100cias@uned
Facultad de Ciencias
N.º 3 (nueva época) | 2010
ISSN: 1989-7189

Enseñanza

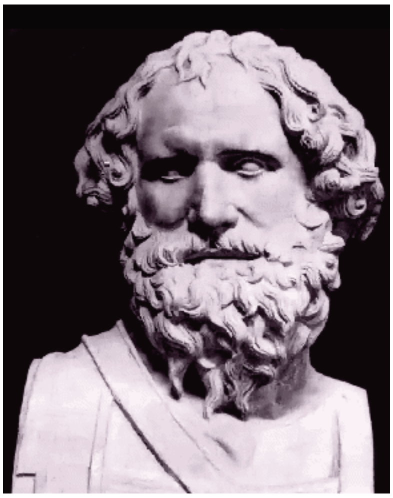
ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

ARQUÍMEDES Y LA CORONA DE HERÓN

Una de las historias más famosas sobre la ciencia antigua es la de Arquímedes y la corona de Herón. Dicha historia nos ha llegado a través de Vitrubio, que la relata en el libro IX de su *De Architectura*. Vitrubio escribía más de doscientos años después de la muerte de Arquímedes, de modo que no hay que tomarlo muy a pies juntillas. En cualquier caso, la historia cuenta que el rey Herón de Siracusa quiso ofrecer una corona a los dioses y dio a un orfebre una cierta cantidad de oro para que la hiciera. A los pocos días el orfebre entregó una corona que pesaba exactamente lo mismo que el oro recibido. Sin embargo, alguien denunció que el orfebre había hecho trampa y había sustituido parte del oro por plata, evidentemente más barata. Ante la sospecha de fraude, Herón encargó a Arquímedes que investigara la forma de demostrarlo sin dañar la corona. (En realidad, más que una corona se trataba de una guirnalda.) Arquímedes se tomó en serio la tarea y con estos pensamientos estaba cuando un día, al ir a darse un baño, observó que a medida que se introducía en la bañera se derramaba fuera de ésta una cantidad de agua equivalente al volumen de la parte de su cuerpo sumergida. Entonces *"lleno de alegría, saltó fuera de la bañera, desnudo se dirigió hacia su propia casa manifestando a todo el mundo que había encontrado lo que estaba buscando; corriendo gritaba una y otra vez «eureka, eureka»"*.

Tras este "descubrimiento", sigue contando Vitrubio, Arquímedes se hizo con dos lingotes, uno de oro y otro de plata, del mismo peso que la corona. Llenó una gran vasija con agua hasta los bordes e introdujo en ella el lingote de plata, con lo que se derramó una cierta cantidad de agua. Para ver cuál era exactamente esta cantidad sacó el lingote y midió el agua que había que añadir a la vasija para volverla a llenar.

Luego hizo lo mismo con el lingote de oro, y comprobó que el agua derramada en el proceso era mucho menor. Finalmente hizo lo mismo con la corona y vio que el agua derramada ahora era más que la derramada con el lingote de oro y menos que la derramada con el lingote de plata. A partir de estos volúmenes de agua derramados, Arquímedes pudo determinar que la corona era realmente una aleación de oro y plata y que el orfebre había cometido un fraude.



El razonamiento puede ser el siguiente. Sea V el volumen de la corona, y sean V_{oro} y V_{plata} volúmenes de oro y de plata puros, respectivamente, cuyo peso es igual al peso de la corona. El orfebre tramposo ha tomado una fracción x del volumen V_{oro} y una fracción $y = 1 - x$ del volumen V_{plata} para obtener una corona de volumen V. Entonces,

$$V = xV_{oro} + (1-x)V_{plata} = x\left(V_{oro} - V_{plata}\right) + V_{plata}$$

de donde:

$$x = \frac{V_{plata} - V}{V_{plata} - V_{oro}} \quad ; \quad y = (1-x) = \frac{V - V_{oro}}{V_{plata} - V_{oro}}$$

y así la razón entre las proporciones de oro y plata es:

$$\frac{x}{y} = \frac{V_{plata} - V}{V - V_{oro}}$$

Puede ponerse una pega a este razonamiento y es que, en general, el volumen de una aleación no es la suma de los volúmenes de los metales que intervienen en ella, pues los átomos tienen diferentes tamaños y pueden ordenarse de formas diferentes de como estaban en los metales por separado. Por supuesto, Arquímedes no sabía esto y, en cualquier caso, el efecto no es muy grande en el caso que nos ocupa. Así que Arquímedes podía determinar con precisión las proporciones de la aleación midiendo los volúmenes del agua.

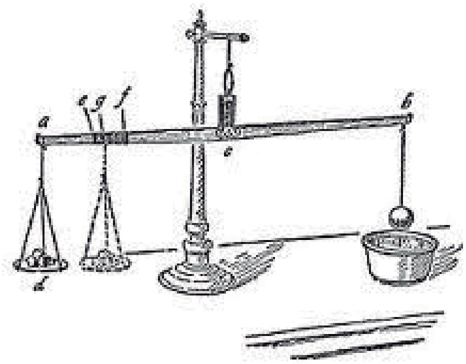


Figura 1. Experimento propuesto por Galileo en La Bilancetta.

