TESIS DOCTORAL

2022

DEPENDENCIA DE CONTINUOS

ESTUDIO CRÍTICO IDEALISTA DEL PREDICATIVISMO WEYLIANO

VÍCTOR GONZÁLEZ ROJO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN FILOSOFÍA

JESÚS ZAMORA BONILLA

Agradecimientos

A Sonja.

A mi madre, a mi padre.

A Antonio Caba, por enseñarme matemáticas y filosofía,
transmitiéndome, además, el dulce sentimiento de *volver a casa*.

ÍNDICE

[Ο]ὔ τοι ἐγώ γε ἧς γαίης δύναμαι γλυκερώτερον ἄλλο ἰδέσθαι[†]

HOM., *Odisea*, lib. IX.

– – – ego apis Matinae[††]

HOR., *Odas*, lib. IV, II.

Wer als Mathematiker an andere Wissenschaften,
etwa an die Philosophie, mit der Forderung
nach Definitionen und Deduktionen
mathematischen Stils herantritt, handelt
nicht klüger, als wenn ein Zoologe
die Zahlen ablehnte, weil sie kein lebende
Wesen sind.[†††]

HERMANN WEYL, *Das Kontinuum*.

[†] "Y para mí no hay cosa más dulce de ver que el propio país".

[††] "Yo, abeja del Matino".

[†††] "Quien como matemático se adentre en otras áreas del conocimiento, como por ejemplo en la filosofía, con la exigencia de definiciones y deducciones de estilo matemático, no se comporta más inteligentemente que un zoólogo que rechazara los números, porque no son seres vivos".

INTRODUCCIÓN GENERAL

El presente trabajo tiene como objeto el estudio y análisis crítico del concepto de continuo tal y como es desarrollado por Hermann Weyl a partir de su posición predicativista. Nos ocuparemos fundamentalmente[1], por tanto, de cómo este concepto es analizado en su libro *El continuo: Investigaciones críticas sobre los fundamentos del análisis*.

Además, nos proponemos analizar en profundidad, lo que creemos que pueden ser consideradas "imprecisiones" de Weyl en la compresión del problema del continuo en su relación con el análisis. Imprecisiones, que suponen no obstante, el principal motivo de Weyl para la escribir *El continuo*, a saber: que existe en análisis clásico un círculo vicioso en la definición de supremo, lo cual invalida, por tanto, teoremas fundamentales del análisis, sin los cuales la matemática debe abordar una profunda reforma, si quiere hacerse de forma consistente, y al margen de contradicciones (o "inseguridades"[2]) consecuencia de la interpretación 'atomista'[3] del continuo matemático vigente en el análisis. En este punto, recogemos la crítica de Hölder respecto al mencionado 'círculo vicioso del análisis'[4], y profundizamos en su propuesta filosófico-matemática, desarrollada sobre todo en *Die mathematische Methode*, pues creemos que su visión del problema del continuo, incardinado en su epistemología matemática, contiene rasgos proto-predicativistas[5]. Pero también, el libro de Hölder contiene ideas, a partir de las cuales pueden efectuarse propuestas interesantes para la filosofía de la matemática, considerando la visión idealista que proponemos para abordar el problema del continuo.

Consideraremos también artículos de Weyl de su etapa anterior a la publicación de *El continuo*, así como otros posteriores. Con ello pretendemos analizar cómo la idea de continuo se desarrolla a lo largo de algo más de una década en el pensamiento del matemático. El objetivo preseguido es, por un lado, estudiar cómo el concepto de continuo evoluciona

[1] Si bien es cierto que se considerarán, además, otros escritos de Weyl donde también se investiga su esencia.

[2] Weyl escribe en su introducción a *El continuo* que la 'casa del análisis' [*Haus der Analysis*] está "construida sobre arena" ["auf Sand gebaut ist"] (Weyl, 1918, Introducción, 1).

[3] Esta concepción supone que los puntos del continuo son 'elementos' aislables dados, a los que se puede acceder de forma precisa mediante una relación de magnitud. Frente a esta concepción está la idea de que los puntos del continuo son 'objetos ideales', es decir, *puntos límite* no accesibles, pero sí aproximables *ad libitum*. Veáse (Mancosu, 1997, 86 y ss.).

[4] Véase un pormenorizado estudio en (González Rojo, 2019).

[5] Véase el capítulo cuarto.

diacrónicamente al tiempo que lo hacen las ideas filosóficas del autor sobre la matemática[6]; por otro, observar la trascendencia e influencia de aquella idea expuesta en *El continuo* a lo largo de la evolución intelectual de Weyl. Y cómo, en cierto modo, la idea de continuo como la piensa Weyl, destilada a lo largo de los años, permanece como una constante en su pensamiento hasta el final.

Es sabido que Weyl escribió *El continuo* considerando ideas filosóficas tomadas de la fenomenología husserliana, así como influenciado por Fritz Medicus[7] y su (particular) interpretación del idealismo fichteano aplicado a las matemáticas y la física. Nosotros defenderemos, sin embargo, en nuestro análisis y propuesta la perspectiva idealista "clásica"[8].

En el presente estudio son ambos puntos de vista, el matemático y el filosófico, necesariamente abordados, pues la idea matemática de continuo en el pensamiento weyliano es una consecuencia (casi necesaria, nos atrevemos a afirmar) de su posición filosófica durante aquellos años.

Además, pretendemos establecer a través de ideas desarrolladas por Haim Gaifman un método que permita analizar (metamatemáticamente) lo que es "posible" a la hora de hacer matemáticas partiendo del esquema predicativista elaborado por Weyl, y dónde se encuentran sus límites. Esto es, básicamente pretendemos delimitar dos "formas" de hacer matemáticas: la predicativista y la formal[9].

---

[6] En concreto, su paso del predicativismo a *un* intuicionismo influenciado por Brouwer.

[7] Fritz Medicus –filósofo y teólogo– conoció a Weyl en la Politécnica de Zürich, donde fueron colegas de 1913 a 1930. Pronto se estableció entre ellos una estrecha amistad. Siendo así, que, ideas filosóficas de Medicus acabaron influenciando el pensamiento filosófico-matemático del Weyl de la década los 20. Para profundizar sobre esta relación véase (Sieroka, 2010).

[8] Como es desarrollada por Kant y Schopenhauer.

[9] Por formal entendemos –de modo general– el desarrollo de la matemática a partir de axiomas y bivalente en cuanto a la lógica subyacente. Lo cual implica a su vez, que las definiciones impredicativas de conceptos matemáticos son en principio admisibles.

HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

Nuestra hipótesis es que el punto de vista predicativista, si bien es interesante desde la perspectiva de cómo la matemática puede desarrollarse considerando sólo una idea matemática básica: la existencia de los números naturales como totalidad completa dada; así como la aceptación exclusiva de definiciones predicativas al definir nuevos conceptos matemáticos, no recoge propiamente la *esencia* del continuo intuitivo y sus fructíferas posibilidades, cuando se transfiere esta esencia a la matemática. Donde juega un papel decisivo en un sinnúmero de conceptos y teoremas del análisis; ni puede hacerlo. Por ello, defendemos que la relación entre el continuo intuitivo y matemático, de la que Weyl afirma de forma categórica, que es absurdo pretender aunar ambas nociones[10], es una relación de dependencia. Lo cual nos lleva a firmar que a partir de la interpretación de Dedekind del continuo como objeto matemático en que se plasma la propiedad intuitiva de ausencia de espacios vacíos, [*Lückenlosigkeit*], se puede aclarar la conexión y preeminencia entre estos tipos de continuo. Para nosotros, la idea intuitiva precede y *fundamenta* la idea matemática de continuo. No adoptamos en nuestro análisis una perspectiva fenomenológica (como hará Weyl en *El continuo*), sino que creemos que la solución idealista[11] es la más apropiada. Sin menoscabar que la fenomenología, y su relación con el idealismo, pueda fungir como fundamento filosófico sólido del análisis del continuo; el cual, sin embargo, por su amplitud, no trataremos aquí.

Nuestro objetivo es intentar fundamentar el *paso* del continuo intuitivo al matemático desde aquella perspectiva idealista mencionada. Además, analizaremos la "solución predicativista" de Weyl a través del análisis de la paradoja de Richard como se nos presenta en *El continuo*. Esta paradoja, –creemos– es un punto fundamental de la propuesta weyliana, y la que, en cierto modo, determina su crítica al análisis clásico[12]. Weyl no admite la paradoja de Richard desde el punto de vista *interno* (que diría Feferman), sino exclusivamente *externo*. Lo que implica *de facto* una prohibición, pues se traza un *límite* a la hora de enumerar elementos de un conjunto, en concreto, el de los números naturales, que se dejan definir por medio de una

[10] "Dem Vorwurf gegenüber, [...], haben wir uns Rechenschaft darüber gegeben, daß das im anschaulichen Kontinuum Aufzuweisende und die mathematische Begriffswelt einander so fremd sind, daß die Forderung des Sich-Deckens als absurd zurückgewiesen werden muß". ["Contra el reproche […] nos hemos dado las explicaciones que lo que se manifiesta en el continuo intuitivo y el mundo de conceptos matemáticos son tan ajenos entre sí, que la pretensión de coincidencia debe ser rechazar como absurda"] (Weyl, 1918, 83).

[11] Véase un pormenorizado análisis en (González Rojo, 2021).

[12] Aunque el *círculo vicioso de análisis* sea la enfermedad; el pródromo es la paradoja, como veremos más abajo.

relación determinada. En definitiva, se trata de establecer un límite al pretender usar los números naturales como conjunto cardinal, y como conjunto que se pretende, a su vez, enumerar. Los naturales forman un ordinal y un cardinal, pero al mismo tiempo son *objeto* (como cualquier otro conjunto) de ser enumerados y ordenados. Esta "autorreferencia" es la que trata de delimitar Weyl. Lo cual es, en definitiva, intentar delimitar el uso de un lenguaje y un metalenguaje; o intentar determinar si algo puede pasar de ser *objeto* matemático a ser *herramienta* matemática.

Sin embargo, la práctica matemática no impide jugar, en principio, este doble papel al conjunto de los naturales. El límite impuesto, es, solamente, el de la no-contradicción. Es decir, la aparición de (posibles) inconsistencias o paradojas.

Veámos sucintamente lo que queremos tratar en los capítulos que siguen.

En el primer capítulo, estudiaremos fundamentalmente el impacto histórico-filosófico de *El continuo*. Como ya hemos mencionado, en este libro Weyl expone fundamentalmente sus dudas sobre la correcta fundamentación del análisis. Para corregir estas supuestas deficiencias desarrolla lo que se conoce como *predicativismo dado los números naturales*[13]. Esto le lleva, por otro lado, a estudiar el problema de la interacción entre el continuo matemático y el intuitivo. En este capítulo consideraremos además una interesante crítica de Otto Hölder a Weyl, respecto al –como lo denomina Hölder– "supuesto" círculo vicioso.

El segundo capítulo tiene como objetivo un análisis filosófico pormenorizado de la idea de continuo en *El continuo*. Además, se propone una "solución" idealista para el tratamiento del problema del continuo, teniendo como referencia lo expuesto por Weyl en su libro.

En el tercer capítulo pretendemos analizar en profundidad la paradoja de Richard. Considerando primero cómo la estudia Weyl en su trabajo de habilitación de 1910, y después como ésta es introducida en *El continuo*. Usando además –como dijimos más arriba– ideas de

[13] El predicativismo dados los números naturales parte de la idea de que el conjunto de los naturales es una totalidad completa intuitivamente clara. Además, afirma que definiciones impredicativas, esto es, definiciones de conceptos matemáticos en las cuales se dé una "dependencia existencial" entre el *definiendum* y el *definiens* no deben ser admitidas. Esto tiene como consecuencia fundamental que los cuantificadores no deben ser usados de forma irrestricta sobre colecciones de objetos que no hayan sido 'construidas' (a partir de los números naturales en el caso weyliano). Por tanto, definiciones donde se haga uso de la cuantificación sobre reales cualesquiera no se admiten como válidas. El predicativismo, digamos, *simpliciter*, sólo requiere que las definiciones de objetos matemáticos no sean impredicativas. Es decir, no hace asunciones sobre la *modalidad* existencial respecto al conjunto de los números naturales. Por último, nótese que el predicativismo de Weyl es básicamente constructivista en su desarrollo, como no podría ser de otro modo. Véase (González Rojo, 2019) y (González Rojo, 2021, 258).

Gaifman, creemos poder clasificar a partir de ellas *dos formas* de hacer matemáticas: la predicativista y la formal.

En el capítulo cuarto, nos ocuparemos de la filosofía matemática de Otto Hölder. En concreto de su obra más importante al respecto, *Die mathematische Methode*. Nos proponemos, partiendo de este análisis, observar la relación que existe entre ideas filosófico-matemáticas fundamentales de Weyl y Hölder. Asimismo, analizamos desde un punto de vista idealista nociones como la idealidad del espacio y, la sucesión y el continuo como conceptos matemáticos irreducibles. Para terminar, nos preguntamos en qué medida se puede considerar a Hölder un proto-predicativista.

Capítulo 1

EL CONTINUO 100 AÑOS DESPUÉS: UN NUEVO ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA CRÍTICA DE HÖLDER[14]

1.1 INTRODUCCIÓN

En 2018 se cumplen cien años de la publicación del libro *El continuo* de Hermann Weyl. Feferman, en su artículo «Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later» explicaba ya la trascendencia del libro y cómo éste supuso el inicio de la corriente predicativista dentro de las corrientes filosóficas de los fundamentos de la matemática[15].

En *El continuo*, Weyl analiza la idea que tiene sobre la noción de continuo en matemáticas y señala que el análisis cae en un círculo vicioso cuando acepta el principio del supremo en su forma conjuntista. Además, el matemático propone una nueva fundamentación del análisis basada en la construcción, a partir de los números naturales y de principios lógicos, de los reales. Todo lo cual le lleva a fundar el predicativismo como una opción para hacer matemáticas de una forma, a su entender, segura.

Pretendo defender dos cosas en este capítulo: la primera, que Weyl se acerca al principio del círculo vicioso en *El continuo* y en artículos posteriores (1919, 1921, 1925) de manera distinta (además considero la discusión con Hölder a este propósito); y la segunda, que la impredicatividad, entendida como la imposibilidad de definir a partir de una totalidad de la cual lo que se quiere definir forma ya parte, y el círculo vicioso son cosas no exactamente equivalentes, en el sentido de que se puede mantener la una, rechazando la otra. Finalmente, propongo una alternativa en la cual el principio del supremo se puede mantener tal y como es formulado por Dedekind, restringiendo el universo de subconjuntos de números reales que pueden ser definidos[16].

[14] Este capítulo se corresponde con (González Rojo, 2019). En ANEXOS se adjunta el artículo publicado original.

[15] "In his book *Das Kontinuum* (1918), Hermann Weyl initiates a program for the arithmetical foundations of mathematics […]. Modern logical work has made it possible to give considerable substance to Weyl's program, showing it to be surprisingly viable for scientifically applicable mathematics" (Feferman, 1998, 249).

[16] La forma en que nos parece que los conjuntos "pueden" ser definidos razonablemente se precisará más abajo. Veáse § 1.4.

1.2 EL CONTINUO *100 AÑOS DESPUÉS*

El escrito de Weyl se divide en dos partes fundamentales claramente diferenciadas atendiendo a su estructura, y en tres si se atiende a su contenido.

Formalmente el libro consta de dos capítulos, el primero de ellos tiene por título 'Conjunto y función (Análisis de la formación del concepto matemático)', y en él se incluye una parte lógica y otra matemática. La parte lógica a su vez de tiene tres epígrafes, la matemática, algo más extensa, cinco.

El segundo capítulo lleva por título 'Concepto de número y continuo (Fundamentos del cálculo infinitesimal)', y se divide en ocho epígrafes.

Desde el punto de vista del contenido tenemos la parte lógica, la matemática y asimismo otra genuinamente filosófica. Como trataremos más adelante de las partes lógica y matemática en detalle, quisiera decir antes algo acerca de la filosófica.

En la introducción y casi al final del segundo capítulo Weyl nos da a conocer su posición filosófica. En la introducción nos enteramos de que Weyl considera la fenomenología de Husserl como el marco filosófico adecuado para las ideas sobre lógica y matemática que desarrollará posteriormente. Así, escribe en la introducción: "*En lo que respecta a la epistemología de la lógica, estoy de acuerdo con la concepción que Husserl presenta en sus "Investigaciones lógicas" (2ª. Ed., Halle 1913); remito también a la exposición más profunda, que sitúa a la lógica en su lugar en el marco de una filosofía completa, en la obra de Husserl „Ideas para una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica" (Jahrbuch für Philos. und phänomen. Forschung, Tomo I, 1913*" (Weyl, 1918, Introducción, 4). Como hemos mencionado, en un epígrafe del segundo capítulo reflexiona sobre el continuo espacio-temporal y el matemático de modo muy refinado, contrastando sus ideas con las que al respecto sostenía Bergson y con la fenomenología.

El propósito de Weyl en el capítulo primero es introducir su lenguaje lógico, además de los principios y relaciones fundamentales para la construcción de juicios. Lo que es un juicio[17] en sentido estricto es algo muy específico. Señala en la primera frase del primer epígrafe: "*Un* juicio *afirma un hecho: si el hecho se da, entonces el juicio es verdadero, de otro modo,*

[17] En (Weyl, 1921), en el epígrafe tercero, se reflexiona sobre las distintas clases de proposiciones en matemáticas. Trad. al inglés en (Mancosu, 1997, 86).

decimos que es falso". Los juicios de relaciones, los esquemas de juicio y los juicios existenciales, de los que escribe que "*juegan para la matemática el papel más importante*", son tratados aquí.

Más adelante introduce el concepto de juicio particular y de juicio general, y caracteriza a su vez a la matemática como la actividad que trata de "juicios *relevantes, generales y verdaderos*". Del mismo modo, explica sucintamente conceptos como demostración (matemática), consecuencia lógica y axioma.

La segunda parte del primer capítulo se introducen los conceptos de conjunto, relación, así como ideas tan importantes para su concepción de la matemática como el 'principio de iteración' [*Iterationsprinzip*] o el círculo vicioso del análisis[18].

En la concepción weyliana de conjunto, un conjunto se puede definir de dos maneras distintas: una, dando una lista de sus elementos (lo que sólo puede hacerse con conjuntos finitos); la otra, dando una propiedad. Así escribe: "*Toda propiedad original o derivada E se corresponde con un conjunto (E)*". Para cada propiedad E 'sobre' un dominio se hace corresponder un conjunto tal que para cada elemento x del dominio, éste pertenece al conjunto si y sólo si tiene la propiedad E. Introduce además la noción de esquema relacional o relación ordenada que define como esquemas relacionales o relaciones donde los objetos que 'llenan' las posiciones vacías lo hacen en un determinado orden.

Otro concepto importante tratado en este capítulo es el de *proceso matemático* que es el procedimiento por el que a partir de los objetos primitivos se forman otro tipo de objetos ideales, los conjuntos uni y multidimensionales. Es importante señalar que estos nuevos objetos pertenecen a una esfera de existencia completamente distinta de la de los objetos primitivos.

Dentro de la categoría de objetos de una teoría matemática, para Weyl, los números naturales son la categoría de objetos principal, la que juega el papel de categoría básica, no derivada, o primigenia, que acepta de forma intuitiva como esencial para el quehacer matemático, y sobre la que construirá el análisis. Al igual que Poincaré, cree que es en la representación de la iteración, en la representación de la secuencia de los números naturales donde descansa el fundamento último del pensamiento matemático. En este sentido se podría llamar a Weyl

[18] Es en este punto donde el predicativismo de Weyl, predicativismo dados los números naturales, aplica su crítica al análisis clásico; y es, por tanto, el punto de bifurcación origen de una nueva corriente en lo tocante a la fundamentación de la matemática.

‘intuicionista’, si se tiene en cuenta que cree que esta intuición “pura” [*reine Anschauung*], es la que, además, se establece como fundamento epistemológico básico de la teoría de conjuntos.

Al introducir el concepto de función explica que tiene dos raíces. Una, la que tiene que ver con el mundo material o físico, cuyas dependencias naturales (dadas por la naturaleza) [*naturgegebenen Abhängigkeiten*] nos dirigen hacia esta primera raíz; la segunda es la aritmético-algebraica. El punto en que estas dos fuentes, diversas e independientes la una de la otra, se tocan, es en el concepto de *ley natural* [*Naturgesetz*]. Estas dos fuentes constituirán –como se verá en el segundo capítulo– una de las ideas filosóficas sobre el continuo más interesantes y originales de Weyl. El problema (epistemológico) tiene que ver entonces con cómo conjugar por un lado el continuo intuitivo espacio-temporal con el continuo del que trata el análisis, y además, cómo explicar su relación así como su dependencia o necesidad.

El capítulo segundo tiene por objetivo la *construcción* del análisis. Para ello se deben aplicar los principios definidos anteriormente para conseguir construir los números racionales, y a partir de ellos los reales. Weyl empieza con los naturales en esta segunda parte. Demuestra propiedades aritméticas básicas, así como las propiedades conmutativa y asociativa, e introduce el concepto de cardinal asociándolo al de cortadura. Después le llega el turno a las fracciones, de las que derivará la definición de número racional[19]. En este apartado, como hizo en el anterior, se definen las operaciones básicas y las propiedades conmutativa y asociativa.

Tras haber introducido a partir de la categoría fundamental de los números naturales los racionales, en el apartado tercero define los números reales. Aquí, el matemático se ayuda de las cortaduras de Dedekind, y de esta forma define un número real como “[*u*]*na cortadura abierta de números racionales, que ni es el conjunto vacío ni es el conjunto universa*l”. Por tanto, los reales son “*conjuntos cuatri-dimensionales especiales de números naturales*”. Añade que ser un número real, es una “*propiedad finita*”. Esto es algo importante, pues es una consecuencia natural de lo que Weyl se ha propuesto al construir los números reales a partir de los racionales. Lo que esto significa concretamente es que un número real se construye a partir de los principios dados en el capítulo primero suponiendo dado el *conjunto de los números naturales*.

[19] Weyl introduce los racionales como un par doble de naturales que cumple cierta relación.

Después de definir bastantes propiedades (por ejemplo, el concepto de número algebraico), llegamos al apartado donde trata de la convergencia, de las sucesiones de Cauchy y de las series. Es aquí donde Weyl traza la línea entre lo que se admitirá en su análisis y lo que deberá ser rechazado del análisis clásico. El criterio de convergencia que utiliza debe su validez al concepto de límite inferior de una sucesión de reales que construye a partir de los números racionales y de los naturales.

La idea clave de Weyl, con la que inaugura una nueva forma de hacer matemáticas y otra corriente en la fundamentación de las matemáticas, es la de admitir el principio del supremo sólo para secuencias de números reales, y no para conjuntos de números reales arbitrarios. Se debe señalar que esta idea y su desarrollo, así como –lo más importante– las implicaciones[20] que tiene para el análisis en particular, y para la matemática en general, es de lo más relevante que Weyl ha aportado como matemático y pensador.

Nombra cinco proposiciones ("*supuestamente equivalentes*", escribe) que, en vez del principio de convergencia de Cauchy sirven como punto de partida del análisis, de las cuales sólo la primera y la segunda son válidas en su construcción; la otras tres[21] –entre las que se encuentra el famoso teorema (principio[22], según se entienda la construcción de los reales), que dice que un conjunto acotado de números reales tiene un límite inferior y otro superior precisos–, no pueden serlo de manera consistente. La invalidez de estas proposiciones, que hasta ahora "*solían servir para la deducción de todas las afirmaciones del análisis*", tiene –como dice– la consecuencia fundamental de que la formación de conceptos en el análisis clásico, así como algunas demostraciones donde ellos intervienen, deben ser abandonados.

La proposición sexta es el teorema de Heine-Borel, el cual ha de ser interpretado correctamente (en particular el concepto de 'sucesión de intervalos') para que resulte válido. El teorema se convierte en falso si se sustituye '*sucesión de intervalos*' por '*conjunto de*

---

[20] Véase (Feferman, 1998), artículos: «Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later», «Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics».

[21] Además de las mencionadas, Weyl rechaza en el análisis que ha construido las proposiciones siguientes: 1) *El principio de cortadura de Dedekind*: Sean A y B dos conjuntos de números reales, tal que cada número que es elemento de A es más pequeño que cada número de B, y sea además para cada fracción α un número r perteneciente a A y un número n perteneciente a B, tal que + α no pertenece al dominio n – r: entonces existe uno y sólo un número real c tal que ningún real de A es mayor que c y ninguno que sea elemento de B es menor que c. 2) Cada conjunto infinito acotado de números reales tiene un punto de acumulación. Véase (Weyl, 1918, 58-59).

[22] Weyl escribe, refiriéndose a la proposición cuarta, el efecto que tiene su rechazo sobre el principio de Dirichlet. Este principio asume que el minimizador de una determinada función de energía es una solución de la ecuación de Poisson. Para ello se asume la existencia de un ínfimo. De ahí la crítica de Weyl. Véase (Weyl, 1918, 60).

intervalos cualesquiera', o si no se considera la categoría fundamental '*número natural*' a la hora de dar la sucesión de intervalos.

Llegados a este punto, conviene decir algo más sobre la proposición cuarta. En ella se hace patente el círculo vicioso que critica Weyl al análisis clásico, y que es, podríamos decir, el leitmotiv que le impulsa a escribir *El continuo*. Como indicó en el apartado seis del capítulo primero, el *no* seguir el "procedimiento restringido" [*das engere Verfahren*] lleva a un análisis donde *no* aparecen niveles, donde las propiedades de segundo nivel no se definen a partir de la *totalidad* de propiedades de primer nivel. Pero precisamente por esto, es decir, debido a que el análisis clásico no sigue este procedimiento, las definiciones y las demostraciones tomarán necesariamente según Weyl, la forma de un círculo vicioso.

A la hora de *construir* la cota superior de un conjunto acotado, esa cota se define por medio de un real de primer nivel; se utiliza el cuantificador 'existe', el cual cuantifica sobre un real de primer nivel, por tanto, la cota superior es un número real, pero de segundo nivel. Esta es la argumentación de Weyl.

El problema surge por pretender *construir* una tal cota *a partir de* un conjunto dado cualquiera. Weyl ha dejado claro que la aplicación del proceso matemático tiene como consecuencia la aparición de los niveles. Si dado un conjunto acotado M de reales, se pretende construir su cota superior, se tendrá que formar un conjunto de racionales con una relación de pertenencia que se refiere a conjuntos de primer nivel. A él pertenecerán a un número racional r si y sólo si existe un real de primer nivel de M menor que r. Esto es, el *salto* de niveles (Chihara, 1973, 53) ocurre siempre que aparezca una definición donde el *definiens* tenga un cuantificador que cuantifique a un objeto de un nivel determinado.

El libro continúa con una sección dedicada a las funciones continuas, donde demuestra tres proposiciones fundamentales que son la base para el desarrollo de la teoría de la diferenciación, así como de la teoría de la integración. Weyl ha demostrado, por tanto, que en su sistema, estos teoremas son válidos. No obstante, recalca que la cosa no es tan fácil si de lo que se trata es de las avanzadas teorías de la integral y la medida de "*Riemann, Darboux, Cantor, Jordan, Lebesgue y Caratheodory*".

La sección sexta –como ya hemos indicado– trata sobre el continuo intuitivo y el matemático. Es aquí donde expone Weyl su concepción genuinamente fenomenológica al tratar de ambos. De este modo explica la diferencia entre los continuos, y la formulación (o interpretación matemática) del continuo intuitivo estableciendo unas condiciones que harían posible la formulación misma y su tratamiento exhaustivo.

En las dos últimas secciones de este segundo capítulo pretende fundamentar –poniendo en coincidencia la teoría de números a través del axioma de continuidad– conceptos como las magnitudes y las medidas, además de, a partir de aquéllas, fundamentar de forma matemática la geometría del espacio dentro del análisis que ha desarrollado.

Finalmente, el libro se cierra con una breve conclusión donde Weyl pone de manifiesto como con los principios presentados se puede construir de forma completa el primer estadio [*ersten Stadien vollzogen*] del análisis, y pone de relieve de nuevo la diferencia que existe entre el continuo intuitivo y el continuo matemático construido y presentado en el libro. A pesar de esta diferencia opina sin embargo que es necesario construir un continuo matemático de la forma que lo ha hecho, si lo que se quiere es hacer posible el tratamiento de los tipos de continuos intuitivos a través de la matemática.

1.3 EL PROBLEMA DEL CÍRCULO VICIOSO

La diferencia entre cómo Weyl trata el principio del supremo en *El continuo* y en artículos posteriores, radica en que en *El continuo* el argumento utilizado se fundamenta en la teoría de los tipos de Russell teniendo en cuenta lo que denomina el "procedimiento restringido" [*das engere Verfahren*], llegando a la conclusión de que, si no se observan niveles, la definición de supremo contiene un círculo vicioso. Sin embargo, en los artículos posteriores su crítica se centra en el concepto de *propiedad definida extensionalmente* [*umfangs-definit*].

1.3.1 El círculo vicioso en *El continuo*

Como es sabido, este principio tiene una larga tradición en la historia de la lógica contemporánea. Russell lo analizó al tratar las paradojas que surgieron de la teoría (naif) de conjuntos, y Poincaré hizo referencia al mismo en varios de sus escritos donde explicaba paradojas semánticas como la de Richard o la de Berry (Chihara, 1973, 138 y ss.).

Gödel lo trata en su artículo «La lógica matemática de Russell» (Gödel, 1981, 297) donde escribe lo siguiente: "*Me refiero en particular al principio del círculo vicioso, que prohíbe un cierto tipo de 'circularidad' a la que se hace responsable de las paradojas. La falacia, según* *se sostiene, consiste en la circunstancia de que se definen (o se asumen tácitamente) totalidades cuya existencia implica la existencia de ciertos nuevos elementos de la misma totalidad, a saber, elementos definibles únicamente en términos de la totalidad entera. Esto lleva a la formulación del principio que dice que ninguna totalidad puede contener miembros definibles únicamente en términos de la totalidad, o miembros que involucran o presuponen esta totalidad*" (Gödel, 1981, 306).

Más adelante apunta que tal y como está formulado el principio, correspondiendo a las expresiones "definible en términos de", "involucra" y "presupone", se tiene en realidad tres principios diferentes. El segundo y el tercero son –según Gödel– mucho más plausibles que el primero. Es éste en cambio, el que prohíbe las definiciones impredicativas, el que tiene como consecuencia principal que la derivación de las matemáticas a partir de la lógica desarrollada por Dedekind o Frege sea imposible.

Gödel se adscribe en este artículo al platonismo[23], de hecho, escribe a propósito de su posición filosófica que puesto que "*no se conoce otro método de definir fuera del sistema*[24] *que los que ya involucran totalidades más amplias que las que aparecen en los sistemas* [...]. *Prefiero considerar esto como una prueba del principio del círculo vicioso es falso que como una prueba de que la matemática clásica es falsa*" (Gödel, 1981, 308).

Volviendo a Weyl, en *El continuo* el principio se formula, citando a Russell, del siguiente modo[25]: "*No totality can contain members defined in terms of itself*" (Weyl, 1919, 36).

Una pregunta interesante es si basta con esto. Tal y como lo expresa Russell no se dice nada de la totalidad en cuestión. Y Weyl tampoco. Es suficiente –a primera vista– con que se respeten los niveles.

Como dijimos más arriba el *salto de nivel*, que se produce si se cuantifica sobre una variable de un nivel dado, evita que un objeto de un dominio de un nivel determinado se defina a partir

[23] Feferman recuerda no obstante, que el propio Gödel tenía reservas respecto a su propia posición platónica. Así, en el artículo titulado «The present situation in the foundations of mathematics», encontrado en el *Nachlass* de Gödel, y reproducido en (Gödel, 1995, 36-53) con ocasión de una conferencia en 1933, Gödel escribe: "The result of the preceding discussion is that our axioms [of set theory], if interpreted as meaningful staments, necessarily presuppose a kind of Platonism, which cannot satisfy any critical mind and which does not even produce the conviction that the are consistent". Es por tanto evidente, que Gödel, no se sabe bien por qué cambió de actitud al respecto en 1944, fecha de la aparición del artículo más arriba referido.

[24] Se refiere en particular al sistema de los *Principia* de Russell.

[25] Esta formulación no es única, a lo largo del tiempo ha sido escrita de varias maneras. Así por ejemplo otra formulación más elaborada es la siguiente: "A definition written in symbols is impredicative if it defines an object which is one of the values of a bound variable occurring in the defining expression." Véase (Fraenkel et al., 1973, 38).

de objetos del mismo nivel. Weyl escribe en la parte segunda, epígrafe sexto cuando analiza la definición de supremo lo siguiente:

"*Sea por ejemplo M un conjunto acotado de reales del 1. nivel. Para construir [konstruieren] su cota superior se tiene que formar un conjunto ϒ de números racionales, al cual pertenecerá un número racional r si y sólo si existe un número real de 1. nivel que pertenece a M y que es mayor que r. Este conjunto ϒ tiene las propiedades a) b) c), y es por tanto un número real, pero un real de 2. nivel, pues en su definición aparece el "existe" en conexión con "un número real de 1. nivel" (es decir, "un conjunto de 1. nivel de números racionales" o "una propiedad de 1. nivel primitiva o derivada"). El círculo vicioso disfrazado debido a la naturaleza nebulosa de los conceptos de conjunto y función habituales que hacemos notar aquí, no es un fallo formal en la construcción del análisis que se pueda eliminar fácilmente*" (Weyl, 1918, 23).

En *El continuo* se considera el dominio de los números naturales como una totalidad determinada y que nos es dada. Sin embargo, al tratar los números reales como cortaduras de Dedekind generales entran en juego propiedades, vale decir, conjuntos de números racionales, y es cuando el principio cobra importancia. Esto es así debido a que Weyl considera que los números reales no están "suficientemente" bien definidos.

La crítica al análisis clásico que pone de relieve el argumento de los niveles tiene sentido si se admite que un análisis con niveles es algo "artificial e inservible" [*künstlich und unbrauchbar*] (Weyl, 1918, 23).

Weyl no se pregunta sin embargo si puede ser lógicamente consistente. En principio, el análisis con niveles, aunque sea 'artificial', no caería en el problema del círculo vicioso tal y como se presenta. Pero la totalidad de reales es, en cada nivel, tan poco específica como lo son los reales, llamémosles estándar, aunque sea en un análisis en principio desarrollable.

La explicación de por qué la definición del supremo de un conjunto acotado de reales contiene un círculo vicioso tiene por consiguiente su fundamento último en la teoría ramificada de tipos de Russell. Esto es, que no observar la solución propuesta por Russell conduce *necesariamente* a definiciones que contienen un círculo vicioso. No obstante, Weyl no está del todo satisfecho con esta solución, que sólo le sirve para señalar el problema, además, el axioma de reducibilidad no le convence[26]. Es por ello que la solución propuesta en su libro

[26] En el artículo «Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later» se puede leer lo siguiente: "In this respect, Russell's ad hoc assumption of the Axiom of Reducibility is seen as a violation of the vicious circle

será la denominada (posteriormente, por otros filósofos de la matemática) *solución predicativa dado los números naturales* (o, *módulo los números naturales*).

1.3.2 Concepciones del círculo vicioso en 1919, 1921 y 1925

Acabamos de ver cómo el principio es entendido en *El continuo*. Unos años más tarde Weyl analizará también el problema en una serie de artículos, si bien su crítica la enfocará desde un punto de vista algo distinto a como aparece en el libro.

Comencemos primero con el artículo de 1919 publicado en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* y que lleva por título «Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis»[27]. El argumento dado por Weyl tiene la siguiente forma.

Weyl pretende *demostrar* [*beweisen*] que conceptos como 'propiedad de números naturales' y 'propiedad de propiedades de números naturales' no son conceptos 'extensionalmente definidos' [*umfangs-definit*], es decir, dados como una totalidad determinada y completa.

Primero[28] afirma que el concepto de número natural es extensionalmente definido, y que esto es algo que se nos da intuitivamente. Sin embargo, existen otros conceptos generales como 'objeto' o 'propiedad' que no lo son. Para ver que es así define el dominio de *k*-propiedades de los números naturales. El concepto de *k*-propiedad es, por definición, extensionalmente definido. Después, supone una propiedad *A* de propiedades de números naturales. Entonces, según Weyl, siempre se puede definir una nueva propiedad P_A que cae fuera del dominio de las *k*-propiedades de la siguiente forma: *x* posee P_A si y sólo si existe una *k*-propiedad de tipo *A* que posee *x*. Weyl afirma que el significado de esta P_A es totalmente distinto del de las *k*-propiedades. Después aclara que, no obstante, esto no significa que no exista en el dominio de las *k*-propiedades una propiedad que tenga la misma extensión [*umfangsgleich*[29]] que aquélla.

---

principle, despite the predicative formalism of ramified type theory, "welche Kluft mich trotz allem noch von Russell trennt", and thus the necessity for Weyl to follow the "engeren Verfahren" of restricting to sets of level 0". Véase (Feferman, 1998, 266).

[27] Este artículo surge como respuesta a una carta de Otto Hölder (véase más abajo § 2.3).

[28] El argumento ofrecido se hace en cierto modo "estándar". Esto es, Weyl utiliza este argumento en sus artículos de 1919, 1921, 1925 y 1946 variándolo levemente o ampliándolo según el caso.

[29] Weyl define este concepto del siguiente modo: "Umfangsgleich nenne ich zwei Eigenschaften (natürlicher Zahlen) dann, wenn jeder Zahl, welche die eine besitzt, auch die andere zukommt, und umgekehrt; jeder Eigenschaft korrespondiert eine Menge in solcher Weise, dass umfangsgleichen Eigenschaften dieselbe Menge entspricht" ["Denomino entonces extensionalmente equivalentes a dos propiedades (de los números naturales), si todo número que posee una, también posee la otra, y viceversa; a cada propiedad le corresponde un conjunto, de

No queda del todo claro a lo que se refiere con que el "sentido" de la nueva propiedad así definida se distingue *absolutamente* [*ganz gewiss*] de cualquier *k*-propiedad. Esto puede entenderse de un modo intuitivo como que, al referirse la nueva propiedad P_A a una *k*-propiedad que pertenece por definición a un dominio extensionalmente definido, no puede ser una de aquéllas. Lo que no es más que admitir la solución russelliana –quizá de forma no muy clara– en el artículo de marras.

Se llega entonces a la conclusión de que el concepto de número real no es un concepto extensionalmente definido [*dass der Begriff der reellen Zahl nicht unfangs-definit ist*[30]], y que por consiguiente el concepto de supremo[31] de un conjunto de reales arbitrario no tiene sentido.

Su explicación parte de que, si un real es una cortadura de Dedekind, es decir, un conjunto de racionales que se corresponde con una determinada propiedad de los racionales, entonces un conjunto de números reales se corresponde con una propiedad *A* de propiedades de números racionales. El supremo de este conjunto de reales es a su vez, el conjunto de aquellos racionales *x* que tienen una determinada propiedad P_A, a saber, la siguiente: la de que *existe* una propiedad de tipo *A*, la cual es poseída por *x*.

Es por ello que, después de dar esta explicación, escribe Weyl que esto es evidentemente un sinsentido [*evident sinnlos*], pues la existencia de una propiedad como P_A depende de que *exista* (de modo general y sin limitación) una propiedad de cierto tipo, tal que...etc. Por tanto, concluye, el concepto de '*propiedad de números racionales*' no es un concepto definido extensionalmente.

La argumentación de Weyl es entonces, que dado que una propiedad se define a partir del dominio de las *k*-propiedades, dominio extensionalmente definido, no puede ser que la nueva propiedad pertenezca a este dominio. Al estar definida a partir de la *totalidad* de las *k*-propiedades, *a fortiori* se concluye que no puede ser una de ellas.

tal manera que propiedades extensionalmente equivalentes se corresponden con el mismo conjunto"]. Véase (Weyl, 1919, 86).

30 En cursiva en el original.

31 Weyl utiliza en vez de supremo, el término *obere Grenze*, que se puede traducir por cota superior. Pero que realmente está pensando en el supremo, se deduce del hecho de que se refiere a '*die* obere Grenze', es decir, *la* cota superior. Así escribe: "Die obere Grenze dieser Menge reeller Zahlen ist selbst die Menge, derjenigen rationalen Zahlen *x* […]". ["La cota superior de este conjunto de números reales es él mismo un conjunto, de aquellos números racionales *x* […]"]. Póngase esto en relación con lo que escribe en (Weyl, 1918, 23).

Intentemos analizar lo expuesto hasta ahora más detenidamente. Si se compara este artículo de 1919 con la explicación ofrecida en *El continuo*, parece que el *motivo* realmente ofrecido es el de establecer como (cuasi) normativo el principio del círculo vicioso para conceptos como 'propiedades de números racionales' (o conjuntos de números racionales). En ese caso, la nueva propiedad definida a partir de las *k*-propiedades del tipo *A*, *debe ser* una propiedad que no se encuentra en el dominio de las *k*-propiedades, y por tanto se puede concluir que no tiene sentido de forma general la pregunta sobre si existe el supremo de un conjunto de reales arbitrario.

El mismo argumento es utilizado por Weyl en el largo artículo de 1921[32] «Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik» (Weyl, 1921, 37-79).

En este artículo repite parte de lo dicho en 1919, si bien hay algunas aportaciones interesantes que merecen ser analizadas con más detalle. Vale la pena citar *in extenso* lo que escribe al respecto:

"*Let us now look at the construction of the upper bound of an arbitrary such set A of real numbers!. The bound, a real number, is given by a property E_A of rational numbers. In fact E_A is specified as follows: It obtains of a rational number 1 if and only if there is a property E of the kind that obtains of x (if there is a real number E in the set A that lies below[33] x). But this definition, if it is to be meaningful, not only counts on the fact that the concept of a property of rational numbers is by itself clear and unambiguous, but also on the fact that the totality of "all possible" properties is in itself determined and delimited, that is, in principle surveyable. This, because it counts on the fact that the question "Is there a property E of a certain nature?" (that is, one that at the same time is of kind A and obtains of x) is meaningful, that is, that this question is addressing an existing state of affairs that allows one to answer the question with yes or no. This, however, is evidently not the case. For let us assume that we have managed, in some way or other, to delineate such a determined and delimited domain of properties of rational numbers (let us call them k-properties). Then it has a clear meaning to ask with regard to any rational number x whether there is a k-property of kind A that obtains of x. If this is the case, let us attribute the property E_A to it, and otherwise deny it. But it is now very clear from the sense of this property E_A (whose definition is indeed based on the*

[32] Aparece en (Mancosu, 1997, 86) con el título «On the new foundational crisis of the mathematics».

[33] Aquí existe un error de traducción. En el original alemán dice: "[W]enn es eine reelle Zahl E in der Menge A gibt, unterhalb deren x liegt"; lo que debe ser traducido por: "Si existe un número real E en el conjunto A, bajo el cual se sitúa x (i.e., con x menor que E)".

totality of all k-properties) that it stands outside the k-domain. This reveals that the concept "property of rational numbers" is not, as I shall say, extensionally definite [umfangs-definit] and that our definition of the upper bound contains a vicious circle" (Mancosu, 1997, 87-88).

En este extracto observamos que para Weyl la definición tiene sentido si la totalidad de todas las posibles propiedades es algo determinado y delimitado, como dice, en principio algo de lo que se puede tener una *visión de conjunto*. Y esto es así porque se fundamenta en el hecho de que la pregunta sobre si *existe* una propiedad de cierta naturaleza es sólo significativa, si se puede responder con un sí o con un no. Después da un salto, no suficientemente claro, y escribe que *evidentemente* éste no es el caso.

De nuevo su justificación consiste en formar el dominio de las *k*-propiedades, y definir a partir de éste una propiedad, cuya definición *ciertamente* se basa en la totalidad definida de las *k*-propiedades, que está por tanto, –a esto se refiere con *sentido*[34]– fuera del dominio de las *k*-propiedades. Pero no ha *demostrado* nada hasta ahora. La pregunta: "*Is there a property E of a certain nature?*" se puede responder si se suponen las *k*-propiedades así como la forma de definir a partir de ellas la propiedad E.

El argumento en detalle tiene la siguiente forma: 1) suponer un dominio extensionalmente definido; 2) definir E a partir de este dominio; 3) constatar que E no pertenece al dominio; 4) concluir que el concepto de propiedad de los racionales no es extensionalmente definido; 5) concluir que la definición de supremo contiene un círculo vicioso.

