la inversión en el primero de ellos. Para cada año se calculará el valor de* $\varepsilon$ *y se comprobará que dicho valor decrece con el tiempo, es por ello que los inversores preferirán los activos frente a los bonos.*


G1
F1
G2
F2
G3
F3
G4
F4
G5
F5
G6
F6
Probabilidad
Retorno

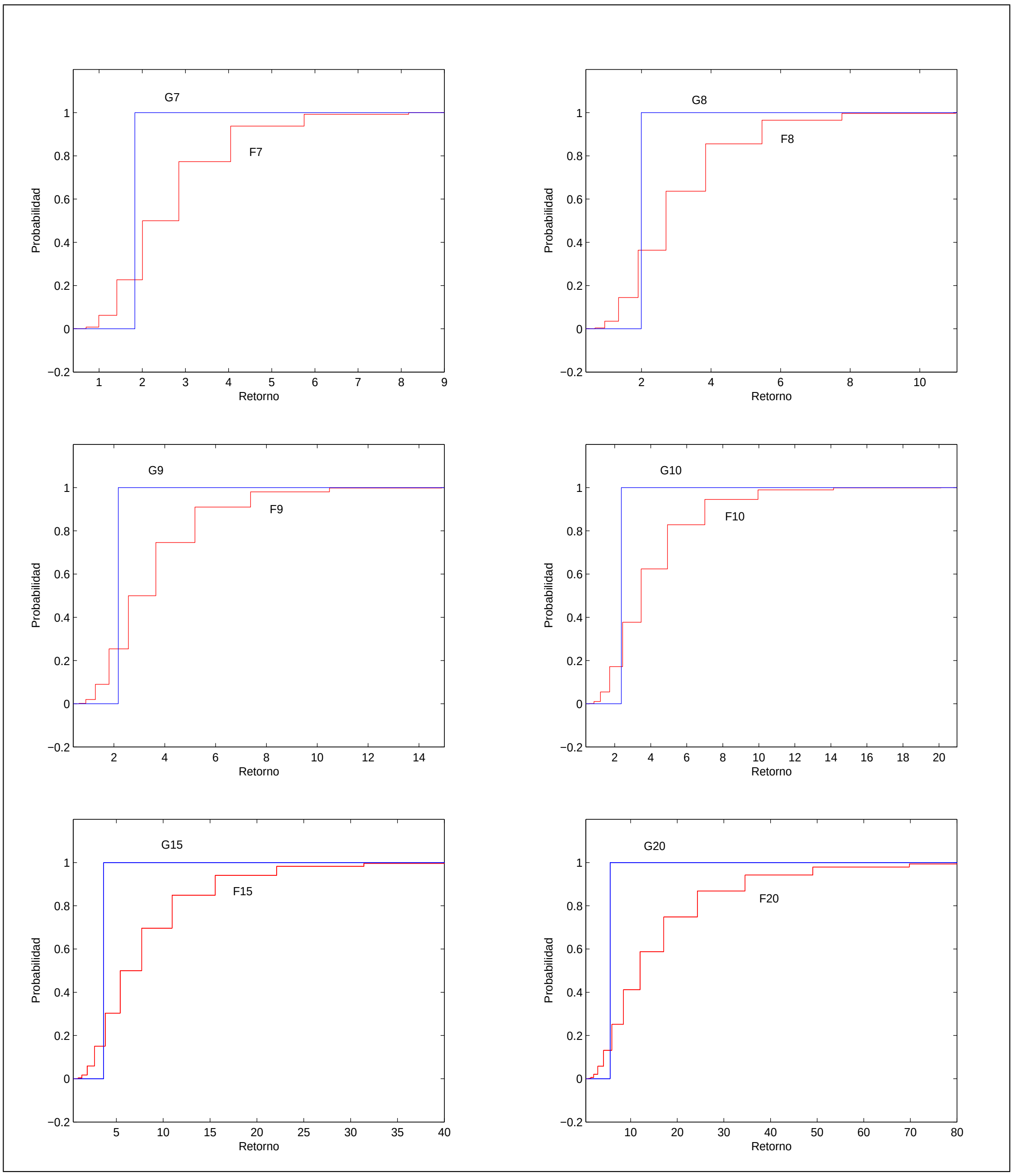



Figura 3.4: *Distribuciones* $F^{(n)}$ *y* $G^{(n)}$*, con* $n = 1, ..., 10, 15$ *y* 20*. Como se puede observar, el área de violación del criterio FSD, es decir, el área en la que* $F^{(n)}$ *está por encima de* $G^{(n)}$*-*$A_1$ *de la definición de* $\varepsilon$*-, va disminuyendo a medida que el horizonte de la inversión aumenta, el valor de* $\varepsilon$ *también disminuye, es decir, que a medida que aumenta el tiempo, los inversores van a preferir en mayor medida los activos que los bonos.*

*A continuación se mostrarán los valores de $\varepsilon$ para cada horizonte de inversión. Como demuestra la tabla, esos valores disminuyen con el tiempo:*

| Número de años | $\varepsilon$ |
|---|---|
| 1 | 0.3500 |
| 2 | 0.2576 |
| 3 | 0.2125 |
| 4 | 0.1856 |
| 5 | 0.1406 |
| 6 | 0.1363 |
| 7 | 0.1132 |
| 8 | 0.0972 |
| 9 | 0.0919 |
| 10 | 0.0464 |
| 15 | 0.0414 |
| 20 | 0.0247 |

Figura 3.5: *Valores de $\varepsilon$ para cada horizonte de la inversión.*

Se matizarán las palabras que se comentaron al inicio de esta subsección. Como se ha podido comprobar, los criterios de ASD se han usado para establecer un argumento fuerte a favor de los activos frente a los bonos. Considérese un inversor que maximiza su utilidad esperada en un período $T$. Se asume que los retornos son independientes e idénticamente distribuidos y que la inversión es constante a lo largo del tiempo. Es bien conocido que dadas diferentes inversiones con retornos i.i.d. y un horizonte de planificación de la inversión suficientemente grande, la inversión con mayor media geométrica en los retornos (por período) proporciona casi