¿Realmente podía? Pongamos un ejemplo. Supongamos que el peso de la corona (o guirnalda) fuera de 5 kg. (Esto ya es mucho suponer pues las coronas de este tipo de las que hay noticia apenas llegaban a 1 kg.) El oro tiene una densidad de 19.300 kg/m^3, así que no cometeremos un gran error tomando 20.000 kg/m^3 para simplificar los cálculos. Entonces, 5 kg de oro puro ocupan un volumen de 0,00025 m^3 = 250 cm^3, apenas el volumen de una caña de cerveza. Vitrubio dice que Arquímedes introducía el lingote de oro en una gran vasija; supongamos una vasija cuadrada de 0,5 m de lado, es decir, de 0,25 m^2 = 2.500 cm^2 de superficie. Por lo tanto, al introducir el lingote de oro en la vasija el nivel del agua aumentaría en 1 mm y ésta se derramaría.... si no fuera por la tensión superficial. En efecto, es bien sabido que es difícil enrasar exactamente la superficie de un vaso lleno de agua: la tensión superficial hace que el agua forme un menisco en la pared del vaso y la superficie quede ligeramente abombada, de forma que el agua no se derrama aunque su superficie rebase la altura del vaso. (Por supuesto, un experimentador actual podría rebajar la tensión superficial del agua mediante un detergente, pero esto ya sería demasiado pedir en la época de Arquímedes.) Por otra parte, tanto los lingotes como la corona deberían sumergirse con mucho cuidado: cualquier movimiento brusco crearía una onda que también podría provocar un derramamiento de agua.

Por supuesto ignoramos muchas cosas sobre este "experimento" pero, en cualquier caso, los errores en estas medidas tenían que ser apreciables.

Pero además, ¿qué tiene que ver todo esto con el famoso principio por el que Arquímedes es conocido en la física? Hasta ahora, lo único que hemos visto es que cuando se introduce algo en el agua, el agua tiene que "dejarle sitio" y el nivel del agua aumenta. No parece que éste sea un descubrimiento muy original: desde luego, no para salir desnudo a la calle gritando como un loco.

Por ello, ya en la Antigüedad se pensaba que el relato de Vitrubio no reflejaba la realidad de la historia de la corona (suponiendo que realmente la hubo). Ya en el siglo V circula un poema en latín, *Carmen de Ponderibus*, donde se narra la historia de la corona de un modo diferente y que, éste sí, utiliza el principio de Arquímedes. El *Carmen de Ponderibus* es un poema didáctico que hace una exposición de los sistemas de medidas utilizados por griegos y romanos. Su autoría es incierta, aunque suele atribuirse a Prisciano. Además de las copias manuscritas que circularon durante la Edad Media, el *Carmen de Ponderibus* fue editado en 1470. Probablemente Galileo leyó esta edición y se basó en ella para escribir un pequeño ensayo titulado *La Bilancetta*, que fue su primera obra escrita en italiano, cuando Galileo tenía 22 años.

Galileo también empieza dudando de la versión que da Vitrubio: "la creencia general en que, como algunos han escrito, su procedimiento consistiría en sumergir la corona en agua, habiendo hecho lo mismo antes con una cantidad igual de oro purísimo y de plata por separado, y que por las diferentes cantidades de agua rebosadas, llegara al conocimiento de la mezcla del oro con la plata que componían dicha corona, me parece, por así decirlo, algo demasiado basto y lejano de la exquisitez (...) y finalmente, tras haber con diligencia revisado todo lo que Arquímedes demuestra en sus libros *Sobre las cosas que están en el agua* y *Sobre las cosas que pesan igualmente*, se me ha ocurrido un procedimiento que resuelve con gran exactitud nuestro problema. Modo el cual, pienso yo, ha de ser el mismo empleado por Arquímedes, debido a que, además de ser exactísimo, depende también de las demostraciones averiguadas por él mismo".

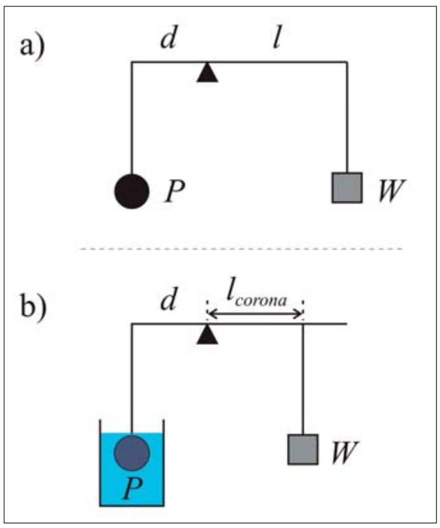


Figura 2. Esquema del experimento propuesto por Galileo en La Bilancetta, basado en las ideas de Arquímedes.

