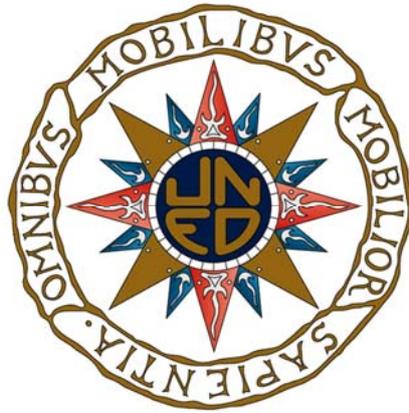


Tesis Doctoral



Control no lineal de vehículos marinos subactuados no-holonómicos

Dictino Chaos García
Licenciado en Física

Departamento de Informática y Automática
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad Nacional de Educación a Distancia

Madrid, 2010

Departamento: Informática y Automática ETS. Ingeniería Informática UNED

Título: Control no lineal de vehículos marinos subactuados no-holónomicos

Autor: Dictino Chaos García

Título: Licenciado en Física por la Universidad Complutense de Madrid

Director: Joaquín Aranda Almansa

A mis abuelos Fermina y Celso,
siempre estaréis en mi recuerdo

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a Joaquín Aranda, mi director de Tesis, por toda la ayuda y confianza que he recibido de él durante estos años. Sin duda trabajar con Joaquín ha sido una experiencia muy gratificante, no solo por su labor como director sino, sobre todo, por que me ha dado la oportunidad de entrar en el Departamento, me ha enseñado como funciona la Universidad, ha cuidado de mi procurando que siempre tuviese lo necesario para hacer bien mi trabajo y siempre ha tenido una palabra de ánimo para darme cuando más la necesitaba.

Tengo mucho que agradecer también a todos los profesores del programa de doctorado, por la magnífica formación que de ellos he recibido, en particular quiero destacar la labor de Sebastián Dormido Bencomo, Natividad Duro, Fernando Morilla, Ángel Pérez, Alfonso Urquía, y Jesús Manuel de la Cruz.

También quiero agradecer su apoyo a los profesores del departamento de Informática y Automática de la UNED: María Antonia Canto, Raquel Dormido, Sebastián Dormido Canto, José Sánchez, José Luís Fernández Marrón y Carla Martín por la calida acogida que me dieron en el departamento. Y especialmente al profesor José Manuel Díaz con el que he tenido el placer de trabajar, gracias a su esfuerzo extra durante estos años yo he podido dedicar más tiempo para escribir esta Tesis.

Sin duda tengo mucho que agradecer a los profesores del Institute for Systems and Robotics del Instituto Superior Técnico Lisboa, en particular a los profesores Antonio Pascoal y Pedro Aguiar por haberme acogido entre ellos como uno más. Los conocimientos que obtuve durante mi estancia en Lisboa conforman sin duda la piedra angular sobre la que se asienta esta Tesis.

También quiero acordarme de a todos los amigos que conocí en Lisboa, en especial de Andreas Häusler, Nelson Ferreira, Marco Martins, Manuel Cecílio Rufino, Reza Ghabcheloo, Rita María Mendes, Mohammadreza Bayat, Vahid Hassani, David Cabecinhas, Duarte Antunes y Ana Santos a la que ya debo tres tarjetas de acceso. Por supuesto no puedo olvidarme de mi gran amigo Alex Alcocer que con tanto cariño me acogió en su casa y también de Pramod Maurya y Narcis Palomeras que ayudaron a que mi estancia allí fuese mucho más cómoda y divertida. Gracias a todos ellos he aprendido mucho, sobre la vida, la tolerancia y la amistad.

Durante el desarrollo de este trabajo he tenido la suerte de conocer a unos magníficos compañeros de batalla, entre ellos quiero acordarme de mis compañeros y amigos en la UNED: Alejandro Moreno Luis Cubillos, María Guinaldo, Victorino Sanz, Ernesto

Fabregas, Miguel Romero, Antonio Robles, Agustín Caminero. También de mi compañero de despacho Miguel Ángel Rubio, que por muchos años que pasen nunca dejará de sorprenderme. Y por supuesto, de compañera de alegrías y penas Rocío Muñoz con la que tantos buenos ratos he pasado.

Quiero en especial dar las gracias a Jesús Chacón y David Moreno por que además de ser unos grandes compañeros y amigos han hecho el gran esfuerzo de revisar esta Tesis. Sin duda sus consejos y correcciones han sido de inestimable ayuda para subsanar mis errores y mejorar la calidad de este trabajo.

De forma especial quiero acordarme a tres grandes compañeros de que ahora no están en la escuela, en primer lugar del gran artista Oscar Cambra y en segundo pero no menos importante de mis queridos compañeros Héctor Renato Vargas y Gonzalo Farías Castro, sin duda es grande el hueco que habéis dejado en nuestros corazones.

Sin duda todo este trabajo no habría sido mucho más difícil sin contar con la ayuda de mi secretaria favorita, Pilar Riego que como por arte de magia es capaz de transformar cualquier problema en una solución.

Y como no, tengo que dar especialmente las gracias a mi familia que siempre ha estado conmigo, en especial a mis padres y a mis abuelos y también a mis amigos a los que tanto he aburrido habándoles de la tesis y que aún así siempre han estado dispuestos a escucharme. Gracias por que con vuestro cariño habéis forjado la persona que ahora soy. El tiempo que he pasado con vosotros ha hecho mi tránsito por esta aventura mucho más llevadero.

Por último, pero no menos importante, no puedo olvidarme del profesor Bonifacio de Andrés, él fue quien me impulsó a comenzar el doctorado. Sin su estímulo nunca habría entrado en la Universidad y este trabajo no habría sido posible.

¡Muchas gracias a todos!

Índice de contenido

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN, OBJETIVOS Y ESTRUCTURA.....	1
1.1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.2. OBJETIVOS DE LA TESIS.....	2
1.3. ESTRUCTURA.....	3
CAPÍTULO 2 PROBLEMAS DE CONTROL DE UN AERODESLIZADOR.....	5
2.1. MODELO DEL SISTEMA.....	5
2.1.1. Cinemática general de un vehículo en 3GDL.....	6
2.1.2. Dinámica de un vehículo naval.....	8
2.1.3. Sistema real de laboratorio.....	10
2.2. PROBLEMAS DE CONTROL DEL AERODESLIZADOR.....	12
2.3. RESTRICCIONES NO HOLONÓMICAS.....	13
2.4. NOCIONES DE CONTROLABILIDAD NO LINEAL.....	18
2.4.1. Controlabilidad en un punto.....	19
2.4.2. Controlabilidad a lo largo de una trayectoria.....	21
2.5. CONTROLABILIDAD DEL AERODESLIZADOR A LO LARGO DE TRAYECTORIAS.....	22
2.6. CONTROLABILIDAD DEL AERODESLIZADOR EN UN PUNTO DE EQUILIBRIO.....	31
2.6.1. Controlabilidad del modelo linealizado en un punto.....	31
2.7. CONTROLABILIDAD DEL ESTADO.....	34
2.7.1. Controlabilidad local débil.....	34
2.7.2. Resultados ampliados de controlabilidad.....	38
2.7.2.A. El aerodeslizador es estabilizable en el origen.....	39
2.7.2.B. El aerodeslizador es localmente controlable en el origen.....	43
2.8. TEOREMA DE BROCKETT.....	48
2.9. CONCLUSIONES.....	50
CAPÍTULO 3 SISTEMA EXPERIMENTAL.....	53
3.1. INTRODUCCIÓN.....	53
3.2. ARQUITECTURA GENERAL DEL SISTEMA.....	55
3.2.1. Componentes hardware.....	55
3.2.1.A. aerodeslizador de radiocontrol.....	55
3.2.1.B. Cámara y óptica.....	56
3.2.1.C. Equipo informático.....	57
3.2.1.D. Interfaz de radiocontrol.....	57
3.2.2. Componentes software.....	58
3.3. IMPLEMENTACIÓN.....	60
3.3.1. Visión de bajo nivel.....	60
3.3.1.A. Inicialización de la cámara.....	61
3.3.1.B. Captura de la imagen.....	62
3.3.1.C. Cierre de la aplicación y liberación de memoria.....	63
3.3.2. Visión de alto nivel.....	63
3.3.2.A. Distorsión.....	65
3.3.2.B. Perspectiva.....	69
3.3.2.C. Procedimiento de calibración.....	73
3.3.2.D. Cálculo de la posición del vehículo.....	75
3.3.2.E. Cálculo de las velocidades.....	76
3.3.2.F. Sistemas de coordenadas.....	77
3.3.3. Implementación del control.....	78

3.3.4. Interfaz de salida.....	79
3.3.5. Registro de datos.....	80
3.3.6. Otras características implementadas.....	80
3.3.7. Visión general del conjunto	81
3.4. MODELO Y VALIDACIÓN EXPERIMENTAL	84
3.4.1. Dinámica de traslación.....	85
3.4.2. Dinámica de rotación	87
3.5. CONCLUSIONES.....	89
CAPÍTULO 4 POSICIONAMIENTO DINÁMICO DE UN AERODESLIZADOR CON ENTRADAS DISCRETAS	91
4.1. INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA	91
4.1.1. Soluciones de control existentes	92
4.1.1.A. Leyes de control continuas dependientes del tiempo	92
4.1.1.B. Leyes de control discontinuas independientes del tiempo	93
4.1.1.C. Controles basados en planificación.....	93
4.1.1.D. Leyes de control conmutadas.....	94
4.1.2. Entradas de control discretas	94
4.1.3. Formulación del problema.....	96
4.2. PRELIMINARES.....	97
4.3. ESTRATEGIA DE CONTROL	98
4.4. CONTROL DE LA DINÁMICA TRANSVERSAL	99
4.4.1. Diseño del control.....	100
4.4.2. Efecto del ruido de la medida	104
4.4.3. Estabilidad de la dinámica transversal.....	106
4.4.4. Consideraciones sobre el diseño.....	113
4.5. CONTROL DE LA DINÁMICA LONGITUDINAL	116
4.5.1. Diseño del control.....	117
4.5.2. Efecto del ruido de la medida	119
4.5.3. Estabilidad de la dinámica transversal.....	120
4.5.4. Consideraciones sobre el diseño.....	124
4.6. CONTROL DEL SISTEMA COMPLETO	126
4.6.1. Sistema equivalente.....	129
4.6.2. Estabilidad del sistema equivalente.....	140
4.6.3. Estabilidad del sistema completo.....	146
4.7. RESULTADOS EXPERIMENTALES	148
4.7.1. Algoritmo de control.....	149
4.7.2. Resultados de simulación.....	150
4.7.3. Experimentos reales.....	154
4.8. CONCLUSIONES.....	158
CAPÍTULO 5 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CON ENTRADAS CONTINUAS	159
5.1. INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA	159
5.1.1. Tipos de trayectoria	161
5.1.1.A. Trayectorias factibles.....	164
5.1.1.B. Trayectorias bien definidas.....	166
5.1.2. Definición del problema.....	169
5.2. SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA	170
5.2.1. Diseño del control.....	170
5.2.1.A. Planteamiento general.....	170
5.2.1.B. Control de la posición.....	171
5.2.1.C. Control de la orientación.....	173
5.2.2. Análisis de factibilidad.....	174
5.2.3. Estabilidad del sistema	184
5.2.4. Efecto del ruido y las perturbaciones	191
5.2.4.A. Efecto de las perturbaciones	191
5.2.4.B. Efecto del ruido.....	196
5.2.4.C. Estabilidad del sistema con perturbaciones y ruido	200
5.3. RESULTADOS DE SIMULACIÓN	203
5.3.1. Seguimiento de una trayectoria circular.....	203
5.3.1.A. Convergencia en ausencia de ruido y perturbaciones	204
5.3.1.B. Efecto de las perturbaciones y el ruido	210