La objeción a este argumento sería: 1) que el salto de nivel no depende de *cómo* sea el dominio de las variables sobre el que se cuantifica, luego no se puede concluir que la nueva propiedad no sea extensionalmente equivalente[35] a alguna *k*-propiedad; 2) la conexión entre

---

[34] Esto parece ser lo que Weyl tiene en mente, a tenor de lo que escribirá en (Weyl, 1946, 5): "But the property $\gamma = [x]\ C(x)$ defined by (1) is certainly not identical in its meaning with any of the properties of level 1 because it is defined *in terms of the totality of all propertites of level 1*". La propiedad en cuestión es la del ínfimo, y (1) se define como: $C(x) = (\exists x)\ \{I(\xi) \cap (x \in \xi)\}$. $\gamma = [x]\ C(x)$ es el ínfimo de un conjunto no-negativos de números reales ξ, y $I(\xi)$ es una función proposicional cuyo argumento se refiere a propiedades de fracciones.

[35] Weyl escribe en (Weyl, 1919, 87) que es "de principio extraordinariamente improbable que sea posible de una manera exacta establecer un concepto extensionalmente definido de *k*-propiedad, de modo que cada k-propiedad a definir, siguiendo el esquema de más arriba, a partir de la *totalidad* de las *k*-propiedades sea extensionalmente equivalente a una *k*-propiedad. En cualquier caso, no existe *la sombra de una demostración* de una tal posibilidad". [Cursivas en el original].

Aquí, sin embargo, como vemos, Weyl no hace valer más que su intuición, y aunque ésta sea valiosa, en matemáticas (así como en lógica) no es determinante el considerar algo "extraordinariamente improbable" [*außerordentlich unwahrscheinlich*], y que no exista una demostración tampoco es algo que determine, si consideramos válido –como hace aquí Weyl– el principio del tercio excluso.

(4) y (5), no es del todo clara. La propiedad E_A pertenece a un nivel superior de propiedades[36]. El circulo vicioso existe si un objeto se define a partir de la totalidad de la que forma parte. Weyl afirma, de la manera en que está definda E_A, que no pertenece al dominio de *k*-propiedades porque asume que el dominio es extensionalmente definido. La cuestión es que si la totalidad no es extensionalmente definida no se puede afirmar o negar que la propiedad E se defina a partir de la totalidad de la que *ella misma* forma parte. Pues, ¿cómo podemos establecer –asumiendo el argumento de Weyl– que la propiedad E pertenece a la totalidad, si ésta no es un dominio de *k*-propiedades, i.e., extensionalmente definido?

Es decir, desde la posición de Weyl no se puede decir nada de dominios que no sean extensionalmente definidos. Podría *prohibir* –digámoslo así– asumiendo su punto de partida, dominios de objetos que no fueses extensionalmente definidos, por las razones aducidas más arriba, pero no *concluir* que existe un círculo vicioso en la definición de supremo. Realmente, el problema es que Weyl se compromete con una cardinalidad que de forma implícita subyace en su concepto de *k*-propiedad, pero la definición clásica de supremo no hace referencia a ninguna clase de cardinalidad.

Nótese además, que si un dominio dado de *k*-propiedades es extensionalmente definido, éstas totalidades son precisamente las que se dejan tratar de forma 'impredicativa', por estar *bien definidas*[37] (cfr. ejemplo de Ramsey[38]).

Es aquí donde el círculo vicioso como lo expuso en *El continuo* difiere de la explicación propuesta en los artículos. Weyl ha introducido ya implícitamente la cardinalidad de los números naturales como elemento decisivo cuando afirma la existencia de un círculo vicioso en el análisis clásico.

En el artículo de 1925 titulado «Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik»[39], Weyl se refiere de nuevo a ideas tratadas ya anteriormente. Sin embargo, se aporta una visión más esclarecedora de lo expuesto en los artículos de 1919 y 1921. Principalmente lo consigue

---

[36] "[B]elongs so to speak, to a higher level of properties". Veáse (Mancosu, 1997, 131).

[37] En (Feferman, 1998, 289) en el artículo «Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics» se lee lo siguiente: "There can be no objection to impredicative definitions when the totality in question is regarded *as having a clear and determinate extent* (cursivas mías)". Esto, parece ser, es lo que exige Weyl a su concepto '*k*-propiedad'.

[38] Ramsey afirma que la descripción 'el hombre más alto en esta habitación', aunque se defina en términos de una totalidad de la que forma parte, es inocua, pues el objeto sólo se *señala*, y no se *crea*. Véase (Carnap, 1931, 49-50).

[39] El artículo aparece en la monografía (Mancosu, 1997, 123) con el título «The current epistemological situation in mathematics».

introduciendo la noción de *concepto de contenido definido* [*inhalts-definit*] (esto es, determinado de forma precisa y no ambigua), ya esbozada anteriormente, y relacionando la idea de *k*-propiedad los niveles de Russell.

De este modo observa que, no todo concepto de contenido definido es extensionalmente definido; v.gr., el concepto 'propiedad de los números naturales'. Decir que un concepto b es extensionalmente definido no es sólo decir que la pregunta: '¿Tiene el objeto X la propiedad *A*?' tiene un sentido preciso, sino que para cualquier objeto X que caiga bajo el concepto b tiene también sentido la pregunta existencial: '¿Existe un objeto que cae bajo b con la propiedad *A*?'.

En el artículo aparecen después las nociones de *k*-propiedades y de propiedad de propiedades de los números naturales. Aquí conviene dar el ejemplo del propio Weyl. La propiedad en cuestión la define de la siguiente manera: "Llamemos a una propiedad de los números naturales E de tipo *A*, si el número 1 la posee".

Más adelante presenta la definición D, la cual tiene la forma ya conocida: '*x* tiene la propiedad E_A significa que existe una *k*-propiedad del tipo *A* la cual es poseída por *x*'.

Suponiendo que las propiedades de los números naturales sean definidas como de primer nivel, de acuerdo con el esquema D, y aplicando 'todo' y 'existe' a propiedades extensionalmente definidas del primer nivel se obtienen las de segundo nivel.

Weyl nos informa de que la *necesidad* de esta formación de niveles fue claramente reconocida por Russell, y que, si se suprimiera, entonces se podría cuantificar de forma irrestricta sobre propiedades en general, y que por tanto uno se vería envuelto en un círculo vicioso sin fin.

Pero, es precisamente esto lo que ocurre según Weyl con la definición dada por Dedekind de supremo. Citemos a Weyl al respecto:

"*One only needs to consider that, according to Dedekind, a real number (E) is a set of rational numbers that itself corresponds to a property E in the realm of rational numbers; "the rational number x is smaller than (E)" means as much as: x has the property E. The upper bound γ then corresponds indeed to that property E_A a rational number x possesses if and only if there is any property of rational numbers of kind A at all that holds of x. The uniform concept of number thus seems to be falling to pieces; one would obtain real numbers of first, second, third, . . . level, such that, for example, the upper bound of a set of numbers of first level would not generally again be a number of the same kind, but of the second level.*

Such an analysis, however, is completely useless. One escapes the dilemma if the proposition holds that every property of second level E_2 is, even though not equal in sense, at least extensionally equal to a property E, of the first level. Yet, a proof for this has never been attempted, and there is not the slightest indication that one could put up construction principles for the properties of first level that would be far-reaching enough to ensure the correctness of the proposition" (Mancosu, 1997, 132).

Aquí observamos que el concepto de *k*-propiedad, al ser extensionalmente definido, es lo único que Weyl acepta en un esquema de definición como D. Y que cuantificar sobre *k*-propiedades *asegura* que las de segundo nivel sean también extensionalmente definidas, i.e., bien definidas en un sentido weyliano.

El origen del problema en el argumento de Weyl visto en estos tres artículos, no es no contemplar el salto de niveles como en *El continuo*, sino que no se tenga (no se pueda dar) un concepto adecuado de *k*-propiedad para los números reales, pero hay que notar, que esto no es más que apelar de nuevo a que sólo el concepto de número natural es intuitivo, y por tanto extensionalmente definido.

En referencia al principio del supremo, se puede decir que Weyl considera que es una propiedad que tiene un conjunto de reales (i.e., propiedad de propiedades de racionales), cuando creemos que más bien se debiera entender como una propiedad de un real *respecto de* cada elemento de un conjunto. Esto es parte de lo que le critica Hölder como veremos a continuación.

1.3.3 Crítica de Hölder

Hölder contestará a Weyl, a propósito del artículo publicado en 1919, en otro titulado «Der angebliche circulos vitiosus und die sogannante Grundlagekrise in der Analysis»[40]. La crítica a la forma en que el matemático trata el círculo vicioso tiene la siguiente estructura.

Primero, Hölder deja claro que, como él, Weyl acepta el tercio excluso y que asimismo, sólo mediante una ley se puede definir una totalidad infinita[41]. Por tanto, la respuesta a la pregunta

[40] El artículo de Hölder aparece en (Mancosu, 1997, 143) con el título «The alleged circulus vitiosus and the so-called foundational crisis in Analysis».

[41] "Endliche Mengen kann man aut zweierlei Art beschreiben: entweder *individuell*, durch Aufzeigung jedes einzelnen ihrer Elemente, oder *generell*, gesetzmäßig, durch Angabe von Eigenschaften, die den Elementen der Menge und keinen andern Gegenständen zukommen. Bei unendlichen Mengen (darin liegt eben das Wesen des

de si entre los objetos de la totalidad *existe* uno (dado por una ley) que tenga la propiedad P_A en cuestión, es algo que se puede contestar afirmativa o negativamente. La construcción del supremo la expone Hölder de la siguiente forma: primero introduce una totalidad *A* infinita de números reales (de forma secuencial, aunque dice que eso no es necesario); despúes, las cortaduras de Dedekind, que sólo pueden estar dadas por una ley (además, se refiere a Weyl, cuando explica que para el matemático las cortaduras sólo pueden expresarse a través de una 'propiedad'. Así, infinitos números reales sólo pueden darse por una ley de leyes). Una vez hecho esto fija una cota [*Schranke*]: el 100, y supone que los números están por debajo de ésta.

La construcción de una cota superior γ del conjunto *A* la realiza del siguiente modo: forma una nueva totalidad de números racionales a la cual pertenece un número *x* si y sólo si *x* es un número 'inferior' [*lower number*[42]] de *cualquiera* de las cortaduras de *A*. Garantizado que se puede definir esta totalidad de números *x*, entonces se concluye que cualquier número menor que un número *x* es también un número *x*, y que no todos los números son números *x* , pues por ejemplo el 100 no lo es. Del mismo modo, se tiene que no puede haber el número *x* mayor, luego está claro que los números *x* así construidos son números inferiores de una nueva cortadura construida siguiendo este procedimiento.

Hölder describe después la crítica de Weyl a la forma en que se define la nueva cortadura de Dedekind, a saber, el hecho de que el número *x* pertenezca a la nueva cortadura si y sólo si entre las cortaduras de *A* existe una a la cual *x* pertenece como número inferior, o como dice Weyl, que existe una propiedad de tipo *A* que es poseída por *x*. Hölder responde que no se trata de *sólo* una propiedad de *cualquier* tipo, sino de una propiedad de un dominio bien definido por la ley de la secuencia de *A*. Se trata de la propiedad de "ser un número inferior" en *una* de las cortaduras dadas de la secuencia. Sólo se afirma por tanto que existe para la totalidad de números de la secuencia, definidos por una ley, una cota superior γ.

Unendlichen) ist der erste Weg unmöglich". ["Se pueden definir los conjuntos finitos de dos maneras: de manera *individual*, mostrando cada uno de sus elementos, o de manera *general*, mediante una regla, indicando sus propiedades, de las cuales son poseedores exclusivamente los elementos del conjunto y no otros objetos: para conjuntos infinitos (aquí radica la esencia del infinito) la primera manera es imposible"]. Véase (Weyl, 1918, 13).

[42] En (Mancosu, 1997, 143) aparece traducido de este modo el concepto, pues Hölder escribe en su artículo: "Que el conjunto de los números racionales absolutos están divididos completamente en dos clases, de modo que cada número de la primera clase es más pequeño que cualquier número de la segunda y la primera clase no tiene ningún número racional que sea el más grande. Se tiene entonces a través de esta división una llamada cortadura de Dedekind en el dominio de los números racionales y se puede hablar de números 'superiores' e 'inferiores' de la cortadura". Véase (Hölder, 1926, 246).

Si se da x, y por ejemplo una cortadura A_2, entonces por la ley que determina la cortadura se puede afirmar si alguno de los infinitos números inferiores coincide o no con x. Pero dado que la relación entre el x dado y cualquier cortadura de A está completamente determinada, y que existe una ley para las infinitas cortaduras de A, entonces se puede determinar –de acuerdo con la ley del tercio excluso– si existe una cortadura para la cual el número racional x dado se encuentra en la relación mencionada, a saber, si es un número inferior de esa cortadura.

La construcción del supremo de A se obtiene de la siguiente forma: si se da un número real γ' menor que γ, esto significa que la cortadura representada por γ' posee un número superior que es un número inferior en γ (pertenece a los mencionados números x). El número x_0 debería ser un número inferior en una cortadura A_0 de la secuencia (es decir, γ' sería menor que la cortadura A_0), mientras que resulta claro que ninguna cortadura de la secuencia excede a γ.

Hölder introduce dos propiedades mediante las cuales se define usualmente el supremo (respecto a la secuencia de números (cortaduras) que forman A), y que se tienen para γ:

γ es mayor que cualquier número de la secuencia de A

Cualquier número menor que γ es excedido por algún número de la secuencia.

Supuesto que exista un número real γ'' del cual se puedan probar estas dos propiedades, la suposición de que γ'' ≠ γ llevaría a contradicción pues de dos cortaduras que no coinciden una de ellas ha de ser menor que la otra. Luego de aquí se concluye que las dos propiedades definen al supremo de forma única.

Si se dijera –continúa Hölder– que en el dominio de los números reales existe un número que posee, con respecto a la secuencia de números definida las dos propiedades anteriores entonces la crítica de Weyl sería correcta, pues la palabra 'existe' se aplicaría a una totalidad no definida constructivamente. Pero en lo expuesto más arriba, incluso Weyl consideraría el uso de 'existe' como legítimo, pues la existencia se reclama sólo después de la construcción no-circular de γ.

La única desventaja (si se la quiere llamar así), añade Hölder, es que no se puede dar un algoritmo general para construir γ. Esta demanda es, en general, irrealizable. Frente a esto alega Weyl que es entonces imposible concebir un concepto de número uniforme. A lo que opone Hölder, que, si bien es cierto que mediante el concepto de cortadura de Dedekind no es posible construir la *totalidad* de los números reales, es un concepto de número real claro y bien definido.

1.4 CONCEPCIÓN DEL CONTINUO DE HÖLDER COMO ALTERNATIVA AL PREDICATIVISMO

Este repaso del artículo de Hölder creo que es suficiente como para entender que la idea de Weyl al interpretar la propiedad (o principio) del supremo como algo que necesariamente se refiere a la totalidad de conjuntos de números reales –en vez de entenderse como que es cierto *sólo* para *cualquier* conjunto de reales– es algo que no se deriva automáticamente de la forma cómo el análisis clásico trata el principio.

Sin embargo, llegados a este punto, quizá el matemático acostumbrado a trabajar con el análisis estándar –entendido como el que acepta el principio del supremo *à la* Dedekind– quiera *salvarlo* en la medida de lo posible. Si el platonismo presenta muchas dudas -para muchos bien fundadas-, la posición de Weyl también. La solución de Hölder pretende además establecer una *interpretación* de lo que dice el principio, teniendo en cuenta la construcción llevada a cabo.

El teorema del análisis –al que se refiere Weyl en *El continuo* (Weyl, 1918, 59)– que afirma que un conjunto acotado de números reales tiene un límite inferior y otro superior precisos, se podría aceptar, si se entiende que el principio afirma que *todo* conjunto arbitrario acotado superiormente de reales tiene un supremo, *si es definible mediante una ley*. ¿Es necesario, por tanto, a la hora de invocar el principio del supremo, suponer la existencia del conjunto de los números reales? La respuesta, visto lo anterior, es que en efecto no lo es.

Es interesante no obstante resaltar dos cosas. La primera es que, como explica Hölder en una nota refiriéndose a Weyl, si se afirma que existe una ley de una propiedad cualquiera (Hölder escribe a este propósito citando al propio Weyl) no se tiene que llevar aquélla "*al lecho procusteano de los principios de construcción; sino que más bien, si se ha conseguido construir, de la manera que sea, una ley de forma no circular, se está legitimado a reclamar su existencia. No se trata de la posibilidad de su construcción, sino que la reclamación de su exsitencia se hace a la luz de la construcción conseguida de la prueba dada*" (Mancosu, 1997, nota 8, 147). Esto es precisamente lo que ha hecho Hölder al construir el supremo.

La segunda cosa a tener en cuenta proviene también de una nota de Hölder, y se refiere a sí mismo a un artículo de Weyl. Esta indicación tiene que ver con los conceptos extensionalmente definidos y los que de contenido definido. Hölder reconoce que existen conceptos que aunque precisos como el de cortadura de Dedekind[43], el de secuencia infinita o

[43] Quisiera recordar algo que escribe Bernays en (Hilbert, n.d.) (¿recogiendo quizá las ideas de su maestro?) sobre el concepto de número real y la posición axiomática, en referencia a Weyl y a su crítica sobre la existencia

el de función, no caen bajo la definición weyliana de conceptos extensionalmente definidos. Sin embargo, indica que el propio Weyl está al tanto de esta diferencia, y que la acepta como legítima. Y por tanto se tiene un concepto uniforme de número real a partir de la construcción de Dedekind. Vale la pena citar en este punto al propio Weyl: "*It may well always be that the sense of a clearly and unambiguously determined object concept [Gegenstandsbegriff] assigns to the objects of the nature expressed by the concept their sphere of existence. But this does not make the concept an extensionally definite one; that is, it does not ensure that it makes sense to consider the existing objects that fall under the concept as an ideally closed, in itself determined and delimited totality*" (Mancosu, 1997, nota 10, 148).

De aquí que Hölder proteste contra el anuncio exagerado de *crisis* en los fundamentos del análisis. A pesar de que como hemos visto Hölder critica a Weyl en aspectos fundamentales, hay que decir que sus posiciones respecto a cómo concebían el conjunto de los números reales clásico no difería mucho. De hecho, Hölder escribe lo siguiente:

"*In the conception, which Weyl has strongly emphasized, that the continuum cannot be constructed arithmetically, that is, that one cannot arrive at the totality of the real numbers (if one does not want to require from the beginning and then use the continuum with certain geometrical axioms), I entirely agree with Weyl. In order for a cut to be given, there must be a law for the division of the rational numbers in two classes. In order to arrive at the concept of the totality of the real numbers, we would then have to be able to overview the totality of the possible laws of such divisions. I have already expressed the aforementioned conception more than thirty years ago* (cmp. *Göttingische gelehrte Anzeigen*. 1892. p. 594. note)" (Mancosu, 1997, nota 7, 147).

La postura de Hölder es por tanto una postura que se podría denominar "intermedia". Es constructivista en tanto que afirma la imposibilidad de construir aritméticamente el conjunto de los números reales, pero intenta salvar el principio del supremo clásico, precisamente teniendo en cuenta esta imposibilidad. Se podría deducir de la posición de Hölder aquí

de un círculo vicioso en el análisis. La consideración que hace Bernays, es que la posible dificultad a la hora de definir el concepto general de número real de una forma coherente o satisfactoria (recuérdese a este respecto la distinción entre conceptos de contenido definido y extensionalmente definido), no impide la adopción de la definición de cada número real a partir de las cortaduras de Dedekind o de sucesiones convergentes de números racionales: "Die Zahlfolgen und Schnitte dienen dann zwar auch zur Definition der einzelnen reellen Zahlen, aber nicht zur Definition des Begriffs der reellen Zahl. Vielmehr ist dem Begriffe nach eine reelle Zahl einfach ein Ding des betrachten Systems". ["Las sucesiones y las cortaduras sirven ciertamente como definición de los números reales individuales, pero no como definición del concepto de número real. Más bien un número real es, según el concepto, simplemente un objeto del sistema considerado"].

comentada, que sólo se compromete con la existencia de subconjuntos de reales definidos por una ley, pero no con la de ℝ.

De hecho, se podría resumir la posición de Hölder de forma análoga a como Weyl establece la diferencia entre un juicio y un juicio abstracto. Para Weyl un juicio es de la forma ‘2 es un número par’, y uno abstracto tiene sin embargo la *forma existencial* ‘existe un número par’.

Se puede interpretar que Hölder tiene en mente un “juicio abstracto” (en la formulación de Weyl) no explicitado en su posición respecto al principio del supremo, dando por supuesto que el juicio existencial es lo que da sentido a aquél. De este modo podemos afirmar que Hölder no está de acuerdo con la forma en que Dedekind define el concepto de supremo, para conjunto de reales arbitrarios, puesto que se opone a la forma de derivar el concepto de número real a partir de la lógica[44]. Porque si bien es cierto que el concepto de ‘propiedad’ no es –como Weyl explica– un concepto extensionalmente definido, el concepto de supremo de un conjunto definido *mediante una ley* dada, no implica que el concepto de supremo se refiera a propiedades *cualesquiera* de racionales de un conjunto. Por consiguiente, el concepto de propiedad *en relación con el de ley que define un conjunto* pueden entenderse, desde el punto de vista de Weyl, como extensionalmente definido.

1.5 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En el teorema que relaciona los conjuntos de números reales acotados y el supremo (o ínfimo) de éstos, no se dice cómo deban ser los posibles conjuntos de reales en cuanto a su cardinalidad: finitos, infinitos numerables o no-numerables. El teorema tampoco presupone la existencia previa del conjunto ℝ de los números reales (“clásico”, en el sentido de Dedekind), y basta con considerar para su prueba cualquier conjunto de reales[45] y un real. Es decir, la cardinalidad y la propiedad de ser un *continuo* no es algo que presuponga una totalidad como ℝ existente de antemano, vale decir, no construida.

[44] “Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne” [“En tanto que denomino a la aritmética (álgebra, análisis) un parte de la lógica”] (Dedekind, 1961, 8).

[45] Quizá conviene distinguir aquí, la diferencia entre ‘para cualquier conjunto de reales’ y ‘para todo conjunto de reales’. El sintagma ‘para cualquier’, no debe entenderse de forma impredicativa, es decir, considerando existente una totalidad como ℝ.

Para un constructivista como Weyl[46] nada le impide que $\mathbb{R}$ se pueda pensar (desde el punto de vista como lo entendería un matemático clásico) como teniendo "agujeros", siempre y cuando se pueda construir algún *segmento*, i.e., que la propiedad '*ser-un-continuo*' se pueda adscribir a un conjunto. Dar un segmento tiene que ver con definir mediante una ley un conjunto de reales. Y para Weyl esto es algo de lo que –en principio– se pueden dar ejemplos. Es más, para él, no se puede dar un conjunto de reales sin dar una ley que lo defina; en ese caso, la totalidad de estos conjuntos está bien –en el sentido predicativista de *previamente*– definida.

Weyl, y también Hölder, son de la misma opinión en cuanto a la imposibilidad de construir aritméticamente la totalidad de los números reales. Esto no significa sin embargo que no se pueda construir *parte*[47] de esta totalidad, y que se pueda sin objeción afirmar para ella el principio del supremo.

Pero dejando a un lado la verdad o no de la afirmación respecto de si es posible o no construir el conjunto de los números reales aritméticamente, aceptar el principio del supremo en su formulación clásica teniendo en cuenta la propuesta de Hölder, supone trabajar sólo con afirmaciones como: 1) que conjuntos de reales no-numerables sólo pueden ser definidos mediante una ley; 2) que por consiguiente sólo se puede afirmar la existencia una cantidad numerable de conjuntos de reales no-numerables. Lo que conlleva aceptar el axioma de elección[48] entendido éste de forma 'débil', es decir, sólo admisible para una cantidad numerable de conjuntos arbitrarios de elementos.

Nos gustaría señalar a este respecto, algo que creemos interesante. Y es que este puede ser, por ejemplo, un adecuado marco de referencia si se quiere trabajar con el principio del supremo clásico, aceptando la tesis de Hölder sin comprometerse con la existencia de $\mathbb{R}$ como totalidad.

A pesar de que ciertos aspectos de la posición de Weyl respecto a su crítica del análisis no sea todo lo clara que desearíamos, debemos destacar lo que de original aporta un libro como *El continuo*, inaugurando una nueva forma de pensar el concepto de número real y el análisis. Las fructíferas consecuencias que tuvo y ha tenido para la matemática se dejan sentir todavía hoy, debido a su forma de abordar la cuestión de los fundamentos. Además, su aproximación

[46] El Weyl de *El continuo*, para ser precisos.

[47] Escribo *parte*, adoptando, para expresar la idea más claramente, un punto de vista realista.

[48] Nótese que, como escribe Ferreirós en (Ferreirós, 2011), el axioma de elección considerado de esta forma no capturaría totalmente la idea de la existencia de conjuntos arbitrarios de elementos (cuasi-combinatorialismo).

es quizá, junto con la realista, la que ha tenido más éxito, si se mide éste por la cantidad de preguntas abiertas y respuestas halladas dentro del desarrollo de la matemática moderna.

Capítulo 2

ANÁLISIS DE LA RELACIÓN ENTRE EL CONTINUO INTUITIVO Y EL MATEMÁTICO EN *DAS KONTINUUM*[49]

2.1 INTRODUCCIÓN

En el libro *El continuo: Investigaciones críticas sobre los fundamentos del análisis* [*Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*] se analizán dos concepciones de continuo: la intuitiva y la matemática. Weyl se propone investigar "*las relaciones entre lo dado (intuitivamente) de forma inmediata y los conceptos formales (de la esfera matemática)*" (Weyl, 1918, Introducción, 4) en relación con la idea de continuo.

La concepción *intuitiva* es considerada desde un punto de vista fenomenológico; la *matemática* la desarrolla partiendo de la tesis de que el análisis clásico contiene un círculo vicioso [*Circulus vitiosus der Analysis*], lo cual invalida algunos de sus resultados y obliga a buscar vías más seguras ["*sustituir el suelo poco firme por cimientos de solidez más fiable*" (Weyl, 1918, Introducción, 1)] para escapar de las dificultades que se presentan al considerar definiciones de conceptos matemáticos fundamentales como el concepto de número real o el de supremo de un conjunto de números reales.

En el libro se critica la concepción Cantor-Dedekind del análisis basada en, por un lado, la perspectiva conjuntista iniciada por Cantor –posteriormente desarrollada Zermelo–, y que tuvo como resultado la teoría axiomática de conjuntos; y por otro, la construcción de los números reales propuesta por Dedekind[50].

La solución de Weyl se conoce como "*predicativismo dado (o módulo) los números naturales*". Posición respecto de los fundamentos de la matemática que admite el conjunto de los naturales como totalidad intuitivamente dada, y que pretende, a partir de ellos, construir los números racionales y los reales.

[49] Este capítulo se corresponde con (González Rojo, 2021). En ANEXOS se adjunta el artículo publicado original.

[50] Fundamentalmente en *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. En esta construcción intervienen elementos conjuntistas, geométricos y aritméticos. Véase (Feferman, 2009, 180).

En cuanto a la idea de continuo intuitivo[51] Weyl tiene como guía a Husserl. Aunque considera el continuo intuitivo espacio-temporal, se centra fundamentalmente en el tiempo al llevar a cabo su estudio fenomenológico y su relación con el análisis matemático[52].

Nuestra hipótesis de trabajo será entonces la de que Weyl concibe la intuición del continuo temporal como la describe Husserl[53], a saber: la forma de una corriente de experiencias [*Erlebnisstrom*], donde cada durar [*Dauern*] de la experiencia "se integra en un continuo sin fin de duraciones" (Husserl, 1913, 163).

Frente a la concepción que podríamos llamar, fenomenológico-predicativista de Weyl, propondremos la idealista[54], pues pretendemos mostrar en qué medida es posible cerrar el "abismo" [*Kluft*] que según el matemático separa a estas dos concepciones de continuo. Para ello fundamentamos nuestra crítica en que no es posible concebir el continuo matemático como independiente del intuitivo en tanto que el paso conceptual viene a estar sustentado en la tesis idealista de que '*no existe sujeto sin objeto*' (y asimismo la recíproca). Y que es por tanto en el sujeto, al ser lo inextirpable en la experiencia –al que se refiere al cabo *la durée* bergsoniana[55] entendida como continuidad temporal–, donde se fundamenta la percepción intuitiva de continuidad temporal.

La matemática formula esta idea usando del par conceptual indisociable punto-línea de origen geométrico, cuya aritmetización da cuenta el concepto de número real, el cual, junto con el de número racional y las propiedades de densidad y de ausencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*] expresada en el axioma de Cantor-Dedekind[56], caracterizan al continuo matemático.

En el apartado 2 tratamos el punto de vista matemático que adopta Weyl al iniciar su estudio del continuo. En el 3 discutimos la relación entre el continuo matemático predicativista y el intuitivo considerado fenomenológicamente. En el apartado 4 expondremos nuestra propuesta idealista para explicar la relación entre ambos continuos, y en el 5 concluiremos que la

[51] Cita los capítulos 81 y 82 de *Ideen*… donde el filósofo trata del problema de la naturaleza del tiempo. Véase (Weyl, 1918, 70).

[52] Véase (Weyl, 1918, 67).

[53] Sobre cómo Weyl *interpreta* el continuo intuitivo temporal véase Da Silva (1997), Tieszen (2000), Van Atten, van Dalen, Tieszen (2001).

[54] Fundamentada en Kant, y sobre todo en Schopenhauer.

[55] Véase (Weyl, 1918, 68).

[56] El axioma afirma la correspondencia biyectiva entre los números reales y los puntos de una línea.

dualidad de la intuición en el análisis de la noción continuo weyliana creeemos que puede ser evitada si se adopta aquella propuesta.

2.2 PERSPECTIVA MATEMÁTICA

El punto de partida matemático en *El continuo* es doble:

1) por un lado está la asunción –en parte ya introducida por Poincaré– de que la aritmética tiene como fundamento la intuición de la iteración de procesos. Lo que se puede adscribir a la sucesión de los números naturales, así como la aceptación del principio de inducción como la forma de demostración fundamental.

Es por ello que Weyl introduce en su libro el concepto de ‘principio de iteración’ [*Iterationsprinzip*] –que se sustancia en el principio de inducción matemática– y el ‘proceso matemático’ [*mathematischer Prozess*] –modo en se forman nuevos conceptos a partir de otros ya establecidos (Beisswanger, 1965, 137) – como los pilares sobre los que descansa el fundamento y la práctica matemática.

Es interesante notar que Weyl estudia primero la antinomia de Richard en relación con el concepto de cardinal propuesto por Cantor, y la solución dada por Russell a la antinomia que surge en la teoría naif de conjuntos cuando se pretende definir el conjunto de conjuntos que no se contienen a sí mismos. Y es interesante -como decimos- pues finalmente la *solución* weyliana a esta paradoja supone el inicio del desarrollo del predicativismo[57], y por ende, su concepción de la relación entre el continuo matemático y el intuitivo.

---

[57] A Poincaré y Russell se les considera precusores del predicativismo. Sucintamente, la idea subyacente original es, que las definiciones de objetos matemáticos deben formularse de modo que el objeto a definir no forme parte de la totalidad a la que pudiera referirse. Si fuera así se considera la definición impredicativa. Son predicativas por tanto las que no caen en este “error”. En Weyl (1918, p. 23) se da como definición incorrecta la definición clásica de supremo, por caer en lo que se conoce como ‘principio del círculo vicioso’ si no se consideran los tipos y niveles russellianos (ver más abajo en n. 14 la definición dada en *El continuo*). Weyl escribe: “Sea *M* un conjunto acotado de reales de primer nivel. Para construir su supremo, se tiene que formar un conjunto de racionales γ, al cual pertenece un racional *r* si y sólo si *existe* en *M* un real de primer nivel que es mayor que *r*. El conjunto γ tiene las propiedades *a*), *b*) y *c*) [definidas anteriormente en (Weyl, 1918, 22)], y es por tanto, un número real, *pero de segundo nivel*, pues en su definición »existe« ocurre en conexión con »un real de primer nivel« (i.e., »un conjunto de primer nivel de racionales« o »una propiedad primitiva o derivada de primer nivel«)”. Weyl argumenta que si no se observaran los diferentes niveles se caería en un círculo vicioso. La definición sería impredicativa pues se pretende definir el supremo de un conjunto acotado (superiormente) de reales, a partir de la totalidad de números reales de la que el propio supremo forma ya parte por ser éste también un real. Pero esto es precisamente lo que hace el análisis clásico. Nótese que la crítica tiene dos vertientes: 1) el proceso de construir supone que el objeto no existía previamente; 2) la posibilidad de obtener la totalidad de los reales de forma “tan precisa” como la de los naturales.

2) El segundo punto surge precisamente de lo mencionado anteriormente, lo que le lleva a analizar la lógica ramificada de tipos[58] y a discutir el círculo vicioso[59] que se encuentra (según él) en el núcleo del análisis clásico[60]. Es decir, lo que propone Weyl es una crítica radical al análisis como punto de partida de su propuesta (el predicativismo dado los números naturales), de la que se sirve para investigar la relación entre las dos clases de continuo.

El predicativismo enfatiza la diferencia entre el dominio de los naturales y el dominio de los subconjuntos de los naturales ($\wp(\mathbb{N})$ en el sistema de Zermelo-Fraenkel). Sin duda está "bien definido" qué es un conjunto de números naturales, pero no está correctamente definida la *totalidad* de dichos conjuntos. Aquí es donde Weyl pone una objeción de principio a la teoría axiomática de conjuntos, y se ve en la obligación de apartarse de ella. En consecuencia, la lógica clásica no puede aplicarse a dominios como $\wp(\mathbb{N})$, ni análogamente al dominio de los reales entendido al modo clásico. En su lugar hay que proceder a la definición de conjuntos a partir de $\mathbb{N}$ y de los métodos lógicos admitidos, dentro de las restricciones del predicativismo. Luego el predicativismo debe entenderse desde su crítica a la teoría axiomática de conjuntos.

Ahora bien, cabe mencionar que 1) y 2) son disociables[61]. Es cierto, que si bien están relacionados, se pueden tratar de manera independiente. De modo que se puede criticar la concepción de continuo de Cantor-Dedekind sin comprometerse necesariamente con una visión de las matemáticas como la que Weyl nos presenta en su libro –o en artículos posteriores de la década de los veinte donde su posición ha derivado hacia un intuicionismo de corte brouweriano[62].

Veamos más detalladamente las ideas de Weyl respecto[63] a estas dos nociones de continuo.

---

[58] Este tipo de lógica fue desarrollada por Russell para evitar la paradoja homónima. Su idea era considerar a las variables clasificadas en tipos, y las funciones proposicionales (predicados, cuyo valor de verdad depende del valor dado a la variable. V.gr., p(x) = 'x es humano') en órdenes dependiendo de la clase de variables que contenga. El orden de una función proposicional se define como el menor natural mayor que el orden de todas sus variables cuantificadas. A su vez, las variables de tipo *n*, sólo pueden recorrer entidades de orden *n*. Los individuos u objetos de una teoría son considerados de tipo y orden 0, y así sucesivamente. Véase (Chihara, 1973, 19-23).

[59] Weyl recoge la formulación de Russell de este principio de la siguiente forma: "No totality can contain members defined in terms of itself" (Weyl, 1918, 36).

[60] Véase (Mancosu, 1997, 131-132).

[61] Para un estudio profundo del tema véase (Hölder, 1924).

[62] Sobre cómo Weyl y Brouwer entienden el intuicionismo, y cómo no están de acuerdo en su interpretación véase (Mancosu, 1997, 77-78).

[63] Conviene recordar que, en 1918, cuando Weyl escribe *El continuo* Brouwer empieza a publicar sus ideas maduras.

2.3 IDEA DE CONTINUIDAD EN EL CONTINUO

En la sección sexta que lleva por título ‘*El continuo intuitivo y el matemático*’ se trata con profundidad la diferencia entre el continuo experimentado fenoménicamente[64] y el matemático, esto es, se analiza la idea fenomenológica de continuo y el predicativismo.

En el capítulo se hace referencia a la filosofía de Bergson (Weyl, 1918, 68) sobre el tiempo y se expone el concepto de *la dureé*, entendido por Weyl como el contrapunto filosófico en el análisis de la idea matemática de continuo dentro del marco del continuo temporal fenoménico.

La sección comienza con una recapitulación de lo que lleva hecho hasta el momento que no es más que, a partir de los principios de definición [*Definitionsprizipien*] (Weyl los expone en §2 ‘Los principios de la combinación de juicios’ [*Die Prinzipien der Urteilskombination*]) dados en el capítulo primero[65] comenzando por los números naturales y siguiendo el hilo conductor de la aritmética y el análisis, construir una teoría pura de números [*reine Zahlenlehre*].

Teniendo en cuenta estas ideas Weyl ha afirmado algo clave: que la propiedad de continuidad de una función es una propiedad *transfinita*[66]. Esto significa que responder a la pregunta de si una función definida es continua o no –con ayuda de los principios expuestos en la primera parte del libro– supone tener una *visión total* no sólo de los números naturales, sino de los conjuntos cuatridimensionales de números naturales (es decir, de números reales, tal y como los define Weyl) que surgen de la aplicación de los principios lógicos definidos[67].

Más adelante propone un ejercicio mental para explicar su afirmación. Si el sistema de principios que ha expuesto se considera “abierto”, en el sentido de que sea posible añadir otros, *debe* quedar sin contestar la pregunta de si una función es continua o no. Pues si fuera posible extender de forma consistente los principios lógicos, se podrían considerar más números reales, y por tanto responder a la pregunta de manera distinta dependiendo de cómo fuera hecha esta extensión.

Weyl sigue su análisis considerando un punto de masa en función del tiempo como una función continua en un intervalo real. Después introduce el análisis fenomenológico del

[64] “Para permanecer en el dominio de lo dado inmediatamente [*unmittelbar Gegebenen*], mantengámonos en el tiempo fenoménico (en contraposición con el objetivo)” (Weyl, 1918, 67).

[65] Véase (Weyl, 1918, 4-6).

[66] Véase (Weyl, 1918, 62).

[67] Se definen en el capítulo I, secc. 2. (Weyl, 1918, 4-8)

tiempo aplicado a la experiencia: 'observar un lápiz sobre una mesa'. Para Weyl se puede afirmar que durante un intervalo de tiempo el lápiz ha estado en la mesa, y que es absurdo imaginar que la extensión de nuestros principios de definición da derecho a pensar que el lápiz ha estado durante momentos *agregados* en Sirio. Con lo cual llega a la conclusión de que las consideraciones *lógicas* sobre principios de definición y su posible extensión no nos acercan a la naturaleza intuitiva del continuo en su relación con el concepto de número real definido.

Weyl deja claro, no obstante, que aquélla relación se dejaría tratar si se entiendiera el "ahora" como un punto, y si se pudieran explicitar puntos temporales de forma precisa.

Dados dos puntos temporales distintos, las relaciones 'anterior a' y 'posterior a' se dan siempre. Y asimismo surge de ellas la idea de segmento temporal, aunque haya que notar –escribe Weyl– que su contenido experiencial es irrelevante a la hora de *medir* este tipo de segmentos, pues el contenido "experimentado" es irrelevante en la medición.

Se pueden entonces definir –si suponemos que la relación de igualdad definida matemáticamente tiene el mismo sentido en la intuición temporal– relaciones binarias entre puntos, y cuaternarias entre segmentos, y por tanto afirmar la existencia del lápiz sobre la mesa durante un determinado tiempo, admitiendo a su vez que es correcta la idea de la 'división' del tiempo en puntos. Con lo cual, para un punto temporal P es posible construir aritméticamente por medio de los principios de definición, dominios de racionales[68] a los cuales pertenece λ si y sólo si existe un punto temporal L anterior a P, para el que se cumple que

$$OL = \lambda OE \qquad (1)$$

con *OE* un intervalo temporal dado. Es decir, si existe un número real λ (de la forma definida por Weyl (Weyl, 1918, 51 y ss.)) que hace verdadera la ecuación. Además, con ello se afirma asimismo la inversa: que para cada número real existe un punto temporal determinado.

Weyl admite que, si se puede establecer esta igualdad, tendría sentido la correspondencia matemático-intuitiva, y por tanto se podría desarrollar aritméticamente una teoría pura del tiempo. Si no fuera así, se podría pensar sin embargo que mediante la modificación y extensión de los principios de definición quizá fuera posible alcanzar esta situación. Pero si

[68] En *El continuo* Weyl define los números racionales como dominios cuatridimensionales de números naturales, y los números reales como dominio de racionales que cumplen unas determinadas condiciones. Véase (Weyl, 1918, 51 y ss.).

no se alcanzara del modo en que acabamos de ver, se debería establecer una teoría del continuo *autónoma*.

Sea como fuere, siempre se tendría que dar respuesta a la ecuación (1) considerando las condiciones mencionadas. Y a preguntas como: ¿vale el principio de cortadura de Dedekind[69] para los puntos temporales? ¿O el principio de convergencia de Cauchy[70]? Cuestiones para las que no nos podríamos librar del concepto de conjunto (o sucesión), no importa lo que hiciésemos, y cuyo alcance está además inserto en los principios de definición.

Estos vaivenes de Weyl sobre la "posibilidad" que deja abierta, no son más que la preparación del camino para establecer su tesis sobre la imposibilidad de hacer corresponder los dos continuos.

2.4 IMPOSIBILIDAD DE LA CORRESPONDENCIA ENTRE CONTINUOS

Weyl mantiene la idea de que todo lo que *deseamos* respecto a la posibilidad de desarrollar una teoría pura del tiempo es un *sinsentido*. Escribe: "*[L]a intuición del tiempo permanece frente a estas preguntas deudora de respuesta. Es posible que la categoría de los números naturales pueda establecer el fundamento de una disciplina matemática, pero no el continuo, como se presenta en la intuición. Las condiciones para ello (ver cap. I, § 1) no se cumplen; el concepto de punto en el continuo adolece ya de apoyo en la intuición. Es mérito de la filosofía bergsoniana haber indicado con insistencia este profundo alejamiento del mundo conceptual matemático de la continuidad experimentada directamente del tiempo*" (Weyl, 1918, 68).

Más adelante inicia con un ejemplo un refinado análisis fenomenológico donde observa la diferencia entre la duración y la posibilidad de que sea representada por puntos de un flujo. [*Ablauf*]. Weyl se pregunta de dónde procede que el dato de la conciencia no se dé totalmente como un *ser* (como por ejemplo el ser lógico de los conceptos), sino como un *ser-ahora* que dura y cambia [*als ein fortdauerndes und sich wandelndes Jetzt-sein* (Weyl, 1918, 69)].

---

[69] Definida como un par ordenado de conjuntos de racionales A < B. Tal que: 1) todo racional está exactamente en uno y sólo uno de los conjuntos A, B; 2) ni A ni B son el conjunto vacío; 3) todo elemento de A es menor que cualquier elemento de B; 4) A no tiene supremo, i.e., para cada p en A, existe un r en A, tal que p < r.

[70] Dada una secuencia de reales: $x_1, x_2 \ldots x_m \ldots x_n \ldots$, para cualquier real positivo ε existe un número natural N tal que, si m y n son mayores que N, el valor absoluto de la diferencia entre dos reales cualesquiera x_m y x_n es menor que ε.

Si suponemos un *ahora-puntual*, i.e., un contenido experiencial cambiante y que se transforma constantemente, suponemos un flujo temporal en el que se pueden "identificar" puntos del mismo. Cada punto se corresponde con una determinada totalidad experiencial [*Erlebnisganze*]: si la conciencia se fija en ese punto, entonces poseerá la correspondiente totalidad experiencial; sólo eso *es*. Luego la pregunta pertinente reza: ¿De dónde *proviene* la concreta duración de cada experiencia?

Si nos atenemos a la idea de puntos singulares y *aislados entre sí*[71] del flujo sólo podemos dar una respuesta: que solamente se tiene la experiencia de *ese* punto temporal; a ese punto pertenece sin embargo, un más o menos claro *recuerdo*, cuyo objeto intencional es la experiencia que tuve en un punto temporal del pasado (se deja sin explicar el problema de dónde debe proceder la validez de ese recuerdo).