seguro un mayor beneficio que aquella que tenga menor media geométrica. A largo plazo, la función de distribución de la inversión que presenta mayor media geométrica está casi en su totalidad a la derecha de las demás distribuciones que representan a las otras alternativas, es decir, $\varepsilon$ decrece con el tiempo, como ya se viene comentando a lo largo de esta sección. Pero existe una cierta controversia con el significado esconómico de este hecho. Latané (1959), Markowitz (1976) y Leshno y Levy (2005) afirman que la disminución en el valor de $\varepsilon$ viene acompañada por un aumento en el conjunto de preferencias de los inversores ($U_1^*(\varepsilon)$), es decir, afirman que a largo plazo se consideran todas las preferencias (utilidades) razonables. M. Levy (2009) pone atención sobre este hecho y afirma que efectivamente a medida que aumenta el tiempo $\varepsilon$ decrece (se ha comprobado en el ejemplo 3.3.0.4), pero el conjunto $U_1^*(\varepsilon)$ no es cierto que se expanda. Lo que ocurre es que a medida que aumentan los períodos de inversión, también aumenta el conjunto de posibles valores que toman las v.as., es decir, el conjunto $S$ no es fijo. Por supuesto que si se fija $S$, el conjunto $U_1^*(\varepsilon)$ crece, pero el hecho es que $S$ no es fijo. Si se observa el ejemplo anterior, el conjunto $S$ para el primer año es: $[0{,}95, 1{,}35]$, para el segundo año $[0{,}9025, 1{,}8225]$, para el tercero $[0{,}857375, 2{,}460375]$, etc.

En resumen, se dan dos hechos a medida que avanza el tiempo: por un lado decrece $\varepsilon$ y esto provoca un aumento en el conjunto $U_1^*(\varepsilon)$, y por otro lado crece $S$ lo que provoca que para un $\varepsilon$ dado el conjunto $U_1^*(\varepsilon)$ decrezca. El efecto total sobre el conjunto $U_1^*(\varepsilon)$ es una combinación de los dos efectos anteriores y dependerá en gran medida de la clase de funciones de utilidad con la que se trabaje.