5.3.1.C. Incertidumbre en los parámetros del modelo	213
5.3.2. Seguimiento de trayectorias genéricas	215
5.3.2.A. Trayectoria factible genérica	215
5.3.2.B. Seguimiento de trayectoria puntualmente no factible	216
5.4. CONCLUSIONES.....	218
CAPÍTULO 6 SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA CON ENTRADAS DISCRETAS	219
6.1. INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA.....	219
6.1.1. Limitaciones del control.....	220
6.2. OBJETIVOS DE CONTROL.....	222
6.3. DISEÑO DEL CONTROL	223
6.3.1. Planteamiento general.....	223
6.3.2. Control de posición.....	224
6.3.3. Control de orientación.....	228
6.3.4. Efecto del ruido y las perturbaciones	230
6.4. ESTABILIDAD.....	233
6.4.1. Estabilidad de la posición.....	235
6.4.2. Estabilidad de la orientación.....	244
6.4.3. Estabilidad del conjunto	249
6.4.4. Consideraciones sobre la ley de control.....	255
6.5. RESULTADOS	256
6.5.1. Simulación	257
6.5.1.A. Seguimiento de una trayectoria circular	257
6.5.1.B. Seguimiento de una trayectoria genérica	263
6.5.1.C. Efecto del ruido en la medida y las perturbaciones.....	266
6.5.1.D. Efecto de las perturbaciones	267
6.5.2. Validación experimental	269
6.6. CONCLUSIONES.....	273
CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES.....	275
7.1. CONCLUSIONES.....	275
7.2. TRABAJO FUTURO	276
BIBLIOGRAFÍA.....	279

Lista de Símbolos

Notación:

x, y, z, t	VARIABLES ESCALARES.
a, b, c	CONSTANTES ESCALARES.
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	VECTORES.
$\mathbf{A}, \mathbf{M}, \mathbf{C}$	MATRICES.
$\ \mathbf{x}\ $	NORMA EUCLIDEA DE UN VECTOR.
$f(x), g(x)$	FUNCIONES ESCALARES DE ARGUMENTO ESCALAR.
$\mathbf{f}(x)$	FUNCIÓN VECTORIAL O MATRICIAL DE ARGUMENTO ESCALAR.
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	FUNCIÓN VECTORIAL O MATRICIAL DE ARGUMENTO VECTORIAL O MATRICIAL.
\dot{x}	DERIVADA DE x RESPECTO AL TIEMPO.
\hat{x}	ESTIMACIÓN DE x AFECTADA POR EL RUIDO EN LA MEDIDA.
\mathbf{x}^T	VECTOR \mathbf{x} TRASPUESTO.
$o(x)$	O PEQUEÑA EN LA NOTACIÓN DE LANDAU.
$[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j]$	CORCHETE DE LIE DE \mathbf{g}_i , CON \mathbf{g}_j .
C^∞	CLASE DE LAS FUNCIONES SUAVES (INFINITAMENTE DERIVABLE).
$\text{sat}_l(x)$	FUNCIÓN DE SATURACIÓN.
Ω_l	REGIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS.
$f(t^-)$	LÍMITE LA IZQUIERDA DE f EN t .
$\beta(x, y)$	FUNCIÓN DE CLASE KL .

$\alpha(x), \gamma(y)$	Funciones de clase K
$\langle f(x) \rangle$	Promedio de la función f .
$f^{-1}(x)$	Inversa de la función f .

Símbolos:

A_{eq}	Matriz A del sistema lineal equivalente.
$A(x_0)$	Región accesible desde el estado x_0 .
$A_U(x_0)$	Región U -accesible desde el estado x_0 .
B	Sistema de referencia ligado al vehículo.
C, C_r	Matrices de controlabilidad y controlabilidad reducida.
d	Vector de perturbación del sistema equivalente.
D	Medida de la distorsión en barril (<i>píxeles</i>).
de_i	Determinantes de las sub-matrices de controlabilidad.
d_{ij}	Distancias de desalineación (<i>píxeles</i>).
D_u	Coefficiente de fricción viscosa en la dirección de avance (Kg/s).
D_v	Coefficiente de fricción viscosa en la dirección de deriva lateral (Kg/s).
D_r	Coefficiente de fricción viscosa rotacional (Kgm^2/s).
d_u	Coefficiente de fricción viscosa lineal normalizado (s^{-1}).
d_r	Coefficiente de fricción viscosa rotacional normalizado (s^{-1}).
$\delta F, \delta \tau$	Variaciones en la fuerza y el momento normalizados.
Δe_2	Variación en el cálculo de e_i debida al ruido en la medida.
ΔV_n	Variación de la función de Lyapunov discreta.
e	Vector de error de seguimiento.
e_i	Variables auxiliares de error.
e_l	Error de seguimiento longitudinal.
e_p	Error de posición.

e_t	Error de seguimiento transversal.
e_x, e_y	Errores de seguimiento.
ε_i	Constante positiva pequeña.
F	Fuerza normalizada (m/s^2).
F_0	Saturación de la fuerza normalizada (m/s^2).
F_b y F_e	Fuerzas de los motores de babor y estribor (N).
f_{cu}	Fuerza inducida por las corrientes en la dirección de avance (N).
F_{max}	Máxima fuerza normalizada (m/s^2).
F_{min}	Mínima fuerza normalizada (m/s^2).
$F_s(t)$	Fuerza normalizada asociada a una trayectoria solución (m/s^2).
f_{vv}	Fuerza inducida por las corrientes en la dirección de deriva (N).
F_{xr}, F_{yr}	Fuerzas necesarias para seguir la trayectoria x_r .
$h(x_t), h(t)$	Histéresis dinámica.
J	Momento de inercia (Kg/m^2).
k_i	Constantes positivas de control.
l	Distancia del eje de simetría al centro de fuerzas de un motor (m).
$\lambda_i(A)$	Autovalor de la matriz A .
L_{ij}	Componentes de la matriz de distancias de verificación morfológica.
m	Masa (Kg).
M_i	Matrices auxiliares de controlabilidad.
n	Vector de ruido en la medida $[p_{vy}, p_{vy}, n_r]^T$.
n_j	Vector normal a la recta i -ésima.
n_{max}	Cota superior del ruido en la medida.
o	Origen sistema coordenadas.
p	Vector de perturbaciones $[p_{vy}, p_{vy}, p_r]^T$.

\mathbf{p}_i	Vector de posición del punto i -ésimo.
p_{max}	Cota superior de las perturbaciones.
r	Velocidad de guiñada (rad/s).
R_{max}	Tamaño de la semidiagonal del rectángulo imagen ($píxeles$).
$\rho(\mathbf{A}_{eq})$	Radio espectral de \mathbf{A}_{eq} .
s	Parámetro longitud de arco (m).
t	Tiempo (s).
τ	Momento normalizado (rad/s^2).
τ_0	Saturación del momento normalizado (rad/s^2).
$\tau_s(t)$	Momento asociado a una trayectoria solución.
T_i	Periodo de tiempo (s).
τ_{max}	Par normalizado máximo (rad/s^2).
θ	Orientación en el sistema de referencia de la cámara (rad).
θ_{ant}	Orientación previa en el sistema de referencia de la cámara (rad).
T_Ω	Tiempo que tarda el estado en penetrar en la región Ω .
u	Velocidad de avance (m/s).
\mathbf{u}	Vector de control.
\mathbf{U}	Sistema inercial
u_1, u_2	Señales de control.
u_{max}	Máxima acción de control (N).
u_{min}	Mínima acción de control (N).
v	Velocidad de deriva lateral (m/s).
$V(\mathbf{x})$	Función de Lyapunov.
V_{max}	Valor máximo de la función de Lyapunov en una región.
V_n	Función de Lyapunov discreta.

v_x, v_y	VARIABLES DE VELOCIDAD (m/s).
w	Velocidad angular en el sistema de referencia de la cámara (<i>rad/s</i>).
\mathbf{w}	Vector auxiliar longitudinal.
$WA(\mathbf{x}_0)$	Región débilmente accesible desde \mathbf{x}_0 .
$WA_U(\mathbf{x}_0)$	Región débilmente <i>U</i> -accesible desde el estado \mathbf{x}_0 .
x, y	VARIABLES DE POSICIÓN (<i>m</i>).
x_{ant}, y_{ant}	VARIABLES MEDIDAS EN EL MUESTREO ANTERIOR (<i>m</i>).
\mathbf{x}	Estado del Sistema Dinámico $[x, y, v_x, v_y, \psi, r]^T$.
\mathbf{x}_0	Estado inicial.
X, Y	Ejes de coordenadas en el sistema de referencia inercial.
X_b, Y_b	Ejes de coordenadas ligadas al aerodeslizador (ejes cuerpo).
x_c, y_c	Posiciones corregidas de distorsión.
x_d, y_d	Posiciones de la imagen con distorsión en barril (<i>píxeles</i>).
\mathbf{x}_l	Estado longitudinal $[x, v_x]^T$.
\mathbf{x}_n	Estado reducido en los instantes de conmutación.
X_{ned}, Y_{ned}	Ejes de coordenadas en el sistema de referencia NED.
\mathbf{x}_r	Referencias $[x_r, y_r, v_{xr}, v_{yr}, \psi_r, r_r]^T$.
\mathbf{x}_t	Estado transversal $[y, v_y, \psi, r]^T$.
Ψ	Orientación (<i>rad</i>).
ψ_c	Referencia de orientación para el control.
$\psi_s(t)$	Orientación inducida por una trayectoria solución.
\mathbf{z}	Vector auxiliar transversal.