Puesto en términos actuales, el procedimiento que propone Galileo es el siguiente. Sea P el peso de la corona, y sean como antes V_{oro} y V_{plata} los volúmenes de oro y de plata, respectivamente, con el mismo peso P. Entonces, llamando ρ, ρ_{oro} y ρ_{plata} a las densidades respectivas de la corona, del oro y de la plata, tenemos:

$$P = \rho\, V\, g - \rho_{oro}\, V_{oro}\, g = \rho_{plata}\, V_{plata}\, g$$

Si como se indica en la Figura 2a, en un brazo de una balanza colocamos un platillo con la corona de peso P a una distancia d del fulcro, este peso será equilibrado por otro peso W colocado en el otro brazo de la balanza a una distancia l tal que:

$$P\, d = W\, l$$

Ahora hacemos una nueva pesada, pero esta vez con la corona sumergida totalmente en agua, Figura 2. b. Entonces sobre la corona actúa un empuje vertical (principio de Arquímedes) dado por $E = \rho_{agua}\, V\, g$ y el peso aparente de la corona sumergida es:

$$P_{corona} = (\rho - \rho_{agua}) V\, g.$$

Puesto que $P_{corona} < P$, para equilibrar la balanza tendremos que colocar el peso W del otro brazo a una distancia $l_{corona} < l$, tal que:

$$P_{corona}\, d = W\, l_{corona}$$

y de estas expresiones obtenemos:

$$\frac{l - l_{corona}}{l} = \frac{P - P_{corona}}{P} = \frac{\rho_{agua} V g}{\rho V g} = \frac{\rho_{agua}}{\rho}$$

Procediendo de la misma manera con el oro y la plata, obtenemos (llamando l_{oro} y l_{plata} a las distancias a las que hay que colgar W para equilibrar el peso en agua del oro y de la plata):

$$\frac{l - l_{oro}}{l} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{oro}} \quad ; \quad \frac{l - l_{plata}}{l} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{plata}}$$

Ahora, escribiendo en términos de densidades la expresión que relaciona los volúmenes:

$$V = x V_{oro} + (1-x) V_{plata} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{P}{\rho\, g} = x \frac{P}{\rho_{oro}\, g} + (1-x) \frac{P}{\rho_{plata}\, g}$$

y teniendo en cuenta las expresiones de las densidades en términos de longitudes, obtenemos finalmente:

$$x = \frac{l_{plata} - l_{corona}}{l_{plata} - l_{oro}} \quad ; \quad y = (1-x) = \frac{l_{corona} - l_{oro}}{l_{plata} - l_{oro}}$$

o

$$\frac{x}{y} = \frac{l_{plata} - l_{corona}}{l_{corona} - l_{oro}}$$

Ahora todo se reduce a medir longitudes sobre un brazo de la balanza, que es algo mucho más fácil y más preciso. En efecto, supongamos de nuevo un peso de 5 kg colgado en un brazo de la balanza a una distancia d = 0,4 m, que puede equilibrarse (en la pesada en aire) por un peso W = 2 kg colocado a una distancia l = 1 m. Entonces, para equilibrar el oro en agua habría que desplazar el peso W hasta una distancia l_{oro} dada por:

$$\frac{l - l_{oro}}{l} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{oro}} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad l_{oro} = 95 \text{ cm}$$

es decir, un desplazamiento de 5 cm, que es algo perfectamente medible con precisión. Galileo proponía incluso enrollar un hilo de cobre muy fino en el brazo de la balanza y *"tomando un estilete muy agudísimo, hagámoslo resbalar poco a poco sobre dichos hilos, de tal forma que, gracias al oído por una parte, y mediante la percepción del obstáculo que supone el hilo para que nuestra mano se deslice por otra, podremos contar fácilmente las vueltas de hilo recorridas".*

Pese a los mencionados textos del *Carmen de Ponderibus* y de *La Bilancetta*, realmente no hay evidencia alguna de que Arquímedes llegara a realizar el experimento que hemos descrito, pero menos probable aún es que hubiera construido los famosos *espejos ustorios* o la *manus ferrea* con los que se defendía la ciudad de Siracusa de la tropas romanas. La biografía de Arquímedes está llena de controvertidas anécdotas sobre los numerosos descubrimientos e inventos que se le han atribuido y que quizá sólo sean reflejo del unánime reconocimiento de su genio a lo largo de la historia.

Recomendamos a los interesados en conocer más detalles de la figura de Arquímedes que vean el programa *"Arquímedes. El genio de Siracusa"*, emitido por la Televisión Educativa de la UNED (CanalUNED) el 11 de junio de 2010:

http://www.canaluned.com/#frontaleID=F_RC&sectionID=S_TELUNE&videoID=5156

J. Javier García Sanz e Ignacio Zúñiga López
Dpto. de Física Fundamental