**Definición 3.3.0.15** *Dado un conjunto $S$, se define $\varepsilon_u$ como el mayor valor de $\varepsilon$ para el cual la función de utilidad $u$ todavía pertenezca al conjunto $U_1^*(\varepsilon)$, es decir:*

$$\varepsilon_u = \left[1 + \frac{\sup\{u'(x), x \in S\}}{\text{ínf}\{u'(x), x \in S\}}\right]^{-1} \tag{3.8}$$

Como $S$ crece con el tiempo el cociente $\frac{\sup\{u'(x), x \in S\}}{\text{ínf}\{u'(x), x \in S\}}$ crece, y por tanto, $\varepsilon_u$ decrece. Obsérvese que $\varepsilon_u$ indica el mayor valor del área que se permite que viole los criterios de dominancia, para una utilidad determinada $u$ tal que $u$ siga perteneciendo al conjunto $U_1^*(\varepsilon)$. Si $\varepsilon > \varepsilon_u$ entonces $u \notin U_1^*(\varepsilon)$, en caso contrario, $u \in U_1^*(\varepsilon)$. El pertenecer o no al conjunto $U_1^*(\varepsilon)$ dependerá de la velocidad de decrecimiento de $\varepsilon$ y $\varepsilon_u$, es decir, el hecho del decrecimiento de $\varepsilon$ no es suficiente para elegir a largo plazo, sino que también dependerá de la función de utilidad.

Se retomará el ejemplo anterior y se calcularán los valores de $\varepsilon_u$ para diferentes utilidades $u$.

**Ejemplo 3.3.0.5** *Continuamos con el ejemplo 3.3.0.4. Se considerarán distintas funciones de utilidad u y se calcularán los valores $\varepsilon_u$ asociados.*

| Número de años | $\varepsilon$ | $\varepsilon_u$ $u(x) = -\exp^{-x}$ | $\varepsilon_u$ $u(x) = \ln(x)$ | $\varepsilon_u$ $u(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $\alpha = 4$ | $\varepsilon_u$ $u(x) = \frac{(x-D)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $\alpha = 2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3500 | 0.4013 | 0.4130 | 0.1969 | 0.2984 |
| 2 | 0.2576 | 0.2849 | 0.3312 | 0.0567 | 0.1579 |
| 3 | 0.2125 | 0.1676 | 0.2584 | 0.0145 | 0.0780 |
| 4 | 0.1856 | 0.0754 | 0.1969 | $3{,}6030 * 10^{-3}$ | 0.0373 |
| 5 | 0.1406 | 0.02389 | 0.1472 | $8{,}8595 * 10^{-4}$ | 0.0176 |
| 6 | 0.1363 | $4{,}8769 * 10^{-3}$ | 0.1083 | $2{,}1740 * 10^{-4}$ | $8{,}2874 * 10^{-3}$ |
| 7 | 0.1132 | $5{,}6743 * 10^{-4}$ | 0.0787 | $5{,}3320 * 10^{-5}$ | $3{,}8923 * 10^{-3}$ |
| 8 | 0.0972 | $3{,}1390 * 10^{-5}$ | 0.0567 | $1{,}3076 * 10^{-5}$ | $1{,}8269 * 10^{-3}$ |
| 9 | 0.0919 | $6{,}4004 * 10^{-7}$ | 0.0406 | $3{,}2059 * 10^{-6}$ | $8{,}5653 * 10^{-4}$ |
| 10 | 0.0464 | $3{,}3717 * 10^{-9}$ | 0.0289 | $7{,}8616 * 10^{-7}$ | $4{,}0100 * 10^{-4}$ |
| 15 | 0.0414 | $1{,}1114 * 10^{-39}$ | $5{,}1121 * 10^{-3}$ | $3{,}2858 * 10^{-7}$ | $8{,}5647 * 10^{-6}$ |
| 20 | 0.0247 | $3{,}8185 * 10^{-176}$ | $8{,}8591 * 10^{-4}$ | $6{,}1816 * 10^{-13}$ | $1{,}5380 * 10^{-7}$ |