Lista de Abreviaturas y Siglas

CCD	(<i>Charge-Coupled Device</i>) Sensor óptico de captura de imagen.
DLL	(<i>dynamic-link library</i>) Librería de enlace dinámico.
FPS	Fotogramas por segundo.
GDL	Grados de libertad.
GUI	(<i>graphical user interface</i>) Interfaz gráfica de usuario.
ISS	(<i>Input-to-state stability</i>) Estabilidad del estado respecto a la entrada.
LARC	(<i>Lie algebra rank condition</i>) Condición de controlabilidad basada en álgebras de Lie.
MIL	(<i>Matrox Imaging Library</i>) Librerías de procesamiento de imágenes.
NED	(<i>North-East-Down</i>) Sistema de coordenadas tangente a la superficie de la tierra.
ODE	(<i>Ordinary differential equation</i>) Ecuación diferencial ordinaria.
PC	(<i>Personal computer</i>) Ordenador personal.
PCI	(<i>Peripheral Component Interconnect</i>) Bus de conexión de periféricos en un ordenador.
PS	(<i>Point stabilization</i>) Estabilización en un punto.
STLC	(<i>small time local controllability</i>) Controlabilidad local en tiempo corto.
TCP-IP	(<i>Transmission Control Protocol</i>) Protocolo de transmisión de datos en Internet.

Lista de figuras

FIGURA 2.1. AERODESLIZADOR MILITAR REAL.....	6
FIGURA 2.2. EJES DE COORDENADAS. LA FIGURA MUESTRA EL SISTEMA DE COORDENADAS INERCIAL LOCAL $\{U\}$ Y EL SISTEMA DE COORDENADAS LIGADO AL VEHÍCULO $\{B\}$ (EJES CUERPO).....	7
FIGURA 2.3. AERODESLIZADOR DE RADIO CONTROL.....	11
FIGURA 2.4. DIAGRAMA DE FUERZAS ADMISIBLES. SE MARCA CON UN ASTERISCO LAS NUEVE COMBINACIONES DE SEÑALES DE CONTROL POSIBLES Y LA FUERZA Y MOMENTO QUE PRODUCEN.....	12
FIGURA 2.5. LOS TRES PROBLEMAS DE CONTROL DE UN VEHÍCULO. SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA A LA IZQUIERDA, POSICIONAMIENTO DINÁMICO EN EL CENTRO Y SEGUIMIENTO DE CAMINO A LA DERECHA.	13
FIGURA 2.6. TRAYECTORIAS EN UN SISTEMA NO NOLONÓMICO.	15
FIGURA 2.7. COCHE OMNIDIRECCIONAL (MITSUBISI MMR25).....	18
FIGURA 2.8. ACCESIBILIDAD DÉBIL. EL PUNTO X_I ES ACCESIBLE DESDE X_0, MIENTRAS QUE EL PUNTO X_F ES DÉBILMENTE ACCESIBLE DESDE X_0 YA QUE HAY UN CONJUNTO DE TRAYECTORIAS QUE LOS CONECTAN. SIN EMBARGO EN GENERAL NO ES POSIBLE IR DE X_0 A X_F YA QUE LA TRAYECTORIA ENTRE X_I Y X_2 PODRÍA NO SER REVERSIBLE.	20
FIGURA 2.9. CONTROLABILIDAD (IZQUIERDA) Y CONTROLABILIDAD LOCAL (DERECHA). UN SISTEMA ES CONTROLABLE EN X_0 SI ES POSIBLE LLEGAR DESDE X_0 A CUALQUIER OTRO PUNTO X_F. ES LOCALMENTE CONTROLABLE EN TIEMPO CORTO STLC EN X_0 SI ES POSIBLE IR A PUNTOS PRÓXIMOS X_F SIN ABANDONAR UN PEQUEÑO ENTORNO U DE DICHO PUNTO.....	21
FIGURA 2.10. CONTROLABILIDAD A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA. DADA UNA TRAYECTORIA X_S SI EL SISTEMA ES CONTROLABLE ENTONCES ES POSIBLE MOVERSE ENTRE DOS PUNTOS X_0 Y X_F SUFICIENTEMENTE PRÓXIMOS A LA TRAYECTORIA SIN ABANDONAR UN ENTORNO ε DE LA MISMA.....	22
FIGURA 2.11. ACELERACIONES DEL AERODESLIZADOR MOVIÉNDOSE SOBRE UNA TRAYECTORIA. EL AERODESLIZADOR ES CONTROLABLE SIEMPRE QUE F_S NO SEA CERO O BIEN EL VECTOR NORMAL CAMBIE ADECUADAMENTE EN EL TIEMPO.....	30
FIGURA 2.12. ESTADOS NO CONTROLABLES DE LA LINEALIZACIÓN DEL AERODESLIZADOR EN UN PUNTO.....	33
FIGURA 2.13. SIGNIFICADO DE LOS CORCHETES DE LIE. LA APLICACIÓN SUCCESIVA DE MOVIMIENTO A TRAVÉS DE DOS VECTORES G_1 Y G_2 PRODUCE COMO RESULTADO UNA NUEVA DIRECCIÓN DE MOVIMIENTO $[G_1, G_2]$.....	35
FIGURA 2.14. CORCHETES DE LIE EN SISTEMAS CON DERIVA Y FLUJO RETRÓGRADO. EL ESQUEMA MUESTRA COMO EXISTEN TRAYECTORIAS QUE CONECTAN X_0 Y X_F MEDIANTE TRAYECTORIAS (SÓLIDO) Y TRAYECTORIAS RECORRIDAS A LA INVERSA (DISCONTINUO).....	37

FIGURA 2.15. CONTROLABILIDAD DEL AERODESLIZADOR. EL AERODESLIZADOR ES ESTABILIZABLE EN EL ORIGEN (DERECHA) Y CUALQUIER ESTADO ES ALCANZABLE DESDE EL ORIGEN (IZQUIERDA).....	43
FIGURA 2.16. LA CONTROLABILIDAD LOCAL SÓLO PUEDE DARSE EN PUNTOS DE EQUILIBRIO. EN EL ENTORNO DE UN PUNTO EN EL QUE LA DERIVA NO ES NULA AL MENOS LA MITAD DEL ESPACIO DE ESTADOS NO ES LOCALMENTE ACCESIBLE.....	44
FIGURA 2.17. ACCIÓN DE CONTROL LOCAL. POR MEDIO DE TRAYECTORIAS LOCALES ES POSIBLE OBTENER MOVIMIENTO EN TODOS LAS DIRECCIONES POSIBLES EN EL ESPACIO DE ESTADOS SIN ABANDONAR UN ENTORNO DEL ORIGEN.	48
FIGURA 3.1. SISTEMA EXPERIMENTAL.....	55
FIGURA 3.2. AERODESLIZADOR DE RADIOCONTROL.....	56
FIGURA 3.3. CÁMARA Y ÓPTICA.....	57
FIGURA 3.4. INTERFAZ DE RADIOCONTROL.....	58
FIGURA 3.5. ARQUITECTURA DEL SISTEMA. LAS CAJAS RECTANGULARES REPRESENTAN ELEMENTOS DE SOFTWARE MIENTRAS QUE LOS CONTENEDORES ELÍPTICOS SON LOS ELEMENTOS HARDWARE.....	59
FIGURA 3.6. LIBRERÍA EN LABVIEW DE LOS ELEMENTOS SOFTWARE.....	60
FIGURA 3.7. ALGORITMO DE DETECCIÓN DE PUNTOS. A LA DERECHA SE ENCUENTRA LA RUTINA PRINCIPAL QUE ANALIZA TODA LA IMAGEN, A LA IZQUIERDA LA SUBRUTINA QUE CALCULA EL CENTROIDE DE CADA SUB-IMAGEN.	62
FIGURA 3.8. IMAGEN DEL SUELO CON DISTORSIÓN EN BARRIL.	65
FIGURA 3.9. MEDIDA DEL GRADO DE DISTORSIÓN. LA DISTORSIÓN PUEDE MEDIRSE COMO LA SEPARACIÓN DE LOS PUNTOS DE LA IMAGEN (AZUL) CON RESPECTO A LAS LÍNEAS RECTAS QUE UNEN LOS DOS PUNTOS EXTREMOS (ROJO). SI NO HUBIESE DISTORSIÓN LOS PUNTOS DEBERÍAN ESTAR ALINEADOS.	67
FIGURA 3.10. MEDIDA DEL GRADO DE DESALINEACIÓN D.....	68
FIGURA 3.11. IMAGEN CORREGIDA DE LA DISTORSIÓN EN BARRIL.....	69
FIGURA 3.12. TRANSFORMACIÓN GENERAL DE PERSPECTIVA.	70
FIGURA 3.13. TRANSFORMACIÓN <i>PINHOLE</i> VISTA DESDE EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LA CÁMARA. EL EJE Y_c DE LA IMAGEN SE ENCUENTRA ORIENTADO HACIA EL ESPECTADOR Y POR TANTO NO SE MUESTRA.	71
FIGURA 3.14. RUTINA DE CALIBRACIÓN EN LABVIEW.....	74
FIGURA 3.15. CALCULO DE LA POSICIÓN Y ORIENTACIÓN.....	75
FIGURA 3.16. SISTEMAS DE COORDENADAS.....	78
FIGURA 3.17. INTERFAZ DE SALIDA EN LABVIEW	79
FIGURA 3.18. BLOQUE DE ALMACENAMIENTO DE DATOS.....	80
FIGURA 3.19. CONTROL DE SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DISCRETO.....	82
FIGURA 3.20. INTERFAZ GRÁFICA DEL CONTROL.....	83
FIGURA 3.21. AJUSTE DE LOS PARÁMETROS DE TRASLACIÓN. LOS DATOS EXPERIMENTALES SE REPRESENTAN MEDIANTE PUNTOS ROJOS MIENTRAS QUE EL AJUSTE SE MUESTRA EN AZUL.	86
FIGURA 3.22. VALIDACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE TRASLACIÓN. LOS DATOS EXPERIMENTALES SE REPRESENTAN MEDIANTE PUNTOS ROJOS MIENTRAS QUE EL AJUSTE SE MUESTRA EN AZUL.	86
FIGURA 3.23. AJUSTE DE LOS PARÁMETROS DE ROTACIÓN.....	88
FIGURA 3.24. VALIDACIÓN DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN.....	88