Si se tiene por ejemplo una percepción lumínica de corta duración –prosigue Weyl–, se tiene en el momento A no sólo la experiencia de la percepción, sino al mismo tiempo los recuerdos "de" las experiencias de percepción [*Wahrnehmungserlebnisse*] de todos los momentos pasados que suceden en esa corta duración; más aún: me acuerdo en A no sólo de la experiencia de la *percepción* en el corto momento pasado B en el cual tuvo también lugar, sino de la *completa* experiencia de ese momento B, y esto contiene, además de la percepción, los recuerdos de todos los momentos anteriores de las experiencias tenidas. Por tanto, la percepción continuada consistiría en los infinitos recuerdos contenidos los unos en los otros y los infinitos sistemas correspondientes con estos recuerdos. Se puede decir por tanto que lo pasado es lo "encajado" [*das Eingeschachtelte*].

Ahora bien, Weyl afirma que está claro que nuestra experiencia no se corresponde con nada de esto, y que es contradictorio que se dé una tal trabazón de momentos experienciales *puntuales* y encajados los unos en los otros sin fin como una unidad cerrada y completa.

La interpretación de un flujo o proceso temporal que consta de puntos *disociables* es incorrecta: "*Se nos escapa precisamente lo que representa la continuidad, el discurrir de punto a punto, aquello que en el presente permanente dura, que permite fluir y discurrir constantemente hacia el pasado que se disuelve*" (Weyl, 1918, 70).

Para Weyl lo que se tiene en la conciencia es algo que se da al mismo tiempo y que es una unidad: es el ser-ahora y aquello, lo que es, fluye con su posición temporal; y por ello también

---

[71] Véase (Weyl, 1918, nota 2, 69).

el ser permanente es algo siempre nuevo, que perdura y cambia. Lo que desaparece puede aparecer, pero no como una experiencia “nueva”, sino más bien como contenido de un recuerdo (convincente) que podemos caracterizar como *lo pasado*.

En la imagen objetiva del *transcurrir* de la vida –imagen que nos formamos– se presenta a su vez, frente a ella, lo que ahora *está* ahí como lo pasado a establecer. Luego, “*para el tiempo objetivo concebido resulta así que: 1. un sólo punto en sí no es independiente, es decir, es en sí mismo la pura nada y existe sólo como “punto de paso” (lo que no se comprende matemáticamente de modo natural); 2. que está fundado en la esencia del tiempo, (y no en las posibles inexactitudes de nuestros medios), que un determinado punto temporal no se deje exhibir completamente, que siempre sólo sea posible un fijar* aproximado *y ninguno* exacto. *Del mismo modo, esto sucede para cualquier continuo intuitivo dado, en particular también para cada continuo de la extensión espacial*” (Weyl, 1918, 70).

Weyl afirma, siendo esta su tesis principal, que “*el continuo intuitivo y el matemático no se superponen; entre ellos existe un profundo abismo*” (Weyl, 1918, 71). Ahora bien, existen motivos razonables que nos llevan del uno al otro. Los mismos motivos que hacen que nos interesemos por la investigación del mundo físico escondido “por detrás” [“*hinter*”], exacto y sin cualidades, “realmente objetivo” [“*wahrhaft objektiv*”].

De este modo es como descansa –según Weyl– a partir de la construcción del análisis propuesta en el libro, una *teoría del continuo*, que se muestra razonable (más allá de la exactitud de sus conclusiones lógicas) de la misma forma que una teoría física.

El concepto de número real se puede entender como el esquema abstracto del continuo con su infinito encajamiento [*unendlichen Ineinander*] posible de *partes* las unas en las otras. De este modo, el concepto de función es el esquema de dependencia de continuos que se “solapan” (del que un caso particular es por ejemplo un punto que se mueve; esto es, el solapamiento de un continuo temporal mediante uno espacio-lineal).

Luego la diferencia entre el infinito encajamiento de partes y el de puntos[72] es fundamental para entender el continuo intuitivo. Weyl, adoptando el punto de vista fenomenológico aplicado a una experiencia temporal llega a la conclusión de que al no corresponderse con la ‘intuición puntual’, su correlato matemático no puede ser el del análisis clásico, ni tampoco el del weyliano.

[72] Véase (Weyl, 1918, 69).

Pero esto tiene relevancia epistemológica en la adecuación de la matemática a la física, y Weyl –consciente de ello– lo exhibe explicando que el hecho de que para los conceptos de número real y función continua como son definidos en *El continuo* sea válida la proposición que afirma que: "Una función continua toma todos los valores intermedios; *es decir, si f es una función continua y*

$$f(a) < v < f(b),$$

entonces existe un número real c entre a y b (a < c < b), tal que f(c) = v" (Weyl, 1918, 62), es una justificación racional de la explicación exacta del movimiento en el mundo de la objetividad física. Así afirma que "*no subyace el exacto punto temporal o espacial en la duración o en la extensión como su último e indivisible elemento, sino que sólo la penetrante razón puede concebir aquellas ideas a través de lo que nos es dado, y sólo en la pura esfera formal cristaliza el correspondiente concepto aritmético-analítico de número real en su total exactitud*" (Weyl, 1918, 71).

2.5 Conclusiones de Weyl

Weyl profundiza aún en la posibilidad de intentar establecer una teoría del tiempo y el espacio como una ciencia matemático-axiomática independiente, y observa que para ello se deben tener en cuenta al menos tres cosas:

La referencia a un sólo punto no es posible. Los puntos no son individuos, y por tanto no pueden ser caracterizados por sus propiedades. Mientras que el continuo de los números reales consiste en individuos genuinos, el continuo del tiempo o del espacio es homogéneo. De este modo, puntos y conjuntos de puntos no se dejan nunca determinar absolutamente, sino sólo dependiendo siempre (i.e., como funciones) de un sistema de coordenadas.

La segunda es que el axioma de continuidad [*Stetigkeitsaxiom*] debe ser formulado de forma que cada punto P de una unidad de longitud OE se corresponda con un número real como abcisa, y a la inversa. Sólo en virtud de este axioma tienen todos los juicios relevantes[73] un *claro sentido*, a pesar de las circunstancias mencionadas en el punto anterior.

[73] Weyl ha definido el concepto 'juicio relevante' [*einschlägiger Urteil*] en la sección segunda de la parte primera de *El continuo*. Concretamente define 'juicio relevante' como el juicio que no posee posiciones vacías y que afirma un estado de cosas [*Sachverhalt*]. Véase (Weyl, 1918, 6).

La tercera es que si establecemos un nuevo fundamento en la teoría pura de números, por el cual, junto con los números naturales tomemos a los reales como categoría fundamental –como hizo respecto a los racionales–, entonces se puede, sobre esta base, construir un edificio teórico que denomina *hiperanálisis*[74]. El cual no coincide con el análisis que ha construido en secciones anteriores del libro, pues existen en el hiperanálisis, por ejemplo, más conjuntos de números reales que en el análisis. Para éstos sucede que en su definición aparece el cuantificador existencial en conexión con "un número real" (i.e., una variable que se refiere a los números reales). En el hiperanálisis no se cumple, por consiguiente, ni el principio de convergencia de Cauchy ni los teoremas sobre funciones continuas en general (sólo se cumplen para aquellas funciones y sucesiones que ya aparecen en el análisis).

Según Weyl, el intento (permanente) de partir de un nivel más alto que el nivel básico de los números naturales se debe contrarrestar siempre, pues *sólo el análisis y no el hiperanálisis proporciona una teoría útil*[75] *del continuo* y de las posibles dependencias entre continuos que se solapan entre sí. Aunque, suponiendo que alguien aceptara el hiperanálisis, se debe tener en cuenta que, en virtud del axioma dado en el segundo punto, considerando un sistema de coordenadas subyacente, existiría una correspondencia continua no sólo entre puntos espacio-temporales de un lado y números reales de otro, sino también entre los conjuntos puntos y conjuntos de conjuntos de puntos. Luego entre todos los conjuntos de la teoría del espacio-tiempo de un lado y todos los conjuntos del *hiperanálisis* de otro. O dicho de un modo más exacto, existiría esa correspondencia entre los conjuntos del hiperanálisis y las funciones del sistema de coordenadas en la teoría del espacio o del tiempo (si se trataran como continuos independientes). Es por ello que Weyl advierte que no puede ser reemplazado el mencionado axioma "*en la hasta ahora habitual construcción axiomática de la geometría, mediante el (ya en el hiperanálisis no válido) principio de convergencia de Cauchy u otro parecido. Y de esto se obtiene todavía algo más –a causa de la inoperabilidad del hiperanálisis– algo que no se puede de ningún modo abordar, a saber, hacer de la teoría del tiempo y de la geometría ciencias axiomáticas independientes*" (Weyl, 1918, 73).

[74] Considerado desde el punto de vista de la teoría de tipos, esto se corresponde con añadir un tipo superior (de forma cumulativa). El predicativismo se mantiene, por razones de simplicidad lógica, en el tipo 1.

[75] "Sólo el análisis, no el hiperanálisis proporciona una teoría útil del continuo" (Weyl, 1918, 72). [Cursivas en el original]. Lo que Weyl entiende por 'útil' [*brauchbar*] es algo que no explica, pero que sin duda tiene que ver con lo que escribe en el prólogo sobre la fundamentación segura del análisis, hasta el momento no conseguida, y con las complejidades lógicas que implica introducir tipos superiores.

Al finalizar el libro escribe que frente a los que le reprochan que ninguno de los principios lógicos a los que se debe recurrir para definir exactamente el concepto de número real se encuentran en la intuición del continuo, él ha aclarado sin embargo que el continuo de la intuición y el del mundo conceptual matemático son tan ajenos entre sí, que la exigencia de coincidencia debe ser tenida por absurda. No obstante, recuerda que, aunque sea así se requieren esquemas abstractos proporcionados por la matemática para posibilitar la ciencia exacta de dominios de objetos en los cuales los continuos juegan un papel decisivo.

2.6 Crítica a la idea de continuo en El Continuo

Llegados a este punto nos proponemos exponer otra alternativa a la hora de tratar la relación entre ambos tipos de continuo. Lo que se pretende no es ajustar dos ideas de continuo con diferente origen (el matemático, desde la perspectiva predicativista; el filosófico, desde la fenomenológica), sino que, considerando un origen único, intentar aclarar el papel de la matemática respecto a esta intuición.

2.6.1 *Lückenlosigkeit* como caracterización del continuo

Si observamos la formulación del axioma de continuidad de Dedekind[76] vemos que se puede entender como la formalización de la intuición de la propiedad –consustancial al continuo intuido– de la no existencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*]. Si esta idea no se considerara necesaria, se podría pensar que la representación matemática del continuo podría ser llevada a cabo sólo mediante los números racionales. Pero el hecho de que se den relaciones entre los racionales que "implican"[77] la existencia de irracionales –inconmensurabilidad–, obliga a añadir la noción mencionada a la idea de continuo matemático.

[76] El axioma es así presentado por Dedekind: "Si todos los puntos de la línea se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes" (Dedekind, 2014, 93). Este punto se conoce como cortadura de Dedekind.

[77] No se trata de una necesidad lógica, sino que nos referimos al problema que ya los griegos observaron en sus "experiencias" con los números racionales.

Podemos preguntarnos entonces, en qué sentido está esto bien fundamentado. Si bien es cierto que el axioma de continuidad se puede entender como de origen geométrico[78] y por consiguiente se deberían admitir como dados conceptos como el de punto o línea, es decir, dejar a un lado la posible construcción aritmética de los reales, creemos que la diferencia de cardinalidad entre reales y racionales es algo que debe tenerse en cuenta al constatar la inconmesurabilidad, y que es por esta diferencia por la que se hace de nuevo ostensible la idea de no existencia de espacios vacíos, algo que no se consigue si se consideran exclusivamente los racionales. La introducción de Dedekind de los números irracionales proporciona una determinación más precisa del continuo intuitivo, a cuya representación matemática basada en la propiedad de no existencia *del* sucesor de un racional, se le adjunta la propiedad de la ausencia de espacios vacíos que sobreviene por la *necesidad* de recoger la idea de inconmensurabilidad.

Luego, para nosotros, el continuo, tanto el espacio-temporal como el matemático, descansa en una intuición original. El matemático es una *determinación* de aquél donde la relación de inconmensurabilidad entre números racionales es resultado de considerar la propiedad de no existencia de espacios vacíos.

La analogía que Weyl desecha trata de contradecir lo que realmente experimentamos en la intuición del tiempo teniendo en cuenta la imagen matemática del continuo formado por puntos. Cuando más bien la idea del *transcurrir* es "atrapada" en el axioma de continuidad, en el cual, el punto, como algo dado, *no* es lo fundamental desde la perspectiva ontológica, sino el *medio matemático* que expresa la no existencia de espacios vacíos (o saltos) en ese transcurrir.

Es interesante mencionar la referencia de Hölder a propósito de cómo algunos filósofos han tratado el problema de continuo, pues sugiere una idea importante que queremos tratar: "*Contra el axioma de continuidad de Dedekind, en tanto que a través de él se debiera describir la naturaleza continua de la recta, se han hecho objeciones desde el lado filosófico. Éstas reprueban esencialmente la circunstancia de que se recurre a los puntos de la recta para explicar la continuidad, mientras que según la opinión de aquellos filósofos el concepto de recta continua debiera 'anteceder' a la distinción de puntos de ella o a puntos, posiblemente a especificar, en ella. Después, en § 99, mostraré que la pregunta sobre cuál de los dos conceptos 'antecede' de ningún modo siempre se puede decidir*" (Hölder, 1924, 88).

[78] Véase (Hölder, 1924, 87).

Lo que puede parecer "contradictorio", una especie de *hýsteron próteron*, ha de entenderse como una *analogía paradójica*. El biomio punto-recta forman una unidad conceptual no-escindible en el análisis matemático de la continuidad.

Weyl escribe (1918, nota 2, 69) que los reales están tan aislados [*genau so isoliert*]en el continuo como los enteros. Sin embargo, creemos que esta afirmación se debiera especificar algo más pues parece contradecir la propiedad de ausencia de espacios vacíos.

Intuitivamente, tomados dos reales, existen infinitos reales entre ellos, y por tanto están 'separados'. Lo que no significa que, como en los enteros, exista digamos, un "espacio vacío", i.e., *el* sucesor. Esta es precisamente la diferencia entre los enteros y los reales (también racionales).

Podemos usar la imagen siguiente: dos enteros están *aislados* y entre ellos no existe ningún entero; dos reales están *separados* y entre ellos existen una infinitud de reales. La relación '*estar-aislado/separado*' se fundamenta en la propiedad de densidad, propiedad que también cumplen los racionales.

2.6.2 El sujeto ideal como fundamento

Después de tener en cuenta las consideraciones anteriores, la pregunta es cómo fundamentar filosóficamente estas ideas. Creemos que un camino para hacerlo es aceptando la tesis (y sus consecuencias) proveniente del idealismo de que el par sujeto-objeto es indisociable[79]. Desde el punto de vista idealista se puede defender, frente a Weyl, la posición de que la esencia del continuo intuitivo radica en la ausencia de espacios vacíos y que esto tiene como sustrato explicativo la presencia necesaria y *permanente* del sujeto en la experiencia fenoménica que conoce la simultaneidad a través de la cual somos conscientes de la duración "al ser ésta sólo cognoscible en el cambio de aquello que coexiste con lo duradero" (Schopenhauer, 2005, 38) por medio de la interacción las formas del espacio y el tiempo en el entendimiento.

Esto es *siempre* así porque en último término, en la experiencia más íntima que es la autoconsciencia, siempre nos referimos a un sujeto que es *a su vez* objeto para sí mismo y que existe en un espacio y un tiempo determinados. En ese caso existe siempre como punto de

[79] Véase (Schopenhauer, 2005, 1102 y ss).

partida ontológico *el*-sujeto-que-experimenta-algo. Por lo que no hay 'saltos', pues esto significaría que el sujeto no está presente de ningún modo[80] en la experiencia.

Luego la idea de Weyl de que no tenemos experiencia de puntos sin duración es, asimismo, y desde nuestro punto de vista, correcta. Sin embargo, habría que distinguir el sujeto-objeto trascendental del *contenido* de la experiencia, i.e., lo representado y por tanto dependiente del tiempo. Desde el punto de vista del sujeto, la intuición del continuo temporal se reduce al hecho de que es consciente la duración, y que a su vez la no existencia de saltos viene indicada por la presencia permanente del sujeto en la experiencia como última referencia de fenómenos simultáneos que ocurren en el espacio. Ahora bien, creemos que la intuición de la duración temporal se deja tratar matemáticamente sólo si se atiende a la propiedad de ausencia de saltos [*Lückenlosigkeit*] representada por las cortaduras de Dedekind.

La intuición, como es entendida por Weyl[81] sugiere que el acto de intuición [*act of intuition*] que ocurre en el tiempo tiene un sucesor. A partir de esto cabe pensar en la potencialidad de los infinitos actos de intuición como base para la fundamentación de los números naturales, pero se deja sin explicar cómo se "intuye" la duración como un continuo[82].

La experiencia de duración no proviene *sólo* del contenido experiencial, sino de la *característica ontológica* del sujeto: no existir sin objeto (i.e., lo representado bajo el principio de razón suficiente[83]). Esta idea se aparta de la concepción fenomenológica en el sentido que le da Husserl en §36 de *Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewußtseins* –su estudio más profundo del tiempo desde la fenomenología–, y titulado "El flujo que constituye el tiempo como subjetividad absoluta" ["*Der zeitkonstituirende Fluß als absolute Subjektivität*"]. En él describe la relación entre el continuo como flujo y la unidad constituida [*konstituierte Einheit*] temporalmente, i.e., el objeto temporal [*Zeitobjekt*]. Creemos que esta idea es un tanto obscura a la hora de captar[84] la relación entre el sujeto y la

---

[80] "En el primer caso, la propia persona se escinde en el que conoce y lo conocido, en sujeto y objeto, los cuales se presentan aquí, igual que en todas partes, como inseparables e incompatibles. Ahora bien, si mi propia persona, para existir como tal, tiene siempre necesidad de un conocedor, esto será por lo menos igualmente válido para el resto de objetos. Y reivindicar para éstos una existencia independiente del conocimiento y del sujeto de éste era el propósito de la objeción anterior" (Schopenhauer, 2005, 444).

[81] Véase (Tieszen, 2000, 280).

[82] "[W]herever we might slice into the flow of consciousness in time we do not obtain a durationless now point. We do not experience or intuit such a point" (Tieszen, 2000, 289).

[83] El principo tal y como se formula en Schopenhauer (1981, 5), citando a Wolf afirma que "nada es sin una razón por la que pueda ser, o no ser". ["Nihil est sine ratione, cur potius sit, quam non sit"].

[84] Husserl escribe: "[L]os predicados de tales [objetos individuales o procesos] no pueden ser adscritos a ellos [los fenómenos que constituyen el tiempo] razonablemente". ["[D]ie Prädikate solcher können ihnen sinnvoll

experiencia de duración, pues Husserl identifica el fujo *que constituye* y la subjetividad absoluta de forma que no queda claro el fundamento de esta identificación. Además, para el idealismo (como lo entiende Schopenhauer), el concepto de 'subjetividad absoluta' no tiene sentido, pues se es sujeto siempre 'relativo' a un objeto. Tampoco existe el tiempo constituido ya que es *a priori* y el esquema conceptual husserliano 'retención-impresión original-protención' [*Retention-Urimpresson-Protention*], que para Husserl es la base de intuición temporal, explica la percepción interna del tiempo pero no la esencia de su continuidad y asimismo de la duración[85]. Pues no creemos que se trata de catalogar la experiencia temporal sino de intentar dar una razón de por qué ésta es así.

Volviendo a Weyl, éste asegura que el punto espacio-temporal no puede ser exhibido individualmente sino sólo por medio de un sistema de coordenadas "residuo insoslayable de la aniquilación [*Vernichtung*] del yo" en un mundo geométrico-físico[86]. Para nosotros, sin embargo, no existe tal dependencia del yo (o del sistema de coordenadas como residuo). El punto temporal depende del sujeto en tanto que es su condición necesaria para "percibir" la ausencia de saltos, y no de la objetivación geométrico-física de la experiencia, por tanto se puede fijar[87] de modo absoluto, ya que depende del sujeto por ser no 'aniquilable', y no del yo[88].

---

nicht zugeschrieben werden"]. Y más adelante: "Para todo esto nos faltan los nombres" ["Für all das fehlen uns die Namen"] (Husserl, 1928, 429). Para un análisis interesante sobre la adscripción a Husserl de un cierto idealismo en su análisis de la temporalidad véase Hoerl (2013).

[85] Uno de los problemas a los que se enfrenta Husserl es explicar cómo el objeto temporal además de 'permanente' cambia con el tiempo. Römer se pregunta: "¿[C]ómo es posible que tengamos en la consciencia a través del continuo proceso de punto-de-partida ('punto-de-partida' ha de ser entendido como lo que se da en la consciencia como primer momento de un objeto temporal, la impresión original en el tiempo) con siempre nuevas impresiones originales y sucesiones de «desdibujacón» (Énfasis no en el original. El concepto de «Abschattung» en Husserl tiene que ver con lo que no se muestra, pero puede ser mostrado, y en el caso del tiempo con lo que se va desvaneciendo o desdibujando) algo como el objeto idéntico hilético?". ["[W]ie ist es möglich, dass wir über diesen kontinuierlichen Prozess von Quellpunkt mit immer neuen Urimpressionen und Abschattungsreihen so etwas wie identische hyletische Objekte bewusst haben können? "] (Römer, 2010, 40).

[86] Véase (Weyl, 1918, 72).

[87] El modo de "fijarlo" es matemático, pero su origen intuitivo -la ausencia de espacio vacíos- es previo y necesario a este modo.

[88] El 'yo' al que se refiere lo interpretamos como el yo fichteano que difiere del sujeto del idealismo de Kant y Schopenahuer. Weyl hace referencia de nuevo en el prólogo de la cuarta edición (en las anteriores no aparece) de 'Raum, Zeit, Materie' a esta "aniquilación de yo" a la que se refiere en El continuo. Escribe: "Los números nos dan la posibilidad de extraer los puntos temporales del continuo temporal referido a un segmento unidad OE de manera conceptual y por tanto objetiva y completamente exacta. Pero esta objetivación mediante la eliminación del yo y de su vida intuitiva inmediata no es suficiente del todo, el sistema de coordenadas a exhibir permanece sólo a través de un acto individual (y sólo aproximado) como el residuo necesario de esta aniquilación del yo" (Weyl, 1921, 7-8). Antes ha escrito que: "Para poder acercar al tiempo conceptos matemáticos, debemos partir de la posibilidad teórica de colocar en el tiempo con una exactitud arbitraria un ahora puntual, de fijar un punto temporal" (Weyl, 1921, 6). El precio a pagar es –en nuestra opinión– caro. El dualismo está servido, y esta divergencia requiere una explicación. Según Mancosu (2010, 323 y ss.), en consonancia con Husserl y Fichte,

Como describimos en el punto 3.1, la posición de Weyl respecto de la imposibilidad de la correspondencia entre el continuo matemático y el intuitivo se fundamenta en que, de existir esta correspondencia deberíamos asignar a cada punto temporal, objeto de una totalidad experiencial [*Erlebnisganze*], un recuerdo de momentos pasados.

Nuestra crítica es que esta asignación que sirve para refutar aquélla posible correspondencia es un tanto arbitraria (lo que no significa que desde nuestra posición no estemos de acuerdo con su invalidez, aunque por otros motivos). La duración interpretada como lo hace Weyl –suponiendo que a cada punto le corresponde una totalidad experiencial– sólo puede tener sentido, o como Weyl escribe, sólo puede haber una respuesta [‘*so kann es nur eine Antwort geben*’ (Weyl, 1918, 69)] si se hace esta asignación.

Sin embargo, desde nuestro punto de vista la totalidad experiencial es pasada por un tamiz intelectual, en el sentido de ser una unidad ‘reconstruida’ por el entendimiento.

Poder asignar en cualquier circunstancia posible un recuerdo, supondría afirmar la posibilidad de recordar en todo punto temporal (el mismo Weyl está contra esto). Según nuestra tesis, aunque esto tampoco sea posible, no significa que, en vez de una totalidad experiencial asignada a cada punto temporal, no se pueda hablar de que sólo lo experimentado llega a ser experiencia en sentido propio cuando se lo *reconstruye*. En la acción de reconstruir el sujeto es consciente de su presencia permanente. La duración es una experiencia reconstruida por el entendimiento, pero condicionada, pues se ha de suponer un sujeto *a priori* permanente al que referir el “cambio continuo”, y que reconstruye activamente por medio de las formas del principio de razón suficiente[89].

Luego, considerando nuestra tesis, los puntos temporales pueden ser determinados individualmente. Afirmación que ha de ser entendida como la otra “cara de la moneda”, o la formulación matemática, de cómo se puede tratar la propiedad de no existencia de espacios vacíos, asumiendo que caracteriza al continuo intuitivo. La caracterización del encajamiento

existe primero un acto de voluntad del yo en la postulación de este sistema de coordenadas. Además de que el ‘problema de la relatividad’ –como lo refiere Mancosu–, i.e., que el mundo objetivo de la física, el de los símbolos de los campos tensoriales de la física relativista, sean construidos vía subjetividad, da una idea del acercamiento de Weyl a algunas ideas fichteanas. Para profundizar sobre influencia de Fichte en Weyl véase Sieroka (2010) y Bell (2004).

[89] Para Schopenhauer existen cuatro raíces del principio: del ser, del devenir, del conocer y del querer. Véase (Schopenhauer, 1981).

de intervalos temporales supone una experiencia 'indeterminada'[90] permanente[91]. Creemos, por tanto, que la conclusión[92] de Weyl no da cuenta de esta otra cara a la que nos referimos.

Luego la continuidad temporal intuida es para nosotros la *objetivación*[93] que realiza el sujeto de su presencia en la experiencia como referencia última de estados simultáneos en los cuales la duración es percibida cuando sobreviene una alteración o cambio en el fenómeno u objeto representado.

Si el tiempo fuera objetivo, en el sentido de *independiente* del sujeto, implicaría que existirían 'estados de objetos' presentes en la experiencia para los que el sujeto no tendría referencia objetual (intencional, fenomenológicamente hablando). Esto tendría como consecuencia que el tiempo de la experiencia podría concebirse como con huecos, que serían (para el sujeto) momentos en los que no estaría experimentando nada referido a *un* objeto, como indica acertadamente Weyl en su ejemplo del lápiz en Sirio, lo cual es absurdo, si se considera que el sujeto es a su vez y *siempre* objeto para sí mismo.

2.7 Conclusiones del capítulo

Como hemos visto, Weyl se compromete en *El continuo* con la tesis de que el continuo intuitivo y el matemático son de naturaleza distinta.

A esta conclusión llega haciendo suyas ideas fenomenológicas respecto al tiempo y desarrollando su propuesta predicativista. Lo cual supone un dualismo en el tratamiento del problema del continuo.

Nuestro objetivo ha sido, sin embargo, a partir de *una* sóla intuición explicar la relación entre el continuo fenoménico y el matemático, i.e., la forma estática de algo que en su esencia no lo es.

Para ello hemos adoptado el punto de vista idealista y derivado la consecuencia de que la percepción del transcurso temporal como un flujo [*Ablauf*] es un efecto del estátus ontológico

---

[90]Para Weyl, debido a esencia del tiempo, un punto temporal sólo puede exhibirse de forma aproximada. Véase (Weyl, 1918, 70).

[91]A nuestro entender tampoco es correcta la apelación al infinito en la asignación de recuerdos, puesto que la memoria es de capacidad finita, también en el sentido del tiempo vivido. Véase (Weyl, 1918, 69).

[92]Véase p. 44.

[93]Como correlato del sujeto.

del sujeto. Asumiendo la tesis idealista sobre el sujeto fundamentamos la continuidad temporal en la intuición, y derivamos a partir de ésta su caracterización matemática, basada en la formulación de Dedekind de la propiedad esencial al continuo de no existencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*], representada por el concepto de cortadura de Dedekind. La inconmensurabilidad se puede entender como la "constatación" de que los racionales no son suficientemente potentes para representar matemáticamente esta idea.

En Weyl (1931) se presentan[94] como contrapuestas la concepción de Demócrito y la de Anaxágoras en relación con el problema del infinito. Estas concepciones no se excluyen mutuamente. Como observa, el continuo intuitivo es 'dinámico', y el matemático se *convierte* en 'estático'[95] . Sin embargo, la matemática necesita de la forma estática de representación para captar la intuitiva, aunque ambas se explican a partir de la idea de ausencia de espacios vacíos.

Según nuestra tesis, el punto es un concepto necesario para entender matemáticamente la propiedad de continuidad y su origen intuitivo. Además, no afirmamos que el lapso de tiempo experimentado sea "atomísticamente separable", sino al revés. Esto es, que la concepción atomista del continuo matemático puede ser derivada de la percepción intuitiva del continuo, asumiendo la tesis idealista.

Desde un punto de vista filosófico, según nuestro análisis, no es posible establecer una relación consistente entre ambos continuos si se presenta de forma dualista, pues supone una merma esencial en la adecuada comprensión de –como escribe Weyl– los "esquemas abstractos, proporcionados por la matemática, para posibilitar la ciencia exacta de aquellos dominios de objetos en los cuales los continuos juegan un papel" (Weyl, 1918, 83).

[94]Véase (Weyl, 1931, 1-2).

[95]Véase (Weyl, 1931, 11). 'Estático' no significa conjuntista necesariamente.

Capítulo 3

La estructura de las matemáticas: La paradoja de Richard como eje metamatemático

3.1 Introducción

Las restricciones impuestas por el predicativismo a la matemática suponen un tratamiento específico del concepto de numerabilidad que surge del análisis e interpretación de la paradoja de Richard[96]. Esta interpretación da lugar a clasificar metamatemáticamente dos formas de hacer matemáticas: la axiomática y el constructivismo. Además, esta clasificación se puede estudiar formalmente mediante conceptos como el de *naming system* y el teorema general del punto fijo, gracias a los cuales se puede analizar la numerabilidad en relación a sistemas como el de *El continuo* o sistemas axiomáticos como el de Peano.

En el presente capítulo se pretende discutir, considerando fundamentalmente ideas desarrolladas en *El continuo*, en qué medida el predicativismo dados los números naturales puede considerarse un modo de hacer matemáticas congruente[97].

Para ello partimos de la tesis de que la paradoja de Richard es para Weyl una idea fundamental que le induce a escribir *El continuo* y a desarrollar el predicativismo.

Primero analizaremos la forma en que Weyl (1968, 298-304) escribe acerca de esta paradoja, en una época en que todavía se le podía considerar dentro de la influencia de su maestro Hilbert.

Además, consideraremos algunas ideas claves de Feferman en su análisis de *El continuo*, para finalizar el capítulo sirviéndonos del concepto de '*naming system*' y del teorema general del

[96] La paradoja se enuncia de esta forma: "Todo número que se puede definir mediante un número finito de palabras forman un conjunto numerable" (Richard, 1905, 541). Esto lleva a Richard analizar este enunciado y construir una definición (mediante un número finito de palabras) de un número que no está en el conjunto mencionado. Luego, el conjunto en cuestión no es numerable, contradiciendo el enunciado.

[97] Con ello queremos decir, que no se encuentre en la propuesta predicativista asunciones que contradigan ideas rectoras de la misma. Luego no afirmamos que el predicativismo en general no pueda ser una propuesta válida a la hora de desarrollar la matemática en ciertos términos o hasta ciertos límites. Sólo queremos dar cuenta de los posibles problemas a los que se enfrenta específicamente la propuesta desarrollada por Weyl en *El continuo.* Por tanto, un desarrollo más refinado o la modificación de algunos aspectos de la propuesta weyliana pueden muy bien servir como fundamento de la matemática al mismo nivel que otras fundamentaciones.

punto fijo, a partir del cual analizaremos en qué sentido la división metamatemática establecida por Weyl (1949, 219-236) sobre dos modos de hacer matemáticas es aplicable al sistema de *El continuo*.

3.2 EL PROBLEMA DEL CÍRCULO VICIOSO EN EL CONTINUO

Weyl publicó en 1918 *El continuo* donde introduce una crítica al análisis clásico desde el punto de vista de lo que se denominó posteriormente predicativismo dados los números naturales.

De modo somero podemos decir que la base de su crítica es la siguiente:

El análisis clásico (desarrollado entre otros por Weierstrass, Dedekind y Cantor) contiene un círculo vicioso en la noción fundamental de supremo[98] de un conjunto de números reales acotado superiormente, lo que implica que teoremas basados en esta definición, como por ejemplo el teorema que afirma que todo conjunto acotado de reales tiene un supremo y un ínfimo (precisos) (Weyl, 1918, 59), dejan de serlo.

En *El continuo* se asumen dos posiciones de partida cuyo efecto en el desarrollo de la matemática es esencial: por un lado, la existencia de los números naturales se supone intuitivamente dada, y, a partir de ellos, se construyen los racionales y los reales. Por otro, los conjuntos se definen a partir de propiedades, pero dos conjuntos son iguales de acuerdo con su extensión.

La matemática se puede desarrollar por tanto hasta cierto punto[99]. Por ejemplo, la cuantificación sobre subconjuntos de naturales no está permitida en el sistema de Weyl.

---

[98] En *El continuo* Weyl sigue la idea de cortaduras de Dedekind para definir los reales. Escribe: „Nach Dedekind wollen wir eine reelle Zahl α charakterisieren durch die Menge derjenigen rationalen, welche kleiner sind als α„ [“Siguiendo a Dedekind queremos caracterizar un número real α mediante el conjunto de aquellos racionales que son menores que α”] (Weyl, 1918, 22). El supremo de un conjunto se define de esta manera: “Sei z.B. M eine beschränkte Menge von reellen Zahlen 1. Stufe. Um ihre obere Grenze zu konstruieren, hat man eine Menge γ von rationalen Zahlen zu bilden, der eine rationale Zahl r dann und nur dann als Element zugehört, falls es eine zu M gehörige reelle Zahl der 1. Stufe gibt, welche größer ist als r”. [“Sea por ejemplo M un conjunto acotado de reales de primer nivel. Para construir su cota superior, se tiene que formar un conjunto de racionales γ, al que pertenece un racional r si y sólo si, existe un número real de primer nivel en M que es mayor que r”] (Weyl, 1918, 23). Hemos de notar que la definición de supremo clásica es equivalente al principio de cortadura de Dedekind: “Si el sistema de R de todos los números reales se descompone en dos clases A_1, A_2 tales que todo número α_1 de la primera clase A_1 es menor que todo número α_2 de la segunda clase A_2, existe un y solo un número α mediante el cual se produce esa división” (Dedekind, 2014, 90).

[99] Feferman afirma que áreas fundamentales de la matemática como el análisis (básico), la teoría de la medida de Lebesgue, ciertas partes del análisis funcional se pueden desarrollar de manera predicativa. Existe, no obstante, un límite (límite no necesariamente lógico, sino práctico) a este desarrollo que refiere Feferman, debido a la

En *El continuo* Weyl (1918, 36) analiza además la solución de Russell a la paradoja homónima mediante la teoría ramificada de tipos, pues observa que se puede sortear el círculo vicioso atendiendo a la lógica introducida por el inglés. Eliminar la paradoja, cuyo núcleo se refiere a la forma en que un objeto puede fungir en una relación *xRy* en ambos lugares, estableciéndose una reflexividad no prevista que da lugar a problemas, supone tratar de "delimitar" el uso de esta relación.

Weyl, sin embargo, considerará en *El continuo* a los números naturales como categoría fundamental [*Grundkategorie*], luego los conjuntos de números naturales no son objeto de cuantificación a menos que se *construyan*[100].

Lo que creemos interesante es que esta limitación impuesta por Weyl tiene un efecto fundamental en cómo se entiende y presenta en el libro la paradoja de Richard.

3.3 PARADOJA DE RICHARD: PUNTO DE INFLEXIÓN DE DOS PERSPECTIVAS

En este apartado pretendemos exponer primero cómo se trata la paradoja de Richard en el artículo de 1910 «Sobre la definición de conceptos matemáticos fundamentales» [«*Über die Definition der mathematischen Grundbegriffe*»] y en el libro *El continuo*.

Nuestra tesis, como dijimos, es que la comprensión de paradoja de Richard supone *el* punto clave en el desarrollo del predicativismo weyliano.

En el citado artículo, Weyl explica su posición respecto a aquélla partiendo de la exposición de la geometría euclídea de Pieri[101]. Weyl es de la opinión de que conceptos como línea o plano se pueden sustituir por conceptos relacionales [*Beziehungsbegriffe*] que sólo tienen que ver con puntos (considerados en número finito). El desarrollo de la geometría euclídea se

---

aceptación por parte de la comunidad matemática de áreas o campos donde se hace uso definiciones impredicativas en conceptos fundamentales, como, por ejemplo: espacios no-separables hilbertianos, que son usados en mecánica cuántica, o teoría de conjuntos donde se acepta la existencia de cardinales inaccesibles. Véase (Feferman, 1998, 249-283) y (Feferman, 1998, 284-298).

[100] El predicativismo de Weyl se puede considerar *constructivo* en el sentido de que los cuantificadores no se usan de manera irrestricta, además de por el uso de la recursividad.

[101] "Es muß hier genügen, wenn ich erwähne, daß dies in der Tat ohne große Mühe geschehen kann, und auf Pieri verweise, einen italienischen Mathematiker der Peanoschen Schule, der die Geometrie in solcher Weise aufgebaut hat". ["Debe bastar, si menciono, que esto se puede ciertamente alcanzar sin mucho esfuerzo, y que se debe referir a Pieri, un matemático italiano de la escuela de Peano, que ha construido la geometría de esta manera"] (Weyl, 1968, 299).

puede por tanto reducir a cinco principios de definición relacionales entre puntos: 1) permutación, 2) negación, 3) adjunción, 4) exclusión, 5) coordinación o cópula.

Weyl sostiene que cada concepto relacional de la geometría elemental (la que afirma propiedades de grupos finitos de puntos y de conjuntos de puntos), se puede expresar mediante la identidad y la relación fundamental “dos puntos se encuentran a la misma distancia de un tercero”, además de la aplicación finita de los cinco principios mencionados.

Se pregunta después qué es lo que se quiere decir sobre la paradoja de Richard, considerando que juega un papel no menor en la discusión sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos[102], si se tiene en cuenta el punto de vista respecto de la geometría elemental y la posibilidad de definir cualquier relación entre puntos o conjuntos de puntos de forma explícita mediante una relación fundamental.

La paradoja de Richard trata en definitiva de que de lo que se puede hablar, se debe *definir con un número finito de palabras*, luego todo lo que puede ser objeto de nuestro pensamiento sólo puede ser numerable, sin embargo, Weyl observa aquí una dificultad evidente, pues el conjunto de los reales es no-numerable.

Relacionando esto con la teoría de conjuntos de Zermelo, la dificultad en concreto radica en que el concepto “definible” juega un papel fundamental y está expresado a su vez en los axiomas [“*der Begriff “definierbar” in die Axiome dieser Disziplin selbst hineinspielt*” (Weyl, 1910, 304)].

El axioma de separación o comprehensión [*Aussonderungsaxiom*] de Zermelo (1907, 263) afirma la existencia de un conjunto, si los elementos de un conjunto dado M, cumplen una cierta propiedad, la cual, a su vez, se da o no para aquellos elementos de forma definida. Se puede entonces decidir si un elemento pertenece al conjunto que define la propiedad. Weyl pretende sin embargo más precisión en la formulación del axioma.

En concreto escribe: “Sea *M* un conjunto cualquiera, sea *a* un objeto cualquiera y *A* una relación cualquiera definida entre dos objetos. Entonces, los elementos de *M* que están con *a*

[102] “Was wird man nun von dem hier eingenommenen Standpunkt aus zu der Richardschen Antinomie sagen wollen, die in der Diskussion über die Grundlagen der Mengenlehre eine nicht unbedeutende Rolle gespielt hat?”. [“¿Qué se quiere decir ahora desde el punto de vista aquí adoptado sobre la antinomia de Richard, la cual ha jugado un papel no menor en la discusión sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos?”] (Weyl, 1968, 300).

en la relación *A* forman un conjunto”[103]. Lo importante aquí es que Weyl se refiere a una relación definida referida a un elemento a, cosa que en la formulación de Zermelo no se explicita.

Lo que le lleva de nuevo a la paradoja de Richard, pues afirma que el problema reside en el hecho de que en la teoría axiomática de conjuntos, así como en lógica matemática, sólo se pueden tratar una cantidad numerable de conceptos relacionales, pero no así de objetos[104], ya que para la introducción de nuevos conjuntos no sólo se tiene en cuenta la forma de introducirlos a través del axioma sobre propiedades definidas de conjuntos que forman subconjuntos, sino también a través de la unión, intersección y potenciación.

Otro tema relevante en el artículo es lo que Weyl escribe a propósito de la intuición en matemáticas perfilando –creemos– la que será su posición en *El continuo*:

“¿Se puede decir […] que la matemática es la ciencia de ϵ y de aquellas relaciones que se pueden definir basadas en este concepto y mediante los principios mencionados? Tal vez se pueda, a través de una tal explicación, determinar de manera adecuada el contenido lógico de la matemática. Sin embargo, considero que el auténtico valor y significado del sistema conceptual de una matemática logizada surgido de este modo, reside en que sus conceptos, sin que la verdad de sus teoremas se vea menoscabada, se dejan construir de manera intuitiva, y creo que el espíritu humano no puede de ninguna otra manera sino a través del estudio de realidad dada alcanzar los conceptos matemáticos”[105].

---

[103] “Ist denn M irgend eine Menge, a irgend ein Ding, A eine definite Zweidingbeziehung, so bilden diejenigen Elemente x von M, welche zu a in der Beziehung A stehen, stets eine Menge” (Weyl, 1968, 304).

[104] Es interesante resaltar algo que escribe Weyl en una nota, y que tendrá que ver con lo que escribirá ocho años después en *El continuo*: “Namentlich bin ich überzeugt, daß eine Lösung des Continuumproblems (der Frage nach Mächtigkeit des Continuums) nicht möglich ist, ohne daß vorher die “Definitionsprinzipe” der Mengenlehre exakt formuliert werden; und auch dann nur, wenn Zermelos Axiomen die weitere Forderung hinzugefügt wird (die das gerade Gegenteil des Hilbert’schen Vollständigkeitsaxioms aussagt)): «Aus dem Bereich der Zermelo’schen Dinge läßt sich (unter Aufrechterhaltung der zwischen ihnen bestehenden Beziehung ε) auf keine Weise ein solcher Teilbereich ausscheiden, der für sich schon den sämtlichen Zermelos’schen Axiomen genügt»”. [“En particular, estoy convencido de que una solución al problema del continuo no es posible, sin que antes se formulen de forma exacta los principios de la teoría de conjuntos; y además, sólo si a los axiomas de Zermelo se le adjunta la siguiente exigencia (que es lo contrario de lo que afirma el axioma de completitud de Hilbert): «Del dominio de los objetos de Zermelo no se puede (con la salvedad hecha de la relación de pertenencia entre ellos) de ninguna manera excluir un subdominio, que de por sí satisface todos los axiomas de Zermelo»”] (Weyl, 1968, nota 4, 304).

[105] “Darf man sagen, […], Mathematik sei die Wissenschaft von ε und denjenigen Beziehungen, die sich auf Grund dieses Begriffes mittels der erwähnten Prinzipe definieren lassen? Vielleicht wird durch eine solche Erklärung die Mathematik ihrem logischen Gehalt nach in der Tat zutreffend bestimmt. Trotzdem erblicke ich den eigentlichen Wert und die eigentliche Bedeutung des so zustande kommenden Begriffssystems einer logisierten Mathematik doch darin, daß sich ihre Begriffe auch, ohne daß dabei die Wahrheit der auf sie bezüglichen Sätze Schaden leidet, anschauungsmäßig deuten lassen, und ich glaube, der menschliche Geist kann

En este párrafo observamos cómo la intuición y la realidad se ponen a un mismo nivel –quizá incluso a uno más primordial– que la lógica. Para Weyl esta idea será fundamental durante toda su vida intelectual, y es en *El continuo* donde comienza a desarrollarla de manera específica y donde da sus primeros frutos.

Antes de ver cómo la paradoja es tratada en *El continuo*, queremos primero llamar la atención sobre la relación de esta paradoja con la de Grelling-Nelson, que también se presenta en el libro.