Figura 3.6: *Valores de $\varepsilon$ y $\varepsilon_u$ para cada horizonte de la inversión.*

*Para cada columna representativa de valores de $\varepsilon$ y $\varepsilon_u$ se puede comprobar el hecho del decrecimiento que ya se venía comentando. Ahora bien, si se compara las columnas 2 y 3 se puede observar que $\varepsilon_u$ decrece más rápidamente que $\varepsilon$ y que para períodos de 1 o 2 años, $\varepsilon < \varepsilon_u$, luego $u(x) = -\exp(-x) \in U_1^*(\varepsilon)$, mientras que en períodos estrictamente superiores a 2 años $u(x) = -\exp(-x) \notin U_1^*(\varepsilon)$. En este caso se comprueba cómo el conjunto $U_1^*(\varepsilon)$ no crece necesariamente con el tiempo. Para esta clase de utilidades no se puede razonar tal y como lo hacían los autores anteriormente mencionados. En el caso de trabajar con utilidades de tipo logarítmico el razonamiento es análogo, pero para* *horizontes de menor o igual que 5 años y mayores que 5 años. En el caso de las columnas 5 y 6, se verifica que* $\varepsilon > \varepsilon_u$ *para los períodos analizados, en estos casos* $u(x) \notin U_1^*(\varepsilon)$ *para cualquier periodo estudiado.*

# Apéndice. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han mostrado diversas reglas que permiten comparar variables y vectores aleatorios y procesos estocásticos. Las reglas que se han tratado son las conocidas como reglas de Dominancia Estocástica (SD), reglas de Media Varianza (MV) y reglas de Cuasi Dominancia Estocástica (ASD).

Las reglas SD son útiles en diferentes ámbitos de conocimiento y surgen de manera natural de la necesidad de realizar comparaciones entre las diferentes opciones, usando más información con la que se puede contar en algunas situaciones (funciones de distribución, de densidad, de tasa de fallo, etc.) que la mera comparación de medias o cualquier otro dato numérico aislado. Estas reglas han sido tratadas en el Capítulo 1.

No obstante, en algunas situaciones puede resultar de utilidad la comparación de ciertas relaciones funcionales dependientes de medias, varianzas u otras medidas de incertidumbre (por ejemplo en la selección de la cartera eficiente o en el ámbito del estudio de la utilidad). En estos casos se usan las conocidas reglas de MV que han sido tratadas en el Capítulo 2.

Pero en ocasiones, el uso de las reglas SD o MV no conduce a una selección concreta de una opción sobre otra, surgen pues otras reglas (ASD) como respuesta a esta necesidad de selección. Dichas reglas ASD pretenden ser una extensión de las reglas SD en los casos en las que éstas últimas no dan respuesta y se definen de tal manera que sean una guía útil de selección para casi todos los decisores, de ahí su nombre. Estas reglas han sido tratadas en el Capítulo 3.

# Bibliografía


1. Almaraz, E., 2009. *Cuestiones notables de ordenación estocástica en optimación financiera.* UCM. Tesis Doctoral.

2. Abhyankar, A., Ho, K-Y. y Zhao, H., 2008. *On the discounted penalty function in a markov-dependent risk model.* Quantitative Finance, 8(7), 693-704.

3. Adan, I. y Kulkarni, V., 2008. *Insurance risk with variable number of policies.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, 22(2), 213-219.

4. Ahamdanechzarco, I. y García, C., 2007. *Bienestar, desigualdad y pobreza en España (1993-2000). Un análisis basado en técnicas inferenciales de dominancia estocástica.* Hacienda Pública Española / Revista de Economía Pública, 180, 35-60.