FIGURA 4.1. POSICIONAMIENTO DINÁMICO DEL AERODESLIZADOR.....	92
FIGURA 4.2. ENTRADAS DE CONTROL DISPONIBLES EN EL AERODESLIZADOR.....	96
FIGURA 4.3. ESQUEMA GENERAL DEL ALGORITMO DE CONTROL.....	98
FIGURA 4.4. ESTABILIZACIÓN DE LA DINÁMICA TRANSVERSAL. EL OBJETIVO DE LA LEY DE CONTROL ES LLEVAR EL AERODESLIZADOR HACIA EL EJE X.....	99
FIGURA 4.5. TRAYECTORIAS CON $E_1=0$. CUANDO LA FUERZA ES POSITIVA ψ TIENE EL MISMO SIGNO QUE Y, CUANDO LA FUERZA ES NEGATIVA ψ TIENE EL SIGNO OPUESTO A Y.....	101
FIGURA 4.6. REGIÓN DE DECREMENTO DE LA FUNCIÓN V_2 . LA FUNCIÓN DE LYAPUNOV DECRECE EN TODO EL ÁREA SOMBRADA. LA REGIÓN DONDE LA FUNCIÓN DE LYAPUNOV V_2 PUEDE CRECER ESTÁ ACOTADA POR UNA BOLA DE RADIO $\max(R_1, R_2)$ QUE A SU VEZ SE ENCUENTRA ACOTADA POR UNA CURVA DE NIVEL DE LA FUNCIÓN DE LYAPUNOV. DICHA CURVA ES UNA REGIÓN DE ATRACCIÓN DEL SISTEMA.....	113
FIGURA 4.7. EN AUSENCIA DE PERTURBACIONES EL CONTROL SINTONIZADO DE FORMA NO CONSERVATIVA ES ESTABLE.....	115
FIGURA 4.8. LA LEY DE CONTROL ES ROBUSTA A CIERTO GRADO DE RUIDO Y PERTURBACIÓN. EN ESTE CASO $P_x=0.05$ Y EL RUIDO ES DE MEDIA NULA Y AMPLITUD 0.1.....	116
FIGURA 4.9. OBJETIVO DEL CONTROL LONGITUDINAL. EL CONTROL LONGITUDINAL TRATA DE MANTENER EL AERODESLIZADOR MOVIÉNDOSE EN UNA BANDA DE AMPLITUD H EN TORNO AL EJE Y.....	117
FIGURA 4.10. HISTÉRESIS DINÁMICA $H(T)$. LA FIGURA MUESTRA EL RECORRIDO DE F A LO LARGO DEL TIEMPO PARA UN VALOR FIJO DE H	118
FIGURA 4.11. LA VARIABLE E_3 PERSIGUE PEREZOSAMENTE A H	120
FIGURA 4.12. OSCILACIÓN PERIÓDICA DE X EN UNA BANDA PARA $H=1$. LA BANDA DE RADIO H SE MUESTRA EN LÍNEA DISCONTINUA.....	125
FIGURA 4.13. DIAGRAMA DE FASES DE LA DINÁMICA TRANSVERSAL. LA TRAYECTORIA (EN AZUL SÓLIDO) CONVERGE HACIA UN CICLO LÍMITE QUE SE ENCUENTRA DENTRO DE LA BANDA $ E_3 =H$ (EN NEGRO DISCONTINUO).....	125
FIGURA 4.14. CONVERGENCIA TRANSVERSAL PARA H GRANDE. SI SE TOMA H SUFICIENTEMENTE GRANDE Y EN AUSENCIA DE RUIDO Y PERTURBACIONES, ES POSIBLE HACER QUE $\ X_T\ $ SEA α VECES MÁS PEQUEÑO EN CADA INSTANTE DE CONMUTACIÓN. DE ESTE MODO LA TRAYECTORIA PUEDE ACOTARSE POR UNA FUNCIÓN DECRECIENTE β	127
FIGURA 4.15. COMPORTAMIENTO DE LA VARIABLE E_2 . SI T ES SUFICIENTEMENTE GRANDE ENTONCES E_2 SE PUEDE ACOTAR FINALMENTE POR $\max(\ X_R\ , CN_{MAX})$	131
FIGURA 4.16. REGIONES DE INTERÉS. LAS TRAYECTORIAS EN TIEMPO DISCRETO X_N QUE COMIENCEN EN LA BOLA MARRÓN ACABARÁN METIÉNDOSE EN LA BOLA ROJA Y PERMANECERÁN DENTRO PARA SIEMPRE (PUNTOS ROJOS). LA TRAYECTORIA EN TIEMPO CONTINUO (LÍNEA AZUL) QUE PASA POR LOS PUNTOS X_N ES GLOBAL FINALMENTE ACOTADA POR LA BOLA VERDE.....	139
FIGURA 4.17. EL SISTEMA EQUIVALENTE NO ES ESTABLE PARA TODAS LAS COMBINACIONES DE TIEMPOS DE CONMUTACIÓN.....	141
FIGURA 4.18. RADIO ESPECTRAL DE A_{EQ} PARA LAS CONSTANTES NOMINALES DEL PROBLEMA Y $K_1=0.5$ $K_2=K_3=1$. EL VALOR EXACTO SE MUESTRA EN AZUL SÓLIDO, LA ESTIMACIÓN DE TAYLOR EN ROJO DISCONTINUO.....	144
FIGURA 4.19. TRAYECTORIA ESPACIAL DEL AERODESLIZADOR.....	150
FIGURA 4.20. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LAS COORDENADAS ESPACIALES.....	151
FIGURA 4.21. EVOLUCIÓN DE LAS VARIABLES DE ERROR.....	152

FIGURA 4.22. VELOCIDADES DEL AERODESLIZADOR.....	153
FIGURA 4.23. ACCIONES DE CONTROL.....	154
FIGURA 4.24. TRAYECTORIA DEL AERODESLIZADOR REAL.....	155
FIGURA 4.25. TRAYECTORIA TEMPORAL DEL AERODESLIZADOR REAL.....	156
FIGURA 4.26. VELOCIDADES DEL AERODESLIZADOR REAL.....	156
FIGURA 4.27. SEÑALES DE CONTROL EN EL AERODESLIZADOR REAL.....	157
FIGURA 5.1. POSIBLES SOLUCIONES AL SEGUIMIENTO DE UNA TRAYECTORIA. LA MISMA TRAYECTORIA PUEDE SEGUIRSE HACIA DELANTE O HACIA ATRÁS.....	162
FIGURA 5.2. DIAGRAMA DE FUERZAS ADMISIBLES. SE MUESTRAN EJEMPLOS DE TRES TIPOS DE TRAYECTORIAS: NO FACTIBLE (ROJO, FACTIBLE (AZUL) Y Estrictamente factible (VERDE).....	165
FIGURA 5.3. ESQUEMA DE CONTROL EN CASCADA PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA.....	171
FIGURA 5.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS VARIABLES Z. EL VECTOR Z REPRESENTA LA DIFERENCIA ENTRE LA FUERZA QUE SE APLICARÍA SI LA ORIENTACIÓN FUESE CORRECTA Y LA FUERZA QUE REALMENTE SE APLICA.....	173
FIGURA 5.5. DISCONTINUIDAD DEL ARCOTANGENTE. EN LOS PUNTOS A Y B LA FUNCIÓN ATAN2 ESTÁ DEFINIDA Y ES CONTINUA. ENTRE EL PUNTO C Y C' EXISTE UNA DISCONTINUIDAD EVITABLE (PUEDE EVITARSE SUMANDO O RESTANDO 2π AL PASAR POR EL EJE X) SIN EMBARGO EN EL PUNTO D NO EXISTE NINGUNA FORMA COHERENTE DE DEFINIR EL ARCOTANGENTE.....	175
FIGURA 5.6. FACTIBILIDAD DE LAS SEÑALES DE CONTROL. UNA CORRECTA ELECCIÓN DE LAS SATURACIONES GARANTIZA QUE LA SEÑAL DE CONTROL GENERADA SIEMPRE SERÁ FACTIBLE EN TRAYECTORIAS BIEN DEFINIDAS. YA QUE UN INSTANTE DADO LA DISTANCIA ENTRE F Y F_R ASÍ COMO τ Y τ_R ESTÁN ACOTADOS.....	182
FIGURA 5.7. LA REGIÓN $V_I=V_{IMAX}$ DELIMITA UNA REGIÓN DE ATRACCIÓN DEL SISTEMA. ESTO ES CLARO YA QUE DICHA CURVA DE NIVEL ENCIERRA COMPLETAMENTE LA REGIÓN DONDE LA DERIVADA DE V_I ES POSITIVA.....	187
FIGURA 5.8. BALANCE DE FUERZAS EN PRESENCIA DE UNA PERTURBACIÓN. CUANTO MAYOR ES EL VALOR DE F_R MENOR ES EL EFECTO DE LA PERTURBACIÓN SOBRE ψ	195
FIGURA 5.9. CONVERGENCIA A UNA TRAYECTORIA CIRCULAR R=2M V=0.5M/S. LA REFERENCIA SE MARCA EN ROJO MIENTRAS QUE LA TRAYECTORIA SE MARCA EN AZUL.....	205
FIGURA 5.10. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LAS VARIABLES DE POSICIÓN. LA TRAYECTORIA SE MUESTRA EN AZUL CONTINUO MIENTRAS QUE LA REFERENCIA SE MUESTRA EN ROJO DISCONTINUO.....	205
FIGURA 5.11. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LAS VELOCIDADES. LA VELOCIDAD DEL VEHÍCULO SE MUESTRA EN AZUL CONTINUO MIENTRAS QUE LA REFERENCIA SE MUESTRA EN ROJO DISCONTINUO.....	206
FIGURA 5.12. ORIENTACIÓN Y VELOCIDAD ANGULAR DE LA TRAYECTORIA. EN AZUL CONTINUO SE MUESTRA EL VALOR DE ψ Y R MIENTRAS QUE EN ROJO DISCONTINUO SE MUESTRA EL VALOR DE ψ_C Y R_C	206
FIGURA 5.13. DIAGRAMA DE FUERZAS CORRESPONDIENTE AL SEGUIMIENTO DE LA TRAYECTORIA CIRCULAR. A LO LARGO DE LA TRAYECTORIA LAS FUERZAS Y MOMENTOS SON SIEMPRE FACTIBLES.....	207
FIGURA 5.14. FUERZAS DE CONTROL EN EL AERODESLIZADOR. LA FUERZA APLICADA SE MUESTRA EN AZUL MIENTRAS LOS LÍMITES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE MUESTRAN EN ROJO DISCONTINUO.....	208