En el primer capítulo, se hace mención a la paradoja de Russell [“*im wesentlich von Russell herrührende »Paradoxie«*” (Weyl, 1918, 2)] a propósito de la estructura de los juicios formados por sujeto, cópula y predicado [“*Subjekt-Kopula-Prädikat*-Struktur”]. Después, se introduce la clasificación de los adjetivos en autológicos y heterológicos. Los autológicos son aquellos que tienen la “propiedad” que el significado del adjetivo describe. Por ejemplo, la palabra ‘*kurz*’ que significa ‘corto’, es ella misma una palabra *corta*. Luego, se puede clasificar como autológica. Sin embargo, la palabra ‘*lang*’, ‘largo’, es heterológica, pues es corta[106]. Es decir, la propiedad ser heterológico se da, si el significado de la palabra (expresado por una propiedad) se puede aplicar a sí misma.

Si nos preguntamos si la palabra ‘heterológico’ es heterológica, llegamos a un sinsentido, según Weyl escolástica[107] de la peor especie [“*handelt es sich um Scholastik schlimmster Sorte”* (Weyl, 1918, 2)]. Esto es así, porque de hecho no se puede responder a la pregunta; si se intenta entramos en un bucle sin fin. “Heterológico” es heterólogica, si “heterológico” cumple que es heterológica... Si suponemos de partida que sí lo es, llegamos a una contradicción. Si “heterológico” es heterológica, entonces es autológica, al afirmar la propiedad *ser-heterológico*. Si es autológica, es, *sensu contrario*, heterológica.

La relación con la paradoja de Richard, se observa en el hecho de que ambas paradojas exhiben su complicación en la autorreferencia respecto de la categoría de objetos a las que se aplican propiedades.

auf keinem anderen Wege als durch Verarbeitung der gegebenen Wirklichkeit zu den mathematischen Begriffen aufsteigen” (Weyl, 1968, 304).

[106] Admitiendo cierta flexibilidad, se puede decir que palabras de cuatro letras en alemán son palabras cortas.

[107] Lo que interpretamos que Weyl quiere decir con la frase, es el hecho de valorar la escolástica como un juego erístico con intención más retórica que argumentativa.

En Grelling-Nelson tenemos problemas si aplicamos al adjetivo "heterológico" la propiedad *ser-heterológico* que se dice de palabras. En Richard, si aplicamos una propiedad que se dice de números naturales a números naturales.

Veamos ahora el análisis de la paradoja de Richard en *El continuo*.

Weyl indica que el núcleo fundamental de la paradoja descansa en que el 'proceso de creación' [*Erzeugungsprozess*] de los esquemas de juicio de las relaciones y propiedades derivadas de los principios de definición expuestos anteriormente en el libro se pueden ordenar en una sucesión numerable. Las propiedades que surgen se corresponden con conjuntos unidimensionales de elementos, y de ese modo se pueden ordenar todos los posibles conjuntos de naturales en una sucesión numerable. Por el contrario, la numerabilidad de todos los conjuntos de números naturales es refutada a partir de la demostración de Cantor.

En el dominio operacional que introduce Weyl no existe una relación $R(x,y)$[108] tal que para cada conjunto de números C_n, con $n \geq 1$, exista un número a de modo que $R(n,a)$ se corresponda con el conjunto mencionado (el conjunto de todos los n que se encuentran con a en la relación $R(n,a)$).

Una consecuencia de esto es el hecho de que: (1) el conjunto de reales weyliano es numerable, (2) no existe ninguna razón para afirmar[109] que todo conjunto infinito contiene al menos un subconjunto numerable.

Según nuestra tesis, Weyl pretende dar en *El continuo* una solución a la paradoja de Richard por varios motivos.

---

108 "[Z]u jeder (einer abgeleiteten Eigenschaft entsprechenden eindimensionalen) Zahlmenge existiert eine Zahl a so beschaffen, daß jene Zahlmenge mit derjenigen identisch ist, welche der Eigenschaft R(x a) entspricht (der Menge aller Zahlen x, die zu a in der Beziehung R(x a) stehen). Der Cantorsche Beweis dieses Satzes besteht einfach darin, daß man die der Eigenschaft -R(x x) entsprechende Zahlmenge betrachtet". ["Para todo conjunto de números (unidimensional que se corresponde con una propiedad derivada) existe un número a tal que este conjunto de números es idéntico al conjunto de números correspondiente a la propiedad R(x a) (el conjunto de todos los números x están en relación con a mediante R(x a)). La demostración de Cantor de este teorema consiste simplemente en considerar el conjunto de números correspondiente a la propiedad -R(x x)"] (Weyl, 1918, 19).

109 Es decir, no existe una relación constructiva como R la cual asegure que dado un conjunto infinito existe un subconjunto suyo numerable. Digamos que desde esta perspectiva el concepto general de infinitud y el de numerabilidad son independientes, y se necesita de axiomas como el de elección para demostrar el teorema, o considerar funciones no-constructivas. Weyl escribe: "Fassen wir den Begriff der Abzählbarkeit der Anweisung dieses Beispiels gemäß, so liegt natürlich gar kein Grund vor, anzunehmen, daß in jeder unendlichen Menge eine abzählbare Teilmenge enthalten sein müßte: eine Konsequenz, vor der ich durchaus nicht zurückschrecke". ["Si entendemos el concepto de numerabilidad según este ejemplo, entonces no hay, por supuesto, ninguna razón para suponer que en todo conjunto infinito debe haber un subconjunto numerable: una consecuencia que no me asusta en absoluto"] (Weyl, 1918, 19).

Weyl se sitúa ya en 1910 en una posición contraria al 'realismo naif' en matemáticas, y además, critica el método axiomático que tiene su paradigma en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo. Esto se fundamenta a nuestro juicio, en: a) la constatación del hecho de que la matemática se desarrolla y en cierto modo convive con conceptos *vagos* que conducen a paradojas; b) la creencia en que el método axiomático-conjuntista no es el adecuado para tratar el “ser auténtico” de la matemática.

El primer punto es de naturaleza lógica. Conceptos que conduzcan a la aparición de paradojas suponen contradicciones que revelan la inconsistencia de principios o nociones sobre las que se desarrolla el conocimiento matemático. Esto es algo que, de forma natural, se debe evitar si se pretende hacer matemáticas con rigor. Pero, además, la convivencia con paradojas supone también cambios en posiciones matemático-filosóficas admitidas antes de que éstas aparecieran.

El segundo punto tiene un carácter como indicamos de creencia. Aunque es evidente que una creencia puede estar bien fundamentada y tener asimismo una justificación filosófica que le pueda dar verosimilitud. Weyl, en la época a la que nos referimos de su desarrollo intelectual, adopta la posición predicativista enfrentado con el dilema lógico introducido por el principio del círculo vicioso, desde un punto de vista genuinamente filosófico –en particular fenomenológico–, fundamentado en la creencia de la centralidad de la categoría de los números naturales en matemáticas basada en la intuición –fundamentalmente como es entendida por Husserl[110]– y en lo que denomina[111] la experiencia de verdad [*Erlebnis der Wahrheit*].

Del motivo técnico y el filosófico se deriva, como no puede ser de otra manera, su tratamiento del problema del continuo. No solamente el posicionamiento respecto a la paradoja de Richard es una ‘consecuencia’, en el sentido de que si se parte de una u otra posición (desde la posición axiomático-realista o desde la que Weyl adopta en *El continuo*), se sigue una concepción diferente de continuo, sino que también se puede interpretar de forma metamatemática en el sentido de que la paradoja de Richard es central a la hora de ‘advertir los contornos’ de la matemática, algo que pasamos a analizar.

---

[110]Husserl es importante en la posición filosófica, y por ende matemática, de *El continuo*. Para un estudio profundo de esta influencia véase por ejemplo (Mancosu, 1997), (Mancosu, 2010), (Tieszen, 2000).

[111] Refiriéndose a las siguientes palabras de Dedekind en *¿Qué son y para qué sirven los números?*: “Lo que es demostrable no puede aceptarse en ciencia sin demostración”, Weyl escribe: “Diese (und nicht der Beweis) bleibt überall letzte Rechtsquelle der Erkenntnis, sie ist das „Erlebnis der Wahrheit”” (Weyl, 1918, 11, nota).

3.4 LA ESTRUCTURA DE LAS MATEMÁTICAS

Así titula Weyl el apéndice A de su libro de 1949 *Philosophy of mathematics and natural science*.

En dicho apéndice pretende estudiar dicha estructura basándose, entre otras cosas, en un análisis de la paradoja de Richard.

Veremos por tanto en este apartado cómo expone Weyl el procedimiento de diagonalización de Cantor analizando primero lo que escribe Cantor en su famoso artículo[112].

Para la demostración de que el cardinal de un intervalo real (α, β) es mayor que el de los naturales, Cantor considera primero dos caracteres distintos *m* y *w*. Después, el conjunto *M* de elementos *R* de la forma

$$R = (x_1, x_2, \ldots, x_n\ldots).$$

donde cada coordenada es *m* o *w*[113].

Al conjunto *M* corresponden por ejemplo los elementos:

$$R^1 = (m, m, m, m,\ldots)$$

$$R^2 = (w, w, w, w,\ldots)$$

$$R^3 = (m, w, m, w,\ldots)$$

Al asumir que las fracciones duales, esto es, los elementos *R*, pueden ser ordenadas en una secuencia R^1, R^2, R^3... tal que $R^m = r_1^m r_2^m r_3^m \ldots$ se obtiene una contradicción.

Si escribimos las fracciones duales una debajo de otra, se forma una matriz con la siguiente forma:

$$R^1 = (r_1^1, r_2^1, \ldots r_n^1 \ldots)$$

[112] Véase (Cantor, 1890-1891, 75-78).

[113] “Sind nämlich m und w irgend zwei einander ausschliessende Charaktere, so betrachten wir einen Inbegriff M von Elementen:

$$E = (x_1, x_2, \ldots x_\nu)$$

Welche von unendlich viele Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$ abhängen, wo jede dieser Coordinaten entweder m oder w ist. M sei die Gesamtheit aller Elemente E” (Cantor, 1890-1891, 76).

$$R^2 = (r_1^2, r_2^2, \ldots r_n^2 \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

$$R^m = (r_1^m, r_2^m, \ldots r_n^m \ldots)$$

Weyl coge el testigo de Cantor en este punto, aunque considera en vez de *m* y *w*, el 0 y el 1 en su análisis, y continúa diciendo que, si en la diagonal cambiamos el 0 o 1 por 1 o 0 según sea el caso, obtenemos una fracción dual Q, tal que no está en la previa ordenación de las R, pues Q está formada por los elementos de la diagonal transmutados.

Si se interpreta 0 y 1 como verdadero y falso [“*on interpreting 0, 1 as the two truth values true and false”* (Weyl, 1949, 223)], una secuencia como *R* resulta en un predicado *R(x)* el cual es verdadero si $x = n$, con $r_n = 0$, o falso si $r_n = 1$.

Para la matriz descrita más arriba se puede definir una relación *S(y, x)* de modo que para los números $x = n$, $y = m$ es verdadera si $r_n^m = 0$, y falsa si $r_n^m = 1$. El predicado $R^m(x)$ es equivalente a *S(m, x)* . La demostración de Cantor se basa en construir el predicado *–S(x, x)* (negación de la relación S). El predicado $R^k(x)$ coincide con S*(k, x)*, entonces para $k = x$, *S(x, x)* implica *–S(x, x)*, y a la inversa. Esto, como apunta Weyl, no es una paradoja, sino la prueba indirecta de la no-numerabilidad del continuo de las fracciones duales en un intervalo. Sin embargo, deviene en paradoja si sostenemos que un número real puede ser definido mediante un número finito de palabras.

Esto quiere decir que, si suponemos un procedimiento recursivo con el que sea posible definir predicados sobre números naturales, bajo la denominación de sistema Δ, donde se evite el uso irrestricto de cuantificadores, pero que, por tanto, se considere un principio de definición inductivo; o un formalismo M, en el cual sí se acepte el uso irrestricto de los cuantificadores, podemos siempre enumerar los predicados sobre números naturales (llamados por Weyl *x*-predicados).

Si se forma la relación binaria *S(y, x)* que afirma: ‘*x* tiene la propiedad número *y*’. Entonces, la paradoja es inevitable si se tiene que, (1) las proposiciones del sistema a considerar son decidibles, y (2) la relación *S* es ella misma construible en el sistema.

Dado que Weyl en *El continuo* parte de un sistema como Δ en el que sus proposiciones son decidibles, se concluye que *S* no es construible en el sistema.

El camino de Gödel es sin embargo el opuesto. El formalismo M es suficientemente flexible como para permitir la construcción de *S*, luego deben existir proposiciones indecidibles.

En el caso de Weyl, se *prohíbe* –digámoslo así[114]– la construcción de *S*, pues supondría que es posible cuantificar sobre conjuntos de naturales de forma irrestricta.

Hemos de decir algo respecto a esta prohibición. Como hemos indicado, Weyl habla de la construcción de *S* dentro del propio sistema. Pero, supone de forma errónea –como observa Feferman (1995, 265) y se analizará más abajo– que en *El continuo* su sistema de definiciones no permiten la construcción de una relación binaria de tipo *S*.

En (Feferman, 1995, 262) se indica que en el análisis de las nociones *definibilidad* y *denumerabilidad* del cual surge la paradoja de Richard, Weyl, mediante la definición de conjunto definible en su sistema, hace notar que la enumeración de la clase D de las propiedades (o conjuntos unidimensionales) se hace de forma *externa*, es decir, que no existe en D ningún conjunto que enumere a su vez a los elementos de D. Luego no es posible construir una relación como S.

Para Feferman "*existe un desplazamiento en el significado de 'definibilidad' en el curso de la paradoja*" (Feferman, 1995, 262). Además, replica que Weyl no confronta el hecho de que "*la enumeración de D debería ser aceptada como una legítima definición una vez que es aceptada D [...] Bajo esto se sitúa su decisión* [de Weyl] *de tratar sólo con conjuntos definibles de nivel 0 (primer nivel) para evitar los problemas de la ramificación*" (Feferman, 1998, 262).

La cuestión a dilucidar es si no se caería de hecho en un círculo vicioso, pues, la forma *interna* permitiría la cuantificación irrestricta sobre conjuntos.

En (Gaifman, 2006, 712) se hace una buena presentación de la paradoja de Richard que queremos exponer pues tiene relación con su concepto de '*naming systems*' que nos servirá para analizar puntos esenciales respecto del constructivismo y la axiomática que trataremos en el siguiente apartado.

Como sabemos, Richard argumenta que dado que nuestro lenguaje (el francés en su caso) está basado en un alfabeto finito, se puede definir una secuencia o lista cuyos miembros son todos

[114] Es lo que Weyl denomina "procedimiento restringido" ["*engeres Verfahren*"], según el cual el cuantificador existencial sólo puede referirse a objetos de la categoría fundamental [*Grundkategorie*]. De este modo, Weyl trabaja exclusivamente con objetos (relaciones y conjuntos) de primer nivel. Véase (Weyl, 1918, 21).

cadenas finitas de letras y espacios, la cual contiene la (sub)lista de todas las cadenas que definen números reales en (0,1).

Sea u_i, i = 1, 2 ..., el número definido por la de *i*-ésima definición, y sea $f_i(n)$ el *n*-ésimo miembro de la expresión decimal de u_i, i = 1, 2, ... (si hubiera dos representaciones elijamos aquella que es 0 de un cierto lugar en adelante). Podemos definir ahora un número, llamémosle u^*, cuya expresión decimal es

$$u^* = 0.g(1)g(2)g(3)...$$

y donde *g* se define como:

$$g(n) = f_n(n) + 1, \text{ si } f_n(n) < 8,$$

$$g(n) = 1, \text{ en otro caso}$$

u^* es diferente de todos los u_i (su expresión decimal no contiene 0 o 9, y difiere de todo u_i en su *i*-ésima cifra). Luego la descripción dada de u^* muestra que puede ser definido (en español en nuestro caso) con un número finito de palabras. Por tanto, u^* debe ser uno de los de la lista anterior. Es decir, uno de los u_i .

Si seguimos el procedimiento dado para definir *g*, y *g* está determinada por la *m*-ésima cadena de caracteres que forman una definición, resulta que *g(m)*, se define a partir de *g(m)*, que a su vez se define a partir de *g(m)*...etc, entrando en un bucle infinito a partir del cual es imposible determinar *g(m)*.

Luego, tal y como la paradoja es presentada se cae en un círculo vicioso.

Sin embargo, creemos que no es del todo exacto lo que dice a propósito de cómo Richard *justifica* la no existencia de la paradoja.

Escribe Gaifman (2006, 712): "*Richard's solution to his paradox, stated at the end of his paper, is that the ''definition'' of g is no definition, since it suffers from vicious circularity: it uses every definition in a sequence in which it already appears as one of the definitions*".

Sin embargo, lo que afirma Richard (1905, 541) es: "*Montrons que cette contradiction n'es qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arragements; il existera dans mon tableau. Mais, à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il* *y est question de l'ensemble E*[115]*, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement defini, et celui-ce ne l'est que par un nombre infini de mots. Il n'y donc pas contradiction*"[116].

Creemos que la solución de Richard pone más el acento en que las definiciones deben ser finitas, para ser consideradas como "auténticas" definiciones. El sentido de G depende de que E esté completamente definido. Y lo está, si es definible mediante un número infinito de palabras. Lo cual no tiene sentido desde un punto de vista lingüístico, y no es posible porque *no se ha agotado* el infinito. Lo que no es lo mismo que decir que no se puede definir la función *g* porque se definiría a partir de sí misma, no siendo posible por tanto *determinar g*.

Es decir, el modo como Gaifman trata la paradoja (así como creemos la trata Weyl) depende del hecho de que se consideran los números naturales como totalidad completamente dada. Sin embargo, parece que la solución de Richard pone el acento en la "potencialidad" de E, es decir, no se trata como totalidad completa, de ahí el sinsentido.

Como lo expone Feferman la cuestión es por tanto si el hecho de definir del modo en que lo hace Weyl excluye la posibilidad de la existencia de una relación S que devenga paradójica, o si se pone como condición su indefinibilidad. O más concretamente, y como escribe Weyl (1949, 224): la forma de *definir recursivamente* propuesta en *El continuo* tiene como *consecuencia* que no se pueda definir una relación como *S*.

Según Feferman, si se debe admitir la enumeración de D como definición admisible de D mismo, se podría siempre construir la relación *S*. Puesto que como indica Gaifman (2006, 712) podemos considerar la función f_x como la función nombrada por *x*: "*In any case, the function, f_x, which is correlated with x, is the one defined, or described, or determined, or computed by x—or, to adopt a simple term, the function that is named by x*".

De hecho, tal y como Feferman explica más adelante, Weyl cae en una cierta incoherencia al desarrollar su programa.

[115] E es el conjunto de variaciones con repetición de 27 letras tomadas de *n* en *n*, $n \in N$.

[116] "Demostremos que esta contradicción es sólo aparente. Volvamos a nuestras permutaciones. El grupo de letras G es una de estas permutaciones; existirá en mi tabla. Pero, en el lugar que ocupa, no tiene sentido. Aquí se trata del conjunto E, y éste aún no está definido. Así que tendré que tacharlo. El grupo G sólo tiene sentido si el conjunto E está totalmente definido, y éste sólo está definido por un número infinito de palabras. Así que no hay contradicción".

El problema es que al definir el *principio de iteración* se puede llegar a la conclusión de que la relación definida por Weyl (1918, 28)

$$R(x\,x' \mid X)$$

(donde x y x' son variables dependientes, y X independiente. X es un conjunto bidimensional, cuyos elementos pertenecen a la misma categoría que x y x'. Y donde a partir de R se puede definir la función $\Phi(X)$ cuyo valor es un conjunto de la misma categoría que X) se puede "diagonalizar" lo que supone que Weyl cae fuera del nivel de los números naturales donde pretendía desarrollar su programa predicativista.

Weyl define primeramente el principio de iteración de esta forma:

$$R(x\,x' \mid X) = R_1(x\,x' \mid X)$$

$$R_2(x\,x' \mid X) = R_1(x\,x' \mid \Phi(X)) \text{ (por sustitución),}$$

la función Φ que se define a partir de R_2 es $\Phi(\Phi(X)) = \Phi^2(X)$, luego

$$R_{n+1}(x\,x' \mid X) = R_n(x\,x' \mid \Phi(X))$$

Y la función $\Phi^{n+1}(X)$ es la que resulta de R_{n+1}.

Para Feferman (1995, 265) se debe asumir que de los principios expuestos por Weyl se puede obtener todas las funciones primitivas recursivas y las relaciones en ℕ. Ahora bien, si definimos

$$R_1(x\,x' \mid X) \;\; = \Phi^*(1, X) \qquad = \Phi(X)$$

$$R_{n+1}(x\,x' \mid X) = \Phi^*(n + 1, X) = \Phi^*(n, \Phi(X))$$

y se considera la función *jump* de Turing[117] definida tal que $\Phi(X) = X'$ se sigue[118] que toda relación

$$U(m, X) = (Q_1 k_1)\ldots(Q_n k_n)\, S(m, k_1 \ldots k_n, X)$$

[117] El operador (o función) *jump* de Turing intuitivamente asigna a cada problema de decisión P uno más difícil P', el cual no es decidible por una máquina oráculo con un oráculo para P. Dado que el teorema de Post relaciona las jerarquías aritméticas y los grados de complejidad que el operador *jump* establece, sabemos, entre otras cosas, que si una relación es aritmética en un conjunto es recursiva enumerable en él, y por tanto primitiva recursiva en la función que lo enumera.

[118] Véanse detalles en (Feferman, 1995, 265).

con Q_i cuantificador existencial o universal y S recursiva primitiva en X

es primitiva recursiva en $\Phi^n(X)$. Luego toda relación aritmética en X es recursiva primitiva en la función Φ^*.

Por tanto, la relación

$$R_{\Phi^*}(p|n, X)$$

$$\text{con } P = \{\ p : R_{\Phi^*}(p|n, X)\} = \Phi^*(n, X).$$

no es aritmética en X por diagonalización. En particular, si $X = \mathbb{N}$, obtenemos una relación definible aplicando el principio de iteración que no es aritmética[119], luego no definible a nivel 0, i.e., el de los naturales.

3.5 NAMING SYSTEM, *FUNCIONES DIAGONALES Y TEOREMA GENERAL DEL PUNTO FIJO*

Feferman propone un[120] sistema formal que tiene por objetivo "representar" las ideas desarrolladas por Weyl en *El continuo*.

Este sistema, sin embargo, como Gaifman expone en su artículo, es un sistema de una teoría formal altamente expresiva ["*highly expressive formal theories*"], como por ejemplo lo es la aritmética de Peano. Este tipo de sistemas se pueden estudiar gracias al concepto de '*naming systems'*, sistemas donde es posible definir una función que puede tomar como argumento a su *nombre*.

[119] Esto es así pues se puede demostrar que el conjunto de las funciones recursivas primitivas es un subconjunto propio numerable de las funciones recursivas totales. Luego, considérese la función $h(x) = g(x,x) + 1$, con x natural y $g(x,x)$ primitiva recursiva. Según esta definición, h es primitiva recursiva. Pero bajo esta suposición llegamos a una contradicción, pues de ser así, h tiene que estar en la lista numerable de funciones primitivas recursivas, luego $h(x_0) = g(x_0, x_0) = g(x_0, x_0) + 1$. Para más detalles véase (Rogers, 1967, 11).

[120] Feferman propone realmente tres sistemas formales K^α, K^β y W, con los que pretende formalizar lo descrito por Weyl, y que pueden ser vistos como "extensiones" dependiendo de cómo se interprete el desarrollo de la matemática propuesto en *El continuo*. Nosotros nos referimos aquí a W. La teoría K^α es de segundo orden, K^β es de tercer y W es un sistema de tipos finitos flexible donde pueden definirse objetos de cualquier orden finito. En W las variables individuales pueden recorrer un universo de números, funciones, conjuntos, etc., y además existen variables para tipos. En este sistema se puede desarrollar, v.gr., el análisis hasta la teoría de Lebesgue para conjuntos medibles e importantes resultados del análisis funcional. Queremos hacer notar que en K^α, K^β y W se acepta al continuo no-numerable. Véase (Feferman, 1995, 268-280).

La definición formal de *naming system* dada en (Gaifman, 2006, 717) es la siguiente:

Una estructura D = (D, *type*( ), { }) tal que:

D es un conjunto no vacío.

La función *type* asigna a cada elemento a de D su tipo: *type*(a). El tipo nos informa si a es un nombre (de una función), y si es el caso, de la aridad de la función. Un nombre de aridad n, o n-ario, es el que *nombra* una función de aridad n. Los tipos pueden ser construidos como tuplas: (0) –si no es un nombre; (1, n) –si es un nombre de aridad n.

{ } es una aplicación que asigna a cada nombre n-ario, a, una función $\{a\} : D_n \rightarrow D$.

Gaifman estipula, como parte de la definición, que al menos existe una función nombrada de aridad mayor que 0 y que lo siguiente se da:

Sustitución de nombres (SN): si f es una función n-aria nombrada, con $n > 0$, entonces para cada nombre a, $\lambda x_2 \ldots x_n f(a,x_2 \ldots x_n)$ es una función nombrada.

Permutación de variables (PV): si f es una función n-aria nombrada y π una permutación de $\{1,\ldots,n\}$ entonces $\lambda x_1 \ldots x_n f(a, x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)})$.

Veamos a continuación cómo Gaifman define las *funciones diagonales*.

Para $n > 0$ una n-función diagonal es una función que asigna a cada nombre n-ario a el nombre de $\lambda x_2 \ldots x_n \{a\}(a,x_2 \ldots x_n)$. Nótese que por (SN) la segunda función es una función nombrada, entonces dl_n satisface que para todo nombre n-ario a:

$$\{dl_n (a)\}(x_2 \ldots x_n) = \{a\}(a,x_2 \ldots x_n)$$

Como una función puede tener muchos nombres, pueden existir funciones diagonales que asignen diferentes valores al mismo a, los valores son nombres de la misma función. Pero, en razón de conveniencia, podemos hablar de *la* función n-diagonal dl_n.

El teorema general del punto fijo afirma entonces que:

Si F es una función $n+1$-aria nombrada, $n \leq 0$, y la composición $F(dl_{n+1} (x_0), x_1, \ldots ,x_n)$ es nombrada, entonces existe un nombre n-ario e tal que:

$$\{e\}(x_1, \ldots, x_n) = F(e, x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

Su prueba es: Sea c un nombre de $F(dl_n (x_0), x_1, \ldots ,x_n)$ y sea $e = dl_{n+1} (c)$. Entonces, para $\vec{x}$ = $x_1, \ldots x_n$:

$$\{e\}(\vec{x}) = \{dl_{n+1}(c)\}(\vec{x}) = \{c\}(c, \vec{x}) = F(dl_n(c), \vec{x}) = F(e,\vec{x})$$

Para $n = 0$, la ecuación (1) toma la forma:

$\{e\} = F(e)$, donde $\{e\}$ es un objeto y e su nombre.

Debe notarse que la condición de que F sea nombrada no es necesaria. También hay que notar que las funciones nombradas son totales. Esto supone que en el caso de funciones parciales recursivas[121] se completan añadiendo un valor adicional [*gap-value*] que las haga totales, por ejemplo, la contradicción, $\perp$, en este caso $h(\perp) = \perp$. El precio a pagar será que no puede existir una función h nombrada tal que $h(a) \neq a$, para todo $a \in D$.

Lo interesante en el artículo de Gaifman es que tanto para sistemas formales aritméticos donde se pueda aplicar el teorema Gödel-Carnap[122], así como para sistemas recursivos donde se pueda aplicar el teorema de recursión (de Kleene)[123], se puede aplicar asimismo el teorema general del punto fijo.

Y, por consiguiente, a la relación recursiva definida por Weyl $R_{\Phi^*}(p|n, X) = \Phi^*(n, X)$.

Luego, la idea de Weyl de partir de la intuición de los naturales y de un proceso sistematizado de definiciones recursivas nos lleva (si consideramos incluso la propuesta de Feferman) a que se 'cuelen' funciones del tipo de las que originan la paradoja de Richard.

Por tanto, la pregunta que surge es: ¿ha conseguido Weyl deshacerse de la paradoja y de sus (nocivos) efectos?

Creemos que no, pues en el *principio de iteración* definido descansa la raíz del problema. Luego nos debemos cuestionar, si tiene sentido (para Weyl) o si es posible, definir funciones

---

[121] Este tipo de funciones se define como la clase de funciones recursivas primitivas (que comprende la función cero, sucesor y proyección, y es cerrada bajo los operadores composición y recursión primitiva) cerrada bajo el operador de minimización no-acotado.

[122] El teorema afirma lo siguiente: Sea $\boldsymbol{T}$ una teoría y, para toda fórmula bien formada φ, sea$\lceil\varphi\rceil$ el término que sirve como su nombre. Entonces para cualquier fórmula bien formada α(v) (con una variable libre), existe una sentencia β tal que:

$$\boldsymbol{T} \vdash \beta \leftrightarrow \alpha(\lceil\beta\rceil)$$

β es llamado a veces el punto fijo de α(v). Todo lo que se necesita para el teorema del punto fijo es que la función diagonal, la que hace corresponder a cada φ(v) el elemento $\varphi(\lceil\varphi(\text{v})\rceil)$, sea representable en $\boldsymbol{T}$. Para su demostración véase (Gaifman, 2006, 710).

[123] El teorema afirma lo siguiente: Dada una función n+1-aria recursiva $F(z, x_1, \ldots, x_n)$, existe un número e, tal que e es el nombre de la función $\lambda x_1, \ldots, x_n F(e, x_1, \ldots, x_n)$. Por tanto, si definimos la función nombrada por e como $\{e\}$, el teorema afirma la existencia de un punto fijo: existe e, tal que para todo $x_1, \ldots, x_n$, se tiene$\{e\}(x_1, \ldots, x_n) = F(e, x_1, \ldots, x_n)$. Para su demostración véase (Gaifman, 2006, 716).

recursivas parciales dentro del marco de la idea rectora del programa desarrollado en *El continuo*.

Este tipo de funciones tiene una relación con las definiciones impredicativas como el propio Weyl observa, al restringir la existencia del conjunto definido en la sección que trata la paradoja de Richard. Recordemos que este conjunto se define a partir de una relación, la cual se puede definir como una función *à la Richard* –como se muestra en (Weyl, 1949, 223).

El problema lo encontramos en que las funciones recursivas parciales no recogen la generalidad que Weyl pretende para su sistema. Weyl está al tanto, por ejemplo, de que la continuidad de una función no es en general una propiedad *extensionalmente definida* (Weyl, 1918, 65). Una función recursiva parcial no puede recoger la idea general de función continua en *a* real, como se expone en *El continuo*, por el mero hecho de que no está asegurado que el real *a* esté *siempre* definido[124].

Por tanto, ¿hasta qué punto la apreciación de Weyl respecto a las dos formas de encarar el problema de la fundamentación de la matemática es correcta? Según hemos visto, sistemas formales que son suficientemente expresivos admiten teoremas de punto fijo, lo que lleva a las restricciones gödelianas conocidas[125]. La propuesta de Weyl de desarrollar la matemática a partir de la intuición de los números naturales vía iteración resulta en aceptar argumentos de diagonalización cantorianos, y como Gaifman muestra, argumentos a los que se puede aplicar asimismo su teorema general del punto fijo, haciendo patentes fenómenos de indecidibilidad.

Lo cual nos lleva a establecer la hipótesis de que para desarrollar la matemática hasta, como postula Feferman, un punto donde sea aplicable a la ciencia ["*I conjecture* […] *that all scientifically applicable mathematics can be formalized in (a subtheory of) W*" (Feferman, 1995, 281)] sin considerar sistemas que no admitan argumentos de diagonalización (aplicados

[124] "Die Stetigkeit einer Funktion, sahen wir, ist eine *transfinite* Eigenschaft; d. h. die Frage, ob eine mit Hilfe unserer Prinzipien definierte Funktion stetig sei oder nicht, erfordert zu ihrer Entscheidung nicht nur die volle Überblickung der natürlichen Zahlen, sondern ebenso die volle Überblickung derjenigen *Mengen* (genauer: derjenigen vierdimensionalen Mengen natürlicher Zahlen), welche durch kombinierte Anwendung jener Prinzipien in beliebiger Komplikation entspringen". ["Vimos que la continuidad de una función, es una propiedad *transfinita*; i.e., la pregunta, de si con ayuda de nuestros principios se puede decidir o no si una función es continua, requiere para su decisión no sólo una visión total de los números naturales, sino también la completa visión total de aquellos conjuntos (más precisamente: los conjuntos cuatridimensionales de naturales) que se obtienen a partir de la combinación del uso de los principios de forma tan complicada como se desee"] (Weyl, 1918, 65-66).

[125] Teoremas de incompletitud y consistencia.

a ℕ), no es posible sin pagar el precio de "amputar" la matemática hasta dejarla en lo que pueda ser desarrollable mediante funciones recursivas parciales.

Creemos además que el sistema expuesto en *El continuo*, así como sistemas expresivamente similares a la aritmética de Peano (referidos en (Gaifman, 2006)), tienen a la paradoja de Richard como "tope", en el sentido de que la incompletitud y lo *transfinito* (como es entendido por Weyl) es el límite alcanzado por Richard en su paradoja. Digamos que ambos conceptos se *encuentran* en la paradoja de Richard.

Como escribe Feferman (1998, 268), es cierto que desde un punto de vista predicativista *amplio*[126] esto no supone ningún problema, y partes del análisis suficientemente extensas pueden ser desarrolladas. Lo que nos preguntamos es hasta qué punto tiene filosóficamente sentido, si se admite de principio el continuo real.

3.6 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos analizado la paradoja de Richard a la hora de adoptar una posición axiomática o constructiva respecto de las matemáticas. La forma de interpretar y tratar la paradoja es para ello esencial.

En *El continuo* se considera la imposibilidad de admitir relaciones que puedan dar lugar a tal paradoja, sin embargo, se ha visto asimismo que Feferman encuentra un problema en la forma en que Weyl define el *principio de iteración* lo cual hace *de facto* posible una tal definición.

Además, hemos visto que Gaifman introduce el concepto de *naming system* y el teorema general del punto fijo, que se puede aplicar tanto a sistemas formales como el sistema W de Feferman, como a sistemas constructivos como el de *El continuo*. Esto supone sin embargo que, tanto por una vía como por la otra, no es posible tratar el análisis sin suponer dado el continuo como hace el análisis clásico.

Luego, partir de la asunción filosófica de que la categoría de números naturales es dada intuitivamente e intentar construir a partir de ella la aritmética, el análisis y la geometría como es presentada en *El continuo*, no es posible si se quiere hacer matemáticas considerando funciones recursivas totales.

[126] A lo que se refiere Feferman es a que en el sistema formal W, no se dan definiciones impredicativas.

Si bien es cierto que en el sistema W introducido por Feferman, que pretende formalizar el sistema de Weyl, puede desarrollarse gran parte de la matemática moderna de forma predicativista, creemos no obstante que no recoge el espíritu de *El continuo* respecto de cómo debe hacerse matemáticas.

Capítulo 4

¿PREDICATIVISTA *AVANT LA LETTRE*?: ANÁLISIS FUNDAMENTAL DE LA FILOSOFÍA MATEMÁTICA DE OTTO HÖLDER EN SU RELACIÓN CON EL PREDICATIVISMO WEYLIANO

4.1 INTRODUCCIÓN

Problemas cómo la constructibilidad en matemáticas, la concepción del continuo a partir de esta posición, sus "efectos" en la teoría de conjuntos o la naturaleza de axiomas aritméticos y geométricos, son temas recurrentes en la filosofía de la matemática. Partiendo de una (¿supuesta?) crisis en los fundamentos del análisis nos proponemos estudiar aspectos de la epistemología matemática de Otto Hölder en relación con el punto de vista predicativista de Hermann Weyl.

La figura de Otto Hölder ha sido poco estudiada[127] en general, en su dimensión como filosofo de la matemática. Estudiante de matemáticas en Berlín y Tübingen con Kronecker, Kummer y Weierstrass, tuvo como director de tesis al matemático empirista Du Bois-Reymond. Fue además profesor de la universidad de Leipzig y se interesó por la filosofía matemática 'crítica' en obras como: *Anschauung und Denken in der Geometrie*, *Die Arithmetik in strenger Begründung* y *Die matematische Methode*[128], libro del que trataremos especialmente en este capítulo.

Pretendemos entonces: 1) explicar puntos fundamentales de la epistemología matemática de Otto Hölder; 2) establecer de acuerdo con ella su visión de la idea de continuo, además de otras ideas fundamentales en paralelo con las del Weyl predicativista; 3) establecer nuestro punto de vista crítico respecto de 1) y 2).

[127] En (Radu, 2003, 341–377) podemos encontrar un estudio, al menos hasta cierto punto, suficientemente pormenorizado de ideas fundamentales de Otto Hölder respecto de su filosofía de la matemática.

[128] Su súbtítulo reza: "Logisch erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiet der Mathematik, Mechanik und Physik". ["Investigaciones lógico-epistemológicas en el área de la matemática, mecánica y física"].

4.2 Aspectos epistemológicos fundamentales

Como dijimos, comenzaremos considerando puntos fundamentales de la epistemología matemática de Hölder. Nos referiremos básicamente a la obra *Die mathematische Methode*, libro donde expone ampliamente sus ideas sobre la matemática. En este extenso libro[129] Hölder trata no sólo de matemática, sino que se adentra además en la física, en la lógica y en la filosofía. Para analizar el punto segundo de nuestros objetivos, estudiaremos primero varios aspectos básicos de la epistemología matemática de Hölder. Queda sin embargo por hacer un análisis más profundo de sus ideas filosóficas respecto a la matemática desarrolladas en sus obras completas, pero para los propósitos de este capítulo creemos que basta con poner de relieve lo siguiente:

Noción de concepto: dos son los géneros de conceptos básicos: empíricos generales y los que surgen del entendimiento. Los primeros provienen de la experiencia y se les aplica un proceso abstractivo, i.e., recoger lo común de los fenómenos[130] [*Erscheinungen*] o quitar lo que diferencia a los fenómenos entre sí. Hölder afirma que lo *real* debe ser por tanto, "lo común" de fenómenos particulares [*Einzelerscheinungen*], en la medida en que *aquello,* aparece de la misma forma. Es decir, que en cierto modo obedecen a una ley general ["*einem gemeinsamen Gesetz gehorchen*" (Hölder, 1924, 253)] del aparecer. Es importante en este punto señalar que para Hölder los conceptos fundamentales [*Grundbegriffe*] de la geometría son empíricos, en oposición a la concepción kantiana –que criticará– de que éstos provienen de la intuición pura.

Entre los segundos encontramos los conceptos *sintéticos,* que se corresponden con prácticas (consideradas de modo amplio) de ordenación sucesiva [*Reihenordnung*] y asignación [*Zuordnung*]. Se engloban aquí, por ejemplo, conceptos como el general de número entero y sus operaciones. Además de éstos, están los conceptos sintéticos que se forman a partir de otros provenientes de la experiencia, v.gr., con ayuda de conceptos geométricos y de sus axiomas, o con ayuda de conceptos mecánicos o físicos. La idea de conceptos matemáticos sintéticos y puramente sintéticos –"conceptos que dependen de nuestro raciocinio [*Verständigkeit*] (Hölder, 1924, 254)" – y la construcción de nuevos conceptos a partir de los

[129] Por ahora no existe más que en su versión alemana.

[130] Para Hölder no existe, sin embargo, nada que sea escindible de los fenómenos mismos, sino que el fenómeno es una unidad. Véase (Hölder, 1924, 254).

anteriores y de sus relaciones, le lleva a concebir una *jerarquía constructiva* de conceptos matemáticos.

Representación y designación: la transición de la cosa al concepto es la *representación* [*Darstellung*] de la cosa a través del concepto, y la transición del concepto a la cosa, es la *designación* [*Deutung*] que hace el concepto de aquélla. Hölder aplica a nociones matemáticas estas dos ideas donde *Deutung* es la subsunción de casos particulares en una regla o concepto general. Y *Darstellung* es la representación del proceso de computación (general), que se representa en una fórmula como su "imagen simplificada" [*vereinfachte Abbildung* (Hölder, 1924, 304)].

Aritmética y geometría: la aritmética no es de "naturaleza" axiomática, aunque la geometría sí lo es. La aritmética es *a priori* y la geometría *a posteriori*. Los conceptos geométricos se fundamentan (básicamente) en la experiencia. Sin embargo, los aritméticos, como por ejemplo el concepto de número, el de adición o el de multiplicación (de los cuales el álgebra hace uso) pueden ser "demostrados". Sólo cuando el procedimiento formal del álgebra se separa del significado de los signos, puede éste ser equiparado con la deducción geométrica (Hölder, 1924, 281), en la cual, sus conceptos no se justifican. Los axiomas geométricos contienen "hechos existenciales" [*Existentialtatsachen*] que posibilitan que cadenas deductivas se extiendan al introducirse en una "deducción principal". Lo cual es análogo a lo que ocurre en la demostración aritmética, en la que el ámbito de lo existencialmente establecido, como pueda ser, el "número", juega un papel análogo en la demostración de sus teoremas. No obstante, estas consideraciones existenciales no proceden de un número finito de elementos susceptibles de aparecer en cadenas de pensamientos [*Gedankenketten*]. Luego, las fórmulas generales de la aritmética (y del álgebra) son demostrables no por el hecho de que se puedan establecer cadenas de demostración finitas, sino por el procedimiento de construcción sintética de nuevos conceptos y de sus relaciones.

Aspectos lógicos: Hölder divide en tres el cálculo con símbolos: 1) el cálculo de conceptos genéricos [*Gattungsbegriffe*], 2) el cálculo de juicios y 3) el cálculo de relaciones. El primero se refiere al cálculo booleano, y es el cálculo en el cual la silogística clásica se fundamenta. El segundo considera Hölder, que es el que tiene menos sentido [*am wenigsten bedeutungsvoll* (Hölder, 1924, 275)] para la matemática. El tercero, el cálculo de relaciones (lo que hoy día se considera en el estudio de estructuras y categorías), es sin embargo el apropiado para tratarla.

Hölder argumenta contra el cálculo de predicados de la siguiente forma: lo que resulta "sospechoso" [*verdächtig*] es que para que dos afirmaciones sean válidas a la vez se introduzca un nuevo símbolo unido a una nueva regla. Si consideramos que debe ser analizada la veracidad de un gran número de proposiciones, se debería aplicar la regla dada para ese símbolo *una vez y después otra vez*, y así sucesivamente. Pero esto no lo podría hacer aquél que no pretendiera utilizar para ello la conjunción "*y*", y el que lo consiguiera, podría realmente deshacerse del nuevo símbolo introducido junto con la regla. De lo que se concluye que, elegidos ciertos axiomas, ningún cálculo deductivo de predicados podrá proveer del conjunto de todas las proposiciones demostrables de un dominio. Lo que se puede interpretar como una aproximación intuitiva al primer teorema de incompletitud de Gödel.

En una nota alaba a Brouwer, y termina diciendo que el formalismo como fundamento de la matemática debe ser rechazado (Hölder, 1924, n. 3, 277). Sin embargo, para él, la demostración indirecta es un método aceptable en matemáticas[131], lo que lo separa del intuicionismo brouweriano. Aunque, lo difícil es establecer cómo y por qué sucede en matemáticas que se evita una contradicción aplicando reglas lógicas, "simplemente" gracias a la regla que asegura en todo caso la *identidad* del proceso deductivo. La lógica presupone ambas cosas. En este sentido es como se puede afirmar que el pensamiento lógico-matemático se basa en la no-contradicción y en la identidad. Ser capaz de reconocer un principio o "meta-regla" en esto es algo que a Hölder (1924, 281) se le escapa, como él mismo afirma.

Teoría de conjuntos: La teoría de conjuntos como la expone Zermelo, aunque sea una teoría de la que admite su valor, y el trabajo realizado para sortear paradojas por medio de una formulación más precisa de los axiomas propuestos por Zermelo, se supone de manera (bastante) general que los conjuntos que son problemáticos por conducir a paradojas, –a pesar de que la mayoría de los conjuntos infinitos que normalmente son de uso en matemáticas sean tratables mediante los axiomas– son excluidos mediante la propia elección de aquéllos. Además, si para los axiomas elegidos se pudiera demostrar su consistencia, su significado para los conjuntos mismos sería todavía "cuestionable", pues la fundamentación axiomática del concepto de conjunto, que no constituye el *objeto*, sino la *herramienta* de las consideraciones matemáticas (Hölder, 1924, 555), no tendría suficiente substrato existencial, como sucede en geometría.