5. Aït-Sahalia, Y. y Brandt, M. W., 2005. *Portfolio and consumption choice with option-implied state prices.* Working paper, Princeton University.

6. Allais, M., 1953. *Le Comportement de l´Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulates et Axiomas de l'École Americaine.* Econometrica, 21, 503-546.

7. Allais, M., 1979. *The Foundations of a Positive Theory of Choice Involving Risk and a Criticism of the Postulates and Axioms of the American School.* Utility Hypotheses and the Allais Paradox, Allais, M. and M. Machina (Eds.), D. Reidel, Dordrecht.

8. Allais, M., 1990. *Allais Paradox.* Utility and Probability, The Macmillan Press, United Kingdom, 3-9.

9. Arnold, B.C., 1987. *Majorization and the Lorenz order: A brief introduction.* Lecture Notes in Statistics, Springer Verlag, New York.

10. Asmussen, S., 1989. *Risk theory in a markovian environment.* Scandinavian Actuarial Journal, 2, 69-100.

11. Atkinson, A. B., 1970. *On the Measurement of Inequality.* Journal of Economic Theory, 2, 244-263.

12. Bachelier, L., 1964. *Théorie de la Spéculation.* The random character of stock Market Prices, Cootner, P. (eds.), 17-78, MIT Press. Cambridge Massachusetts.

13. Bai, J. M. y Xiao, H. M., 2008. *A class of new cumulative shock models and its application in insurance risks.* Journal-Lanzhou University Natural Sciences, 44(1), 132-136.

14. Bai, Z., Liu, H. y Wong, W. K., 2009. *On the Markowitz mean-variance analysis of self-financing portfolios.* Advance Risk Management for Singapore and Beyond. RMI Working Paper No. 09/02.

15. Bali, T. G., Demirtas, K. O., Levy, H. y Wolf, F., 2009. *Bonds versus stocks: Investors' age and risk taking.* Journal of Monetary Economics, 56, 817-830.

16. Bartoszewicz, J. y Skolimoswka, M., 2004(a). *Preservation of classes of life distributions under weighting.* Mathematical Institute University of Wroclaw, Report 142.

17. Bartoszewicz, J. y Skolimoswka, M., 2004(b). *Stochastic ordering of weighted distributions.* Mathematical Institute University of Wroclaw, Report 143.

18. Bawa, V. S., 1982. *Stochastic Dominance: A Research Bibliography.* Management Science, 28, 698-712.

19. Beard, R. E., Pentikäinen, T. y Pesonen E., 1984. *Risk Theory*, 3ªed. Chapman and Hall, London.

20. Beccacece, F., 2006. *Applying the benchmarking procedure: a decision criterion of choice under risk.* Theory and Decision, 61, 75-91.

21. Belzunce, F. y Shaked, M., 2004. *Failure profile of coherent systems.* Naval Research Logistics, 51(4), 477-490.

22. Belzunce, F., Lillo R., Ruiz, J. M. y Shaked, M., 2001. *Stochastic comparisons of nonhomogeneous processes.* Probability in the Engineering and Informational Sciences, 15, 199-224.

23. Berleant, D., Andrieu, Argaud, J. P., Barjon, F., Cheong, M. P., Dancre, M., Sheble, G. y Teoh, C. C., 2008. *Portfolio management under epistemic uncertainty using stochastic dominance and information-gap theory.* International Journal of Approximate Reasoning, 101-116.

24. Black, F. y Scholes, M., 1973. *The pricing of Options and Corporate Liabilities.* The Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.

25. Blackwell, D., 1951. *Comparision of Experiments.* Proc. Second Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability, University of California Press, Berkeley, 93-102.

26. Blackwell, D., 1953. *Equivalent Comparisions of Experiments.* Annals of Mathematical Statistics, 24, 264-272.

27. Broske, M. S. y Levy, H., 1989. *The Stochastic Dominance Estimation of Default Probability.* In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), Studies in the Economics of Uncertainty. In Honor of Josef Hadar, Springer Verlag, New York, 91-112.