FIGURA 5.15. EVOLUCIÓN DE LA DISTANCIA A LA TRAYECTORIA DESDE TRES CONDICIONES INICIALES DISTINTAS. LA CONDICIÓN INICIAL X_A SE MUESTRA EN AZUL, X_B EN VERDE Y X_C EN ROJO. EN LOS TRES CASOS LA TRAYECTORIA CONVERGE HACIA LA REFERENCIA.....	208
FIGURA 5.16. TRAYECTORIAS ESPACIALES DESDE DIFERENTES CONDICIONES INICIALES. X_A EN AZUL, X_B VERDE Y X_C ROJO.....	209
FIGURA 5.17. SEÑALES DE CONTROL PARA LAS DISTINTAS TRAYECTORIAS. X_A EN AZUL, X_B VERDE Y X_C ROJO. LAS SATURACIONES SE MARCAN CON LÍNEA NEGRA DISCONTINUA.....	210
FIGURA 5.18. EFECTO DEL RUIDO SOBRE LA TRAYECTORIA. CUANTO MAYOR ES EL RUIDO PEOR ES LA RESPUESTA EN ESTADO ESTACIONARIO.....	211
FIGURA 5.19. EFECTO DEL RUIDO SOBRE LA TRAYECTORIA ESPACIAL. LA FIGURA MUESTRA LA TRAYECTORIA PARA $N=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ Y 0.5 EN AZUL, VERDE, ROJO, VIOLETA Y NEGRO RESPECTIVAMENTE.....	211
FIGURA 5.20. SEÑALES DE CONTROL EN PRESENCIA DE RUIDO EN LA MEDIDA. LA FIGURA MUESTRA LAS SEÑALES DE CONTROL CON $N=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ Y 0.5 EN AZUL, VERDE, ROJO, VIOLETA Y NEGRO RESPECTIVAMENTE.....	212
FIGURA 5.21. EFECTO DE UNA PERTURBACIÓN CONSTANTE.....	212
FIGURA 5.22. EFECTO DE LA INCERTIDUMBRE EN LOS PARÁMETROS.....	214
FIGURA 5.23. TRAYECTORIA GENERAL. SE MUESTRA LA TRAYECTORIA DEL AERODESLIZADOR EN AZUL MIENTRAS QUE LA REFERENCIA SE ENCUENTRA EN ROJO.....	215
FIGURA 5.24. SEÑALES DE CONTROL EN UNA TRAYECTORIA GENERAL.....	216
FIGURA 5.25. SEGUIMIENTO DE UNA TRAYECTORIA NO FACTIBLE.....	217
FIGURA 5.26. SEÑALES DE CONTROL EN UNA TRAYECTORIA SINUSOIDAL.....	217
FIGURA 6.1. REGIÓN DE FUERZAS Y MOMENTOS DOMINABLES. LOS PUNTOS AZULES MUESTRAN LOS VALORES DE LAS FUERZA Y MOMENTOS APLICABLES.....	222
FIGURA 6.2. ESQUEMA DE CONTROL EN CASCADA PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA.....	224
FIGURA 6.3. VECTORES S Y Z. LAS VARIABLES Z_1 Y Z_2 SON LAS COMPONENTES DEL VECTOR S EXPRESADO EN EJES CUERPO, MIENTRAS QUE LAS VARIABLES S_x Y S_y SON LAS COMPONENTES DEL MISMO VECTOR EN EL SISTEMA INERCIAL.....	225
FIGURA 6.4. REGIÓN DE DECRECIMIENTO DE V. CUANDO $\ Z\ > Z_{MAX}$ ENTONCES V DECRECE Y POR LO TANTO $\ Z\ $ TAMBIÉN DECRECE. ESTO SIGNIFICA QUE LA REGIÓN $\ Z\ \leq Z_{MAX}$ ES UNA REGIÓN DE ATRACCIÓN DEL SISTEMA.....	241
FIGURA 6.5. ESTABILIDAD DEL CONJUNTO. SI SE CUMPLE QUE $\ Z(0)\ < M$, $W(T_f) < \epsilon_f$, $\ Z(T_f)\ < 2M$ Y $Z_{MAX}(\epsilon_f) < M$ ENTONCES LA TRAYECTORIA NUNCA ABANDONARÁ LA REGIÓN $\ Z\ < 2M$	250
FIGURA 6.6. LA TRAYECTORIA CIRCULAR PLANTEADA ES DOMINABLE. LA LÍNEA ROJA DELIMITA LA REGIÓN FACTIBLE, LA AZUL DISCONTINUA ES LA REGIÓN DOMINABLE, Y EL + VERDE ES EL PAR (τ_R, F_R)	258
FIGURA 6.7. TRAYECTORIA CIRCULAR SIN RUIDO. LA TRAYECTORIA SE MUESTRA EN AZUL Y LA REFERENCIA EN ROJO.....	258
FIGURA 6.8. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA POSICIÓN. TRAYECTORIA EN AZUL Y REFERENCIA EN ROJO.....	259
FIGURA 6.9. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA VELOCIDAD. TRAYECTORIA EN AZUL Y REFERENCIA EN ROJO.....	259
FIGURA 6.10. EVOLUCIÓN DE LA ORIENTACIÓN. REFERENCIAS EN ROJO Y TRAYECTORIA EN AZUL.....	260

FIGURA 6.11. DETALLE DE LA CONVERGENCIA DE LAS VARIABLES AUXILIARES Z Y S_ψ	260
FIGURA 6.12. SEÑALES DE CONTROL APLICADAS AL AERODESLIZADOR. EN ROJO SE MARCA LA SATURACIÓN DE LOS MOTORES.....	261
FIGURA 6.13. EVOLUCIÓN DE LA DISTANCIA A LA TRAYECTORIA DESDE TRES CONDICIONES INICIALES ADVERSAS. X_A EN AZUL, X_B VERDE Y X_C ROJO. EN LOS TRES CASOS LA TRAYECTORIA CONVERGE HACIA LA REFERENCIA.	262
FIGURA 6.14. TRAYECTORIA CON CONDICIONES INICIALES ADVERSAS. X_A EN AZUL, X_B VERDE Y X_C ROJO. EN LOS TRES CASOS LA TRAYECTORIA CONVERGE HACIA LA REFERENCIA CIRCULAR (NEGRO).....	262
FIGURA 6.15. TRAYECTORIA FACTIBLE NO DOMINABLE. LA REGIÓN DOMINABLE ES EL INTERIOR DEL RECTÁNGULO AZUL MIENTRAS QUE LA REGIÓN FACTIBLE ES EL ROMBO ROJO. LAS FUERZAS Y MOMENTOS NECESARIOS PARA SEGUIR LA TRAYECTORIA SE MUESTRAN EN VERDE.....	263
FIGURA 6.16. CONVERGENCIA HACIA UNA TRAYECTORIA GENERAL. TRAYECTORIA EN AZUL Y REFERENCIA EN ROJO.....	264
FIGURA 6.17. EVOLUCIÓN DE LA ORIENTACIÓN EN UNA TRAYECTORIA NO DOMINABLE. LAS MAYORES DISCREPANCIAS SE PRODUCEN EN LOS PICOS DE VELOCIDAD EN R DONDE T ES MÁXIMO.....	265
FIGURA 6.18. ERROR DE SEGUIMIENTO DE LA TRAYECTORIA. EL ERROR DE SEGUIMIENTO EN ESTADO ESTACIONARIO ES MÍNIMO.....	265
FIGURA 6.19. ERROR DE SEGUIMIENTO PARA DIFERENTES NIVELES DE RUIDO.....	266
FIGURA 6.20. TRAYECTORIAS DEL AERODESLIZADOR PARA DIFERENTES NIVELES DE RUIDO.....	267
FIGURA 6.21. TRAYECTORIA EN PRESENCIA DE UNA PERTURBACIÓN CONSTANTE.	268
FIGURA 6.22. ERROR DE SEGUIMIENTO EN PRESENCIA DE UNA PERTURBACIÓN ACOTADA CONSTANTE.	268
FIGURA 6.23. SEGUIMIENTO DE UNA TRAYECTORIA CIRCULAR DE PRUEBA.	269
FIGURA 6.24. TRAYECTORIA DEL SISTEMA REAL. LAS MEDIDAS SE MUESTRAN EN AZUL Y REFERENCIAS EN ROJO.....	270
FIGURA 6.25. VELOCIDADES DEL AERODESLIZADOR.....	270
FIGURA 6.26. EVOLUCIÓN DE LA ORIENTACIÓN DEL VEHÍCULO. EN AZUL SE MUESTRA LA ORIENTACIÓN ψ Y LA VELOCIDAD ANGULAR R. POR OTRA PARTE EN ROJO SE MUESTRA LA REFERENCIA ψ_C ASÍ COMO LA VELOCIDAD ANGULAR R_R	271
FIGURA 6.27. ERROR DE SEGUIMIENTO EN UN EXPERIMENTO REAL.	272
FIGURA 6.28. SEÑALES DE CONTROL APLICADAS AL AERODESLIZADOR REAL.	272

Lista de tablas

TABLA 2.1. CONSTANTES ESTÁNDAR DEL MODELO DE SIMULACIÓN.	11
TABLA 3.1. ELEMENTOS DE VISIÓN DE BAJO NIVEL.....	61
TABLA 3.2. ELEMENTOS DE VISIÓN DE ALTO NIVEL.	64
TABLA 3.3. IMPLEMENTACIONES DEL CONTROL.	79
TABLA 3.4. OTROS BLOQUES IMPLEMENTADOS.	81
TABLA 4.1. FUERZAS Y MOMENTOS DISPONIBLES. *ESTOS RESULTADOS DEPENDEN DEL HECHO DE QUE $U_{MAX} > U_{MIN}$.	95
TABLA 4.2. TABLA DE SELECCIÓN DE LAS SEÑALES DE CONTROL.....	95

Capítulo 1 Introducción, objetivos y estructura

1.1. Introducción

La inmensa mayoría de los vehículos empleados en el transporte, tanto terrestre como marítimo o aéreo son vehículos subactuados. La razón es que en general, estos vehículos son más simples, eficientes y baratos que los vehículos completamente actuados. Solo en unos pocos casos, la necesidad de maniobrabilidad justifica el coste de añadir más actuadores a dichos vehículos.