[131] Véase por ejemplo (Hölder, 1924, 266 y ss.) y (Hölder, 1899/1968, nota 61, 63).

La sucesión como objeto del pensamiento y forma del proceso del pensar: La forma de demostración a partir de la inducción matemática es 'lo' característico de la matemática, afirma Hölder mencionando a Poicaré, y su fundamentación ha de considerarse un axioma. De este modo, el concepto de sucesión no se deja reducir a otro primigenio, pues en la forma del operar esta reducción se presupone ya el concepto mismo de sucesión. Por tanto, para Hölder, la sucesión es, según la forma de proceder del pensamiento, un concepto que no puede ser ulteriormente fundamentado ["*nicht weiter begründbarer Begriff*" (Hölder, 1924, 349)].

El carácter a posteriori de la geometría: Hölder critica a Kant la idea de la subjetividad del espacio. Para él, prácticas como la ordenación [*Ordnung*] o la asignación [*Zuordnung*] son fundamentales a la hora de analizar "objetos empíricos" (Hölder, 1924, 387). Por ejemplo, los conceptos 'derecha' e 'izquierda' no son definidos de modo sintético, sino que como los conceptos fundamentales de la geometría son abstraídos gracias a un *hecho empírico*. Luego no es cierto, como Kant afirma, que no se puedan encontrar "diferencias internas, que un entendimiento cualquiera podría pensar" ["*innere Unterschiede, die irgendein Verstand denken könnte*" (Hölder, 1924, 386)] a la hora de tratar la imagen especular de, por ejemplo, la mano izquierda, dado que en las definiciones de simetría y congruencia de figuras la ordenación y la asignación juegan un papel fundamental como experiencias, no se puede *demostrar* que la estructura del espacio [*Raumordnung*] sea *a priori* y una intuición pura. Sin embargo, la asunción kantiana no es refutable de manera absoluta. Para Hölder basta sin embargo con que sea superflua [*überflüssig*] para rechazarla.

El continuo como forma primordial: como sucede con el concepto de sucesión (en particular la de los números naturales) el continuo es una "forma primordial" [*Urform*] del pensamiento matemático. Lo cual supone que no es una abstracción sin más de la geometría, y que se debe hablar de "elementos" de un continuo que no son necesariamente puntos de una línea. Dados dos elementos de un continuo se puede describir una relación entre ellos, la de ser uno el antecedente del otro. Esta relación tampoco se debe entender de modo temporal, sino como una relación abstracta anti-simétrica. Hölder da en concreto seis axiomas que describen al continuo, y afirma que no cree se pueda demostrar de forma 'puramente lógica' [*rein logisch*] que los cinco axiomas junto con el axioma de continuidad de Dedekind[132] formen un sistema

[132] Elegido un punto arbitrario de la recta, se pueden definir dos clases, tal que una se corresponda con los puntos a la izquierda del punto en cuestión, y la otra, con los puntos a su derecha. Hölder formula así el axioma: "[P]ara cualquier partición (de los puntos de una recta) en dos clases […], o existe un punto que está situado a la derecha de todos los puntos de la primera clase, o existe un punto que está situado a la izquierda de los puntos de la segunda clase" (Hölder, 1924, 88).

consistente. No obstante, afirma que la idea de continuo nos es dada como una intuición o, al menos, tiene un origen intuitivo. Luego, aunque el continuo no pueda ser "generado" por el pensamiento de forma "sucesiva", sí llega a ser un objeto del pensamiento ["*Gegenstand des Denkens werden*" (Hölder, 1924, 351)].

4.3 El problema del continuo

Antes de pasar a un detallado análisis de la presencia de Weyl en *Die mathematische Methode*, queremos mostrar una diferencia importante (decisiva a la hora de clasificar el pensamiento de Hölder) entre Weyl y Hölder a propósito de las ideas desarrolladas por Weyl en *El continuo* y en los artículos «Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik» [«Sobre la nueva crisis en los fundamentos de la matemática»] y «Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik» [«La actual situación epistemológica en matemáticas»].

Como sabemos, el problema es el siguiente: Weyl introdujo en *El continuo* la idea de que el análisis clásico contiene un círculo vicioso en la definición de supremo. Para Weyl se hace necesaria, por tanto, en esta definición (para que sea considerada correcta según las asunciones predicativistas), una distinción de *niveles* en los números reales. Sin embargo, esta idea –tomada de Russell, como sabemos–, no es suficiente debido a que es difícil tratar con un análisis para cada (posible) nivel de reales, y el teorema de reducibilidad russelliano no convence a Weyl. Por tanto, su solución pasa por considerar los naturales como categoría básica y admitir sólo el primer nivel para el análisis. Como consecuencia, no es posible cuantificar sobre conjuntos de conjuntos de naturales. Lo que tiene como consecuencia que importantes teoremas del análisis clásico deban ser reformulados predicativamente[133].

La tesis fundamental de *El continuo* es que entre el continuo del análisis clásico y el intuitivo existe una cesura insalvable. Para el último no se concede la existencia de puntos disociables de lo que llama: "fluido" [*Ablauf/Brei*] continuo. Esta caracterización es una abstracción que lleva al fin a la aparición del círculo vicioso mencionado, de no "existir" esta cesura; dado que el análisis asume la existencia de la totalidad de números reales (o puntos), lo que posibilita *definir* (correctamente) otros números reales como por ejemplo el supremo. Es lo que denomina Weyl, la concepción atomista del continuo, asumida en el análisis.

[133] Véase (Weyl, 1918, 58-59).

La creencia en esta inadecuación llevada a sus últimos términos hará que Weyl se abra a la propuesta intuicionista de Brouwer. En el artículo «Sobre la nueva crisis…» explica como el intuicionismo es la vía más propicia a la hora de tratar el problema de los dos tipos de continuo. La idea es que un número real se describe como algo "inexacto", una idea límite [*Grenzidee*], básicamente como una sucesión de intervalos encajados. Las funciones continuas se definen como una *ley*, de modo que, al añadir un miembro a la secuencia de números naturales desarrollada a partir de un acto de elección libre, se determina un número o nada. Además, lo que sucede en el *k*-ésimo paso no depende sólo del resultado de la elección hecha en *k*-ésimo lugar, sino de toda la secuencia de argumentos en ese momento del desarrollo, luego su existencia es condicionada.

El continuo matemático, en la concepción inticionista que describe Weyl en el artículo, es algo que se desarrolla internamente *in infinitum* [*ein nach innen hinein ins Unendliche Werdendes* (Weyl, 1921, 73)]. Pero, como dice Weyl, en la realidad dada intuitivamente esto no ocurre, pues el proceso se para en un cierto punto: lo que es dado, finalmente, *es*, y no es un *llegar-a-ser* perpetuo. Esto conduce a la inseparabilidad (o colapso) entre el ser y el llegar-a-ser. No obstante, para Weyl no es acertado considerar al continuo como un "ser terminado" [*ein Fertig-Seiendes*][134].

A este respecto, creeemos que, siguiendo la idea husserliana de retención y protención[135], Weyl observa que el presente no está dado de forma "finita" y determinada, sino que se sigue desarrollando internamente y desplegándose en el futuro ["*sondern selbst noch nach innen hinein wird, indem es sich in der Zukunft entfaltet*"(Weyl, 1921, 73)]. Por tanto, es "al final de los tiempos" ["at the «end of all times»" (Mancosu, 1997, 111)] que la realidad se determina a sí misma de forma exacta[136].

Dejando a un lado estas disquisiciones metafísicas, Weyl critica acerbamente en ambos artículos la concepción atomista del continuo. Afirma que un concepto que sea de "contenido definido" [*inhalts-definit* (Mancosu, 1997, 131)], en el sentido de no ambiguo, no implica que

[134] "It is, however, in any case nonsense, to regard the continuum as a finished being [*ein Fertig-Seiendes*]" (Mancosu, 1997, 111).

[135] Véase (Tieszen, 2000, 274-301) y (Van Atten, Van Dalen, Tieszen, 2001, 203-226).

[136] Aquí observamos una discrepancia, y es algo bastante curioso el observar que entre la relalidad intutivamente dada, percibida comúnmente, y la primacía que da Weyl al continuo matemático como la descripción "verdadera" de la realidad, existe una diferencia no explicada. Para Weyl, –en su análisis intuicionista del continuo– es el continuo matemático el que da la clave para entender la realidad del tiempo. Véase (Mancosu, 1997, 111 y ss.).

sea “extensionalmente definido” [*umfangs-definit*]. El concepto ‘propiedad-de-números-naturales’ es un ejemplo de ello[137]. Responder a la pregunta de si un concepto *b* es extensionalmente definido significa que no sólo la pregunta: *¿Tiene x la propiedad A?* tiene un sentido preciso para un objeto *x* que cae bajo el dominio de *b,* sino que también la pregunta existencial: *¿existe un objeto en el dominio de b que tiene la propiedad A?* tiene sentido.

Veamos cómo describe el círculo vicioso que se encuentra en la definición de supremo. La construcción del supremo de un conjunto arbitrario de reales lo realiza el matemático clásico de la siguiente forma: el supremo en cuestión es un real, dado por una propiedad E_A de números racionales, la cual se especifica al modo del siguiente esquema D: se da de un racional *x* si y sólo si existe una propiedad E del tipo *A* que posee *x* (si existe un real E en el conjunto *A* y *x* es menor que E[138]).

Aunque esta definición –si ha de considerarse significativa– no sólo se basa en el hecho de que ‘propiedad de números racionales’ es por sí mismo un concepto claro y no ambiguo, sino también en el hecho de que la totalidad de *todas las posibles* propiedades está determinada y delimitada. Esto es así porque suponemos que la pregunta: *¿existe una propiedad E de cierta naturaleza?*, tiene sentido. Es decir, es una respuesta a la que se puede responder con un *sí* o un *no*. Pero este no es el caso en lo que se refiere al supremo. Pues si suponemos que podemos formar un dominio de propiedades de números racionales de manera determinada y delimitada (que Weyl denomina *k*-propiedades (Mancosu, 1997, 88)), tiene sentido preguntar si para el racional *x* existe una *k*-propiedad del tipo A. En caso de que sea así atribúyase a *x* la propiedad E_A. Weyl afirma que está claro que la propiedad E_A no es una de las *k*-propiedades anteriores, pues su definición se basa en la *totalidad* de las *k*-propiedades, luego se encuentra fuera del dominio de aquéllas. Lo cual indica que el concepto ‘propiedad de números racionales’ no es extensionalmente definido y que por tanto la definición clásica de supremo contiene un círculo vicioso.

Partiendo de una categoría básica, como la de los naturales, se pueden definir de manera lógico-constructiva, mediante los cuantificadores ‘existe’ y ‘para todo’, propiedades para estos elementos. Propiedades de un nivel superior aparecen si se aplican a su vez los cuantificadores, siguiendo el esquema D, a propiedades de un nivel inferior. Si se suprimieran

[137] Véase el capítulo primero de este trabajo para un análisis exhaustivo.

[138] Existe en (Mancosu, 1997, 88) un error en la traducción. Mancosu escribe:“If there is a real number E in the set A that lies below *x*”. I.e., E es menor que *x*. En realidad, debe ser al contrario.

estos niveles, se caería en un círculo vicioso como ocurre (v. supra) con la definición clásica de supremo.

Queremos destacar que para Weyl el sistema de números reales construido en según los principios lógicos expuestos en su libro, es numerable.

Como vimos en el primer capítulo, Hölder opone a la crítica de Weyl lo siguiente: primero supone un conjunto infinito de reales *A*:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \qquad (2)$$

dado por una ley [*Gesetz*], recordando que Weyl y él están de acuerdo en que sólo es posible hacerlo de este modo[139]. Después, considera una nueva totalidad de racionales a la cual pertenece un número *x* si y sólo si *x* es un número inferior[140] en *cualquiera* de las cortaduras del conjunto. No existe por tanto *el mayor* número *x* así considerado, y estos números representan los números inferiores de una nueva cortadura. La objeción de Weyl –escribe Hölder– es que el número *x* pertenece a la nueva cortadura si y sólo si entre el conjunto de cortaduras dado *existe* una en la cual *x* es un número inferior (o, que existe una propiedad de tipo *A* que posee el número *x*). Hölder indica sin embargo que no es una propiedad *cualquiera*, sino una propiedad del conjunto *A* especificado *por una ley*. Se trata de ser un número inferior en una de esas cortaduras previamente dadas. Sólo se afirma que para aquéllas existe un supremo.

Si se dijera que en el dominio de los reales existe un número que posee respecto del conjunto *A* la propiedad de ser un supremo, entonces la objeción de Weyl sería apropiada pues el cuantificador 'existe' se aplicaría una totalidad no obtenida constructivamente. Pero este no es el caso.

El único "problema" –observa Hölder– es que la forma en que se ha obtenido el supremo no puede describirse con un algoritmo general que se haya explicitado previamente.

En una nota hace esta consideración fundamental: "*En la concepción, que Weyl ha resaltado con vehemencia, de que el continuo no puede ser construido aritméticamente, i.e., que no podemos llegar a la totalidad de los reales (si no se quiere aceptar de principio y tratar el*

[139]Véase (Mancosu, 1997, 144 y ss.) y (Weyl, 1918, 13).

[140] Dado que un real (cortadura de Dedekind en el dominio de los racionales) es dado por una división de los racionales en dos clases, de modo que cualquier número de la primera es menor que cualquier de la segunda, es decir, se puede hablar de números "inferiores" y "superiores".

continuo mediante ciertos axiomas geométricos), estoy completamente de acuerdo con Weyl. Para dar una cortadura, tiene que darse una ley para la división de los racionales en dos clases. Para llegar al concepto de totalidad de los reales, tenemos que poder considerar todas las posibles leyes de tales divisiones. Hace más de treinta años que he expresado esta idea (véase Göttingische gelehrte Azeigen, 1892, nota 1, 594)"[141].

Como vemos, Hölder distingue los dos problemas fundamentales respecto de la construcción del supremo: 1) no es posible afirmar que *existe* un real que es el supremo de un conjunto *cualquiera* de reales; 2) pero sí es posible afirmar su existencia si se define el conjunto mediante una ley y se construye el supremo a partir de sus cortaduras.

No estamos de acuerdo con Avron pues considera que Hölder yerra en un punto a este respecto. Creemos que vale la pena citar *in extenso* lo que escribe Avron (2020, 29):

"*In current notation and terminology, Weyl is forbidding here definitions of elements of the power set 2*S *of a set* S *of, for example, the following form:*

$$(*)\ \mathrm{P}A = \{x \in S \mid \exists X.\ X \in 2S \wedge A(X) \wedge x \in X\}.$$

The reason that such definitions are rejected as involving a vicious circle is again that they include quantification over a collection, 2S*, to which the defined set is supposed to belong. The circularity in this definition becomes evident once were call that the only meaning of* "2S" *that makes sense for Weyl is as the collection of subsets of* S *which are* definable *by acceptable principles of definitions. (This is reflected at this very quote!).*

*NOTE 2. An obvious objection to the above argument, first made by Hölder in [23], is that it depends on artificially including 2*S *in (∗). Hölder argued that it would suffice to let*

$$\mathrm{P}A = \{x \in S \mid \exists X.\ A(X) \wedge x \in X\}.$$

If A has already been defined in a noncircular way, then no circularity is involved in this shorter definition either. As far as I was able to check, Weyl has never directly responded to

[141] En ese número de los *Göttingische* Hölder hace una recensión del libro de R. Graßmann *Die Zahlenlehre oder Arithmetik*. En la nota se dice: "Freilich erfordert die Definition einer Irrationalen ein eigenes Gesetz. Ich möchte deshalb noch einen Zweifel darein setzen, ob der Inbegriff aller rationalen und irrationalen Zahlen ein legitimer Begriff ist, d.h., ob das Kontinuum, dessen sich einige Zweige der Funktionenlehre bedienen, rein arithmetisch konstruiert werden kann". ["Ciertamente la definición de un irracional exige una ley propia. Por tanto, me gustaría poner en duda, si la noción de todos los números racionales e irracionales es un concepto legítimo, esto es, si el continuo, el cual es utilizado en varias ramas de la teoría de funciones, se puede construir de forma puramente aritmética"] (Hölder, 1892, 594).

this objection. However, it is clear what his response would have been: In order to know whether an object satisfies A, we need first to identify it as a property of elements of S*, that is: as an element of 2*S*. So the omission of 2*S *from the definition of* PA *only hides the problem; it does not eliminate it. This omission is indeed impossible in Weyl's system, since Weyl adopted in it a strict type discipline. (See Section 3.2.) Because of it, the suggested shorter definition is simply not available in his system*".

Pero Avron analiza la cuestión desde una perspectiva conjuntista que Hölder no compartía. Por lo que la existencia del conjunto potencia postulada en los axiomas de Zermelo no es necesaria (incluso puede ser errónea) para la "solución" propuesta por Hölder. La existencia de aquel conjunto sólo tiene sentido, si es construible mediante una ley. El problema es, si el conjunto potencia representa *siempre* un concepto claro y preciso[142]. Para Hölder esto no es siempre así.

La diferencia fundamental respecto del continuo de Weyl y Hölder es que para éste el continuo (conjunto de números reales) es no-numerable y es un concepto que proviene de la intuición[143]. Weyl sin embargo no acepta esta concepción de continuo, de hecho, reconoce que debe ser numerable al admitir sólo como significativa la pregunta: *¿existe una propiedad E de cierta naturaleza?*, si se puede responder con un sí o con un no. Luego para él, la existencia de un círculo vicioso se fundamenta en la creencia en imposibilidad de "determinación" del continuo matemático a través del intuitivo, y en la aceptación intuitiva de la existencia de los naturales como totalidad determinada. (Aunque no considere que para un continuo numerable se podría aceptar una definición impredicativa de supremo al modo de Ramsey[144]).

Como vimos, para Hölder tanto el concepto de sucesión como el de continuo son irreducibles. El continuo *hölderiano* se deja tratar de forma axiomática mediante el axioma de continuidad de Dedekind. Las razones por la cuales esto es así, *no* son simplemente de naturaleza matemática: el continuo se pueden entender como una forma *a priori*, condición de posibilidad de ciertas formas de conocimiento, cuyas (importantes) razones internas y externas ["*gewichtige innere und äusere Gründe*" (Hölder, 1924, 392)] hacen plausible esta

[142] "Die nicht gesetzmäßigen unendlichen Gesamtheiten stellen mathematisch nicht verwendbare, nicht klare und bestimmte Begriffe dar". ["Las colecciones infinitas no regidas por una ley no representan matemáticamente conceptos útiles, ni claros ni determinados"] (Hölder, 1924, 556).

[143] Véase el apartado anterior.

[144] Ramsey afirma que existen definiciones impredicativas como: 'el hombre más alto en esta habitación', que se deben admitir. Véase (Carnap, 1987, 49-50).

noción. Las externas son las basadas en la experiencia; las internas, en la intuición. Aunque creemos que la fundamentación en la experiencia propuesta por Hölder adolece, por motivos fundamentalmente históricos, de cierta imprecisión un tanto naif (Hölder, 1924, nota 2, 392).

No obstante, observa convenientemente Hölder, que a pesar de que muchos matemáticos no estén inclinados a renunciar a la idea de continuo, una gran parte de la matemática se puede desarrollar sin esta idea [“*ein stattliches Gebiet reiner Mathematik übrigbleiben würde*” (Hölder, 1924, 392)].

Es interesante señalar además que Hölder (1924, 392-393) está al tanto de que, aunque los teoremas del análisis y de la teoría de funciones pueden derivarse de la asunción de la existencia de la totalidad de los reales (algo que se sustenta en resumidas cuentas, en la aceptación del continuo como forma primordial), esto no implica, evidentemente, que aquellos teoremas *presupongan* al continuo [“*daß alle diese Sätze das Kontinuum wirklich voraussetzen*” (Hölder, 1924, 393)]. Esto de nuevo lo acerca a Weyl.

Sin embargo, para Hölder, la idea de totalidades infinitas más allá de la de los números naturales y los reales –o ciertas clases de ordinales transfinitos cantorianos (Hölder, 1924, 547)– adolecen del soporte de aquellas razones internas y externas mencionadas.

4.4 WEYL EN **DIE MATHEMATISCHE METHODE**

Como dijimos *Die matematische Methode* es un extenso libro, obra culmen del matemático, y donde se encuentran sus ideas más elaboradas respecto a la filosoía de la matemática. En este apartado queremos mostrar más detalladamente en qué capítulos la relación entre Hölder y Weyl se hace más estrecha. Esto nos dará una idea de en cuáles de los ámbitos matemáticos tratados por Hölder juega Weyl un papel destacado. Lo que nos servirá para entender mejor cómo ambos entendían la matemática.

En § 34 ‘Conjuntos con infinitos puntos’ [‘*Mengen von unendliche vielen Punkten’*] escribe Holder: “Si se quiere dar realmente un conjunto de infinitos puntos, tiene que darse una ley para ello”[145]. Y en una nota hace referencia a lo que escribió en 1892 en los ‘*Göttingische gelehrte Anzeigen*’[146]. Después, menciona que Weyl ha hecho hincapié sobre esto en *El*

[145] “Will man sonst noch eine Menge von unendlich vielen Punkten wirklich geben, so muß ein Gesetz vorgeschrieben werden“ (Hölder, 1924, 98).

[146] Véase nota 141.

continuo, con la observación, frente al axioma de elección, de que una sucesión infinita de infinitos actos de voluntad [*Willkürakten*] es completamente impensable.

Lo interesante es lo que Hölder aclara en referencia a la palabra 'ley' [*Gesetz*]. Según el autor, en las ciencias exactas[147] se usa de dos modos distintos. El primero, en el sentido de un concepto regular [*gesetzmäßig*], como opuesto a algo arbitrario, como la ley de una sucesión de números. Es decir, el concepto general regular "contenido" en los elementos de la sucesión. Y el segundo es el sentido de una proposición regular [*gesetzmäßige Aussage*] que representa infinitos enunciados subsumidos en un concepto general. Esto es, cuando la coincidencia de dos conceptos regulares o una relación entre varios de estos conceptos se enuncia. Como ejemplo se puede nombrar la coincidencia de los conceptos 'número primo de la forma $4n + 1$' y 'el número primo impar, que se puede poner como suma de dos cuadrados'. O en física la ley de Boyle-Mariotte.

En § 63 'El número entero como signo posicional y como cardinal' ['*Die ganze Zahl als Stellenzeichen und als Anzahl*'] Hölder se refiere a dos tipos de nociones que se pueden aplicar al número entero. Uno es la cardinalidad, y la otra la denomina 'signo posicional' [*Stellenzeichen*], refiriéndose al lugar que ocupa un "signo" en una sucesión. En cuanto a la cardinalidad se trata de la "forma" (como Husserl lo define) ["*den von Husserl gebrauchten Ausdruck gelten lassen*" (Hölder, 1924, 162)] de agregados de cosas que supone finitas. Hölder subsume estos dos conceptos en lo que denomina 'el hecho fundamental del concepto de cardinal' *[die Grundtatsache des Anzahlsbegriffes*]: si dados dos agregados A y B, es posible poner en correspondencia biunívoca B o una parte de B con A, no es posible mediante otro procedimiento hacer corresponder todos los elementos de B con una parte de A.

El contar no es más que ordenar un signo de la sucesión de naturales refiriendo éste a un agregado [*Aggregat*] particular. Lo que sean estos agregados es algo que se supone dado. En este sentido aduce objeciones que se refieren al hecho de que para definir el concepto de "agregado finito" se requiera definir un concepto general de agregado (finito o infinito) y que se establezca una diferencia específica, y se alinea con Weyl en *El continuo* en su crítica a Dedekind, que procede de aquel modo en *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Esto es así, pues sino, no se entendería el concepto de "contar" como una aplicación biyectiva de un agregado en la sucesión de naturales fundamentada en intuición de la iteración, y por tanto no se entendería el hecho fundamental mencionado.

[147] Matemáticas y física.

En §76 ‘La existencia del supremo’ [‘*Die Existenz der oberen Grenze’*] se explica que el concepto de supremo se corresponde en aritmética con el de “punto límite” [*Grenzpunkt*] concebido por Dedekind a partir del axioma de continuidad[148]. En este sentido nos encontramos con un caso de analogía, por el cual un teorema de la aritmética tiene su análogo en uno demostrado a partir del axioma de continuidad geométrico.

No obstante, si se sigue aquella analogía presentada entre aritmética y geometría “demasiado” de cerca pueden surgir problemas. Si se pretenden identificar los puntos de la recta con la totalidad de las cortaduras [*Schnitte*], y considerar una división de esta totalidad en dos clases, se podría demostrar la existencia de una nueva cortadura, y por tanto se podría generar el continuo geométrico a partir del aritmético, o más aún, sustituirlo por una estructura aritmética, de modo que el análogo del axioma de continuidad pudiese ser *demostrado*.

El problema radica en que, si se supone que la definición de una cortadura necesita de una ley determinada, la “totalidad de las cortaduras” implica que es posible concebir la “totalidad de todas las leyes” que se corresponden con una determinada exigencia. Una totalidad como la expuesta debería poder representarse en un concepto. Concepto, para Hölder, de naturaleza inadmisible (ver más abajo § 188). Por tanto, afirma que el continuo no puede generarse de modo aritmético [*demgemäß bin ich der Ansicht; daß das Kontinuum nicht rein arithmetisch erzeugt werden kann* (Hölder, 1924, 194)]. Sin embargo, en una nota haciendo referencia a *El continuo* escribe que, si bien Weyl y él mismo coinciden en lo anterior, cuando Weyl critica la proposición que afirma la existencia del supremo, cree que se excede. Weyl pretende definir cortaduras de Dedekind mediante un modo de generación de las mismas que Hölder denomina ‘el más simple’ [*einfachster*] (aquí se refiere a los principios de definición expuestos por Weyl en *El continuo*), y a partir de aquéllas construir el supremo. Se deja sin embargo seducir por la idea de que el concepto: *cortadura del supremo*, se debe construir a partir de cortaduras infinitas cualesquiera [*irgendwelchen*]. Sin embargo, sucede que, en la descripción dada de antemano de *cortadura del supremo*, se reconoce de modo inmediato que existe para ésta una ley, *si está dada la ley de las infinitas cortaduras* de las que se busca el supremo. Luego es posible afirmar la *existencia* del supremo bajo estas circunstancias sin caer en los problemas que Weyl refiere en su libro.

[148] Véase nota 132.

En § 92 ‘Representación de un número primo como suma de dos cuadrados’ [‘*Darstellung einer Primzahl als Summe zweier Quadrate*’] se analizan los números primos de la forma 4*n* + 1 y 4*n* + 3 (con *n* natural) y se observa que en matemáticas se buscan modos para hacer demostraciones generales de ecuaciones que involucran a todos los naturales, pues los *cálculos directos* [*unmittelbare Ausrechnungen*] de infinitos casos a los que hace referencia una proposición no pueden ser examinados, y que, del mismo modo, no se puede reconocer en las operaciones (tampoco a través de una ley general), la corrección de la proposición, aunque las transformaciones de las ecuaciones que servirían en la demostración sean concebibles sobre la base de una ley general.

Esto le lleva a afirmar, como hace Weyl en *El continuo*, que la “grandeza” de la matemática radica en que en casi todos sus teoremas se reduce el carácter de lo infinito a finitas decisiones. Luego, en teoría de números al igual que en geometría, se está obligado a tomar “rodeos”[149] [*Umwege*] en la deducción, que no hacen sino “confirman” esta reducción.

En § 94 ‘Forma y contenido de la enunciación’ [‘*Form und Inhalt der Aussage*’] da comienzo a la segunda parte del libro titulada ‘Análisis lógico de los métodos’ [‘*Logische Analyse der Methoden*’]. Este capítulo se inicia recalcando que las proposiciones matemáticas no son del tipo de las proposiciones clásicas aristotélicas: ‘A es un B’ o ‘B es un C’, donde un objeto pertenece a una especie y una especie a un género, sino que en una afirmación matemática se expresa una relación entre varios objetos [*Relation zwischen mehreren Gegenständen*], donde hay que tener en cuenta que sus elementos juegan un papel distinto, y que las relaciones son por tanto “estructuras vacías”. Este papel distinto según la relación se ‘representa’ por la *sucesión* [*Reihenfolge*] de sus elementos o a través del modo en que, por medio de símbolos de izquierda a derecha, la relación es descrita (pero la ordenación en el espacio no es más que una forma elegida de expresión). Para Hölder la correspondencia [*Zuordnung*] es uno de los actos de pensamiento fundamentales [‘*eine der wichtigsten Denktätigkeiten’*] en matemáticas. Si se afirma algo sobre una relación entre objetos, la afirmación sólo adquiere un sentido preciso cuando estos objetos se corresponde de una manera precisa con los elementos que forman parte de la definición de la relación. Luego es dependiente de los objetos a considerar, sean básicos, o derivados a través de otras relaciones.

[149] Estos “rodeos” no son simplemente la aplicación de la inducción matemática, sino que se refieren también a la demostración indirecta, o por reducción al absurdo, así como a propiedades establecidas o supuestas, según el estado del conocimeinto matemático en cada momento.

Por ejemplo, la relación que afirma

$$a = b^c$$

tiene sentido para los objetos 8, 3 y 2, si existe una correspondencia de la forma 8 = a, 2 = b, 3 = c.

Weyl en *El continuo*, define una relación *U(x y z)* entre tres términos *x*, *y*, *z* que denomina ‘posiciones vacías’ de la relación. Las posiciones vacías son ‘ocupadas’ por objetos, que dan significado a la relación. Weyl hace notar que, si usara de otros símbolos y no palabras para introducir la relación, no necesitaría mencionar una sucesión específica de aquellas posiciones. Por ello, para hacer intuitiva la formación de una afirmación sobre una relación cualquiera, utiliza el símil siguiente: una tabla de madera con palillos sobre ella que hacen las veces de las posiciones vacías, los cuales son ‘ocupados’ por pequeñas bolitas con un agujero que encajan, y que son los objetos de su discurso. De este modo lo único lógicamente necesario es la correspondencia [*Zuordnung*] clara de palillos y bolitas.

En §95 ‘Inferencias. Inversión de la relación de dos términos’ [‘*Schlüsse. Umkehrung der zweigliedrigen Relation*’] se comienza de nuevo diciendo que la enunciación matemática tiene en general una forma distinta de las proposiciones de la lógica aristotélica. Además, recuerda que ha mostrado en §6, que para la geometría, éste es precisamente el caso.

Los silogismos matemáticos se basan más que en la clasificación [*Einordnung*] de individuos en especies, y de estás a su vez en categorías o géneros más abstractos [*Überordnung*], en la concatenación [*Verkettung*] de relaciones. De hecho, en matemáticas existen inferencias que no se pueden clasificar como silogísticas, como es por ejemplo el caso de la relación simétrica definida de modo clásico como aquella cuya *inversión* [*Umkherung*] es idéntica a la relación de partida.

A este respecto se refiere primero a Russell dando cuenta de que a menudo los malentendidos proceden básicamente del uso de las expresiones, y si por un lado para Russell la expresión ‘relación invertible’, que Hölder define como ‘simétrica’, es criticada con la observación de que toda relación es invertible. Weyl, empero, en *El continuo,* no permite siquiera la “inversión” de relaciones (Weyl, 1918, 3), y considera una relación y su inversa como formando parte de una única *ley* que conecta dos objetos: *a* y *b*. En esto se aparta Weyl de la norma, pues una ley en la que *a* juega un papel distinto que *b*, determina un comportamiento entre *a* y *b*, y por tanto otro entre *b* y *a*, los cuales se denominan propiamente *relación*. Hölder considera esto último lo más práctico, pues de otro modo expresiones como ‘grande’, ‘pequeño’, &c. no podrían ser incorporadas de forma razonable a la teoría de las relaciones.

En § 116 ‘Construcción de conceptos sintéticos y otros conceptos a través de conceptos sintéticos’ [‘*Überbauung synthetischer und anderer Begriffe durch synthetische Begriffe*’] se analiza como en matemáticas conceptos sintéticos sirven para la construcción a su vez de otros conceptos sintéticos de un carácter (u orden) superior.

Como ejemplo considérese la fórmula algebraica

(1) $$(a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}\;+b^{n-1}\,)$$

La cual se puede escribir como

(2) $$a^{n}+\;a^{n-1}b+a^{n-2}b^{2}+\cdots+a^{2}b^{n-2}\;+ab^{n-1}\;-ba^{n-1}-ba^{n-2}b-\cdots-\;bab^{n-2}-b^{n}$$

Y de ésta se obtiene

(3) $$(a^{n}-\;b^{n})$$

En principio, mientras que *n* se considere de forma general no es posible pasar de la expresión (1) a través de (2) a la expresión (3).

Sin embargo, se reconoce claramente que para cualquier *n* concreto debe ser posible lo anterior. Este *reconocer* se fundamenta en conceptos generales que se inscriben en el cálculo algebraico abstracto [*Buchstabenverfahren*] que hace accesible a la comprensión el hecho de que términos de (2) se cancelen entre sí. Este proceder no sólo se fundamenta en la generalidad de *n*, sino en las relaciones que surgen entre términos, factores, &c., presentes en los conceptos generales de ‘precedente’ y ‘siguiente’, y que es a través de actividades como “desarrollar y cancelar”, “agrupar y separar”, “ordenar y corresponder” que se consigue pasar de (1) a (3). El procedimiento que, para un *n* dado, partiendo de (1) se llegue a (3) introduce un concepto sintético general que está conectado a su vez mediante relaciones con una variedad de prácticas similares, a saber: las actividades *parciales* que contiene el proceder algebraico expuesto.

Todos estos conceptos se refieren al cálculo algebraico que tiene a su vez al cálculo numérico como base en el sentido de *Darstellung* que propone en §114. Luego es posible construir (sobre ellos) [*überbauen*] conceptos sintéticos a partir de otros conceptos sintéticos dados.

Hölder menciona a Weyl, pues en *El continuo* se establece la construcción de un sistema conceptual sobre otro fundamental: la totalidad de elementos del sistema introducido y los subconjuntos de tal totalidad. La cita expresa en (Weyl, 1918, 15) es la siguiente:

"*Los conjuntos uni- o multidimensionales forman a partir de los elementos originales del dominio del sistema un nuevo sistema derivado de elementos ideales; resulta del original a través del, como deseo llamarlo, 'proceso matemático'. En efecto, creo que en esta forma de construir conceptos se expresa lo característico de la manera de pensar matemática. Se comprende por sí mismo que estos nuevos objetos, los conjuntos, son distintos de los originales; pertenecen a una esfera de existencia totalmente distinta*".

Vale la pena mencionar cómo Hölder se refiere a la geometría en este contexto. En geometría los conceptos (v. gr.: punto, recta o plano) son *dados* y se corresponden con el fundamento [*Unterbau*] a partir del cual se construirán otros conceptos sintéticos. Este fundamento "*llega a ser*" [*zustande kommen*] mediante la concurrencia [*Mitwirkung*] de la experiencia, contraponiendo esto a la idea kantiana de que se los puede retrotraer a una intuición pura *a priori*.

Para Hölder, en aritmética o en geometría, los conceptos, sean empíricos (es decir, con asiento en la intuición[150]) o ya sintéticos, a partir de los cuales se pretende construir a una estructura superior [*Oberbau*] son los conceptos "encontrados" [*vorfindliche Begriffe*].

La estructura superior es, por consiguiente, la *forma* representante, y los conceptos pertenecientes al fundamento [*Unterbau*] son su *Deutung* o contenido. Aunque la forma pueda ser a su vez el contenido de una nueva forma. Es decir, las nociones 'forma' y 'contenido' conceptual son relativas.

A menudo sucede que los conceptos que pertenecen al fundamento se "usan" en la estructura superior. Esto es, sus relaciones fundamentales permanecen, abstrayéndose su contenido semántico. Puede suceder, no obstante, que existan conceptos que tengan que ser *realmente*

[150] Obsérvese el paralelismo entre lo intuitivo y lo empírico.

interpretados como un caso particular, y que la subsunción de un caso particular ocurra a través de un concepto general.

Vale la pena señalar que toda *ley* que rige en el fundamento, sea un axioma admitido, un teorema demostrado o una definición, es para la estructura superior una *regla formal* según la cual se relacionan determinadas *formas* de esa estructura.

Por ejemplo, la ley aritmética que afirma que sumar cuatro veces tres, produce el mismo resultado que sumar tres veces cuatro es considerada teniendo en cuenta la forma de la representación según la ecuación algebraica $ab = ba$. Ésta, a su vez, introduce la regla en el cálculo algebraico de poder cambiar el orden de los factores a voluntad.

Luego efectuamos nuestros razonamientos al operar con símbolos no-numéricos de la estructura superior a partir de leyes algebraicas, siguiendo las reglas que posibilitan el cambio de orden en los factores.

En § 121 'La sucesión como objeto y forma del proceso de pensamiento' ['*Die Reihenfolge ein Gegenstand des Denkens und eine Form des Denkprozesses*'] Hölder analiza el concepto de sucesión cuyo significado divide en dos. Por un lado, la sucesión forma un *objeto* fundamental del pensamiento ["*wichtigen Gegenstand unseres Denkens*"], en tanto que ofrece simultáneamente infinitos elementos que las relaciones de anterior, siguiente, siguiente del siguiente, &c. indican [*aufweisen*].

Pero además de objeto es una *forma* del pensamiento, una forma con que el pensamiento *procede*. Aunque pueda parecer una interpretación psicológica, no se refiere a la sucesión subjetiva, donde, debido a la capacidad de asociar ideas, aparecen los pensamientos en la conciencia, sino a la objetiva, es decir, a la lógicamente necesaria. La que surge por ejemplo cuando una inferencia [*Schluss*] sigue a otra, o la que por ejemplo surge cuando observamos que un concepto debe ser aclarado antes de introducir otro; casos en los que cada inferencia o concepto *necesita* del anterior. Y lo mismo sucede en las construcciones de la geometría o en la aritmética cuando se presenta un orden en las operaciones.

En todos estos casos el concepto así dado de sucesión tiene un significado puramente lógico, y no psicológico. Luego, el hecho de que la sucesión se considere como una *forma* a la vez que como un *objeto* del pensamiento posibilita que podamos remontarnos a partir de los pasos intelectualmente dados, hasta conceptos generales que se conectan con esta "secuencia de pensamientos" y que por tanto posibilita el recorrer secuencias de nivel más alto (mediante el proceso sintético de formación de conceptos), y que después a través de la *Deutung* del concepto general y de los pasos individuales podamos volver a la sucesión de partida.

Para Hölder esto implica un recurso añadido al pensamiento (matématico) importante, toda vez que esta forma de proceder es distinta a como ocurre en las disquisiciones geométricas respecto de 'puntos' y 'rectas' los cuales *sólo* actúan como objetos de pensamiento. La mención a Weyl proviene nuevamente de *El continuo* donde se explica que en el proceso de formación de conceptos matemáticos se presuponen ya el de iteración y el de sucesión (de números naturales) (Weyl, 1918, 17 y 37); son condición *sine qua non*.

En el largo § 125 'El carácter necesario de la consideración matemática y los distintos aspectos del proceso de pensamiento matemático' ['*Der notwendige Charakter mathematischer Betrachtung und die verschiedenen Seiten des mathematischen Denkprozesses*'] escribe Hölder que se debe asignar un *estatus especial* a las reflexiones que se valen del continuo, como sucede con algunas consideraciones hechas en geometría y en teoría de funciones.

Aunque los números irracionales y sus operaciones se puedan fundamentar de forma consistente, no se puede obtener la *totalidad* de los mismos. Frente a esto, se dirige la suposición de la existencia de una totalidad completa de elementos ordenados que en lo concerniente a su "distancia" o "diferencia", cumplen los axiomas de la geometría euclídea sobre puntos y rectas, además del axioma de continuidad de Dedekind. Admitiendo esto, llegamos a la conclusión de que existe la totalidad de todos los números reales [*Gesamtheit aller Zahlen*], pues siempre se puede elegir una distancia como unidad, y es concebible mediante aquélla 'medir' todos los números reales a partir de un origen. De la totalidad de los números reales resulta por extracción [*Abzug*] de los racionales (dados de forma completamente clara) la totalidad de los irracionales.

Luego, de forma puramente lógica no se puede demostrar que los axiomas[151] que describen al continuo no conduzcan *nunca* a contradicción [*Rein logisch kann also nicht beweisen, daß das Kontinuum mit seinem Axiomen niemals auf ein Widerspruch führen kann* (Hölder, 1924, 357)]. A pesar de ello –escribe–, son pocos los que estarían dispuestos a dejar a un lado las áreas de la matemática que hacen uso de este concepto. Para la introducción del mismo podemos recurrir no sólo a hechos de la experiencia, sino incluso quizá a motivos "interiores" [*innere Gründe*] (motivo o fundamentación no basada en lo empírico). Y si se quisiera aceptar

[151] Axiomas presentados en § 124 que describen el orden total y la ausencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*].

que una forma [*Form*] sea una intuición pura *a priori* en el sentido kantiano o una especie de "idea platónica", como tal forma se debería considerar la idea del continuo (simple), a partir del cual se deja deducir el continuo de dimensiones superiores.

Hölder se refiere a Brouwer y a Weyl recordando, como vimos más arriba, en referencia a la imposibilidad de obtener la totalidad de los irracionales de modo puramente aritmético, que últimamente aquéllos han señalado algo que él ya hizo en los '*Göttingische gelehrte Anzeigen*' de 1892.

En § 141 'El principio de relatividad de la mecánica clásica' ['*Das Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik*'] se expone cómo es posible demostrar deductivamente que la ley empírica de que la fuerza constante acelera uniformemente un punto de masa que se encontraba en reposo o en una línea de fuerza. Para Hölder, los conceptos abstractos como: lugar, movimiento, velocidad, &c. han sufrido, al igual que los de la geometría, un desarrollo inevitable en el tiempo. Y se está justificado a introducir distinciones, y determinadas relaciones de acuerdo con leyes que están conectadas con la formación de conceptos y con la experiencia considerada *universalmente* válida. Por tanto, la "novedosa" crítica a algunos conceptos fundamentales resulta ser excesiva, como por ejemplo la crítica en *El continuo* al concepto de punto afirmando que no es un 'individuo', porque no se puede determinar con precisión por sí mismo. Esta objeción la considera inadecuada tanto por el *uso* del concepto en geometría como en mecánica, puesto que el *punto* es el resultado de un proceso de "idealización" de suposiciones en su uso.

En § 188 'Consideraciones finales' ['*Schlüssbetrachtungen*'] se aclaran diferentes aspectos sobre nociones que conducen a diferentes paradojas como las de Burali-Forte, Richard o Russell[152].

Hölder es de la opinión, de que el origen común de tales paradojas descansa en la falta de precisión de conceptos matemáticos[153] que aparecen en ellas, en estos casos el de conjunto.

---

152 Véase para un más exhaustivo análisis (Hölder, 1924, 548 y ss.), (Hölder, 1924, 551 y ss.) y (Hölder, 1924, 546 y ss).

153 "Überblickt man die Begriffe, die in den letzten Paragraphen benutzt worden sind und zu Antinomien geführt haben, so erkennt man, dass sie von ganz unbestimmter Art sind". ["Si se consideran los conceptos, que en los últimos párrafos se han utilizado y que han conducido a antinomias, se pone de manifiesto, que son de una clase completamente indeterminada"] (Hölder, 1914, 552).

Esto le lleva a concluir que la ley del tercio excluso no rige para aquéllos, pues puede suceder que de dos proposiciones contradictorias ni la una ni la otra sean verdaderas (como explica en §187 refiriéndose a la paradoja de Russell).

El problema reside en que un concepto como “la totalidad de clases” [*Gesamtheit der Gattungen*] al cual aplicar una propiedad lógica representa un dominio infinito incalculable [*unabsehbar*], algo que no puede ser tratado por una ley. Luego un tal concepto o es objetable dada su naturaleza o comprende una totalidad no lo suficientemente precisa [“*umfaßt wenigstens keine so klare Gesamheit*” (Hölder, 1924, 552)] como para aplicar una disyunción del tipo que aparece en la paradoja de Russell.