28. Bühlmann, H., 1970. *Mathematical Models in Risk Theory.* Springer, New York.

29. Burr Porter, R. and Gaumnitz, J. E., 1972. *Stochastic Dominance vs. Mean-Variance Portfolio Analysis: An Empirical Evaluation.* The American Economic Review, 62(3), 438-446.

30. Caballé, J. y Esteban, J., 2007. *Stochastic dominance and absolute risk aversion.* Social Choice and Welfare, Published online: 5 May 2006, Springer-Verlag 2006.

31. Clark, P., 1973. *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices.* Econometrica, 41, 135-156.

32. Constantinides, G. M. y Perrakis, S., 2002. *Stochastic dominance bounds on derivatives prices in a multiperiod economy with proportional transaction costs.* Journal of Economic Dynamics and Control, 26(7-8), 1323-1352.

33. Chen, Z. y Lin, R., 2006. *Mutual fund performance evaluation using data envelopment analysis with new risk measures.* OR Spectrum, 28(3), 375-398.

34. Dardoni, V. y Lambert, P., 1988. *Welfare ranking of Income Distributions: A Role for the Variance and Some Insights for Tax Reform.* Social Choice and Welfare, 5, 1-17.

35. Davies, J. y Hoy, M., 1995. *Making Inequality Comparisions when Lorenz Curves Intersect.* American Economic Review, 85(4), 980-986.

36. De Vylder, F., 1996. *Advanced Risk Theory.* Université de Bruxelles, Brussels.

37. Ellsberg, D., 1961. *Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms.* Quarterly Journal of Economics, 75, 643-669.

38. Embrechts, P. y Samorodnitsky, G., 2003. *Ruin Problem and How Fast Stochastic Processes Mix.* The Annals of Applied Probability, 13, 1-36.

39. Emms, P. y Haberman, S., *Asymptotic and numerical analysis of the optimal investment strategy for an insurer.* Insurance Mathematics and Economics, 40(1), (2007), 113-134.

40. Feller,W., 1993. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.* Volúmenes I y II, Limusa.

41. Fishburn, P. C., 1964. *Decision and Value Theory.* Wiley, New York.

42. Fishburn, P. C., 1989(a). *Foundations of Decision Analysis: Along the Way.* Management Science, 387-424.

43. Fishburn, P. C., 1989(b). *Stochastic Dominance in Nonlinear Utility Theory.* In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), Studies in the Economics of Uncertainty. In Honor of Josef Hadar, Springer Verlag, New York, 3-20.

44. Fishburn, P. C. y Porter, R. B., 1976. *Optimal Portfolios with One Safe and One Risky Asset: Effects of Changes in Rates of Return and Risk.* Management Science, 22, 1064-1073.

45. Geman, H. y Ané, T., 1996. *Stochastic Subordination.* Risk, 9, 146-149.

46. Goovaerts, M. J., 1990. *Effective Actuarial Methods.* Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.

47. Guo, J. Y., Yuen, K. C. y Zhou, M., 2007. *Ruin probabilities in Cox risk models with two dependent classes of business.* Acta Mathematica Sinica, 23(7), 1281-1288.

48. Gupta, R. C. y Keating, J. P., 1986. *Relations for the reliability measures under length biased sampling.* Scandinavian Journal of Statistics, 13, 49-56.

49. Hadar, J. y Russell, W. R., 1969. *Rules for Ordering Uncertain Prospects.* American Economic Review, 59, 25-34.

50. Hadar, J. y Russell, W. R., 1974. *Diversification of Interdependent Prospects.* Journal of Economic Theory, 7, 231-40.

51. Hadar, J. y Seo, T. K., 1990. *The Effects of Shifts in a Return Distribution on Optimal Portfolio.* International Economic Review, 31, 721-736.

52. Hanoch, G. y Levy, H., 1969. *The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk.* Review of Economic Studies, 36, 335-346.

53. Hanoch, G. y Levy, H., 1970. *Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility.* The Journal of Business, 43(2), 181-189.