Los vehículos empleados más frecuentemente en la industria naval son vehículos de superficie. Típicamente estos vehículos poseen un motor y timón que les permite controlar su velocidad y su orientación, haciendo que el control de vehículos subactuados de superficie sea un problema práctico de gran interés (Fossen, 2002).

Desde el punto de vista del control, los vehículos subactuados presentan restricciones no holonómicas que limitan sus posibilidades de maniobra. Esto dificulta el diseño de leyes de control para los mismos, haciendo que el diseño dichas leyes sea fuertemente dependiente del problema de control deseado. Una clasificación exhaustiva de dichos problemas puede encontrarse en (Olfati-Saber, 2001).

Puesto que la dinámica de estos vehículos es no lineal, el análisis de los mismos es complejo e involucra conceptos avanzados de controlabilidad (Hermann & Krener, 1977; Megretski, 2003) dando lugar a una línea de investigación que aún permanece activa y todavía hoy es fuente de nuevos resultados interesantes (Kai, Kimura & Hara, 2005).

Si bien es posible seguir ciertas trayectorias por medio de leyes de control suaves e independientes del tiempo no ocurre lo mismo cuando el objetivo es estabilizar el vehículo en un punto y con una orientación determinada. Este problema es conocido frecuentemente como posicionamiento dinámico. De acuerdo con un famoso resultado de inexistencia conocido como teorema de Brockett (Brockett, 1983) el posicionamiento dinámico de estos vehículos es un problema muy complejo.

En general cada uno de los problemas asociados al control de dichos vehículos suelen tratarse por separado, dando solución independiente a una de las dificultades que se presentan (Aguiar & Hespanha, 2003; Aguiar & Pascoal, 2002; Pettersen & Nijmeijer, 2001; Pettersen & Egeland, 1996; Sira-Ramírez & Ibañez, 2000). No obstante, existen algunos autores que intentan unificar en una misma estrategia de control varios problemas de forma simultánea como por ejemplo en (Aguiar & Hespanha, 2007) y en (Encarnação & Pascoal, 2001), donde se abordan conjuntamente los controles de seguimiento de camino y de trayectoria, así como en (Do, Jiang & Pang, 2002) donde se diseña un control que además es capaz de resolver el problema de estabilización en un punto.

La principal diferencia entre los vehículos subactuados marinos y los vehículos subactuados terrestres es que los primeros tienen una velocidad de deriva no despreciable, esto es lo que hace que la restricción dinámica involucre las aceleraciones y no las velocidades (hecho por el cual la restricción no holonómica es de segundo orden).

Puesto que el principal problema de estos vehículos es el deslizamiento y este es especialmente acusado en los aerodeslizadores, muchos autores eligen este sistema como modelo de estudio (Aguiar, Cremean & Hespanha, 2003; Dumber, Olfati-Saber & Murray, 2003; Fantoni, Lozano, Mazenc & Pettersen, 2000; Seguchi & Ohtsuka, 2003; Sira-Ramírez & Ibañez, 2000), por citar algunos.

A nivel internacional existen varias plataformas dedicadas a la experimentación con aerodeslizadores entre las que cabe destacar el *Multi-Vehicle Wireless Testbed* (MVWT) desarrollado en el Caltech, la plataforma experimental utilizada en (Seguchi & Ohtsuka, 2002) o la plataforma para múltiples aerodeslizadores que se expone en (Vladimerou et al., 2004). El objetivo de todas estas plataformas es disponer de un banco de pruebas que permita validar las leyes de control desarrolladas para vehículos autónomos subactuados.

En esta Tesis se sigue la misma aproximación que estos autores, para ello se desarrolla una plataforma experimental que utiliza un aerodeslizador como modelo de vehículo subactuado no nolonómico y se estudian estrategias de control para este vehículo.

1.2. Objetivos de la Tesis

Esta Tesis está dedicada al control de los vehículos subactuados de superficie. El sistema propuesto como modelo a controlar es un aerodeslizador subactuado que se describe en detalle en el Capítulo 3.

El propósito fundamental de este trabajo es diseñar leyes de control que sean capaces de resolver los problemas de seguimiento de trayectoria y posicionamiento dinámico considerando las limitaciones de los actuadores y del vehículo en cuestión. Para ello se definen los siguientes objetivos.

- I Estudiar la controlabilidad del modelo, estableciendo el tipo de problemas que pueden abordarse y las limitaciones físicas del aerodeslizador.

- II Implementar una plataforma experimental que sea un banco de prueba para las leyes de control que se desarrollan en la Tesis.
- III Obtener y validar un modelo de simulación del aerodeslizador que permita diseñar y analizar leyes de control para el mismo.
- IV Resolver el problema de posicionamiento dinámico del aerodeslizador teniendo en cuenta que las señales de control disponibles son de tipo todo-nada-inversión.
- V Resolver el problema de seguimiento de trayectoria del aerodeslizador considerando entradas de control continuas.
- VI Resolver el problema de seguimiento de trayectoria del aerodeslizador utilizando solamente las señales de control disponibles en el sistema físico real (todo-nada-inversión).
- VII Para cada una de las leyes de control diseñadas obtener demostraciones teóricas de la estabilidad y analizar el efecto de las perturbaciones y el ruido en la medida así como la incertidumbre en los parámetros.
- VIII Validar las leyes de control diseñadas utilizando señales de control discretas (y por tanto directamente aplicables al sistema físico real) utilizando el sistema de laboratorio desarrollado.

1.3. Estructura

La exposición del desarrollo de este trabajo se organiza en siete capítulos. Si bien la estructura de la Tesis es secuencial se ha intentado que en la medida de lo posible cada uno de los capítulos sea autocontenido. Por este motivo los capítulos de desarrollo (2 a 6) contienen una pequeña introducción sobre el problema tratado en el capítulo así como una pequeña discusión acerca de los resultados obtenidos en el mismo.

Capítulo 2:

Se presenta la estructura general del modelo del aerodeslizador que se utilizará en el resto de la Tesis, además se realiza un estudio en profundidad de los problemas de control presentes en el aerodeslizador, estudiando detalladamente la restricción no holonómica que limita su movimiento y como afecta al tipo de trayectorias que pueden seguirse. Además se obtienen resultados acerca de la controlabilidad local y global del estado, la controlabilidad del sistema en torno a trayectorias así como las limitaciones que el teorema de Brockett impone sobre las leyes de control desarrolladas.

Capítulo 3:

Se analiza la implementación del sistema real de laboratorio. Se expone tanto la realización física del laboratorio (estructura del hardware) como los programas que se

desarrollan para el control del vehículo (estructura del software). Se describe la implementación de la librería de bloques en LabVIEW que compone la arquitectura software del laboratorio, desglosando cada uno de los módulos que contiene así como los problemas que resuelve (visión artificial, cálculo de la ley de control, comunicación con el aerodeslizador y diseño de la interfaz gráfica de usuario). Finalmente se utiliza la plataforma implementada para obtener y validar un modelo del aerodeslizador.

Capítulo 4:

Se desarrolla una ley de control que permite resolver el problema de posicionamiento en un punto del aerodeslizador. Dicha ley de control se desarrolla en dos partes, en primer lugar se busca una ley de control que estabiliza la dinámica trasversal del vehículo (haciendo uso del par de fuerza diferencial de los motores). A continuación se diseña una segunda ley de control, que empleando como acción de control la fuerza total de los motores, es capaz de mantener acotada la posición longitudinal del vehículo. Finalmente se unifican ambas leyes de control de tal manera que las dinámicas longitudinal y transversal se estabilicen al mismo tiempo. Se analiza la estabilidad desde el punto de vista teórico y práctico mediante simulaciones y experimentos reales.

Capítulo 5:

Se resuelve el problema de seguimiento de trayectoria mediante una ley de control continua. Para ello, en primer lugar, se hace un estudio del tipo de trayectorias que pueden seguirse (trayectorias factibles) así como de las trayectorias en las que puede diseñarse una ley de control que utilice información local (trayectorias bien definidas). A continuación se diseña una ley de control que es capaz de seguir cualquier trayectoria bien definida utilizando fuerzas acotadas en cada uno de los actuadores sea cual sea la condición inicial de partida. Se demuestra la estabilidad del control obtenido de forma teórica y se analiza el rendimiento de la ley de control por medio de simulaciones.

Capítulo 6:

Este capítulo está dedicado a resolver el problema de seguimiento de trayectoria de un aerodeslizador utilizando únicamente señales de control todo-nada-inversión. Para ello se define un subconjunto de las trayectorias del sistema en las cuales las acciones de control disponibles pueden dominar sobre las acciones de control necesarias para seguir la trayectoria. A estas trayectorias se las denomina trayectorias dominables. A continuación se diseña un control que es capaz de seguir cualquier trayectoria dominable desde una condición inicial acotada (estabilidad semiglobal). La estabilidad se analiza tanto matemáticamente como en simulación y además la ley de control desarrollada se pone a prueba en el sistema experimental.

Capítulo 7:

Finalmente se exponen las conclusiones de la presente Tesis haciendo hincapié en las aportaciones originales de la misma. Además se plantean las posibles líneas de investigación futura a las que da pie este trabajo.

Capítulo 2 Problemas de control de un aerodeslizador

El objetivo de este capítulo es presentar el sistema con el que se trabaja a lo largo de esta tesis. Para ello, en primer lugar, se comenzará estudiando el modelo en tres grados de libertad de un aerodeslizador subactuado y las hipótesis de modelado que lo sustentan.

A continuación se estudiarán las restricciones no holonómicas que actúan sobre el vehículo limitando su movimiento. En particular se dará una caracterización de las trayectorias factibles, esto es, las trayectorias que pueden ser seguidas por el vehículo cuando sobre él se aplica una cierta señal de control acotada.