De este hecho surge la cuestión de las preguntas que en matemáticas quedan sin respuesta. Es posible –argumenta– que no pueda contestarse nunca a la pregunta de si *todos* los números de una totalidad infinita dada por una ley poseen una determinada propiedad; o que, dadas dos totalidades infinitas, aun cuando estén definidas por leyes claras, no se pueda encontrar una ley o una demostración indirecta que las relacione, y por tanto quede abierta la pregunta sobre la equivalencia de sus cardinalidades[154]. Hölder no encuentra correcta la afirmación de Hilbert de que gracias a la axiomatización se podrían resolver todos los problemas matemáticos (i.e., que no exista (teóricamente) ningún *ignorabimus*). Pues la afirmación descansa en un concepto general de “problema matemático” que no se deja tratar por ninguna ley o algoritmo, y que por tanto pertenece al tipo de conceptos *difusos* que menciona. En una nota se refiere a Brouwer y Weyl. El primero tiene en cuenta esta ‘insolubilidad’ [*Unlösbarkeit*] que es explicada de modo parecido a como lo hace nuestro autor. Hölder no es de la opinión, sin embargo, como expone Weyl en *El continuo*, de que el concepto de continuo pertenezca a los problemas que la matemática no pueda tratar de forma adecuada. Aun así, ambos matemáticos consideran que el axioma de elección no está justificado a la hora de introducir conjuntos infinitos. Por tanto, conjuntos infinitos de elementos se pueden formar –siempre que no nos refiramos a la totalidad de los elementos de un continuo– exclusivamente mediante una ley. Además, la ley no se ve menoscabada, aunque el concepto de ésta no se pueda “agotar” de modo completo mediante una definición, pues siempre se puede caracterizar de modo finito mediante determinaciones de las que surjan, de modo necesario y en cierto modo mecánico, infinitos términos. Sin embargo, está claro que, si de una totalidad infinita (regida por una ley [*gesetztmäßig*]) se pretende elegir una sub-totalidad infinita, se necesita asimismo una nueva

[154] Apunta a la hipótesis del continuo, creemos.

ley, luego aquí es de nuevo de la misma opinión que Weyl al afirmar que no se tiene por qué admitir que *necesariamente* una totalidad infinita contenga una parte a su vez infinita[155], o que la totalidad de subconjuntos de infinitos elementos formen un dominio claro y preciso. Luego las totalidades infinitas que no están regidas por una ley representan conceptos matemáticos que ni son útiles ni claros. Por consiguiente, puede muy bien suceder que afirmar algo de todos los elementos de la sub-totalidad conduzca a antinomias como las arriba mencionadas.

Esto es algo que Hausdorff ya hizo notar al afirmar que, en matemáticas, la palabra 'todos', a veces señala una exigencia que no siempre puede ser satisfecha. A veces se piensa en objetos dados por una definición para los cuales de forma distributiva *cada* objeto cumple una propiedad, pero no pueden ser considerados de forma colectiva *uno intellectus actu*.

4.5 Ideas axiales de Hölder: ¿Qué posición tomar?

Hemos visto como la idea de continuo en Hölder y Weyl difiere radicalmente. Nosotros somos, como Hölder, de la opinión de que no existe el "problema" que Weyl imputa a los fundamentos del análisis clásico, a saber: que no descansan sobre un fundamento estable debido a la existencia de definiciones impredicativas en su seno[156]. Las opciones por tanto están claras: seguir el camino de Weyl, rechazando el continuo clásico y ver hasta dónde se puede desarrollar la matemática sin esta idea, o seguir el camino de Hölder, aceptándola.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, no existe en principio ninguna razón para aceptar uno u otro camino, toda vez que se ha mostrado que la crítica de Weyl no es en modo alguno baladí. No obstante, desde un punto de vista filosófico que tenga ambiciones fundacionales, creemos que es la opción de Hölder la más adecuada. En el sentido de que la idea de continuo se deriva de nuestra forma de concebir el espacio-tiempo, y que, por ello, como escribe Hölder, nos posibilita y fundamenta el análisis de un tipo de experiencias que de otro modo sería imposible describir matemáticamente.

Es decir, la continuidad, entendida como lo hace Dedekind, como la ausencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*], sería la formalización (si aceptamos la tesis idealista, de que el

[155] Frente al teorema que afirma que todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.

[156] "Hier wird vielmehr die Meinung vertreten, daß jenes Haus zu einem wesentlichen Teil auf Sand gebaut ist" [Aquí se defenderá más bien la opinión, de que aquella casa está construida sobre arena en gran medida"] (Weyl, 1918, Introd., 1).

sujeto y objeto es un par indisoluble) de la condición de posibilidad de la experiencia de fenómenos donde la continuidad juega un papel esencial, debido a que percibimos todo fenómeno interno (i.e., nuestra autoconsciencia) o externo a nosotros de "modo continuo".

En este caso, la condición del tiempo como condición de posibilidad de la experiencia puede concebirse como el soporte intuitivo de la idea matemática de continuo.

El espacio es para la filosofía crítica asimismo algo dado *a priori*. Hölder –como vimos–, apoya la idea de que la geometría puede ser fundamentada *a posteriori*. Para ello aporta el desarrollo de las geometrías no-euclídeas como argumento a favor.

Nosotros no somos de la opinión de que la fundamentación empírica de la geometría como (filosóficamente) interpreta Hölder sea correcta. Y aunque es cierto que su argumento a favor de la interpretación empírica esté basado finalmente en un argumento de corte "ockhamiano", creemos que la diferencia entre la intuición pura y la empírica es clave. Lo fundamental es determinar cómo interaccionan éstas con el entendimiento.

Que la geometría (euclídea) se considere *a priori* no significa que no se acepte, como "prueban" los físicos, que la variedad diferencial en la que existimos, *sólo* es localmente euclídea. Lo que sucede es que desde el punto de vista del sujeto la representación de los fenómenos se rige por "leyes" de naturaleza fisiológica que condicionan su conocimiento y asimismo la representación del objeto.

Hölder critica, por ejemplo, que el idealismo suponga *a priori* la infinitud del espacio, y apunta al hecho de que rectas infinitas son finitas en geometrías elípticas.

Sin embargo, esta intuición *a priori* se fundamenta no en un hecho geométrico específico, sino en el hecho de que, si los objetos representados existen en el espacio de forma yuxtapuesta y simultánea, el elegir uno como primado sobre los otros –i.e., ser un sistema de coordenada– es una elección "arbitraria". Con lo cual no hay una *razón suficiente* para primar uno sobre el otro, pero necesariamente las posiciones relativas de los demás objetos se determinan respecto del objeto elegido como sistema de coordenadas. Esto implica que no al no existir una *razón suficiente* que determine esta elección, existe por tanto (potencialmente) una serie infinita de "objetos" como posibles sistemas de coordenadas, lo que sólo tiene sentido si el espacio es *a priori* infinito. Esto no tiene nada que ver con el espacio empírico de la física, sino que "fundamenta" a éste, pues aquél es ya objeto representado.

Es decir, pensemos por ejemplo en el Big Bang, teoría hoy día clásica sobre el origen del universo. Si se argumenta empíricamente que al tener el universo una "edad", tiene necesariamente un límite espacial, esto no empece a la razón para preguntar por la *causa* del Big Bang mismo, por la causa esta "singularidad" (entendida de modo interno como un suceso, y no como "el mundo" o "el universo", i.e., algo que designa *todo* lo físicamente existente, pues no tiene sentido preguntar por la causa del universo *toto genere*). El *principio de razón suficiente* rige siempre que se pregunta por la causa[157] del cambio de estados de la materia. Luego, se podría decir que repugna a la razón el "prohibir" preguntar por la causa de tal singularidad, lo que equivale a admitir cadenas causales infinitas. Si seguimos por este camino, la infinitud del espacio empírico podría no admitirse de forma necesaria como conclusión, pero, de cualquier modo, la *aprioridad* del espacio y su infinitud como sentido externo de la intuición pura no queda cuestionada.

4.6 CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Hemos visto en el capítulo que la filosofía matemática de Hölder comparte puntos de vista importantes con la de Weyl. En lo que se refiere a considerar la construcción sintética (o genética) de los conceptos matemáticos, en la idea de que la noción de sucesión es primordial en matemáticas, la crítica al logicismo de corte hilbertiano y a la idea de conjunto propuesta por Zermelo. Por todo ello, quizá se podría considerar a Hölder un proto-predicativista.

Sin embargo, también existen importantes diferencias entre ambos. Para ello hemos analizado la obra capital de Hölder *Die mathematische Methode* en relación con las ideas de Weyl en los diferentes capítulos de libro, resaltando consensos y disensos.

La más fundamental de estas diferencias es la *aprioridad* del concepto de continuo y la aceptación de la idea de supremo de un conjunto de reales como es interpretada por el análisis clásico, aunque con el matiz de que la construcción aritmética de un tal supremo sólo es posible si se define una ley para la generación de las cortaduras de un subconjunto de reales.

Hemos puesto de relieve asimismo cómo Hölder tiene una concepción distinta de la geometría y de la aritmética (además del álgebra), considerando la primera *a posteriori*. Algo a lo que

[157] Sobre esto habría que diferenciar el hecho de que la física actual no posea conocimiento de las leyes o fuerzas físicas que regían en la singularidad, por tanto, calla sobre este asunto. Y otra cosa es que a este estado de la materia no pueda *necesariamente* anteceder otro.

llega haciendo valer un argumento de corte ockhamiano, de hecho, afirma que no es posible "contradecir" la afirmación kantiana sobre que sea *a priori*.

Finalmente hemos expresado nuestra posición respecto del continuo y la geometría como son entendidos por Hölder. Nosotros apoyamos su interpretación del continuo, sin embargo, creemos, como hace el idealismo, que la geometría se fundamenta en la intuición pura *a priori*.

Luego, Hölder compartía puntos esenciales con el predicativismo weyliano, pero su posición era más ecléctica, o más "compleja" –si se permite decirlo así–, aceptando parte de la matemática clásica (aceptada mayoritariamente en ese momento histórico) hasta cierto punto, y rechazando otros aspectos de la misma. Esto es así, dada su *visión dual* respecto de la geometría y la aritmética, y respecto de las fuentes irreductibles del pensamiento matemático: el continuo y la sucesión natural.

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo hemos analizado primero la idea propuesta por Weyl en *El continuo* sobre cómo fundamentar el análisis, de forma que definiciones impredicativas de conceptos fundamentales sean evitadas. Weyl desarrolla en el libro lo que se conoce como predicativismo dados los números naturales. Además, analiza la relación entre el continuo intuitivo y el matemático, llegando a la conclusión de que existen diferencias fundamentales entre ambas nociones. Nosotros hemos propuesto una solución idealista que hace depender la concepción matemática de continuo de la intuitiva, y por tanto hemos negado que exista una contraposición radical entre estas dos concepciones. Nuestro análisis se ha fundamentado en la idea de que '*no existe sujeto sin objeto, y viceversa*' y en la experiencia de autoconciencia para explicar la primacía del continuo intuitivo y derivar de éste el matemático a partir de la propiedad de 'ausencia de espacios vacíos' [*Lückenlosigkeit*]. Creemos, a su vez, que el análisis fenomenológico presentado por Weyl no es todo lo profundo que quizá fuera deseable. Con ello no queremos decir, sin embargo, que un estudio fenomenológico exhaustivo del continuo intuitivo sea algo inservible, al contrario. La posibilidad de aunar el idealismo clásico con la fenomenología en lo que al estudio del fenómeno de la continuidad se refiere es un campo abierto, y a nuestro juicio de interés para la filosofía de la matemática.

Además, nuestro análisis de la crítica de Hölder al círculo vicioso del análisis expuesto en *El continuo*, así como de la filosofía matemática del éste, nos ha llevado a concluir que la posición de Hölder comparte mucho con el predicativismo weyliano. Ideas, por ejemplo, como que la sucesión (de los números naturales, en particular) y el continuo son nociones pre-matemáticas básicas, creemos, son el rasgo a destacar, y el más interesante de su pensamiento a partir del enfoque dado en nuestro trabajo. Sin embargo, hemos criticado que defienda la no-aprioridad de espacio.

En nuestro análisis más profundo del predicativismo de Weyl, hemos partido de la idea de que la paradoja de Richard juega un papel decisivo en la compresión de esta propuesta. Asimismo, hemos considerado herramientas introducidas por Gaifman para la clasificación general de dos formas de hacer matemáticas: la predicativista y la formal. En este punto, creemos que estas herramientas pueden servir para una clasificación (fundamental) de la matemática según sea su enfoque. Algo que hasta ahora no se había tratado de modo general.

Métodos formales, en esencia metamatemáticos, que sirvan para clasificar de modo amplio prácticas matemáticas, las cuales, además, tienen un impacto en la filosofía de la matemática, es un campo todavía no suficientemente estudiado. Nosotros nos hemos propuesto contribuir en este sentido a un mayor conocimiento de esta (posible) clasificación, considerando las aportaciones Gaifman, e interpretándolas de modo –se nos permite decirlo así–, *metafilosófico* respecto de la filosofía de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVRON, A. (2020), «Weyl reexamined: 'Das Kontinuum' 100 years later», *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 26, No. 1, 26-79.

BEISSWANGER, P. (1965), «Die Phasen in Hermann Weyls Beurteilung der Mathematik», *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, 12, pp. 132–156.

BELL, J. L. (2004), «Hermann Weyl's Later Philosophical Views: His Divergence from Husserl», en R. Feist (ed.), *Husserl and the Sciences: Selected Perspectives*, *Philosophica*, 55, University of Otawa.

CANTOR, G. (1872), «Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen», *Mathematische Annalen*, 5, pp. 123-132.

CANTOR, G. (1891), «Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre», *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1890-1891, 75-78.

CARNAP, R. (1987), «The logicist foundation of mathematics», *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, P. Benaceraff and H. Putnam, Eds., Cambridge, Cambridge University Press, 49-50.

CHIHARA, C. S. (1973), *Ontology and the vicious-circle principle*, Ithaca, Cornell University Press.

DA SILVA, J.J. (1997), «Husserl's penomenology and Weyl's predicativism», *Syntese* (2), vol. 10, pp. 211-296.

DEDEKIND, R. (1961), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig, Vieweg.

DEDEKIND, R. (2014), *¿Qué son y para qué sirven los números?*, J. Ferreirós (Trad.), Madrid: Alianza.

FEFERMAN, S. (1998), *In the Light of Logic*, New York: Oxford University Press.

FEFERMAN, S. (2009), «Conceptions of the continuum», *Intellectica*, 51, pp. 169-189.

FERREIRÓS, J. (2011), «On arbitrary sets and ZFC», *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 17, Nr. 3.

FRAENKEL, A. A., BAR-HILLEL, Y., LÉVY, A. (1973), *Foundations of set theory*, Elsevier.

GAIFMAN, H. (2006), «Naming and Diagonalization, from Cantor to Gödel to Kleene», *Logic Journal of the IGPL* 14 (5), 709-728.

GÖDEL, K. (1981), *Obras completas*, Ed. J. Mosterín, Madrid, Alianza Universidad.

GÖDEL, K. (1995), *Collected Works*. S. Feferman, Editor-in-Chief, New York, Oxford University Press.

GONZÁLEZ ROJO, V. (2019), «*El continuo* 100 años después: Un nuevo análisis desde la perspectiva crítica de Hölder», *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, vol. 42, Nº 86, 219-239.

GONZÁLEZ ROJO, V. (2021), «Análisis de la relación entre el continuo intuitivo y el matemático en "Das Kontinuum"», *Revista de Filosofía*, *46*(2), 255-270.

HILBERT, D. n.d. *Nachlass*, «Bernays über Weyls Kritik der Analysis». Cod. Ms. 685, Nr.3, Bl. 13-20.

HOERL, C. (2103), «Husserl, the absolute flow, and temporal experience», *Philosophy and phenomenological research*, vol. LXXXVI, No. 2, pp. 376-411.

HÖLDER, O. (1892), «Göttingische gelehrte Anzeigen», Göttingen, Dieteriech'sche Verlags-Buchhandlung.

HÖLDER, O. (1899/1968), *Anschauung und Denken*, Stuttgart, Teubner.

HÖLDER, O. (1924), *Die Mathematische Methode*, Berlin, Julius Springer.

HÖLDER, O. (1926), «Der angebliche Circulus Vitiosus und die sogennante Grundlagenkrise in der Analysis», Sitzungsber. der Leipziger Akad. 78, pp. 243-250.

HUSSERL, E. (1913), *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie: Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie*, Jahrbuch für Philos. und phänomen. Forschung, Band I. Halle a.d.S., Max Niemayer Verlag.

HUSSERL, E. (1928), *Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewußtseins*, M. Heidegger (Hrsg.), Halle a.d.S., Max Niemayer Verlag.

LEUPOLD, R. (1961), *Die Grundlageforschung bei Hermann Weyl*, Mainz: Mainz Univ., Diss.

LÓPEZ DE SANTA MARÍA, P. (2015), «Schopenhauer y el idealismo kantiano», *Enrahonar*, 55.

MANCOSU, P. (1997), *From Brower to Hilbert: The debate on the foundations of mathematics in the 1920s,* New York, Oxford University Press.

MANCOSU, P. (2010), *The adventure of reason*, New York, Oxford University Press.

RADU, M. (2003), «A debate about the axiomatization of arithmetic: Otto Hölder against Robert Graßmann», *Historia Mathematica*, 30, 341–377.

RICHARD, J. (1905), «Les Principes des mathématiques et le problème des ensembles», *Revue générale des Sciences pures et appliquées* 12, 541.

ROGERS, H. (1967), *Theory of recursive functions and effective computability*, New York: McGraw-Hill.

RÖMER, I. (2010), *Das Zeitdenken bei Husserl, Heidegger und Ricoeur,* Dordrecht, Springer.

SCHOPENHAUER, A. (1981), *De la cuadruple raíz del principio de razón suficiente,* Trad. Leopoldo-Eulogio Palacios, Madrid, Gredos.

SCHOPENHAUER, A. (2005), *El mundo como voluntad y representación*, Trad.: Rafael-José Díaz Fernández y M. Monserrat Armas Concepción, Madrid, Akal.

SIEROKA, N. (2010), *Umgebungen*, Zürich, Chronos Verlag.

TIESZEN, R. (2000), «The philosophical background of Weyl's mathematical constructivism», *Philosophia Mathematica* (3), vol. 8, 274-301.

VAN ATTEN, M., VAN DALEN, D., TIESZEN, R. (2001), «Brouwer and Weyl: The phenomenology and mathematics of the intuitive continuum», *Philosophia Mathematica* (2), vol. 10, 203-226.

WEYL, H. (1918), *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig, Veit & Comp.

WEYL, H. (1919), «Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung/Zeitschriftenband*, pp. 85-92.

WEYL, H. (1921), «Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik», *Mathematische Zeitschrift*, 10, 73.

WEYL, H. (1921), *Raum, Zeit, Materie* (4. Auflage), Berlin: Julius Springer Verlag.

WEYL, H. (1925), «Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik», Symposion *1*, 1925-1927, pp. 1-32

WEYL, H. (1931), *Die Stufen des Unendlichen*, Jena: Vlg. von G. Fischer.

WEYL, H. (1946), «Mathematics and logic. A brief survey serving as preface to a review of *The Philosophy of Bertrand Russell*», American Mathematical Monthly 53, pp 2-13.

WEYL, H. (1949), *Philosophy of mathematics and natural science*, Princeton: Princeton University Press.

WEYL, H. (1968), *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vols., K. C. Chandrasekharan (Hrsg.), Berlin: Springer.

WEYL, H. (1987), *The continuum. A critical examination of the foundation of Analysis*, Trans. Stephen Pollard & Thomas Bole, New York: Dover Publications, Inc.

ZERMELO, E. (1907), «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre», Mathematische Annalen 65, 261-281.

ANEXOS

Los anexos que se adjuntan son los artículos publicados (González Rojo, 2019) y (González Rojo, 2021).

EL CONTINUO 100 AÑOS DESPUÉS: UN NUEVO ANÁLISIS DESDE LA PERSPECTIVA CRÍTICA DE HÖLDER

Víctor González Rojo
UNED

Resumen

En el libro *El continuo* Hermann Weyl analiza la noción de continuo en matemáticas y señala que el análisis clásico cae en un círculo vicioso cuando acepta el principio del supremo en su forma conjuntista. Su posición inaugura una importante y prolífica corriente en lógica-matemática, originariamente basada en el problema de los fundamentos de las matemáticas: el predicativismo dado los números naturales. No obstante, en artículos posteriores tratará este asunto considerando otras ideas. Esto permitirá la aparición de críticas interesantes, como la de Hölder, que son asimismo analizadas aquí. Además, pretendo defender que el principio del supremo clásico se puede mantener bajo ciertas condiciones, lo que puede ser entendido como otra alternativa pseudo-constructivista distinta a la de Weyl.

Abstract

In Hermann Weyl's the book *The Continuum* the notion of continuum in mathematics is analysed. The author points out that classical analysis falls into a vicious circle when it accepts the LUB-principle in its set-theoretically form. The book inaugurates an important and fruitful approach in mathematical logic, originally based on the problem of the foundations of mathematics: the predicativism given the natural numbers. However, in later articles Weyl considers other ideas when dealing with this matter, which give rise to interesting critiques such as Hölder's. In this paper I argue as well that to accept the LUB principle as Dedekind defines it, makes sense under certain conditions, what could be understood as another pseudo-constructivist position different from Wely's position.

Palabras Clave: Principio del círculo vicioso, Prediatividad, k-propiedad, Cortadura de Dedekind.

Keywords: Vicious-circle principle, Predicativity, k-property, Dedekind cut.

Recibido el 7 de octubre de 2018 — Aceptado el 15 de febrero de 2019

1. Introducción

En 2018 se cumplen cien años de la publicación del libro *El continuo* de Hermann Weyl. Feferman, en su artículo "Weyl vindicated: Das Kontinuum seventy years later" explicaba ya la trascendencia del libro y cómo éste supuso el inicio de la corriente predicativista dentro de las corrientes filosóficas de los fundamentos de la matemática[1].

En *El continuo*, Weyl analiza la idea que tiene sobre la noción de continuo en matemáticas y señala que el análisis cae en un círculo vicioso cuando acepta el principio del supremo en su forma conjuntista. Además, el matemático propone una nueva fundamentación del análisis basada en la construcción, a partir de los números naturales y de principios lógicos, de los reales. Todo lo cual le lleva a fundar el predicativismo como una opción para hacer matemáticas de una forma, a su entender, segura.

Pretendo defender dos cosas en este artículo: la primera, que Weyl se acerca al principio del círculo vicioso en *El continuo* y en artículos posteriores (Weyl 1919, 1921 y 1925) de manera distinta (además considero la discusión con Hölder a este propósito); y la segunda, que la impredicatividad, entendida como la imposibilidad de definir a partir de una totalidad de la cual lo que se quiere definir forma ya parte, y el círculo vicioso son cosas no exactamente equivalentes, en el sentido de que se puede mantener la una, rechazando la otra. Finalmente, propongo una alternativa en la cual el principio del supremo se puede mantener tal y como es formulado por Dedekind, restringiendo el universo de subconjuntos de números reales que pueden ser definidos[2].

2. *El Continuo*, cien años despúes

El escrito de Weyl se divide en dos partes fundamentales claramente diferenciadas atendiendo a su estructura, y en tres si se atiende a su contenido.

Formalmente el libro consta de dos capítulos, el primero de ellos tiene por título "Conjunto y función (Análisis de la formacion del concepto matemático)", y en él se incluye una parte lógica y otra matemática. La parte lógica, a su vez, tiene tres epígrafes; la matemática, algo más extensa, cinco.

El segúndo capítulo lleva por título "Concepto de número y continuo (Fundamentos del cálculo infinitesimal)", y se divide en ocho epígrafes.

Desde el punto de vista del contenido tenemos la parte lógica, la matemática y asimismo otra genuinamente filosófica. Como trataremos más adelante de las partes lógica y matemática en detalle, quisiera decir antes algo acerca de la filosófica.

En la introducción, y casi al final del segundo capítulo, Weyl nos da a conocer su posición filosófica. En la introducción nos enteramos de que Weyl considera la fenomenología de Husserl como el marco filosófico adecuado para las ideas sobre lógica y matemática que desarrollará posteriormente. Así, escribe en la introducción:

> En lo que respecta a la epistemología de la lógica, estoy de acuerdo con la concepción que Husserl presenta en sus *Investigaciones lógicas* (2ª. ed., Halle 1913); remito también a la exposición más profunda, que sitúa a la lógica en su lugar en el marco de una filosofía completa, en la obra de Husserl *Ideas para una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica (Jahrbuch für Philos. und phänomen. Forschung*, Tomo I, 1913)" [WEYL, 1918, 4].

Como hemos mencionado, en un epígrafe del segundo capítulo reflexiona sobre el continuo espacio-temporal y el matemático de modo muy refinado, contrastando sus ideas con las que al respecto sostenía Bergson y con la fenomenología.

El propósito de Weyl en el capítulo primero es introducir su lenguaje lógico, además de los principios y relaciones fundamentales para la construcción de juicios. Lo que es un juicio[3] en sentido estricto es algo muy específico. Señala en la primera frase del primer epígrafe: "Un juicio afirma un hecho: si el hecho se da, entonces el juicio es verdadero, de otro modo, decimos que es falso". Los juicios de relaciones, los esquemas de juicio y los juicios existenciales, de los que escribe que "juegan para la matemática el papel más importante", son tratados aquí.

Más adelante introduce el concepto de juicio particular y de juicio general, y caracteriza a su vez a la matemática como la actividad que trata de "juicios relevantes, generales y verdaderos". Del mismo modo, explica sucintamente conceptos como demostración (matemática), consecuencia lógica y axioma.

En la segunda parte del primer capítulo se introducen los conceptos de conjunto, relación, así como ideas tan importantes para su concepción de la matemática como el "principio de iteración" [*Iterationsprinzip*] o el círculo vicioso del análisis[4].

En la concepción weyliana de conjunto, un conjunto se puede definir de dos maneras distintas: una, dando una lista de sus elementos (lo que sólo puede hacerse con conjuntos finitos); la otra, dando una propiedad. Así escribe: "Toda propiedad original o derivada E se corresponde con un conjunto (E)". Para cada propiedad E "sobre" un dominio se hace corresponder un conjunto tal que para cada elemento x del dominio, éste pertenece al conjunto si y sólo si, tiene la propiedad E. Introduce además la noción de esquema relacional o relación ordenada, que define como esquemas relacionales o relaciones donde los objetos que "llenan" las posiciones vacías lo hacen en un determinado orden.

Otro concepto importante tratado en este capítulo es el de *proceso matemático,* que es el procedimiento por el que a partir de los objetos primitivos se forman otro tipo de objetos ideales, los conjuntos uni- y multidimensionales. Es importante señalar que estos nuevos objetos pertenecen a una esfera de existencia completamente distinta de la de los objetos primitivos.

Dentro de la categoría de objetos de una teoría matemática, para Weyl, los números naturales son la categoría de objetos principal, la que juega el papel de categoría básica, no derivada, o primigenia, que acepta de forma intuitiva como esencial para el quehacer matemático, y sobre la que construirá el análisis. Al igual que Poincaré, cree que es en la representación de la iteración, en la representación de la secuencia de los números naturales, donde descansa el fundamento último del pensamiento matemático. En este sentido se podría llamar a Weyl "intuicionista", si se tiene en cuenta que cree que esta intuición "pura" [*reine Anschauung*], es la que, además, se establece como fundamento epistemológico básico de la teoría de conjuntos.

Al introducir el concepto de función explica que tiene dos raíces. Una, la que tiene que ver con el mundo material o físico, cuyas dependencias naturales (dadas por la naturaleza) [*naturgegebenen Abhängigkeiten*] nos dirigen hacia esta primera raíz; la segunda es la aritmético-algebraica. El punto en que estas dos fuentes diversas e independientes la una de la otra se tocan, es en el concepto de ley natural [*Naturgesetz*]. Estas dos fuentes constituirán -como se verá en el segundo capítulo- una de las ideas filosóficas sobre el continuo más interesantes y originales de Weyl. El problema (epistemológico) tiene que ver entonces con cómo conjugar, por un lado, el continuo intuitivo espacio-temporal con el continuo del que trata el análisis, y además, cómo explicar su relación así como su dependencia o necesidad.

El capítulo segundo tiene por objetivo la *construcción* del análisis. Para ello se deben aplicar los principios definidos anteriormente para conseguir construir los números racionales, y a partir de ellos los reales. Weyl empieza con los naturales en esta segunda parte. Demuestra propiedades aritméticas básicas, así como las propiedades conmutativa y asociativa, e introduce el concepto de cardinal asociándolo al de cortadura. Después le llega el turno a las fracciones, de las que derivará la defición de número racional[5]. En este apartado, como hizo en el anterior, se definen las operaciones básicas y las propiedades conmutativa y asociativa.

Tras haber introducido a partir de la categoría fundamental de los números naturales los racionales, en el apartado tercero define los números reales. Aquí, el matemático se ayuda de las cortaduras de Dedekind, y de esta forma define un número real como "[u]na cortadura abierta de números racionales, que ni es el conjunto vacío ni es el conjunto universal". Por tanto, los reales son "conjuntos cuatri-dimensionales especiales de números naturales". Añade que ser un número real, es una "propiedad finita". Esto es algo importante, pues es una consecuencia natural de lo que Weyl se ha propuesto al construir los números reales a partir de los racionales. Lo que esto significa concretamente es que un número real se construye a partir de los principios dados en el capítulo primero suponiendo dado el conjunto de los números naturales.

Después de definir bastantes propiedades (por ejemplo, el concepto de número algebraico), llegamos al apartado donde trata de la convergencia, de las sucesiones de Cauchy y de las series. Es aquí donde Weyl traza la línea entre lo que se admitirá en su análisis y lo que deberá ser rechazado del análisis clásico. El criterio de convergencia que utiliza debe su validez al concepto de límite inferior de una sucesión de reales que construye a partir de los números racionales y de los naturales.

La idea clave de Weyl, con la que inaugura una nueva forma de hacer matemáticas y otra corriente en la fundamentación de las matemáticas, es la de admitir el principio del supremo sólo para secuencias de números reales, y no para conjuntos de números reales arbitrarios. Se debe señalar que esta idea y su desarrollo, así como -lo más importante- las implicaciones[6] que tiene para el análisis en particular, y para la matemática en general, es de lo más relevante que Weyl ha aportado como matemático y pensador.

Nombra cinco proposiones ("supuestamente equivalentes", escribe) que, en vez del principio de convergencia de Cauchy sirven como punto de partida del análisis, de las cuales sólo la primera y la segunda son válidas en su construcción; la otras tres[7] - entre las que se encuentra el famoso teorema (principio[8], según se entienda la construcción de los reales), que dice que un conjunto acotado de números reales tiene un límite inferior y otro superior precisos -, no pueden serlo de manera consistente. La invalidez de estas proposiciones, que hasta ahora "solían servir para la deducción de todas las afirmaciones del análisis", tiene -como dice- la consecuencia fundamental de que la formación de conceptos en el análisis clásico, así como algunas demostraciones donde ellos intervienen, deben ser abandonados.

La proposción sexta es el teorema de Heine-Borel, el cual ha de ser interpretado correctamente (en particular el concepto de "sucesión de intervalos") para que resulte válido. El teorema se convierte en falso si se sustituye "sucesión de intervalos" por "conjunto de intervalos cualesquiera", o si no se considera la categoría fundamental "número natural" a la hora de dar la sucesión de intervalos.

Llegados a este punto, conviene decir algo más sobre la proposición cuarta. En ella se hace patente el círculo vicioso que critica Weyl al análisis clásico, y que es, podríamos decir, el *leitmotiv* que le impulsa a escribir *El continuo*. Como indicó en el apartado seis del capítulo primero, el no seguir el "procedimiento restringido" [*das engere Verfahren*] lleva a un análisis donde no aparecen niveles, donde las propiedades de segundo nivel no se definen a partir de la totalidad de propiedades de primer nivel. Pero precisamente por esto, es decir, debido a que el análisis clásico no sigue este procedimiento, las definiciones y las demostraciones tomarán necesariamente, según Weyl, la forma de un círculo vicioso.

A la hora de construir la cota superior de un conjunto acotado, esa cota se define por medio de un real de primer nivel; se utiliza el cuantificador "existe", el cual cuantifica sobre un real de primer nivel, por tanto, la cota superior es un número real, pero de segundo nivel. Esta es la argumentación de Weyl.

El problema surge por pretender *construir* una tal cota *a partir de* un conjunto dado cualquiera. Weyl ha dejado claro que la aplicación del proceso matemático tiene como consecuencia la aparición de los niveles. Si dado un conjunto acotado M de reales, se pretende construir su cota superior, se tendrá que formar un conjunto de racionales con una relación de pertenencia que se refiere a conjuntos de primer nivel.

A él pertenecerán un número racional *r* si -y sólo si- existe un real de primer nivel de M menor que *r.* Esto es, el salto de niveles [Chihara 1973, p. 53] ocurre siempre que aparezca una definición donde el *definiens* tenga un cuantificador que cuantifique a un objeto de un nivel determinado.

El libro continua con una sección dedicada a las funciones continuas, donde demuestra tres proposiciones fundamentales que son la base para el desarrollo de la teoría de la diferenciación, así como de la teoría de la integración. Weyl ha demostrado por tanto que, en su sistema, estos teoremas son válidos. No obstante, recalca que la cosa no es tan fácil si de lo que se trata es de las avanzadas teorías de la integral y la medida de “Riemann, Darboux, Cantor, Jordan, Lebesgue y Caratheodory”.

La sección sexta -como ya hemos indicado- trata sobre el continuo intuitivo y el matemático. Es aquí donde expone Weyl su concepción genuinamente fenomenológica al tratar de ambos. De este modo explica la diferencia entre los continuos, y la formulación (o interpretación matemática) del continuo intuitivo estableciendo unas condiciones que harían posible la formulación misma y su tratamiento exhaustivo.

En las dos últimas secciones de este segundo capítulo pretende fundamentar -poniendo en coincidencia la teoría de números a través, a través del axioma de continuidad- conceptos como las magnitudes y las medidas, además de, a partir de aquéllas, fundamentar de forma matemática la geometría del espacio dentro del análisis que ha desarrollado.

Finalmente, el libro se cierra con una breve conclusión donde Weyl pone de manifiesto cómo con los principios presentados se puede construir de forma completa el primer estadio [*ersten Stadien vollzogen*] del análisis, y pone de relieve de nuevo la diferencia que existe entre el continuo intuitivo y el continuo matemático construido y presentado en el libro. A pesar de esta diferencia opina, sin embargo, que es necesario construir un continuo matemático de la forma que lo ha hecho, si lo que se quiere es hacer posible el tratamiento de los tipos de continuos intuitivos a través de la matemática.

3. El problema del círculo vicioso

La diferencia entre cómo Weyl trata el principio del supremo en *El continuo* y en artículos posteriores, radica en que en *El continuo* el argumento utilizado se fundamenta en la teoría de los tipos de Russell teniendo en cuenta lo que denomina el “procedimiento restringido” [*das engere Verfahren*], llegando a la conclusión de que si no se observan niveles, la definición de supremo contiene un círculo vicioso. Sin embargo, en los artículos posteriores su crítica se centra en el concepto de propiedad definida extensionalmente [*umfangs-definit*].

3.1. El círculo vicioso en *El continuo*

Como es sabido, este principio tiene una larga tradición en la historia de la lógica contemporánea. Russell lo analizó al tratar las paradojas que surgieron de la teoría (naif) de conjuntos, y Poincaré hizo referencia al mismo en varios de sus escritos donde explicaba paradojas semánticas como la de Richard o la de Berry [CHIHARA 1973, p. 138 y ss.].

Gödel lo trata en su artículo “La lógica matemática de Russell” [GÖDEL 1981, p. 297] donde escribe lo siguiente:

> Me refiero en particular al principio del círculo vicioso, que prohíbe un cierto tipo de “circularidad” a la que se hace responsable de las paradojas. La falacia, según se sostiene, consiste en la circunstancia de que se definen (o se asumen tácitamente) totalidades cuya existencia implica la existencia de ciertos nuevos elementos de la misma totalidad, a saber, elementos definibles únicamente en términos de la totalidad entera. Esto lleva a la formulación del principio que dice que ninguna totalidad puede contener miembros definibles únicamente en términos de la totalidad, o miembros que involucran o presuponen esta totalidad. [GÖDEL 1981, p. 306].

Más adelante apunta que tal y como está formulado el principio, correspondiendo a la expresiones “definible en términos de”, “involucra” y “presupone”, se tiene en realidad tres principios diferentes. El segundo y el tercero son -según Gödel- mucho más plausibles que el primero. Es éste en cambio, el que prohíbe las definiciones impredicativas, el que tiene como consecuencia principal que la derivación de las matemáticas a partir de la lógica desarrollada por Dedekind o Frege sea imposible.

Gödel se adscribe en este artículo al platonismo[9], de hecho, escribe a propósito de su posición filosófica que puesto que

> no se conoce otro método de definir fuera del sistema[10] que los que ya involucran totalidades más amplias que las que aparecen en los sistemas [...]. Prefiero considerar esto como una prueba de que el principio del círculo vicioso es falso que como una prueba de que la matemática clásica es falsa [GÖDEL 1981, p. 308].

Volviendo a Weyl, en *El continuo* el principio se formula citando a Russell del siguiente modo[11]: “*No totality can contain members defined in terms of itself*” [WEYL 1919, p. 36].

Una pregunta interesante es si basta con esto. Tal y como lo expresa Russell no se dice nada de la totalidad en cuestión. Y Weyl tampoco. Es suficiente -a primera vista-con que se respeten los niveles.

Como dijimos más arriba el salto de nivel, que se produce si se cuantifica sobre una variable de un nivel dado, evita que un objeto de un dominio de un nivel determinado se defina a partir de objetos del mismo nivel. Weyl escribe en la parte segunda, epígrafe sexto, cuando analiza la definición de supremo lo siguiente:

> Sea por ejemplo M un conjunto acotado de reales del 1. nivel. Para construir *[konstruieren]* su cota superior se tiene que formar un conjunto ϒ de números racionales, al cual pertenecerá un número racional *r* si y sólo si existe un número real de 1. nivel que pertenece a M y que es mayor que *r*. Este conjunto ϒ tiene las propiedades a) b) c), y es por tanto un número real, pero un real de 2. nivel, pues en su definición aparece el "existe" en conexión con "un número real de 1. nivel " (es decir, "un conjunto de 1. nivel de números racionales" o "una propiedad de 1. nivel primitiva o derivada"). El círculo vicioso disfrazado debido a la naturaleza nebulosa de los conceptos de conjunto y función habituales que hacemos notar aquí, no es un fallo formal en la construcción del análisis que se pueda eliminar fácilmente [Weyl 1918, p. 23].

En *El continuo* se considera el dominio de los números naturales como una totalidad determinada y que nos es dada. Sin embargo, al tratar los números reales como cortaduras de Dedekind generales entran en juego propiedades, vale decir, conjuntos de números racionales, y es cuando el principio cobra importancia. Esto es así debido a que Weyl considera que los números reales no están "suficientemente" bien definidos.

La crítica al análisis clásico que pone de relieve el argumento de los niveles tiene sentido si se admite que un análisis con niveles es algo "artificial e inservible" [*künstlich und unbrauchbar*] [Weyl 1918, p. 23].

Weyl no se pregunta sin embargo si puede ser lógicamente consistente. En principio, el análisis con niveles aunque sea "artificial", no caería en el problema del círculo vicioso tal y como se presenta. Pero la totalidad de reales es, en cada nivel, tan poco específica como lo son los reales, llamémosles estándar, aunque sea en un análisis en principio desarrollable.

La explicación de por qué la definición del supremo de un conjunto acotado de reales contiene un círculo vicioso tiene por consiguiente su fundamento último en la teoría ramificada de tipos de Russell. Esto es, que no observar la solución propuesta por Russell conduce necesariamente a definiciones que contienen un círculo vicioso. No obstante, Weyl no está del todo satisfecho con esta solución, que sólo le sirve para señalar el problema, además, el axioma de reducibilidad no le convence[12]. Es por ello que la solución propuesta en su libro será la denominada (posteriormente, por otros filósofos de la matemática) solución predicativa dado los números naturales (o módulo los números naturales).

3.2. Concepciones del círculo vicioso en 1919, 1921 y 1925

Acabamos de analizar cómo el principio es entendido en *El continuo*. Unos años más tarde Weyl analizará también el problema en una serie de artículos, si bien su crítica la enfocará desde un punto de vista algo distinto a como aparece en el libro.

Comencemos primero con el artículo de 1919 publicado en el *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* y que lleva por título "Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis"[13]. El argumento dado por Weyl tiene la siguiente forma.

Weyl pretende demostrar [*beweisen*] que conceptos como "propiedad de números naturales" y "propiedad de propiedades de números naturales" no son conceptos "extensionalmente definidos" [*umfangs-definit*], es decir, dados como una totalidad determinada y completa.

Primero[14] afirma que el concepto de número natural es extensionalmente definido, y que esto es algo que se nos da intuitivamente. Sin embargo, existen otros conceptos generales como "objeto" o "propiedad" que no lo son. Para ver que es así define el dominio de k-propiedades de los números naturales. El concepto de k-propiedad es, por definición, extensionalmente definido. Después, supone una propiedad A de propiedades de números naturales. Entonces, según Weyl, siempre se puede definir una nueva propiedad P_A que cae fuera del dominio de las k-propiedades de la siguiente forma: x posee P_A si y sólo si existe una k-propiedad de tipo A que posee x. Weyl afirma que el significado de esta P_A es totalmente distinto del de las k-propiedades. Después aclara que no obstante esto no significa que no exista en el dominio de las k-propiedades una propiedad que tenga la misma extensión [*umfangs-gleich*[15]] que aquélla.

No queda del todo claro a lo que se refiere con que el "sentido" de la nueva propiedad así definida se distingue *absolutamente* [*ganz gewiss*] de cualquier k-propiedad. Esto puede entenderse de un modo intuitivo como que, al referirse la nueva propiedad P_A a una k-propiedad que pertenece por definición a un dominio extensionalmente definido, no puede ser una de aquéllas. Lo que no es más que admitir la solución russelliana —quizá de forma no muy clara— en el artículo de marras.

Se llega entonces a la conclusión de que el concepto de número real no es un concepto extensionalmente definido [*dass der Begriff der reellen Zahl nicht unfangs-definit ist*[16]], y que por consiguiente el concepto de supremo[17] de un conjunto de reales arbitrario no tiene sentido.

Su explicación parte de que si un real es una cortadura de Dedekind, es decir, un conjunto de racionales que se corresponde con una determinada propiedad de los racionales, entonces un conjunto de números reales se corresponde con una propiedad A de propiedades de números racionales. El supremo de este conjunto de reales es, a su vez, el conjunto de aquellos racionales x que tienen una determinada propiedad P_A, a saber, la siguiente: la de que existe una propiedad de tipo A, la cual es poseída por x.

Es por ello que, después de dar esta explicación, escribe Weyl que esto es evidentemente un sinsentido [*evident sinnlos*], pues la existencia de una propiedad como P_A depende de que exista (de modo general y sin limitación) una propiedad de cierto tipo, tal que...etc. Por tanto, concluye, el concepto de "propiedad de números racionales" no es un concepto definido extensionalmente.

La argumentación de Weyl es entonces, que dado que una propiedad se define a partir del dominio de las k-propiedades, dominio extensionalmente definido, no puede ser que la nueva propiedad pertenezca a este dominio. Al estar definida a partir de la totalidad de las k-propiedades, *a fortiori* se concluye que no puede ser una de ellas.

Intentemos analizar lo expuesto hasta ahora más detenidamente. Si se compara este artículo de 1919 con la explicación ofrecida en *El continuo*, parece que el *motivo* realmente ofrecido es el de establecer como (cuasi) normativo el principio del círculo vicioso para conceptos como "propiedades de números racionales" (o conjuntos de números racionales). En ese caso, la nueva propiedad definida a partir de las k-propiedades del tipo A, debe ser una propiedad que no se encuentra en el dominio de las k-propiedades, y por tanto se puede concluir que no tiene sentido de forma general la pregunta sobre si existe el supremo de un conjunto de reales arbitrario.

El mismo argumento es utilizado por Weyl en el largo artículo de 1921[18] "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik" [Weyl 1921].