54. Hernández, D., 1997. *Modelos de Teoría de Riesgo para la solvencia del sector asegurador.* Comisión Nacional de Seguros y Finanzas, Segundo Lugar del Premio de Investigación Sobre Seguros y Fianzas, http://www.cnsf.gob.mx/.

55. Huergo, E. y Moreno, L., 2005. *La productividad en la industria española: Evidencia microeconómica*. Documentos de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales 05-01, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.

56. Irle, A., 2003. *Stochastic ordering for continuous-time processes*. Journal of Applied Probability, 40(2), 361-375.

57. Irle, A. y Gani, J., 2001. *The detection of words and an ordering for Markov chains*. Journal of Applied Probability, 38A, 66-77.

58. Jain, K., Singh, H. y Bagai, I., 1989. *Relations for the reliability measures of weighted distributions*. Communications in Statistics - Theory and Methods, 18, 4393-4412.

59. Jarrow, R., 1986. *The Relationship between Arbitrage and First Order Stochastic Dominance*. Journal of Finance, 41, 915-921.

60. Karamata, J., 1932. *Sur une inegalité relative aux functions convex*. Publ. Math. Univ. de Belgrade, 1, 145-148.

61. Karlin, S., 1960. *Dynamic inventory policy with varying stochastic demands*. Management Science, 6, 231-258.

62. Kolm, S. Ch., 1969. *The optimal production of social justice*. In J. Margolis and H. Guitton (eds.), Public Economics. London. Macmillan.

63. Kolm, S. Ch., 1976. *Unequal Inequalities*. Journal of Economic Theory, 12, 416-442.

64. Kopa, M. y Chovanec, P., 2008. *A Second-Order Stochastic Dominance Portfolio Efficiency Measure*. Kybernetika, 44(2), 243-258.

65. Kroll, Y. y Levy, H., 1960. *Stochastic Dominance Criteria: A Review and Some New Evidence*. Research in Finance, Vol 2, JAI Press, Greenwich, CT, 231-258.

66. Lambert, P.J., 1988. *Progressive income taxation is inequality reducing - or is it?*. Working Paper 88/14, Institute for Fiscal Studies.

67. Lehmann, E., 1955. *Ordered Families of Distributions.* Annals of Mathematical Statistics, 26, 399-419.

68. Leitner, J., 2005. *A short note on second-order stochastic dominance preserving coherent risk measures.* Mathematical Finance, 15(4), 649-651.

69. Levy, H. y Sarnat, M., 1971. *Two-Period Portfolio Selection and Investors' Discount Rates.* The Journal of Finance, 26(3), 757-761.

70. Levy, H., 1985. *Upper and Lower Bounds of Put and Call Option Value: Stochastic Dominance Approach.* The Journal of Finance, 40(4), 1197-1217.

71. Levy, H., 2006. *Stochastic Dominance. Investment Decision under Uncertainty.* 2ª Edición. Springer.

72. Levy, M., 2009. *Almost Stochastic Dominance and stocks for the long run.* European Journal of Operational Research, 194, 250-257.

73. Lorenz, M. O., 1905. *Methods of measuring the concentration of wealth.* Journal of the American Statistical Association, 9, 209-219.

74. Lozano, S y Gutiérrez, E., 2008. *Data envelopment analysis of mutual funds based on second-order stochastic dominance.* European Journal of Operational Research, 189, 230-244.

75. Machina, M., 1982. *'Expected Utility' Analysis without Independent Axiom.* Econometrica, 50, 277-323.

76. Machina, M., 1987. *Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved.* Journal of Economic Perspectives, 1(1), 121-154.

77. Mann, H.B. y Whitney, D.R., 1947. *On a test of whether one of two random variable is statistically larger than the other.* Annals of Mathematical Statistics, 18, 50-60.

78. Markowitz, H., 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment.* Wiley, Ney York.

79. Marshall, A. W. y Proschan, F., 1972. *Classes of distributions applicable in replacement, with renewal theory implications.* Proc. $6^{th}$ Berk. Symp. on Prob. and Statist. Vol I, 395-415.