Además, en este capítulo se analizará en detalle el problema de controlabilidad del aerodeslizador, haciendo hincapié a dos problemas fundamentales. El primero es la controlabilidad del estado, en donde se analiza bajo que condiciones es posible mover el aerodeslizador entre dos estados diferentes. El segundo es la controlabilidad a lo largo de una trayectoria, en el cual se determina cuando es posible manejar el estado del sistema en el entorno de una trayectoria dada.

2.1. Modelo del sistema

Un aerodeslizador, también conocido por su nombre en inglés “*hovercraft*”, es un vehículo que se sustenta al lanzar un chorro de aire contra una superficie que se encuentra debajo de él. Esto genera un colchón de aire, que le permite, en principio, moverse sobre cualquier superficie horizontal lo suficientemente regular, como llanuras, sobre el agua, la nieve, arena o hielo, sin estar propiamente en contacto con ella, como se ve en la Figura 2.1. Esto hace del aerodeslizador un vehículo muy versátil.

Dado que el aerodeslizador es un vehículo que se sostiene sobre un colchón de aire este tipo de vehículo se clasifica como una aeronave. Sin embargo, el funcionamiento del vehículo deslizando sobre fluidos y sobre superficies sólidas puede modelarse perfectamente como un vehículo marítimo de superficie.

Este tipo de modelado es muy interesante ya que el aerodeslizador refleja comportamientos dinámicos frecuentes en los vehículos marinos subactuados que no se

dan en los vehículos terrestres. El ejemplo más claro de este comportamiento es la existencia de una velocidad de deriva lateral no controlable. Además en este vehículo dichos efectos se ven amplificados ya que la velocidad de deriva no es en ningún modo despreciable.



Figura 2.1. aerodeslizador militar real.

Existen muchas publicaciones acerca del modelado y la identificación de modelos de vehículos marinos, ver por ejemplo, (Fossen, 2002) para una visión general, (Aranda, Cruz & Díaz, 2004) para la obtención de modelos de vehículos rápidos de superficie. Un modelo clásico de vehículo marino subactuado se puede encontrar en (Pettersen & Nijmeijer, 2001). En algunas publicaciones pueden encontrarse modelos simplificados de aerodeslizador, sirvan como ejemplo (Fantoni et al., 2000) o (Fantoni et al., 2000; Seguchi & Ohtsuka, 2002). En esta Tesis se empleará el modelo presentado en (Aguar et al., 2003) y (Cremean et al., 2002) que es considerado como estándar para el control de este tipo de vehículos.

En este trabajo se utilizarán ampliamente varios sistemas de coordenadas. Esto permitirá destacar claramente las hipótesis de modelado del sistema así como introducir los sistemas de referencia que serán de utilidad a lo largo de la Tesis.

2.1.1. Cinemática general de un vehículo en 3GDL

La cinemática general de un vehículo marítimo se describe utilizando la notación SNAME (1950). En esta notación se definen entre otros los dos sistemas de coordenadas que se usarán a lo largo del desarrollo.

Sistema NED (*North-East-Down*): En este sistema, los ejes de coordenadas son tangentes a la superficie del suelo. El eje X_{ned} está orientado en dirección norte, el eje Y_{ned} orientado en dirección Este, y, al tratarse de un sistema de ejes dextrógiro el eje Z_{ned} debe apuntar hacia abajo. La posición de este sistema queda establecida por la longitud y la latitud.

Sistema Inercial $\{U\}$: Para propósitos de control el sistema NED puede considerarse como un sistema inercial local. De este modo en dicho sistema se cumplen las leyes de Newton. Esto implica despreciar las fuerzas de Coriolis inducidas por la rotación de la tierra y considerar la tierra como un sistema localmente plano. Por tanto, fijando arbitrariamente un punto fijo de la tierra próximo al vehículo ‘ o ’ pueden definirse unos ejes coordenados planos $\{X, Y\}$. Ver Figura 2.2

Sistema BODY $\{B\}$: Este sistema de coordenadas se encuentra anclado al vehículo en su movimiento. El eje X_b del sistema apunta hacia proa y el eje Y_b apunta hacia estribor. El eje Z_b que no se muestra en la Figura 2.2 apunta hacia abajo.

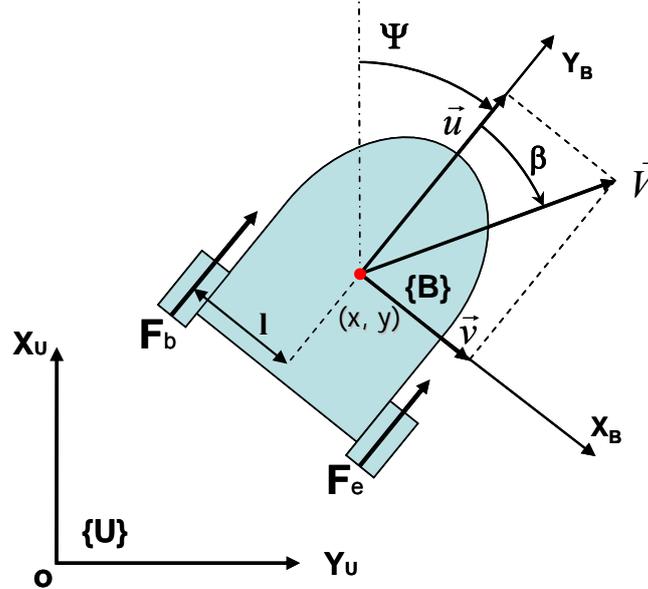


Figura 2.2. Ejes de coordenadas. La figura muestra el sistema de coordenadas inercial local $\{U\}$ y el sistema de coordenadas ligado al vehículo $\{B\}$ (ejes cuerpo).

Dado que solo se está considerando el movimiento del vehículo sobre la superficie horizontal, se usará un modelo de 3 GDL (grados de libertad). En este modelo la transformación de coordenadas entre el sistema de ejes anclado al vehículo y el eje inercial vendrá especificada por una traslación y una rotación de ángulo Ψ (2.1).

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Donde Ψ es la orientación (*Yaw*) o ángulo de guiñada del vehículo, (x, y) es la posición del centro de masas del vehículo que coincide con el origen de $\{B\}$.

Las ecuaciones cinemáticas en el sistema inercial vienen dadas por (2.2), donde la tercera de las ecuaciones es la definición de la velocidad de guiñada r , también conocida por el término inglés “*yaw rate*”.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{\psi} &= r\end{aligned}\tag{2.2}$$

La velocidad del vehículo en el sistema $\{B\}$ puede expresarse mediante dos componentes, la velocidad de avance u y la deriva lateral v . Teniendo en cuenta la relación (2.1) entre los sistemas de coordenadas pueden deducirse las ecuaciones cinemáticas respecto al sistema $\{B\}$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos(\psi) - v \sin(\psi) \\ \dot{y} &= u \sin(\psi) + v \cos(\psi) \\ \dot{\psi} &= r\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.1.2. Dinámica de un vehículo naval

El sistema natural para deducir las ecuaciones dinámicas de un vehículo es el sistema inercial $\{U\}$ donde son válidas las leyes de Newton, en este sistema las ecuaciones dinámicas adoptan la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= f_x(v_x, v_y, F_b, F_e, \psi, r) + f_{cx} \\ m\ddot{y} &= f_y(v_x, v_y, F_b, F_e, \psi, r) + f_{cy} \\ J\dot{r} &= M_r(v_x, v_y, F_b, F_e, \psi, r) + M_{cr}\end{aligned}\tag{2.4}$$

Donde m es la masa del vehículo, J su momento de inercia respecto al centro de masas, f_x, f_y son las fuerzas inducidas en el vehículo en el sistema inercial y M_r es el par de fuerzas que actúa sobre el vehículo que serán función de las fuerzas de los motores de estribor y babor respectivamente F_e y F_b . Por otro lado f_{cx}, f_{cy} y M_{cr} son las fuerzas inducidas por el agua y el viento. Estas fuerzas, en general, pueden depender de forma compleja del estado del vehículo, de las señales de control e incluso de las derivadas de los estados (derivadas hidrodinámicas) (Fossen, 2002).

El problema de este sistema es que, en general, resulta difícil deducir la forma que adoptan f_x, f_y y M_r . Afortunadamente estas fuerzas son fácilmente expresables en el sistema $\{B\}$. Esa es la razón por la cual dicho sistema se utiliza frecuentemente para el modelado de la dinámica de estos vehículos.

Sin embargo, el sistema $\{B\}$ es un sistema no inercial, de este modo las leyes de Newton no se aplican directamente. Por este motivo la transformación del sistema de coordenadas introduce los términos de Coriolis mr_v y mr_u . Para ver esto basta con derivar (2.3) y sustituir en (2.4). Obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}m\dot{u} - mr_v &= \cos(\psi)(f_x + f_{cx}) + \sin(\psi)(f_y + f_{cy}) \\ m\dot{v} + mr_u &= -\sin(\psi)(f_x + f_{cx}) + \cos(\psi)(f_y + f_{cy}) \\ J\dot{r} &= M_r + M_{cr}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Llegados a este punto resulta fácil escribir las fuerzas y momentos que actúan sobre el aerodeslizador. Observando la Figura 2.2 es claro que la fuerza en la dirección del eje X_b es la suma de las fuerzas de los dos motores F_e y F_b , mientras que el par de fuerzas es el originado por el modo diferencial entre ambos motores.

Por otro lado, las fuerzas inducidas sobre el vehículo por el suelo o el agua son fuerzas disipativas o de rozamiento que se modelan como fuerzas de fricción viscosa. Los coeficientes de rotación viscosa asociados a las velocidades u , v y r son respectivamente D_u , D_v y D_r . Por otra parte no se considerarán fuerzas inducidas por la corriente de modo que f_{cx} y f_{vy} serán nulas. De este modo las ecuaciones dinámicas del sistema quedan como:

$$\begin{aligned} m\dot{u} - mrv + D_u u &= F_b + F_e \\ m\dot{v} + mru + D_v v &= 0 \\ J\dot{r} + D_r r &= l(F_b - F_e) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La segunda ecuación del sistema (2.6) pone de manifiesto una de las características fundamentales del aerodeslizador, esto es, que el deslizamiento no es directamente controlable.