En este artículo repite parte de lo dicho en 1919, si bien hay algunas aportaciones interesantes que merecen ser analizadas con más detalle. Vale la pena citar *in extenso* lo que escribe al respecto:

> [Let us now look at the construction of the upper bound of an arbitrary such set A of real numbers!. The bound, a real number, is given by a property E_A of rational numbers. In fact E_A is specified as follows: It obtains of a rational number *1* if and only if *there is a property E of the kind A* that obtains of *x* (if there is a real number E in the set A that lies below[19] *x*). But this definition, if it is to be meaningful, not only counts on the fact that the concept of a property of rational numbers is by itself clear and unambiguous, but also on the fact that the totality of *"all possible" properties* is in itself determined and delimited, that is, in principle surveyable. This, because it counts on the fact that the question "*Is there* a property E of a certain nature?" (that is, one that at the same time is of kind A and obtains of *x*) is meaningful, that is, that this question is addressing an existing state of affairs that allows one to answer the question with yes or no. *This, however, is evidently not the case.* For let us assume that we have managed, in some way or other, to delineate such a determined and delimited domain of properties of rational numbers (let us call them k-properties). Then it has a clear meaning to ask with regard to any rational number *x* whether there is a k-property of kind A that obtains of *x*. If this is the case, let us attribute the property E_A to *it,* and otherwise deny it. But it is now very clear from the sense of this property E_A (whose definition is indeed based on the totality of all k-properties) that it stands *outside* the k-domain. This reveals that the concept "property of rational numbers" is not, as I shall say, extensionally definite *[umfangs-definit]* and that our definition of the upper bound contains a vicious circle]. [Mancosu 1997, 87-88].

En este extracto observamos que para Weyl la definición tiene sentido si la totalidad de todas las posibles propiedades es algo determinado y delimitado, como dice, en principio algo de lo que se puede tener una visión de conjunto. Y esto es así porque se fundamenta en el hecho de que la pregunta sobre si existe una propiedad de cierta naturaleza es sólo significativa, si se puede responder con un sí o con un no. Después da un salto, no suficientemente claro, y escribe que evidentemente éste no es el caso.

De nuevo su justificación consiste en formar el dominio de las k-propiedades, y definir a partir de éste una propiedad, cuya definición ciertamente se basa en la totalidad definida de las k-propiedades, que está por tanto, -a esto se refiere con sentido[20]- fuera del dominio de las k-propiedades. Pero no ha demostrado nada hasta ahora. La pregunta "*Is there a property E of a certain nature?*" se puede responder si se suponen las k-propiedades así como la forma de definir a partir de ellas la propiedad E.

El argumento en detalle tiene la siguiente forma: 1) suponer un dominio extensionalmente definido; 2) definir E a partir de este dominio; 3) constatar que E no pertenece al dominio; 4) concluir que el concepto de propiedad de los racionales no es extensionalmente definido; 5) concluir que la definición de supremo contiene un círculo vicioso.

La objeción a este argumento sería: 1) que el salto de nivel no depende de cómo sea el dominio de las variables sobre el que se cuantifica, luego no se puede concluir que la nueva propiedad no sea extensionalmente equivalente[21] a alguna k-propiedad; 2) la conexión entre (4) y (5), no es del todo clara. La propiedad E_A pertenece a un nivel superior de propiedades[22]. El circulo vicioso existe si un objeto se define a partir de la totalidad de la que forma parte. Weyl afirma, de la manera en que está definda E_A, que no pertenece al dominio de k-propiedades porque asume que el dominio es extensionalmente definido. La cuestión es que si la totalidad no es extensionalmente definida no se puede afirmar o negar que la propiedad E se defina a partir de la totalidad de la que ella misma forma parte. Pues, ¿cómo podemos establecer -asumiendo el argumento de Weyl- que la propiedad E pertenece a la totalidad, si ésta no es un dominio de k-propiedades, i.e., extensionalmente definido?

Es decir, desde la posición de Weyl no se puede decir nada de dominios que no sean extensionalmente definidos. Podría prohibir -digámoslo así- asumiendo su punto de partida, dominios de objetos que no fuese extensionalmente definidos, por las razones aducidas más arriba, pero no concluir que existe un círculo vicioso en la definición de supremo. Realmente, el problema es que Weyl se compromete con una cardinalidad que de forma implícita subyace en su concepto de k-propiedad, pero la definición clásica de supremo no hace referencia a ninguna clase de cardinalidad.

Nótese además, que si un dominio dado de k-propiedades es extensionalmente definido, éstas totalidades son precisamente las que se dejan tratar de forma "impredicativa", por estar bien definidas[23] (*cfr*. ejemplo de Ramsey[24]).

Es aquí donde el círculo vicioso, como lo expuso en *El continuo*, difiere de la explicación propuesta en los artículos. Weyl ha introducido ya implícitamente la cardinalidad de los números naturales como elemento decisivo cuando afirma la existencia de un círculo vicioso en el análisis clásico.

En el artículo de 1925 titulado "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik"[25], se refiere de nuevo a ideas tratadas ya anteriormente. Sin embargo, se aporta una visión más esclarecedora de lo expuesto en los artículos de 1919 y 1921. Principalmente lo consigue introduciendo la noción de concepto de contenido definido [*inhalts-definit*] (esto es, determinado de forma precisa y no ambigua), ya esbozada anteriormente, y relacionando la idea de k-propiedad con los niveles de Russell.

De este modo observa que no todo concepto de contenido definido es extensionalmente definido; v.gr., el concepto "propiedad de los números naturales". Decir que un concepto *b* es extensionalmente definido no es sólo decir que la pregunta: "¿Tiene el objeto X la propiedad A?" tiene un sentido preciso, sino que para cualquier objeto X que caiga bajo el concepto *b* tiene también sentido la pregunta existencial: "¿Existe un objeto que cae bajo *b* con la propiedad A?".

En el artículo aparecen después las nociones de k-propiedades y de propiedad de propiedades de los números naturales. Aquí conviene dar el ejemplo del propio Weyl. La propiedad en cuestión la define de la siguiente manera: "Llamemos a una propiedad de los números naturales E de tipo A, si el número 1 la posee".

Más adelante presenta la definición D, la cual tiene la forma ya conocida: "x tiene la propiedad E_A significa que existe una k-propiedad del tipo A la cual es poseída por x".

Suponiendo que las propiedades de los números naturales sean definidas como de primer nivel, de acuerdo con el esquema D, y aplicando "todo" y "existe" a propiedades extensionalmente definidas del primer nivel se obtienen las de segundo nivel.

Weyl nos informa de que la necesidad de esta formación de niveles fue claramente reconocida por Russell, y que si se suprimiera, entonces se podría cuantificar de forma irrestrictiva sobre propiedades en general, y que por tanto uno se vería envuelto en un círculo vicioso sin fin.

Pero es precisamente esto lo que ocurre, según Weyl, con la defición dada por Dedekind de supremo. Citemos a Weyl al respecto:

> One only needs to consider that, according to Dedekind, a real number (E) is a set of rational numbers that itself corresponds to a property E in the realm of rational numbers; "the rational number x is smaller than (E)" means as much as: x has the property E. The upper bound γ then corresponds indeed to that property E_A a rational number x possesses if and only if there is any property of rational numbers of kind A at all that holds of x. The uniform concept of number thus seems to be falling to pieces; one would obtain real numbers of first, second, third, . . . level, such that, for example, the upper bound of a set of numbers of first level would not generally again be a number of the same kind, but of the second level. Such an analysis, however, is completely useless. One escapes the dilemma if the proposition holds that every property of second level E_2 is, even though not equal in sense, at least extensionally equal to a property E_1, of the first level. Yet, a proof for this has never been attempted, and there is not the slightest indication that one could put up construction principles for the properties of first level that would be far-reaching enough to ensure the correctness of the proposition [Mancosu 1997, p. 132].

Aquí observamos que el concepto de k-propiedad, al ser extensionalmente definido, es lo único que Weyl acepta en un esquema de definición como D. Y que cuantificar sobre k-propiedades *asegura* que las de segundo nivel sean también extensionalmente definidas, i.e., bien definidas en un sentido weyliano.

El origen del problema en el argumento de Weyl visto en estos tres artículos, no es no contemplar el salto de niveles como en *El continuo*, sino que no se tenga (no se pueda dar) un concepto adecuado de k-propiedad para los números reales, pero hay que notar, que esto no es más que apelar de nuevo a que sólo el concepto de número natural es intuitivo, y por tanto extensionalmente definido.

En referencia al principio del supremo, se puede decir que Weyl considera que es una propiedad que tiene un conjunto de reales (i.e., propiedad de propiedades de racionales), cuando más bien se debiera entender como una propiedad de un real *respecto de* cada elemento de un conjunto. Esto es parte de lo que le critica Hölder, como veremos a continuación.

3.3. Crítica de Hölder

Hölder contestará a Weyl, a propósito del artículo publicado en 1919, en otro titulado "Der angebliche circulos vitiosus und die sogannante Grundlagekrise in der Analysis"[26]. La crítica a la forma en que el matemático trata el círculo vicioso tiene la siguiente estructura.

Primero, Hölder deja claro que, como él, Weyl acepta el tercio excluso y que, asimismo, sólo mediante una ley se puede definir una totalidad infinita[27]. Por tanto, la respuesta a la pregunta de si entre los objetos de la totalidad *existe* uno (dado por una ley) que tenga la propiedad P_A en cuestión, es algo que se puede constestar afirmativa o negativamente. La construcción del supremo la expone Hölder de la siguiente forma: primero introduce una totalidad A infinita de números reales (de forma secuencial, aunque dice que eso no es necesario); despúes, la cortaduras de Dedekind, que sólo pueden estar dadas por una ley (además, se refiere a Weyl, cuando explica que para el matemático las cortaduras sólo pueden expresarse a través de una "propiedad". Así, infinitos números reales sólo pueden darse por una ley de leyes). Una vez hecho esto fija una cota [*Schranke*]: el 100, y supone que los números están por debajo de ésta.

La construcción de una cota superior γ del conjunto A la realiza del siguiente modo: forma una nueva totalidad de números racionales a la cual pertenece un número x si y sólo si x es un número "inferior" [*lower number*[28]] de *cualquiera* de las cortaduras de A. Garantizado que se puede definir esta totalidad de números x, entonces se concluye que cualquier número menor que un número x es también un número x, y que no todos los números son números x , pues por ejemplo el 100 no lo es. Del mismo modo, se tiene que no puede haber el número x mayor, luego está claro que los números x así construidos son números inferiores de una nueva cortadura construida siguiendo este procedimiento.

Hölder describe después la crítica de Weyl a la forma en que se define la nueva cortadura de Dedekind, a saber, el hecho de que el número x pertenezca a la nueva cortadura si y sólo si entre las cortaduras de A existe una a la cual x pertenece como número inferior, o como dice Weyl, que existe una propiedad de tipo A que es poseída por x. Hölder responde que no se trata de *sólo* una propiedad de cualquier tipo, sino de una propiedad de un dominio bien definido por la ley de la secuencia de A. Se trata de la propiedad de "ser un número inferior" en *una* de las cortaduras dadas de la secuencia. Sólo se afirma por tanto que existe para la totalidad de números de la secuencia, definidos por una ley, una cota superior γ.

Si se da x, y por ejemplo una cortadura A_2, entonces por la ley que determina la cortadura se puede afirmar si alguno de los infinitos números inferiores coincide o no con x. Pero dado que la relación entre el x dado y cualquier cortadura de A está completamente determinada, y que existe una ley para las infinitas cortaduras de A, entonces se puede determinar -de acuerdo con la ley del tercio excluso- si existe una cortadura para la cual el número racional x dado se encuentra en la relación mencionada, a saber, si es un número inferior de esa cortadura.

La construcción del supremo de A se obtiene de la siguiente forma: si se da un número real γ' menor que γ, esto significa que la cortadura representada por γ' posee un número superior que es un número inferior en γ (pertenece a los mencionados números x). El número x_0 debería ser un número inferior en una cortadura A_0 de la secuencia (es decir, γ' sería menor que la cortadura A_0), mientras que resulta claro que ninguna cortadura de la secuencia excede a γ.

Hölder introduce dos propiedades mediante las cuales se define usualmente el supremo (respecto a la secuencia de números (cortaduras) que forman A), y que se tienen para γ:

1) γ es mayor que cualquier número de la secuencia de A;

2) cualquier número menor que γ es excedido por algún número de la secuencia.

Supuesto que exista un número real γ'' "del cual se puedan probar estas dos propiedades, la suposición de que $\gamma'' \neq \gamma$ llevaría a contradicción pues de dos cortaduras que no coinciden una de ellas ha de ser menor que la otra. Luego de aquí se concluye que las dos propiedades definen al supremo de forma única.

Si se dijera -continúa Hölder- que en el dominio de los números reales existe un número que posee, con respecto a la secuencia de números definida las dos propiedades anteriores entonces la crítica de Weyl sería correcta, pues la palabra "existe" se aplicaría a una totalidad no definida constructivamente. Pero en lo expuesto más arriba, incluso Weyl consideraría el uso de "existe" como legítimo, pues la existencia se reclama sólo después de la construcción no-circular de γ.

La única desventaja (si se la quiere llamar así), añade Hölder, es que no se puede dar un algoritmo general para construir γ. Esta demanda es, en general, irrealizable. Frente a esto alega Weyl que es entonces imposible concebir un concepto de número uniforme. A lo que opone Hölder que si bien es cierto que mediante el concepto de cortadura de Dedekind no es posible construir la totalidad de los números reales, es un concepto de número real claro y bien definido.

4. CONCEPCIÓN DEL CONTINUO DE HÖLDER COMO ALTERNATIVA AL PREDICATIVISMO

Este repaso del artículo de Hölder creo que es suficiente como para entender que la idea de Weyl al interpretar la propiedad (o principio) del supremo como algo que necesariamente se refiere a la totalidad de conjuntos de números reales -en vez de entenderse como que es cierto *sólo* para cualquier conjunto de reales- es algo que no se deriva automáticamente de la forma cómo el análisis clásico trata el principio.

Sin embargo, llegados a este punto, quizá el matemático acostumbrado a trabajar con el análisis estándar -entendido como el que acepta el principio del supremo *à la* Dedekind- quiera salvarlo en la medida de lo posible. Si el platonismo presenta muchas dudas -para muchos bien fundadas-, la posición de Weyl también. La solución de Hölder pretende además establecer una interpretación de lo que dice el principio, teniendo en cuenta la construcción llevada a cabo.

El teorema del análisis -al que se refiere Weyl en *El continuo* [WEYL 1918, 59]- que afirma que un conjunto acotado de números reales tiene un límite inferior y otro superior precisos, se podría aceptar, si se entiende que el principio afirma que todo conjunto arbitrario acotado superiormente de reales tiene un supremo, si es definible mediante una ley. ¿Es necesario, por tanto, a la hora de invocar el principio del supremo, suponer la existencia del conjunto de los números reales?. La respuesta, visto lo anterior, es que en efecto no lo es.

Es interesante no obstante resaltar dos cosas. La primera es que, como explica Hölder en una nota refiriéndose a Weyl, si se afirma que existe una ley de una propiedad cualquiera (Hölder escribe a este propósito citando al propio Weyl) no se tiene que llevar aquélla

> al lecho procusteano de los principios de construcción; sino que más bien, si se ha conseguido construir, de la manera que sea, una ley de forma no circular, se está legitimado a reclamar su existencia. No se trata de la posibilidad de su construcción, sino que la reclamación de su existencia se hace a la luz de la construcción conseguida de la prueba dada [MANCOSU 1997, p. 147, n.8].

Esto es precisamente lo que ha hecho Hölder al construir el supremo.

La segunda cosa a tener en cuenta proviene también de una nota de Hölder, y se refiere a sí mismo a un artículo de Weyl. Esta indicación tiene que ver con los conceptos extensionalmente definidos y los de contenido definido. Hölder reconoce que existen conceptos que aunque precisos, como el de cortadura de Dedekind[29], el de secuencia infinita o el de función, no caen bajo la definición weyliana de conceptos extensionalmente definidos. Sin embargo indica que el propio Weyl está al tanto de esta diferencia, y que la acepta como legítima. Y por tanto se tiene un concepto uniforme de número real a partir de la construcción de Dedekind. Vale la pena citar en este punto al propio Weyl:

> It may well always be that the sense of a clearly and unambiguously determined object concept [*Gegenstandsbegriff*] assigns to the objects of the nature expressed by the concept their sphere of existence. But this does not make the concept an extensionally definite one; that is, it does not ensure that it makes sense to consider the existing objects that fall under the concept as an ideally closed, in itself determined and delimited totality [Mancosu 1997, p. 148, n. 10].

De aquí que Hölder proteste contra el anuncio exagerado de *crisis* en los fundamentos del análisis. A pesar de que como hemos visto Hölder critica a Weyl en aspectos fundamentales, hay que decir que sus posiciones respecto a cómo concebían el conjunto de los números reales clásico no difería mucho. De hecho Hölder escribe lo siguiente:

> In the conception, which Weyl has strongly emphasized, that the continuum cannot be constructed arithmetically, that is, that one cannot arrive at the *totality* of the real numbers (if one does not want to require from the beginning and then use the continuum with certain geometrical axioms), I entirely agree with Weyl. In order for a cut to be given, there must be a law for the division of the rational numbers in two classes. In order to arrive at the concept of the totality of the real numbers, we would then have to be able to overview the totality of the possible laws of such divisions. I have already expressed the aforementioned conception more than thirty years ago (cmp. *Göttingische gelehrte Anzeigen*. 1892. p. 594. note) [Mancosu 1997, p. 147, n. 7].

La postura de Hölder es por tanto una postura que se podría denominar "intermedia". Es constructivista en tanto que afirma la imposibilidad de construir aritméticamente el conjunto de los números reales, pero intenta salvar el principio del supremo clásico, precisamente teniendo en cuenta esta imposibilidad. Se prodría deducir de la posición de Hölder, aquí comentada, que sólo se compromete con la existencia de subconjuntos de reales definidos por una ley, pero no con la de R.

De hecho se prodría resumir la posición de Hölder de forma análoga a como Weyl establece la diferencia entre un juicio y un juicio abstracto. Para Weyl un juicio es de la forma "2 es un número par", y uno abstracto tiene, sin embargo, la forma existencial "existe un número par".

Se puede interpretar que Hölder tiene en mente un "juicio abstracto" (en la formulación de Weyl) no explicitado en su posición respecto al principio del supremo, dando por supuesto que el juicio existencial es lo que da sentido a aquél. De este modo podemos afirmar que Hölder no está de acuerdo con la forma en que Dedekind define el concepto de supremo, para conjuntos de reales arbitrarios, puesto que se opone a la forma de derivar el concepto de número real a partir de la lógica[30]. Porque si bien es cierto que el concepto de "propiedad" no es -como Weyl explica- un concepto extensionalmente definido, el concepto de supremo de un conjunto definido mediante una ley dada, no implica que el concepto de supremo se refiera a propiedades cualesquiera de racionales de un conjunto. Por consiguiente, el concepto de propiedad en relación con el de ley que define un conjunto pueden entenderse, desde el punto de vista de Weyl, como extensionalmente definido.

5. CONCLUSIÓN

En el teorema que relaciona los conjuntos de números reales acotados y el supremo (o ínfimo) de éstos, no se dice cómo deban ser los posibles conjuntos de reales en cuanto a su cardinalidad: finitos, infinitos numerables o no-numerables. El teorema tampoco presupone la existencia previa del conjunto R de los números reales ("clásico", en el sentido de Dedekind), y basta con considerar para su prueba cualquier conjunto de reales[31] y un real. Es decir, la cardinalidad y la propiedad de ser un *continuo* no es algo que presuponga una totalidad como R existente de antemano, vale decir, no construida.

Para un constructivista como Weyl[32] nada le impide que R se pueda pensar (desde el punto de vista como lo entendería un matemático clásico) como teniendo "agujeros", siempre y cuando se pueda construir algún segmento, i.e., que la propiedad "ser-un-continuo" se pueda adscribir a un conjunto. Dar un segmento tiene que ver con definir mediante una ley un conjunto de reales. Y para Weyl esto es algo de lo que -en principio- se pueden dar ejemplos. Es más, para él, no se puede dar un conjunto de reales sin dar una ley que lo defina; en ese caso, la totalidad de estos conjuntos está bien -en el sentido predicativista de previamente- definida.

Weyl, y también Hölder, son de la misma opinión en cuanto a la imposibilidad de construir aritméticamente la totalidad de los números reales. Esto no significa sin embargo que no se pueda construir parte[33] de esta totalidad, y que se pueda sin objeción afirmar para ella el principio del supremo.

Pero dejando a un lado la verdad o no de la afirmación respecto de si es posible o no construir el conjunto de los números reales aritméticamente, aceptar el principio del supremo en su formulación clásica teniendo en cuenta la propuesta de Hölder, supone trabajar sólo con afirmaciones como: 1) que conjuntos de reales no-numerables sólo pueden ser definidos mediante una ley; 2) que por consiguiente sólo se puede afirmar la existencia una cantidad numerable de conjuntos de reales no-numerables. Lo que conlleva aceptar el axioma de elección[34] entendido éste de forma "débil", es decir, sólo admisible para conjuntos arbitrarios numerables de elementos.

Me gustaría señalar a este respecto algo que creo interesante. Y es que este puede ser, por ejemplo, un adecuado marco de referencia si se quiere trabajar con el principio del supremo clásico, aceptando la tesis de Hölder sin comprometerse con la existencia de R como totalidad.

A pesar de que ciertos aspectos de la posición de Weyl respecto a su crítica del análisis no sea todo lo clara que desearíamos, debemos destacar lo que de original aporta un libro como *El continuo*, inaugurando una nueva forma de pensar el concepto de número real y el análisis. Las fructíferas consecuencias que tuvo y ha tenido para la matemática se dejan sentir todavía hoy, debido a su forma de abordar la cuestión de los fundamentos. Además, su aproximación es quizá, junto con la realista, la que ha tenido más éxito, si se mide éste por la cantidad de preguntas abiertas y respuestas halladas dentro, del desarrollo de la matemática moderna.

Notas

1. "In his book *Das Kontinuum* (1918), Hermann Weyl initiates a program for the arithmetical foundations of mathematics […]. Modern logical work has made it possible to give considerable substance to Weyl's program, showing it to be surprisingly viable for scientifically applicable mathematics". [Feferman 1998, p. 249].
2. La forma en que nos parece que los conjuntos "pueden" ser definidos razonablemente se precisará más abajo. Veáse § 4, presente artículo.
3. En Weyl [1921], en el epígrafe tercero, se reflexiona sobre las distintas clases de proposiones en matemáticas. Trad. al inglés en [Mancosu 1997, p. 86].
4. Es en este punto donde el predicativismo de Weyl, predicativismo dados los números naturales, aplica su crítica al análisis clásico; y es, por tanto, el punto de bifurcación origen de una nueva corriente en lo tocante a la fundamentación de la matemática.
5. Weyl introduce los racionales como un par doble de naturales que cumple cierta relación.
6. Véase Feferman [1998], artículos: "Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later", "Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics".
7. Además de las mencionadas, Weyl rechaza, en el análisis que ha construido, las proposiciones siguientes: 1) El principio de cortadura de Dedekind: Sean A y B dos conjuntos de números reales, tal que cada número que es elemento de A es más pequeño que cada número de B, y sea además para cada fracción α un número *r* perteneciente a A y un número *n* perteneciente a B, tal que + α no pertenece al dominio *n-r:* entonces existe uno y sólo un número real *c* tal que ningún real de A es mayor que *c* y ninguno que sea elemento de B es menor que *c.* 2) Cada conjunto infinito acotado de números reales tiene un punto de acumulación. Véase Weyl [1918, pp. 58-59].
8. Weyl escribe, refiriéndose a la proposición cuarta, el efecto que tiene su rechazo sobre el principio de Dirichlet. Véase Weyl [1918, p. 60].
9. Feferman recuerda no obstante, que el propio Gödel tenía reservas respecto a su propia posición platónica. Así, en el artículo titulado "The present situation in the foundations of mathematics", encontrado en el *Nachlass* de Gödel, y reproducido en [Gödel 1995, pp. 36-53] con ocasión de una conferencia en 1933, Gödel escribe: "The result of the preceding discussion is that our axioms [of set theory], if interpreted as meaningful staments, necessarily presuppose a kind of Platonism, which cannot satisfy any critical mind and which does not even produce the conviction that they are consistent". Es por tanto evidente que Gödel, no se sabe bien por qué, cambió de actitud al respecto en 1944, fecha de la aparición del artículo arriba referido.
10. Se refiere en particular al sistema de los *Principia* de Russell.
11. Esta formulación no es única, a lo largo del tiempo ha sido escrita de varias maneras. Así, por ejemplo, otra formulación más elaborada es la siguiente: "A definition written in symbols is impredicative if it defines an object which is one of the values of a bound variable occurring in the defining expression." Véase Fraenkel *et al*. [1973, 38].
12. En el artículo "Weyl vindicated: *Das Kontinuum* seventy years later" se puede leer lo siguiente: "In this respect, Russell's ad hoc assumption of the Axiom of Reducibility is seen as a violation of the vicious circle principle, despite the predicative formalism of ramified type theory, "welche Kluft mich trotz allem noch von Russell trennt," and thus the necessity for Weyl to follow the "engeren Verfahren" of restricting to sets of level 0". Véase Feferman [1998, p. 266].
13. Este artículo surge como respuesta a una carta de Otto Hölder (véase más abajo el punto 2.3.).
14. El argumento ofrecido se hace en cierto modo "estándar". Esto es, Weyl utiliza este argumento en sus artículos de 1919, 1921, 1925 y 1946 variándolo levemente o ampliándolo según el caso.

15. Weyl define este concepto del siguiente modo: "Umfangsgleich nenne ich zwei Eigenschaften (natürlicher Zahlen) dann, wenn jeder Zahl, welche die eine besitzt, auch die andere zukommt, und umgekehrt; jeder Eigenschaft korrespondiert eine Menge in solcher Weise, dass umfangsgleichen Eigenschaften dieselbe Menge entspricht" [Denomino entonces extensionalmente equivalentes a dos propiedades (de los números naturales), si todo número que posee una, también posee la otra, y viceversa; a cada propiedad le corresponde un conjunto, de tal manera que propiedades extensionalmente equivalentes se corresponden con el mismo conjunto]. [WEYL 1919, p. 86].
16. En cursiva en el original.
17. Weyl utiliza en vez de supremo, el término *obere Grenze*, que se puede traducir por cota superior. Pero que realmente está pensando en el supremo, se deduce del hecho de que se refiere a *"die obere Grenze",* es decir, *la* cota superior. Así escribe: "Die obere Grenze dieser Menge reeller Zahlen ist selbst die Menge, derjenigen rationalen Zahlen x […]". Póngase esto en relación con lo que escribe en WEYL [1918, p. 23].
18. Aparece en MANCOSU [1997, p. 86] con el título "On the new foundational crisis of the mathematics".
19. Aquí existe un error de traducción. En el original alemán dice: "[W]enn es eine reelle Zahl E in der Menge A gibt, unterhalb deren x liegt"; lo que debe ser traducido por: "Si existe un número real E en el conjunto A menor que x (i.e., con x menor que E)".
20. Esto parece ser lo que Weyl tiene en mente, a tenor de lo que escribirá en WEYL [1946, p. 5]: "But the property $\gamma = [x]\ C(x)$ defined by (1) is certainly not identical in its meaning with any of the properties of level 1 because it is defined in terms of the totality of all propertites of level 1". La propiedad en cuestion es la del ínfimo, y (1) se define como: $C(x) = (\exists x)\ \{I(\xi) \cap (x \in \xi)\}$. $\gamma = [x]\ C(x)$ es el ínfimo de un conjunto de números reales no-negativos ξ, e $I(\xi)$ es una función proposicional cuyo argumento se refiere a propiedades de fracciones.
21. Weyl escribe que es "de principio extraordinariamente improbable que sea posible de una manera exacta establecer un concepto extensionalmente definido de k-propiedad, de modo que cada k-propiedad a definir, siguiendo el esquema de más arriba, a partir de la *totalidad* de las k-propiedades sea extensionalmente equivalente a una k-propiedad. En cualquier caso no existe *la sombra de una demostración* de una tal posibilidad" [WEYL 1919, p. 87] [Cursivas en el original].

    Aquí sin embargo, como vemos, Weyl no hace valer más que su intuición, y aunque ésta sea valiosa, en matemáticas (así como en lógica) no es determinante el considerar algo "extraordinariamente improbable"[*außerordentlich unwahrscheinlich*], y que no exista una demostración tampoco es algo que determine, si consideramos válido -como hace aquí Weyl- el principo del tercio excluso.
22. "[B]elongs so to speak, to a higher level of properties". Veáse MANCOSU [1997, p. 131].
23. Feferman [1998, p. 289] en el artículo "Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics", escribe lo siguiente: "There can be no objection to impredicative definitions when the totality in question is regarded *as having a clear and determinate extent* (cursivas mías)". Esto, parece ser, es lo que exige Weyl a su concepto "k-propiedad".
24. Ramsey afirma que la descripción "el hombre más alto en esta habitación", aunque se defina en términos de una totalidad de la que forma parte, es inocua, pues el objeto sólo se señala, y no se crea. Véase CARNAP [1931, pp. 49-50].
25. El artículo aparece en [MANCOSU 1997, p. 123] con el título "The current epistemological situation in mathematics".
26. El artículo de Hölder aparece en [MANCOSU 1997, p. 143] con el título "The alleged circulus vitiosus and the so-called foundational crisis in Analysis".
27. "Endliche Mengen kann man auf zweierlei Art beschreiben: entweder *individuell*, durch Aufzeigung jedes einzelnen ihrer Elemente, oder *generell*, gesetzmäßig, durch Angabe von Eigenschaften, die den Elementen der Menge und keinen andern Gegenständen zukommen. Bei unendlichen Mengen (darin liegt eben das Wesen des Unendlichen) ist der erste Weg unmöglich" [Se pueden definir los conjuntos finitos de dos maneras: de manera *individual*, mostrando cada uno de sus elementos, o de manera

general, mediante una regla, indicando sus propiedades, de las cuales son poseedores exclusivamente los elementos del conjunto y no otros objetos: para conjuntos infinitos (aquí radica la esencia del infinito) la primera manera es imposible]. Véase Weyl [1918, p. 13].

28. En Mancosu [1997, p. 143] aparece traducido de este modo el concepto, pues Hölder escribe en su artículo: "Que el conjunto de los números racionales absolutos están divididos completamente en dos clases, de modo que cada número de la primera clase es más pequeño que cualquier número de la segunda y la primera clase no tiene ningún número racional que sea el más grande. Se tiene entonces a través de esta división una llamada cortadura de Dedekind en el dominio de los números racionales y se puede hablar de números "superiores" e "inferiores" de la cortadura". Véase Hölder [1926, p. 246].
29. Quisiera recordar algo que escribe Bernays en [Hilbert, n.d.] (¿recogiendo quizá las ideas de su maestro?) sobre el concepto de número real y la posición axiomática, en referencia a Weyl y a su crítica sobre la existencia de un círculo vicioso en el análisis. La consideración que hace Bernays, es que la posible dificultad a la hora de definir el concepto general de número real de una forma coherente o satisfactoria (recuérdese a este respecto la distinción entre conceptos de contenido definido y extensionalmente definido), no impide la adopción de la definición de cada número real a partir de las cortaduras de Dedekind o de sucesiones convergentes de números racionales: "Die Zahlfolgen und Schnitte dienen dann zwar auch zur Definition der einzelnen reellen Zahlen, aber nicht zur Definition des Begriffs der reellen Zahl. Vielmehr ist dem Begriffe nach eine reelle Zahl einfach ein Ding des betrachten Systems". [Las sucesiones y las cortaduras sirven ciertamente como definición de los números reales individuales, pero no como definición del concepto de número real. Más bien un número real es, según el concepto, simplemente un objeto del sistema considerado].
30. "Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne" [En tanto que denomino a la aritmética (álgebra, análisis) un parte de la lógica]. [Dedekind 1961, p. 8].
31. Quizá conviene distinguir aquí, la diferencia entre "para cualquier conjunto de reales" y "para todo conjunto de reales". El sintagma "para cualquier", no debe entenderse de forma impredicativa, es decir, considerando existente una totalidad como R.
32. El Weyl de *El continuo*, para ser precisos.
33. Escribo *parte*, adoptando, para expresar la idea más claramente, un punto de vista realista.
34. Nótese que, como escribe Ferreirós [2011], el axioma de elección considerado de esta forma no capturaría totalmente la idea de la existencia de conjuntos arbitrarios de elementos (cuasi-combinatorialismo).

Bibliografía

Carnap, R. (1931) *"Die logizistische Grundlegung der Mathematik"*. *Erkenntnis 1*, 91—105. [English translation: "The logicist foundation of mathematics". En: P. Benaceraff y H. Putnam (eds.) (1987) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings.* Cambridge, Cambridge University Press, pp. 41-52].

Chihara, C. S. (1973) *Ontology and the vicious-circle principle*. Ithaca, Cornell University Press.

Dedekind, R. (1961) *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Braunschweig, Vieweg. [Versión en castellano: Dedekind, R. (1998) *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid. Alianza Editorial. Traducción e introducción José Ferreirós.]

Feferman, S. (1998) *In the light of logic*. New York. Oxford University Press.

Ferreirós, J. (2011). "On arbitrary sets and ZFC". *The Bulletin of Symbolic Logic*, *17(3),* 361-393

Fraenkel, A. A., Bar-Hillel y Lévy, A. (1973) *Foundations of set theory*. Amsterdam, Elsevier.

Gödel, K. (1981) *Obras completas*. Ed. J. Mosterín. Madrid, Alianza Universidad.

GÖDEL, K. (1995) *Collected Works*. [S. Feferman, Editor-in-Chief]. New York, Oxford University Press.

HILBERT, D. (n.d.) *Nachlass*. "Bernays über Weyls Kritik der Analysis". Cod. Ms. 685, Nr.3, Bl. 13-20.

HÖLDER, O. 1926. "Der angebliche Circulus Vitiosus und die sogennante Grundlagenkrise in der Analysis". *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physische Klasse, 78*, 243–250.

MANCOSU, P. (1997) *From Brouwer to Hilbert*: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s New York. Oxford University Press.

WEYL, H. 1918. *Das Kontinuum*. Leipzig, Veit & Comp.

WEYL, H. 1919. "Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *28*: 85-92

WEYL, H. 1921. "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik". *Mathematische Zeitschrift, 10*, 37-79.

WEYL, H. 1925. "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik". *Symposion 1,* 1-32

WEYL, H. 1946. "Mathematics and logic. A brief survey serving as preface to a review of *The Philosophy of Bertrand Russell*". *American Mathematical Monthly, 53*, 2-13.

ARTÍCULOS

Revista de **Filosofía**
ISSN: 0034-8244

https://dx.doi.org/10.5209/resf.66900

EDICIONES
COMPLUTENSE

Análisis de la relación entre el continuo intuitivo y el matemático en *Das Kontinuum*

Víctor González Rojo[1]

Recibido: 6 de diciembre de 2019 / Aceptado: 5 de abril de 2020

Resumen. En este artículo pretendo discutir la conclusión a la que llega Weyl en su libro *El continuo* sobre la relación entre el continuo intuitivo y el matemático. Esto me sirve a su vez para analizar más profundamente estas dos nociones, y postular la propiedad de ausencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*] como fundamento del continuo intuitivo y, en consecuencia, del matemático. Propongo además una alternativa idealista para el tratamiento del problema del continuo.
Palabras clave: continuo; fenomenología; predicativismo, *Lückenlosigkeit*; intuición.

[en] Analysis of the relationship between intuitive and mathematical continuum in *Das Kontinuum*

Abstract. In this paper I discuss the conclusion reached by Weyl in his book *The continuum*, dealing with the relation between mathematical and intuitive continuum. This helps me to analyze more deeply these ideas and to suggest the property of gaplessness [*Lückenlosigkeit*] as grounds for the intuitive continuum, and therefore for the mathematical one. Bearing this in mind, I will propose an alternative based on classic idealism to deal with the continuum problem.
Keywords: continuum; phenomenology; predicativism; *Lückenlosigkeit*; intuition.

Cómo citar: González Rojo, V. (2021): "Análisis de la relación entre el continuo intuitivo y el matemático en *Das Kontinuum*", en *Revista de Filosofía* 46 (2), 255-270.

[1] UNED
vgonzalez677@alumno.uned.es

1. Introducción

En el libro *El continuo: Investigaciones críticas sobre los fundamentos del análisis*[2] [*Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*] se analizan dos concepciones de continuo: la intuitiva y la matemática. Weyl se propone investigar "las relaciones entre lo dado (intuitivamente) de forma inmediata y los conceptos formales (de la esfera matemática)" (Weyl, 1918, Pref., p. IV) en relación con la idea de continuo.

La concepción *intuitiva* es considerada desde un punto de vista fenomenológico; la *matemática* la desarrolla partiendo de la tesis de que el análisis clásico contiene un círculo vicioso [*circulus vitiosus der Analysis*], lo cual invalida algunos de sus resultados y obliga a buscar vías más seguras ["sustituir el suelo poco firme por cimientos de solidez más fiable" (Weyl, 1918, Pref., p. I)] para escapar de las dificultades que se presentan al considerar definiciones de conceptos matemáticos fundamentales como el concepto de número real o el de supremo de un conjunto de números reales.

En *El continuo* se critica la concepción Cantor-Dedekind del análisis basada en, por un lado, la perspectiva conjuntista iniciada por Cantor –posteriormente desarrollada por Zermelo– que cristalizará en la teoría axiomática de conjuntos; y por otro, la construcción de los números reales propuesta por Dedekind[3].

La solución de Weyl se conoce hoy como "predicativismo dado (o módulo) los números naturales". Posición respecto de los fundamentos de la matemática que admite el conjunto de los naturales como totalidad intuitivamente dada, y que pretende, a partir de ellos, construir los números racionales y los reales.

En cuanto a la idea de continuo intuitivo[4] desarrollada en el libro, Weyl tiene sobre todo como guía a Husserl[5]. Aunque considera el continuo intuitivo espacio-temporal, se centra fundamentalmente en el tiempo al llevar a cabo su estudio fenomenológico y su relación con el análisis matemático (Weyl, 1918, p. 67).

Nuestra hipótesis de trabajo será entonces la de que Weyl concibe la intuición del continuo temporal como la describe Husserl[6], a saber: la forma de una corriente de experiencias [*Erlebnisstrom*], donde cada durar [*Dauern*] de la experiencia "se integra en un continuo sin fin de duraciones" (Husserl, 1913, p. 163).

Frente a la concepción que podríamos llamar, fenomenológico-predicativista de Weyl, propondremos la idealista[7], pues pretendemos mostrar en qué medida es posible cerrar el "abismo" [*Kluft*] que según el matemático separa a estas dos

---

2 Un profundo análisis de *El continuo*, así como de su relación con otras corrientes fundacionales de la matemática, además de posibles formalizaciones, se encuentra en Feferman (1998, pp. 249-283).

3 Fundamentalemente en *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. En esta construcción intervienen elementos conjuntistas, geométricos y aritméticos. Cf. Feferman (2009) p. 180.

4 Cita los capítulos 81 y 82 de '*Ideen*' donde el filósofo trata del problema de la naturaleza del tiempo. Cf. Weyl (1918), p. 70.

5 Chevalley y Weil escriben –citando a Weyl– cómo el interés despertado por Husserl en el joven Weyl, su transición desde el positivismo ("*Mon tranquille positivisme fut ébranlé*") a la fenomenología proviene de que la que sería su mujer estudió con el filósofo en Göttingen. Cf. Chevalley, Weil (1957), pp. 157-158.

6 Sobre cómo Weyl *interpreta* el continuo intuitivo temporal cf. Da Silva (1997), Tieszen (2000), Van Atten, van Dalen, Tieszen (2001).

7 Fundamentada en Kant, y sobre todo en Schopenhauer. Hay que decir no obstante, que el propio Weyl se interesó por el idealismo, aunque en su caso por el de raíz fichteana, debido a su contacto con Fritz Medicus en la ETH de Zürich. Cf. Sieroka (2010) y (2007).

concepciones de continuo. Para ello fundamentamos nuestra crítica en que no es posible concebir el continuo matemático como independiente del intuitivo en tanto que el paso conceptual viene a estar sustentado en la tesis idealista de que '*no existe sujeto sin objeto*' (y asimismo la recíproca). Y que es por tanto en el sujeto, al ser lo inextirpable en la experiencia –al que se refiere al cabo *la durée* bergsoniana (Weyl, 1918, p. 68) entendida como continuidad temporal–, donde se fundamenta la percepción intuitiva de continuidad temporal.

La matemática formula esta idea usando del par conceptual indisociable punto-línea de origen geométrico, cuya aritmetización da cuenta el concepto de número real, el cual, junto con el de número racional y las propiedades de densidad y de ausencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*], expresada en el axioma de Cantor-Dedekind[8], caracterizan al continuo matemático.

En el apartado 2 tratamos el punto de vista matemático que adopta Weyl al iniciar su estudio del continuo. En el 3 discutimos la relación entre el continuo matemático predicativista y el intuitivo considerado fenomenológicamente. En el apartado 4 expondremos nuestra propuesta idealista para explicar la relación entre ambos continuos, y en el 5 concluiremos que la dualidad de la intuición en el análisis de la noción continuo weyliana creeemos que puede ser evitada si se adopta aquella propuesta.

2. Perspectiva matemática

El punto de partida matemático en *El continuo* es doble:

1) por un lado está la asunción –en parte ya introducida por Poincaré– de que la aritmética tiene como fundamento la intuición de la iteración de procesos. Lo que se puede adscribir a la sucesión de los números naturales, así como la aceptación del principio de inducción como la forma de demostración fundamental.

Es por ello que Weyl introduce en su libro el concepto de 'principio de iteración' [*Iterationsprinzip*] –que se sustancia en el principio de inducción matemática– y el de 'proceso matemático' [*mathematischer Prozess*] –modo en se forman nuevos conceptos a partir de otros ya establecidos (Beisswanger, 1965, p. 137)– como los pilares sobre los que descansa el fundamento y la práctica matemática.

Es interesante notar que Weyl estudia primero la antinomia de Richard en relación con el concepto de cardinal propuesto por Cantor, y la solución dada por Russell a la antinomia que surge en la teoría naif de conjuntos cuando se pretende definir el conjunto de conjuntos que no se contienen a sí mismos. Y es interesante –como decimos– pues finalmente la *solución* weyliana a esta paradoja supone el inicio del desarrollo del predicativismo[9], y por ende su concepción de la relación entre el

---

8 El axioma afirma la correspondencia biyectiva entre los números reales y los puntos de una línea.

9 A Poincaré y Russell se les considera precusores del predicativismo. Sucintamente, la idea subyacente original es que las definiciones de objetos matemáticos deben formularse de modo que el objeto a definir no forme parte de la totalidad a la que pudiera referirse. Si fuera así se considera la definición impredicativa. Son predicativas por tanto las que no caen en este "error". En Weyl (1918, p. 23) se da como definición incorrecta la definición clásica de supremo, por caer en lo que se conoce como 'principio del círculo vicioso' si no se consideran los tipos y niveles russellianos (ver más abajo en n. 14 la definición dada en *El continuo*). Weyl escribe: "Sea M un conjunto acotado de reales de primer nivel. Para construir su *supremo*, se tiene que formar un conjunto de racionales γ, al cual pertenece un racional r si y sólo si *existe* en M un real de primer nivel que es mayor que r. El conjunto γ tiene las propiedades *a*) , *b*) y *c*) [definidas anteriormente en Weyl (1918, p. 22)], y es por tanto

continuo matemático y el intuitivo.

2) El segundo punto surge precisamente de lo mencionado anteriormente, lo que le lleva a analizar la lógica ramificada de tipos[10] y a discutir el círculo vicioso[11] que se encuentra (según su tesis) en el núcleo del análisis clásico (Mancosu, 1997, pp. 131-132). Es decir, lo que propone Weyl es una crítica radical al análisis como punto de partida de su propuesta predicativista, de la que se sirve para investigar la relación entre las dos clases de continuo.

El predicativismo enfatiza la diferencia entre el dominio de los naturales y el dominio de los subconjuntos de los naturales ($\wp(\boldsymbol{N})$ en el sistema de Zermelo-Fraenkel). Sin duda está "bien definido" qué es un conjunto de números naturales, pero no está correctamente definida la *totalidad* de dichos conjuntos. Aquí es donde Weyl pone una objeción de principio a la teoría axiomática de conjuntos, y se ve en la obligación de apartarse de ella. En consecuencia, la lógica clásica no puede aplicarse a dominios como $\wp(\boldsymbol{N})$, ni análogamente al dominio de los reales entendido al modo clásico. En su lugar hay que proceder a la definición de conjuntos a partir de $\boldsymbol{N}$ y de los métodos lógicos admitidos dentro de las restricciones del predicativismo.