80. Merino, M. y Vadillo, F., 2007. *Matemática financiera con MATLAB.* Revista de Métodos cuantitativos para la economía y la Empresa, 4, 35-55.

81. Meyer, J., 1989. *Stochastic Dominance and Transformations of Random Variables.* In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), Studies in the Economics of Uncertainty. In Honor of Josef Hadar, Springer Verlag,New York, 45-57.

82. Morais, M. J. C. y Pacheco, A. *Ordenação estocástica: um pouco de história e aplicações.* Estadística: A diversidade na Unidade, Souto de Miranda, M. e Pereira, I. eds, 221-235. Edições Salamandra, Lisboa.

83. Muller, A. y Stoyan, D., 2002. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* Ed. John Wiley and sons.

84. Nyrhinen, H., 2007. *Convex large deviation rate functions under mixtures of linear transformations, with an application to ruin theory.* Stochastic processes and their applications, 117(7), 947-959.

85. Ogryczak, W. y Ruszczynski, A., 1999. *From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures.* European Journal of Operational Research, 116, 33-50.

86. Osaki, Y. y Quiggin, J., 2008. *Stochastic dominance representation of optimistic belief: theory and applications.* Economics Letters, 101(3), 275-278.

87. Parzen, E., 1972. *Procesos Estocásticos.* Paraninfo, Madrid.

88. Patil, G. P. y Rao, C. R., 1977. *The weighted distributions: A survey and their applications.* In Applications of Statistics (ed. P.R. Krishnaiah), North Holland Publ. Co. Amsterdam, 383-405.

89. Patil, G. P. y Rao, C. R., 1978. *Weighted distributions and size biased sampling with applications to wild life populations and human families.* Biometrica, 34, 179-189.

90. Pin, P., 2006. *Evolution of risk preferences.* Mathematical Methods in Economics and Finance, 1(1), 65-76.

91. Quirk, J. P. y Saposnik, R., 1962. *Admissibility and Measurable Utility Function.* Review of Economic Studies, 140-146.

92. Resnick, S., 1992. *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhäuser, Boston.

93. Roberts, K. S. W. y Neary, J. P., 2002. *The theory of household behaviour under rationing.* European Economic Review, 13(1), 25-42.

94. Ross S. M., 1983. *Stochastic Processes.* John Wiley, New York.

95. Rothschild, M. y Stiglitz, J. E., 1970. *Increasing Risk.I.A Definition.* Journal of Economic Theory, 2, 225-243.

96. Russell, W. R. y Seo, T. K., 1959. *Representative Test for Stochastic Dominance Rules.* In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds.), Studies in the Economics of Uncertainty. In Honor of Joseph Hadar. Springer Velag. New York, 59-76.

97. Saposnik, R., 1981.*Rank-Dominance in income distributions.* Public Choice, 36(1), 147-151.

98. Saposnik, R., 1983. *On evaluating income distributions: Rank-Dominance, the Suppes-Sen grading principles of justice, and Pareto optimality.* Public Choice, 40, 329-336.

99. Shaked, M. y Shanthikumar, G., 2007. *Stochastic Orders.* Springer Series in Statistics.

100. Shorrocks, A. F., 1983. *The impact of income components on the distribution of family incomes.* Quartely Journal of Economics, 98, 311-326.

101. Shorrocks, A. F. y Foster, J. E., 1987. *Transfer sensitive inequality measures.* Review of Economics Studies, 54, 485-497.

102. Steinbach, M. C., 2001. *Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis*. Siam Review, 43(1), 31-85.

103. Stoyan, D., 1983. *Comparison methods for queues and other stochastic models.* John Wiley.

104. Szekli, R., 1995. *Stochastic ordering and dependence in applied probability.* Springer Velag, New York.

105. Withmore, G. A., 1970. *Third degree stochastic dominance.* American Economic Review, 60, 457-459.

106. Xu, K. y Fisher, G., 2006. *Myopic loss aversion and margin of safety: the risk of value investing*. Quantitative Finance, 6, 481-494.