Ahora bien, cabe mencionar que 1) y 2) son disociables[12]. Es cierto que si bien están relacionados, se pueden tratar de manera independiente. De modo que se puede criticar la concepción de continuo de Cantor-Dedekind sin comprometerse necesariamente con una visión de las matemáticas como la que Weyl nos presenta en su libro –o en artículos posteriores de la década de los veinte donde su posición ha derivado hacia un intuicionismo de corte brouweriano[13].

Veamos más detalladamente las ideas de Weyl respecto[14] a las dos nociones de continuo referidas.

3. Idea de continuidad en *El continuo*

En la sección sexta que lleva por título '*El continuo intuitivo y el matemático*' se trata

---

un número real, *pero de segundo nivel* , pues en su definición »existe« ocurre en connexión con »un real de primer nivel« (i.e., »un conjunto de primer nivel de racionales« o »una propiedad primitiva o derivada de primer nivel«) ". Weyl argumenta que si no se observaran los diferentes niveles se caería en un círculo vicioso. La definición sería impredicativa pues se pretende definir el supremo de un conjunto acotado (superiormente) de reales, a partir de la totalidad de números reales de la que el propio supremo forma ya parte por ser éste también un real. Pero esto es precisamente lo que hace el análisis clásico. Nótese que la crítica tiene dos vertientes: 1) el proceso de construir supone que el objeto no existía previamente; 2) la posibilidad de obtener la totalidad de los reales de forma "tan precisa" como la de los naturales.

10 Este tipo de lógica fue desarrollada por Russell para evitar la paradoja homónima. Su idea era considerar a las variables clasificadas en tipos, y las funciones proposicionales (predicados, cuyo valor de verdad depende del valor dado a la variable. V. gr., p(x) = 'x es humano') en órdenes dependiendo de la clase de variables que contenga. El orden de una función proposicional se define como el menor natural mayor que el orden de todas sus variables cuantificadas. A su vez, las variables de tipo *n*, sólo pueden recorrer entidades de orden *n*. Los individuos u objetos de una teoría son considerados de tipo y orden 0, y así sucesivamente. Cf. Chihara (1973), pp. 19-23.

11 Weyl recoge la formulación de Russell de este principio de la siguiente forma: "*No totality can contain members defined in terms of itself*". Cf. Weyl (1918), p. 36.

12 Para un estudio profundo del tema cf. Hölder (1924).

13 Sobre cómo Weyl y Brouwer entienden el intuicionismo, y cómo no están de acuerdo en su interpretación cf. Mancosu, (1997), pp. 77-78.

14 Conviene recordar que en 1918, cuando Weyl escribe *El continuo* Brouwer empieza a publicar sus ideas maduras.

con profundidad la diferencia entre el continuo experimentado fenoménicamente[15] y el matemático, esto es, se analiza la idea fenomenológica de continuo y el predicativismo.

En el capítulo se hace referencia a la filosofía de Bergson (Weyl, 1918, p. 68) sobre el tiempo y se expone el concepto de *la dureé*, entendido por Weyl como el contrapunto filosófico en el análisis de la idea matemática de continuo dentro del marco del continuo temporal fenoménico.

La sección comienza con una recapitulación de lo que lleva hecho hasta el momento que no es más que, a partir de los principios de definición [*Definitionsprizipien*] (Weyl los expone en §2 'Los principios de la combinación de juicios' [*Die Prinzipien der Urteilskombination*]) dados en el capítulo primero (Weyl, 1918, pp. 4-6) comenzando por los números naturales y siguiendo el hilo conductor de la aritmética y el análisis, construir una teoría pura de números [*reine Zahlenlehre*].

Teniendo en cuenta estas ideas Weyl ha afirmado algo clave: que la propiedad de continuidad de una función es una propiedad *transfinita* (Weyl, 1918, p. 65). Esto significa que responder a la pregunta de si una función definida es continua o no –con ayuda de los principios expuestos en la primera parte del libro– supone tener una *visión total* no sólo de los números naturales, sino de los conjuntos cuatridimensionales de números naturales (es decir, de números reales, tal y como los define Weyl) que surgen de la aplicación de los principios lógicos dados (Weyl, 1918, pp. 4-8, pp. 26-29).

Más adelante propone un ejercicio mental para explicar su afirmación. Si el sistema de principios que ha expuesto se considera "abierto", en el sentido de que sea posible añadir otros, *debe* quedar sin contestar la pregunta de si una función es continua o no. Pues si fuera posible extender de forma consistente los principios lógicos, se podrían considerar más números reales, y por tanto responder a la pregunta de manera distinta dependiendo de cómo fuera hecha esta extensión.

Weyl sigue su análisis considerando un punto de masa en función del tiempo como una función continua en un intervalo real. Después introduce el análisis fenomenológico del tiempo aplicado a la experiencia: 'observar un lápiz sobre una mesa'. Para Weyl se puede afirmar que durante un intervalo de tiempo el lápiz ha estado en la mesa, y que es absurdo imaginar que la extensión de nuestros principios de definición da derecho a pensar que el lápiz ha estado durante momentos *agregados* en Sirio. Con lo cual llega a la conclusión de que las consideraciones *lógicas* sobre principios de definición y su posible extensión no nos acercan a la naturaleza intuitiva del continuo en su relación con el concepto de número real definido.

Weyl deja claro no obstante, que aquélla relación se dejaría tratar si se entiendiera el "ahora" como un punto, y si se pudieran explicitar puntos temporales de forma precisa.

Dados dos puntos temporales distintos, las relaciones 'anterior a' y 'posterior a' se dan siempre. Y asimismo surge de ellas la idea de "segmento temporal", aunque haya que notar –escribe Weyl– que el contenido experiencial es irrelevante a la hora de *medir* este tipo de segmentos, pues lo "experimentado" no es significativo en la medición.

Se pueden entonces definir –si suponemos que la relación de igualdad definida

[15] "Para permanecer en el dominio de lo dado inmediatamente [*unmittelbar Gegebenen*], mantengámonos en el tiempo fenoménico (en contraposición con el objetivo)" (Weyl, 1918, p. 67).

matemáticamente tiene el mismo sentido en la intuición temporal– relaciones binarias entre puntos, y cuaternarias entre segmentos, y por tanto afirmar la existencia del lápiz sobre la mesa durante un determinado tiempo, admitiendo a su vez que es correcta la idea de la 'división' del tiempo en puntos. Con lo cual, para un punto temporal P es posible construir aritméticamente por medio de los principios de definición, dominios de racionales[16] a los cuales pertence λ si y sólo si existe un punto temporal L anterior a P, para el que se cumple que

$$OL = \lambda OE \qquad (1)$$

con *OE* un intervalo temporal dado. Es decir, si existe un número real λ (de la forma definida por Weyl (Weyl, 1918, pp. 51 y ss.)) que hace verdadera la ecuación. Además, con ello se afirma asimismo la inversa: que para cada número real existe un punto temporal determinado.

Weyl admite que si se puede establecer esta igualdad, tendría sentido la correspondencia matemático-intuitiva, y por tanto se podría desarrollar ariméticamente una teoría pura del tiempo. Si no fuera así, se podría pensar sin embargo que mediante la modificación y extensión de los principios de definición quizá fuera posible alcanzar esta situación. Pero si no se alcanzara del modo en que acabamos de ver, se debería establecer una teoría del continuo *autónoma*.

Sea como fuere, siempre se tendría que dar respuesta a la ecuación (1) considerando las condiciones mencionadas. Y a preguntas como: ¿vale el principio de cortadura de Dedekind[17] para los puntos temporales? ¿O el principio de convergencia de Cauchy[18]? Cuestiones para las que no nos podríamos librar del concepto de conjunto (o sucesión), no importa lo que hiciésemos, y cuyo alcance está además inserto en los principios de definición.

Estos vaivenes de Weyl sobre la "posibilidad" que deja abierta, no son más que la preparación del camino para establecer su tesis sobre la imposibilidad de hacer corresponder los dos continuos.

3.1 Imposibilidad de la correspondencia entre continuos

Weyl mantiene la idea de que todo lo que *deseamos* respecto a la posibilidad de desarrollar una teoría pura del tiempo es un *sinsentido*. Escribe: "[L]a intuición del tiempo permanece frente a estas preguntas deudora de respuesta. Es posible que la categoría de los números naturales pueda establecer el fundamento de una disciplina matemática, pero no el continuo, como se presenta en la intuición. Las condiciones para ello (ver cap. I, § 1) no se cumplen; el concepto de punto en el continuo adolece ya de apoyo en la intuición. Es mérito de la filosofía bergsoniana haber indicado

16 En *El continuo* Weyl define los números racionales como dominios cuatridimensionales de números naturales, y los números reales como dominio de racionales que cumplen unas determinadas condiciones. Cf. Weyl (1918), pp. 51 y ss.

17 Definida como un par ordenado de conjuntos de racionales $A < B$. Tal que: 1) todo racional está exactamente en uno y sólo uno de los conjuntos A, B; 2) ni A ni B son el conjunto vacío; 3) todo elemento de A es menor que cualquier elemento de B; 4) A no tiene supremo, i.e., para cada p en A, existe un r en A, tal que $p < r$.

18 Dada una secuencia de reales: $x_1, x_2 \ldots x_m \ldots x_n \ldots$, para cualquier real positivo ε existe un número natural N tal que si m y n son mayores que N, el valor absoluto de la diferencia entre dos reales cualesquiera x_m y x_n es menor que ε.

con insistencia este profundo alejamiento entre mundo conceptual matemático y la continuidad temporal experimentada directamente" (Weyl, 1918, p. 68).

Más adelante inicia con un ejemplo un refinado análisis fenomenológico donde observa la diferencia entre la duración y la posibilidad de que sea representada por puntos de un flujo. [*Ablauf*]. Weyl se pregunta de dónde procede que el dato de la conciencia no se dé totalmente como un *ser* (como por ejemplo el ser lógico de los conceptos), sino como un *ser-ahora* que dura y cambia [*als ein fortdauerndes und sich wandelndes Jetzt-sein* (Weyl, 1918, 69)].

Si suponemos un *ahora-puntual*, i.e., un contenido experiencial cambiante y que se transforma constantemente, suponemos un flujo temporal en el que se pueden "identificar" puntos del mismo. Cada punto se corresponde con una determinada totalidad experiencial [*Erlebnisganze*]: si la conciencia se fija en ese punto, entonces poseerá la correspondiente totalidad experiencial; sólo eso *es*. Luego la pregunta pertinente reza: ¿De dónde *proviene* la concreta duración de cada experiencia?

Si nos atenemos a la idea de puntos singulares y *aislados entre sí* (Weyl, 1918, p. 69, n. 2) del flujo sólo podemos dar una respuesta: que solamente se tiene la experiencia de *ese* punto temporal; a ese punto pertenece sin embargo un más o menos claro *recuerdo*, cuyo objeto intencional es la experiencia que tuve en un punto temporal del pasado (se deja sin explicar el problema de dónde debe proceder la validez de ese recuerdo).

Si se tiene por ejemplo una percepción lumínica de corta duración –prosigue Weyl–, se tiene en el momento A no sólo la experiencia de la percepción, sino al mismo tiempo los recuerdos "de" las experiencias de percepción [*Wahrnehmungserlebnisse*] de todos los momentos pasados que suceden en esa corta duración; más aún: me acuerdo en A no sólo de la experiencia de la *percepción* en el corto momento pasado B en el cual tuvo también lugar una percepción, sino de la *completa* experiencia de ese momento B, y esto contiene, además de la percepción, los recuerdos de todos los momentos anteriores de las experiencias tenidas. Por tanto, la percepción continuada consistiría en los infinitos recuerdos contenidos los unos en los otros y los infinitos sistemas correspondientes con estos recuerdos. Se puede decir por tanto que lo pasado es lo "encajado" [*das Eingeschachtelte* (Weyl, 1918, p. 69)].

Ahora bien, Weyl afirma que está claro que nuestra experiencia no se corresponde con nada de esto, y que es contradictorio que se dé una tal trabazón de momentos experienciales *puntuales* y encajados los unos en los otros sin fin como una unidad cerrada y completa.

La interpretación de un flujo o proceso temporal que consta de puntos *disociables* es incorrecta: "Se nos escapa precisamente lo que representa la continuidad, el discurrir de punto a punto, aquello que en el presente permanente dura, que permite fluir y discurrir constantemente hacia el pasado que se disuelve" (Weyl, 1918, p. 70).

Para Weyl lo que se tiene en la conciencia es algo que se da al mismo tiempo y que es una unidad: es el ser-ahora y aquello, lo que es, fluye con su posición temporal; y por ello también el ser permanente es algo siempre nuevo, que perdura y cambia. Lo que desaparece puede aparecer, pero no como una experiencia "nueva", sino más bien como contenido de un recuerdo (convincente) que podemos caracterizar como *lo pasado*.

En la imagen objetiva del *transcurrir* de la vida –imagen que nos formamos– se presenta a su vez, frente a ella, lo que ahora *está* ahí como lo pasado a establecer. Luego, "para el tiempo objetivo concebido resulta así que: 1. un sólo punto en sí no es independiente, es decir, es en sí mismo la pura nada y existe sólo como “punto de paso” (lo que no se comprende matemáticamente de modo natural); 2. que está fundado en la esencia del tiempo, (y no en las posibles inexactitudes de nuestros medios), que un determinado punto temporal no se deje exhibir completamente, que siempre sólo sea posible un fijar aproximado y ninguno exacto. Del mismo modo, esto sucede para cualquier continuo intuitivo dado, en particular también para cada continuo de la extensión espacial” (Weyl, 1918, p. 70).

Weyl afirma, siendo esta su tesis principal, que “el continuo intuitivo y el matemático no se superponen; entre ellos existe un profundo abismo” (Weyl, 1918, p. 71). Ahora bien, existen motivos razonables que nos llevan del uno al otro. Los mismos motivos que hacen que nos interesemos por la investigación del mundo físico escondido “por detrás” [“*hinter*”], exacto y sin cualidades, “realmente objetivo” [*wahrhaft objektiv*].

De este modo es como descansa –según Weyl– a partir de la construcción del análisis propuesta en el libro, una *teoría del continuo* que se muestra razonable (más allá de la exactitud de sus conclusiones lógicas) de la misma forma que una teoría física.

El concepto de número real se puede entender como el esquema abstracto del continuo con su infinito encajamiento [*unendlichen Ineinander*] posible de *partes* las unas en las otras. De este modo, el concepto de función es el esquema de dependencia de continuos que se “solapan” (del que un caso particular es por ejemplo un punto que se mueve; es decir, el solapamiento de un continuo temporal mediante uno lineal).

Luego la diferencia entre el infinito encajamiento de partes y el de puntos (Weyl, 1918, p. 69) es fundamental para entender el continuo intuitivo. Weyl, adoptando el punto de vista fenomenológico aplicado a una experiencia temporal llega a la conclusión de que al no corresponderse con la ‘intuición puntual’, su correlato matemático no puede ser el del análisis clásico, ni tampoco el del weyliano.

Esto tiene relevancia epistemológica en la adecuación de la matemática a la física, y Weyl –consciente de ello– lo exhibe explicando que el hecho de que para los conceptos de número real y función continua como son definidos en *El continuo* sea válida la proposición que afirma que: “Una función continua toma todos los valores intermedios; es decir, si f es una función continua y f(a) < v < f(b), entonces existe un número real c entre a y b (a < c < b), tal que f(c) = v” (Weyl, 1918, p. 62), es una justificación racional de la explicación exacta del movimiento en el mundo de la objetividad física. Así, afirma que “no subyace el exacto punto temporal o espacial en la duración o en la extensión como su último e indivisible elemento, sino que sólo la penetrante razón puede concebir aquellas ideas a través de lo que nos es dado, y sólo en la pura esfera formal cristaliza el correspondiente concepto aritmético-analítico de número real en su total exactitud” (Weyl, 1918, p. 71).

3.2 Conclusiones de Weyl

Weyl profundiza aún en la posibilidad de intentar establecer una teoría del tiempo y el espacio como una ciencia matemático-axiomática independiente, y observa que para ello se deben tener en cuenta al menos tres cosas:

La referencia a un sólo punto no es posible. Los puntos no son individuos, y por tanto no pueden ser caracterizados por sus propiedades. Mientras que el continuo de los números reales consiste en individuos genuinos, el continuo del tiempo o del espacio es homogéneo. De este modo, puntos y conjuntos de puntos no se dejan nunca determinar absolutamente, sino sólo dependiendo siempre (i.e., como funciones) de un sistema de coordenadas.

La segunda es que el axioma de continuidad [*Stetigkeitsaxiom*] debe ser formulado de forma que cada punto P de una unidad de longitud OE se corresponda con un número real como abcisa, y a la inversa. Sólo en virtud de este axioma tienen todos los juicios relevantes[19] un *claro sentido*, a pesar de las circunstacias mencionadas en el punto anterior.

La tercera es que si establecemos un nuevo fundamento en la teoría pura de números, por el cual, junto con los números naturales tomemos a los reales como categoría fundamental –como hizo respecto a los racionales–, entonces se puede, sobre esta base, construir un edificio teórico que denomina *hiperanálisis*[20]. El cual no coincide con el análisis que ha construido en secciones anteriores del libro, pues existen en el hiperanálisis, por ejemplo, más conjuntos de números reales que en el análisis. Para éstos sucede que en su definición aparece el cuantificador existencial en conexión con "un número real" (i.e., una variable que se refiere a los números reales) . En el hiperanálisis no se cumple por consiguiente, ni el principio de convergencia de Cauchy ni los teoremas sobre funciones continuas en general (sólo se cumplen para aquellas funciones y sucesiones que ya aparecen en el análisis).

Según Weyl, el intento (permanente) de partir de un nivel más alto que el nivel básico de los números naturales se debe contrarrestar siempre, pues *sólo el análisis y no el hiperanálisis proporciona una teoría útil*[21] *del continuo* y de las posibles dependencias entre continuos que se solapan entre sí. Aunque, suponiendo que alguien aceptara el hiperanálisis, se debe tener en cuenta que en virtud del axioma dado en el segundo punto, considerando un sistema de coordenadas subyacente, existiría una correspondencia continua no sólo entre puntos espacio-temporales de un lado y números reales de otro, sino también entre los conjuntos puntos y conjuntos de conjuntos de puntos. Luego entre todos los conjuntos de la teoría del espacio-tiempo de un lado y todos los conjuntos del *hiperanálisis* de otro. O dicho de un modo más exacto, existiría esa correspondencia entre los conjuntos del hiperanálisis y las funciones del sistema de coordenadas en la teoría del espacio o del tiempo (si se trataran como continuos independientes). Es por ello que Weyl advierte que no puede ser reemplazado el mencionado axioma "en la hasta ahora habitual construcción axiomática de la geometría, mediante el (ya en el hiperanálisis no válido) principio de convergencia de Cauchy u otro parecido. Y de esto se obtiene todavía algo más –a causa de la inoperabilidad del hiperanálisis– algo que no se puede de ningún modo abordar, a saber, hacer de la teoría del tiempo y de la geometría ciencias axiomáticas independientes" (Weyl, 1918, p. 73).

Al finalizar el libro escribe que frente a los que le reprochan que ninguno de los

---

[19] Weyl ha definido el concepto 'juicio relevante' [*einschlägiger Urteil*] en la sección segunda de la parte primera de *El continuo*. Concretamente define 'juicio relevante' como el juicio que no posee posiciones vacías y que afirma un estado de cosas [*Sachverhalt*]. Cf. Weyl (1918), p. 6.

[20] Considerado desde el punto de vista de la teoría de tipos, esto se corresponde con añadir un tipo superior (de forma cumulativa). El predicativismo se mantiene, por razones de simplicidad lógica, en el tipo 1.

[21] "*Sólo el análisis, no el hiperanálisis proporciona una teoría útil del continuo*". Cf. Weyl (1918), p. 72. [Cursivas en el original]. Lo que Weyl entiende por 'útil' [*brauchbar*] es algo que no explica, pero que sin duda tiene que ver con lo que escribe en el prólogo sobre la fundamentación segura del análisis, hasta el momento no conseguida, y con las complejidades lógicas que implica introducir tipos superiores.

principios lógicos a los que se debe recurrir para definir de forma exacta el concepto de número real se encuentran en la intuición del continuo, él ha aclarado sin embargo que el continuo de la intuición y el del mundo conceptual matemático son tan ajenos entre sí, que la exigencia de coincidencia debe ser tenida por absurda. No obstante, recuerda que aunque sea así se requieren esquemas abstractos proporcionados por la matemática para posibilitar la ciencia exacta de dominios de objetos en los cuales los continuos juegan un papel decisivo.

4. Crítica a la idea de continuo en *El Continuo*

Llegados a este punto nos proponemos exponer otra alternativa a la hora de tratar la relación entre ambos tipos de continuo. Lo que se pretende no es ajustar dos ideas de continuo con diferente origen (el matemático, desde la perspectiva predicativista; el filosófico, desde la fenomenológica), sino que, considerando un origen único, intentar aclarar el papel de la matemática respecto a esta intuición.

4.1. *Lückenlosigkeit* como caracterización del continuo

Si observamos la formulación del axioma de continuidad de Dedekind[22] vemos que se puede entender como la formalización de la intuición de la propiedad –consustancial al continuo intuido– de no existencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*]. Si esta idea no se considerara necesaria, se podría pensar que la representación matemática del continuo podría ser llevada a cabo sólo mediante los números racionales. Pero el hecho de que se den relaciones entre los racionales que "implican"[23] la existencia de irracionales –inconmensurabilidad–, obliga a añadir la noción mencionada a la idea de continuo matemático.

Podemos preguntarnos entonces en qué sentido está esto bien fundamentado. Si bien es cierto que el axioma de continuidad se puede entender como de origen geométrico y por consiguiente se deberían admitir como dados conceptos como el de punto o línea, es decir, dejar a un lado la posible construcción aritmética de los reales, creemos que la diferencia de cardinalidad entre reales y racionales es algo que debe tenerse en cuenta al constatar la inconmesurabilidad, y que es por esta diferencia por la que se hace de nuevo ostensible la idea de no existencia de espacios vacíos, algo que no se consigue si se consideran exclusivamente los racionales. La introducción de Dedekind de los números irracionales proporciona una determinación más precisa del continuo intuitivo al considerar la propiedad de ausencia de espacios vacíos que sobreviene por la *necesidad*[24] de recoger la idea de inconmensurabilidad.

La analogía que Weyl desecha trata de contradecir lo que realmente experimentamos en la intuición del tiempo teniendo en cuenta la 'imagen matemática' del continuo

---

22 El axioma es así presentado por Dedekind: "Si todos los puntos de la línea se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes". Cf. Dedekind (2014), p. 93. Este punto se conoce como *cortadura de Dedekind*. Véase la definición 'moderna' en p. 8 n. 27.

23 No se trata de una necesidad lógica, sino que nos referimos al problema que ya los griegos observaron en sus "experiencias" con los números racionales.

24 Véase n. 44.

formado por puntos. Cuando más bien la idea del *transcurrir* es "atrapada" en el axioma de continuidad, en el cual, el punto, como algo dado, *no* es lo fundamental desde la perspectiva ontológica, sino el *medio matemático* que expresa la no existencia de espacios vacíos (o saltos) en ese transcurrir.

Es interesante mencionar la referencia de Hölder a propósito de cómo algunos filósofos han tratado el problema de continuo, pues sugiere una idea importante que queremos tratar: "Contra el axioma de continuidad de Dedekind, en tanto que a través de él se debiera describir la naturaleza continua de la recta, se han hecho objeciones desde el lado filosófico. Éstas reprueban esencialmente la circunstancia de que se recurre a los puntos de la recta para explicar la continuidad, mientras que según la opinión de aquellos filósofos el concepto de recta continua debiera 'anteceder' a la distinción de puntos de ella o a puntos, posiblemente a especificar, en ella. Después, en § 99, mostraré que la pregunta sobre cuál de los dos conceptos 'antecede' de ningún modo siempre se puede decidir" (Hölder, 1924, p. 87).

Lo que puede parecer "contradictorio", una especie de *hýsteron próteron*, ha de entenderse como una *analogía paradójica*. El biomio punto-recta forman una unidad conceptual no-escindible en el análisis matemático de la continuidad.

Weyl escribe (véase p. 8) que los reales están tan aislados [*genau so isoliert*] en el continuo como los enteros. Sin embargo, creemos que esta afirmación se debiera especificar algo más pues parece contradecir la propiedad de ausencia de espacios vacíos.

Intuitivamente, tomados dos reales, existen infinitos reales entre ellos, y por tanto están 'separados'. Lo que no significa que, como en los enteros, exista digamos, un "espacio vacío", i.e., *el* sucesor. Esta es precisamente la diferencia entre los enteros y los reales (también los racionales).

Podemos usar la imagen siguiente: dos enteros están *aislados* y entre ellos no existe ningún entero; dos reales están *separados* y entre ellos existen una infinitud de reales. La relación '*estar-aislado/separado*' se fundamenta en la propiedad de densidad, propiedad que también cumplen los racionales[25].

4.2. El sujeto ideal como fundamento

Después de tener en cuenta las consideraciones anteriores, la pregunta es cómo fundamentar filosóficamente estás ideas. Creemos que un camino para hacerlo es aceptando la tesis (y sus consecuencias) proveniente del idealismo de que el par sujeto-objeto es indisociable (Schopenhauer, 2005, pp. 1102 y ss.). Desde el punto de vista idealista se puede defender, frente a Weyl, la posición de que la esencia del continuo intuitivo radica en la ausencia de espacios vacíos y que esto tiene como sustrato explicativo la presencia necesaria y *permanente* del sujeto en la experiencia fenoménica que conoce la simultaneidad a través de la cual somos conscientes de la duración "al ser ésta sólo cognoscible en el cambio de aquello que coexiste con lo duradero" (Schopenhauer, 2005, p. 38.) por medio de la interacción de las formas del espacio y el tiempo en el entendimiento.

Esto es *siempre* así porque en último término, en la experiencia más íntima que es la autoconsciencia, nos referimos en todo momento a un sujeto que es *a su vez*

---

25 Supuesta la topología usual que es la que más se ajusta a la idea intuitiva de continuo, también desde una perspectiva geométrica.

objeto para sí mismo, y que existe en un espacio y un tiempo determinados. En ese caso existe siempre como punto de partida ontológico *el*-sujeto-que-experimenta-algo. Por lo que no hay ‘saltos’, pues esto significaría que el sujeto no está presente de ningún modo[26] en la experiencia.

Luego la idea de Weyl de que no tenemos experiencia de puntos sin duración es asimismo, y desde nuestro punto de vista, correcta. Sin embargo, habría que distinguir el sujeto-objeto trascendental del *contenido* de la experiencia, i.e., lo representado y por tanto dependiente del tiempo. Desde el punto de vista del sujeto, la intuición del continuo temporal se reduce al hecho de que es consciente de la duración, y que a su vez la no existencia de saltos viene indicada por la presencia permanente del sujeto en la experiencia como última referencia de fenómenos simultáneos que ocurren en el espacio. Ahora bien, creemos que la intuición de la duración temporal se deja tratar matemáticamente sólo si se atiende a la propiedad de ausencia de saltos [*Lückenlosigkeit*] representada por las cortaduras de Dedekind.

La intuición, como es entendida por Weyl (Tieszen, 2000, p. 280), sugiere que el acto de intuición [*act of intuition*] que ocurre en el tiempo tiene un sucesor. A partir de esto cabe pensar en la potencialidad de los infinitos actos de intuición como base para la fundamentación de los números naturales, pero se deja sin explicar cómo se “intuye” la duración como un continuo[27].

La experiencia de duración no proviene *sólo* del contenido experiencial, sino de la *característica ontológica* del sujeto: no existir sin objeto (i.e., lo representado bajo el principio de razón suficiente[28]). Esta idea se aparta de la concepción fenomenológica en el sentido que le da Husserl en §36 de “*Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewußtseins*” – quizá su estudio más profundo del tiempo–, y titulado “El flujo que constituye el tiempo como subjetividad absoluta” [*Der zeitkonstituirende Fluß als absolute Subjektivität*]. En él describe la relación entre el continuo como flujo y la unidad constituida [*konstituierte Einheit*] temporalmente, i.e., el objeto temporal [*Zeitobjekt*]. Creemos que esta idea es un tanto obscura a la hora de captar[29] la relación entre el sujeto y la experiencia de duración, pues Husserl identifica el fujo *que constituye* y la subjetividad absoluta de forma que no queda claro el fundamento de esta identificación. Además, para el idealismo (como lo entiende Schopenhauer), el concepto de ‘subjetividad absoluta’ no tiene sentido, pues se es sujeto siempre ‘relativo’ a un objeto. Tampoco existe el tiempo constituido ya que es *a priori* y el esquema conceptual husserliano ‘retención-impresión original-protención’ [*Retention-Urimpression-Protention*], que para Husserl es la base de

26 “En el primer caso, la propia persona se escinde en el que conoce y lo conocido, en sujeto y objeto, los cuales se presentan aquí, igual que en todas partes, como inseparables e incompatibles. Ahora bien, si mi propia persona, para existir como tal, tiene siempre necesidad de un conocedor, esto será por lo menos igualmente válido para el resto de objetos. Y reivindicar para éstos una existencia independiente del conocimiento y del sujeto de éste era el propósito de la objeción anterior”. Cf. Schopenhauer (2005), p. 444.

27 “*[W]herever we might slice into the flow of consciousness in time we do not obtain a durationless now point. We do not experience or intuit such a point”*. Cf. Tieszen (2000), p. 289.

28 El principo tal y como se formula en (Schopenhauer, 1981, p. 5), citando a Wolf, afirma que: ‘nada es sin una razón por la que pueda ser, o no ser’. [“*Nihil est sine ratione, cur potius sit, quam non sit*”].

29 Husserl escribe: “[L]os predicados de tales [objetos individuales o procesos] no pueden ser adscritos a ellos [los fenómenos que constituyen el tiempo] razonablemente” [“*[D]ie Prädikate solcher können ihnen sinnvoll nicht zugeschrieben werden*”]. Y más adelante: „Para todo esto nos faltan los nombres“ [“*Für all das fehlen uns die Namen*”]. Cf. Husserl (1928), p. 429.
Para un análisis interesante sobre la adscripción a Husserl de un cierto idealismo en su análisis de la temporalidad cf. Hoerl (2013).

intuición temporal, explica la percepción interna del tiempo pero no la esencia de su continuidad y asimismo de la duración[30]. Pues no creemos que se trate exclusivamente de catalogar la experiencia temporal, sino de intentar dar una razón de por qué ésta es así.

Volviendo a Weyl, éste asegura que el punto espacio-temporal no puede ser exhibido individualmente sino sólo por medio de un sistema de coordenadas “residuo insoslayable de la aniquilación del yo [*Ich-Vernichtung*]” (Weyl, 1918, p. 72), en un mundo geométrico-físico. Para nosotros sin embargo, no existe tal dependencia del yo (o del sistema de coordenadas como residuo). El punto temporal depende del sujeto en tanto que es su condición necesaria para “percibir” la ausencia de saltos, y no de la objetivación geométrico-física de la experiencia, por tanto se puede fijar[31] de modo absoluto, ya que depende del sujeto por ser no ‘aniquilable’, y no del yo[32].

Como describimos en el punto 3.1, la posición de Weyl respecto de la imposibilidad de la correspondencia entre el continuo matemático y el intuitivo se fundamenta en que, de existir esta correspondencia deberíamos asignar a cada punto temporal, objeto de una totalidad experiencial [*Erlebnisganze*], un recuerdo de momentos pasados.

Nuestra crítica es que esta asignación que sirve para refutar aquella posible correspondencia es un tanto arbitraria (lo que no significa que desde nuestra posición no estemos de acuerdo con su invalidez, aunque por otros motivos). La duración interpretada como lo hace Weyl –i.e., suponiendo que a cada punto le corresponde

---

30 Uno de los problemas a los que se enfrenta Husserl es explicar cómo el objeto temporal además de ‘permanente’cambia con el tiempo. Römer se pregunta: “¿[C]ómo es posible que tengamos en la consciencia a través del continuo proceso de punto-de-partida (‘punto-de-partida’ ha de ser entendido como lo que se da en la consciencia como primer momento de un objeto temporal, la impresión original en el tiempo) con siempre nuevas impresiones originales y sucesiones de “desdibujación” (Énfasis no en el original. El concepto de *Abschattung* en Husserl tiene que ver con lo que no se muestra pero puede ser mostrado, y en el caso del tiempo con lo que se va desvaneciendo o desdibujando) algo como el objeto idéntico hilético?”. [“*[W]ie ist es möglich, dass wir über diesen kontinuierlichen Prozess von Quellpunkt mit immer neuen Urimpressionen und Abschattungsreihen so etwas wie identische hyletische Objekte bewusst haben können?* ”]. Cf. Römer (2010), p. 40.

31 El modo de “fijarlo” es matemático, pero su origen intuitivo –la ausencia de espacio vacíos– es previo y necesario a este modo.

32 El ‘*yo*’ al que se refiere lo interpretamos –entre otras cosas por su estrecho contacto en esa época con Medicus– como el *yo fichteano* que difiere del sujeto del idealismo de Kant y Schopenahuer. Además, aunque en el pasaje se encuentren evidentes rasgos fenomenológicos creemos que la idea de la “aniquilación del yo” podría derivarse del concepto de *Nicht-Ich* fichteano y de sus *Grundsätze*.
Weyl hace referencia de nuevo en el prólogo de la cuarta edición (en las anteriores no aparece) de ‘*Raum, Zeit, Materie*’ a esta “aniquilación de yo” a la que se refería ya en *El continuo*. Escribe: “Los números nos dan la posibilidad de extraer los puntos temporales del continuo temporal referido a un segmento unidad OE de manera conceptual y por tanto objetiva y completamente exacta. Pero esta objetivación mediante la eliminación del yo y de su vida intuitiva inmediata no es suficiente del todo, el sistema de coordenadas a exhibir permanece sólo a través de un acto individual (y sólo aproximado) como el residuo necesario de esta aniquilación del yo”. Cf. Weyl (1921), pp. 7-8.
Antes ha escrito que: “Para poder acercar al tiempo conceptos matemáticos, debemos partir de la posibilidad teórica de colocar en el tiempo con una exactitud arbitraria un ahora puntual, de fijar un punto temporal”. Cf. Weyl (1921), p. 6.
El precio a pagar es –en nuestra opinión– caro. El dualismo está servido, y esta divergencia requiere una explicación. Según (Mancosu, 2010, pp. 323 y ss.), en consonancia con Husserl y Fichte, existe primero un acto de voluntad del yo en la postulación de este sistema de coordenadas. Además de que el ‘problema de la relatividad’ –como lo refiere Mancosu–, i.e., que el mundo objetivo de la física, el de los símbolos de los campos tensoriales de la física relativista, sean construidos vía subjetividad, da una idea del acercamiento de Weyl a algunas ideas fichteanas. Para profundizar sobre influencia de Fichte en Weyl cf. Sieroka (2010), (2007) y Bell (2004).

una totalidad experiencial– sólo puede tener sentido, o como Weyl escribe, sólo puede haber una respuesta [‘*so kann es nur eine Antwort geben*’ (Weyl, 1918, p. 69)] si se hace esta asignación.

Sin embargo, desde nuestro punto de vista la totalidad experiencial es pasada por un tamiz intelectual, en el sentido de ser una unidad ‘reconstruida’ por el entendimiento.

Poder asignar en cualquier circunstancia posible un recuerdo, supondría afirmar la posibilidad de recordar en todo punto temporal (el mismo Weyl está contra esto). Según nuestra tesis, aunque esto tampoco sea posible, no significa que, en vez de una totalidad experiencial asignada a cada punto temporal, no se pueda hablar de que sólo lo experimentado llega a ser experiencia en sentido propio cuando se lo *reconstruye*. En la acción de reconstruir el sujeto es consciente de su presencia permanente. La duración es una experiencia reconstruida por el entendimiento, pero condicionada, pues se ha de suponer un sujeto *a priori* permanente al que referir el “cambio continuo”, y que reconstruye activamente por medio de las formas del principio de razón suficiente[33].

Por tanto, considerando nuestra tesis, los puntos temporales pueden ser determinados individualmente. Afirmación que ha de ser entendida como la otra “cara de la moneda”, o la formulación matemática de cómo se puede tratar la propiedad de no existencia de espacios vacíos, asumiendo que caracteriza al continuo intuitivo. La caracterización del encajamiento de intervalos temporales supone una experiencia ‘indeterminada’[34] permanente[35]. Creemos, por tanto, que la conclusión[36] de Weyl no da cuenta de esta otra cara a la que nos referimos.

Luego la continuidad temporal intuida es para nosotros la *objetivación*[37] que realiza el sujeto de su presencia en la experiencia como referencia última de estados simultáneos en los cuales la duración es percibida cuando sobreviene una alteración o cambio en el fenómeno u objeto representado.

Si el tiempo fuera objetivo, en el sentido de *independiente* del sujeto, implicaría que existirían ‘estados de objetos’ presentes en la experiencia para los que el sujeto no tendría referencia objetual (intencional, fenomenológicamente hablando). Esto tendría como consecuencia que el tiempo de la experiencia podría concebirse como con huecos, que serían (para el sujeto) momentos en los que no estaría experimentando nada referido a *un* objeto, como indica acertadamente Weyl en su ejemplo del lápiz en Sirio, lo cual es absurdo, si se considera que el sujeto es a su vez y *siempre* objeto para sí mismo.

5. Conclusiones

Como hemos visto, Weyl se compromete en *El continuo* con la tesis de que el

---

33 Para Schopenhauer existen cuatro raíces del principio: del ser, del devenir, del conocer y del querer. Cf. Schopenhauer (1981).

34 Para Weyl, debido a esencia del tiempo, un punto temporal sólo puede exhibirse de forma aproximada. Cf. Weyl (1918), p. 70.

35 A nuestro entender tampoco es correcta la apelación al infinito en la asignación de recuerdos, puesto que la memoria es de capacidad finita, también en el sentido del tiempo vivido. Cf. Weyl (1918), p. 69.

36 Véase ésta en p. 8 de este artículo.

37 Como correlato del sujeto.

continuo intuitivo y el matemático son de naturaleza distinta.

A esta conclusión llega haciendo suyas ideas fenomenológicas respecto al tiempo y desarrollando su propuesta predicativista. Lo cual supone un dualismo en el tratamiento del problema del continuo.

Nuestro objetivo ha sido sin embargo, a partir de *una* sóla intuición explicar la relación entre el continuo fenoménico y el matemático, i.e., la forma estática de algo que en su esencia no lo es.

Para ello hemos adoptado el punto de vista idealista y derivado la consecuencia de que la percepción del transcurso temporal como un flujo [*Ablauf*] es un efecto del estátus ontológico del sujeto. Asumiendo la tesis idealista sobre el sujeto fundamentamos la continuidad temporal en la intuición, y derivamos a partir de ésta su caracterización matemática basada en la formulación de Dedekind de la propiedad esencial al continuo de no existencia de espacios vacíos [*Lückenlosigkeit*], representada por el concepto de cortadura de Dedekind. La inconmensurabilidad se puede entender como la "constatación" de que los racionales no son suficientemente potentes para representar matemáticamente esta idea.

En (Weyl, 1931) se presentan como contrapuestas la concepción de Demócrito y la de Anaxágoras en relación con el problema del infinito. Estas concepciones no se excluyen mutuamente. Como observa, el continuo intuitivo es 'dinámico', y el matemático se *convierte* en 'estático' (Weyl, 1931, p. 11)[38] . Sin embargo, la matemática necesita de la forma estática de representación para captar la intuitiva, aunque ambas se explican a partir de la idea de ausencia de espacios vacíos.

Según nuestra tesis, el punto es un concepto necesario para entender matemáticamente la propiedad de continuidad y su origen intuitivo. Además, no afirmamos que el lapso de tiempo experimentado sea "atomísticamente separable", sino al revés. Esto es, que la concepción atomista del continuo matemático puede ser derivada de la percepción intuitiva del continuo asumiendo la tesis idealista.

Desde un punto de vista filosófico, según nuestro análisis, no es posible establecer una relación consistente entre ambos continuos si se presenta de forma dualista, pues supone una merma esencial en la adecuada comprensión de –como el propio Weyl escribe– los "esquemas abstractos, proporcionados por la matemática, para posibilitar la ciencia exacta de aquellos dominios de objetos en los cuales los continuos juegan un papel" (Weyl, 1918, p. 83).

6. Referencias bibliográficas

Beisswanger, P. (1965): "Die Phasen in Hermann Weyls Beurteilung der Mathematik", *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, 12, pp. 132–156.

Bell, J. L. (2004): "Hermann Weyl's Later Philosophical Views: His Divergence from Husserl", en R. Feist (ed.), *Husserl and the Sciences: Selected Perspectives*, Philosophica, 55. University of Otawa.

Cantor, G. (1872): "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, 5, pp. 123-132.

Chevalley, C., Weil, A. (1957): "Hermann Weyl (1885-1955)", *L'Enseignement Mathématique*, 3, pp. 157-187.

[38] 'Estático' no significa conjuntista necesariamente.

Chihara, C. S. (1973): *Ontology and the vicious-circle principle*, Ithaca, Cornell University Press.
Da Silva, J.J. (1997): “Husserl’s penomenology and Weyl’s predicativism”, *Syntese* (2), vol. 10, pp. 211-296.
Dedekind, R. (2014): *¿Qué son y para qué sirven los números?*, J. Ferreirós (Trad.), Madrid, Alianza.
Feferman, S. (1998*): In the Light of Logic*, Oxford University Press, New York, pp. 249–283.
Feferman, S. (2009): “Conceptions of the continuum”, *Intellectica*, 51, pp. 169-189.
Hoerl, C. (2103): “Husserl, the absolute flow, and temporal experience”, *Philosophy and phenomenological research*, vol. LXXXVI, No. 2, pp. 376-411.
Hölder, O. (1924): *Die mathematische Methode*, Berlin, Vlg. von Julius Springer.
Husserl, E. (1913): *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie: Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie*, Jahrbuch für Philos. und phänomen. Forschung, Band I. Halle a.d.S., Max Niemayer Verlag.
Husserl, E. (1928): *Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewußtseins*, M. Heidegger (Hrsg.), Halle a.d.S., Max Niemayer Verlag.
López de Santa María, P. (2015): “Schopenhauer y el idealismo kantiano”, *Enrahonar*, 55.
Mancosu, P. (1997): *From Brouwer to Hilbert*, New York, Oxford University Press.
Mancosu, P. (2010): *The adventure of reason*, New York, Oxford University Press.
Römer, I. (2010): *Das Zeitdenken bei Husserl, Heidegger und Ricoeur*, Dordrecht, Springer.
Schopenhauer, A. (2005): *El mundo como voluntad y representación*,Trad.: Rafael-José Díaz Fernández y M. Monserrat Armas Concepción, Madrid, Akal.
Schopenhauer, A. (1981): *De la cuadruple raíz del principio de razón suficiente*, Trad. Leopoldo-Eulogio Palacios, Madrid, Gredos.
Sieroka, N. (2007): “Weyl’s ‘agens theory’ of matter and the Zurich Fichte”, *Stud. Hist. Phil. Sci.*, 38, 84–107.
Sieroka, N. (2010): *Umgebungen*, Zürich, Chronos Verlag.
Tieszen, R. (2000): “The philosophical background of Weyl’s mathematical constructivism”, *Philosophia Mathematica* (3), vol. 8, pp. 274-301.
Van Atten, M., van Dalen, D., Tieszen, R. (2001): “Brouwer and Weyl: The phenomenology and mathematics of the intuitive continuum”, *Philosophia Mathematica* (2), vol. 10, pp. 203-226.
Weyl, H. (1918): *Das Kontinuum*, Leipzig, Veit & Comp.
Weyl, H. (1921): *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, Julius Springer Verlag.
Weyl, H. (1931): *Die Stufen des Unendlichen*, Jena, Vlg. von G. Fischer.
Weyl, H. (1968): *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vols., K. C. Chandrasekharan (Hrsg.), Berlin, Springer.
Weyl, H. (1987): *The continuum. A critical examination of the foundation of Analysis*, Trans. Stepehen Pollard & Thomas Bole, New York, Dover Publications, Inc..