Dado que en la segunda ecuación dinámica no aparecen las acciones de control, el deslizamiento lateral solo se podrá controlar indirectamente usando r . Esto significa que para seguir una determinada trayectoria en la cual los valores de u y v quedan especificados habrá que adoptar una orientación específica.

Sobre el modelo (2.6) todavía caben por hacer un par de simplificaciones más. En los modelos más ampliamente usados en la literatura sobre este tipo de vehículos (Aguiar et al., 2003) así como en (Pettersen & Nijmeijer, 2001) es común encontrar algunas de estas hipótesis. Las dos principales hipótesis de modelado que se consideran son:

Isotropía: Se supondrá que los valores de D_u y D_v son idénticos.

Constancia de los parámetros: Se considera que los valores de m , J , D_u , D_v y l son constantes y no dependen del estado o del tiempo.

Finalmente con todas estas condiciones el modelo del sistema quedara como:

$$\begin{aligned} m\dot{u} - mrv + D_u u &= F_b + F_e \\ m\dot{v} + mru + D_u v &= 0 \\ J\dot{r} + D_r r &= l(F_b - F_e) \end{aligned} \quad (2.7)$$

A continuación, por conveniencia para el diseño de la ley de control se expresan las ecuaciones cinemáticas (2.3) y dinámicas (2.7) a través de la relación (2.1) como un conjunto de ecuaciones en el sistema inercial. Esto permite obtener las ecuaciones de estado en la forma en la que serán usadas en el diseño de las leyes de control.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x \\
\dot{y} &= v_y \\
\dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x \\
\dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y \\
\dot{\psi} &= r \\
\dot{r} &= \tau - d_r r
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En el modelo (2.8) $F=(F_b+F_e)/m$ es la fuerza normalizada y tiene unidades de aceleración (m/s^2), $\tau=l(F_b-F_e)/J$ es el momento normalizado y tiene unidades de aceleración angular (rad/s^2). Los coeficientes de rozamiento normalizados son $d_u=D_u/m$ y $d_r=D_r/J$ y tienen unidades de (s^{-1}).

Hay que destacar la sencillez que adoptan las ecuaciones de estado (2.8). Esta simplicidad es debida fundamentalmente a la condición de Isotropía. Podría pensarse que este modelo es demasiado simple para representar la complejidad inherente a este tipo de vehículos, sin embargo, nada más lejos de la realidad, el aparentemente simple sistema (2.8) contiene las tres dificultades fundamentales de este tipo de sistemas:

- I El sistema (2.8) es un sistema no lineal y la linealidad no es trivial.
- II El sistema es subactuado: hay tres grados de libertad x, y, ψ y solo dos acciones de control F y τ . Además las ligaduras del sistema son no-holónicas.
- III El vehículo tiene una velocidad de deslizamiento no nula que no es directamente controlable. Esta es la diferencia fundamental entre los vehículos subactuados marinos y terrestres.

Por este motivo este sistema es representativo de una amplia clase de sistemas marinos y por ello será estudiado en profundidad en este capítulo. De hecho en muchos trabajos se toma como referencia modelos incluso más simples del vehículo, véase por ejemplo (Fantoni et al., 2000; Seguchi & Ohtsuka, 2002 ; Sira-Ramírez & Ibañez, 2000) donde no se consideran fuerzas de rozamiento.

2.1.3. Sistema real de laboratorio

En la Figura 2.3 se muestra el aerodeslizador real de laboratorio con el que se trabajará a lo largo de la Tesis. Este vehículo es un aerodeslizador de radio control de la marca Graupner.

El sistema de radio control sólo permite enviar comandos de tipo todo-nada-inversión de tal manera que las acciones de control disponibles son $F_{b,e} \in \{-u_{min}, 0, u_{max}\}$. La combinación de estas señales de control determina los nueve valores posibles de las señales de control F y τ como se ve en Figura 2.4. Sin embargo, para que el modelo sea lo más general posible, a lo largo del análisis de este capítulo se considerarán valores continuos de la acción de control, $F_{b,e} \in [-u_{min}, u_{max}]$.



Figura 2.3. aerodeslizador de radio control

Los valores de las constantes del modelo dependen fuertemente de las condiciones del experimento, ya que al tratarse de un modelo a escala de dimensiones reducidas la potencia de los motores depende del estado de la batería. Además, los coeficientes de rozamiento dependen de la capacidad de bombeo del motor central que alimenta el colchón de aire y del estado de la superficie sobre la que desliza.

Parámetro	Valor
m	0.995 Kg
J	0.014 Kg/m ²
l	0.075 m
u_{max}	0.545 N
u_{min}	0.347 N
D_u	0.357 Kg/s
D_r	0.0243 Kg m ² /s
d_u	0.3588 s ⁻¹
d_r	1.7357 s ⁻¹

Tabla 2.1. Constantes estándar del modelo de simulación.

Para mantener la consistencia a lo largo de toda la Tesis en todas las simulaciones se usará el conjunto de parámetros que se muestra en la Tabla 2.1. En el Capítulo 3 se justifica el valor de dichos parámetros.

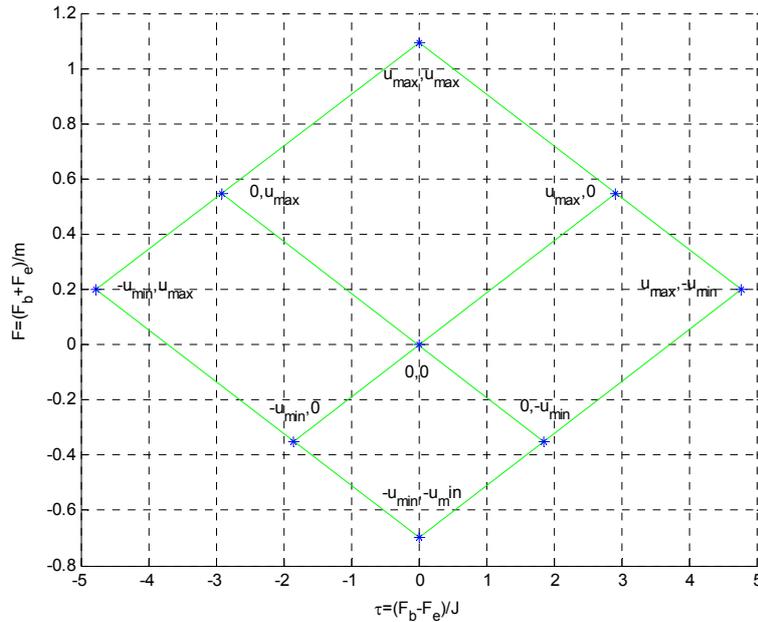


Figura 2.4. Diagrama de fuerzas admisibles. Se marca con un asterisco las nueve combinaciones de señales de control posibles y la fuerza y momento que producen.

2.2. Problemas de control del aerodeslizador

El diseño de controladores para vehículos autónomos marinos es un tema de gran interés que ha ido recibiendo una atención creciente en los últimos años. Estos vehículos son fuertemente no lineales y exhiben complejos efectos hidrodinámicos que dificultan considerablemente el diseño de control.

Los problemas de control de movimiento de vehículos autónomos tratados más frecuentemente en la literatura se pueden clasificar en tres grandes grupos fundamentales (Encarnação & Pascoal, 2001) que se muestran en la Figura 2.5:

- I Posicionamiento dinámico (“*point stabilization*”) Este problema es también conocido como estabilización en un punto, el objetivo es estabilizar el vehículo en un punto fijo y en una determinada orientación.
- II Seguimiento de trayectoria: (“*tracking*”) En este problema el vehículo debe seguir una trayectoria espacial que se encuentra parametrizada en el tiempo $(x(t), y(t))$.
- III Seguimiento de camino: (“*Path following*”) En este problema el vehículo debe converger hacia un camino preestablecido $(x(s), y(s))$. Donde s puede ser cualquier parametrización de la trayectoria (normalmente la longitud de arco). Una vez se haya alcanzado el camino deberá seguirlo con una velocidad de crucero especificada.

El grado de dificultad envuelto en resolver estos problemas es fuertemente dependiente de la configuración del vehículo y representa un gran reto cuando los vehículos son subactuados.

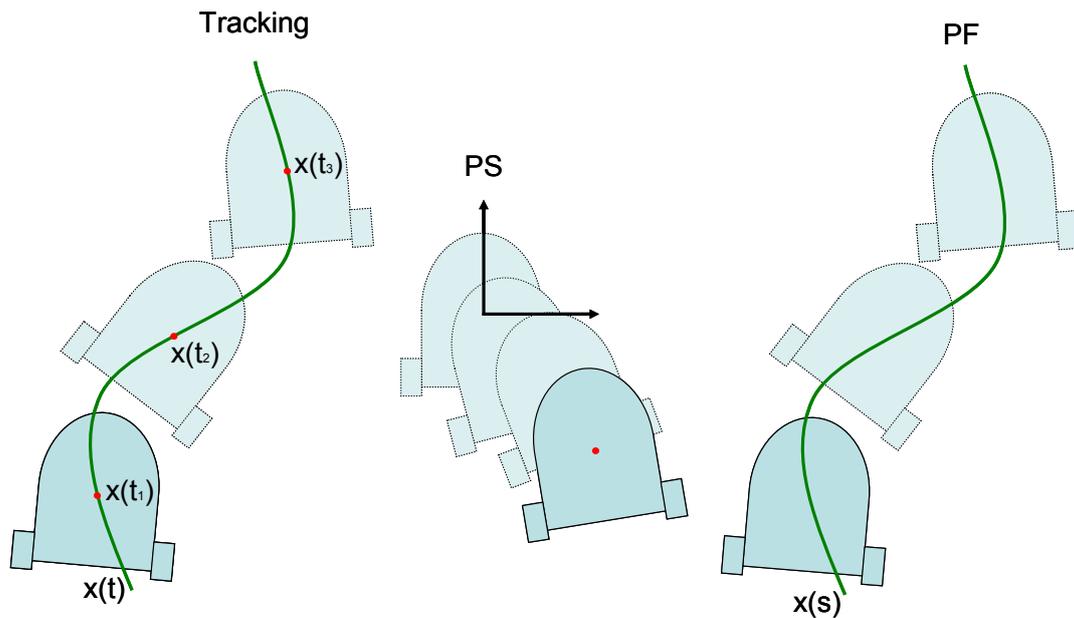


Figura 2.5. Los tres problemas de control de un vehículo. Seguimiento de trayectoria a la izquierda, posicionamiento dinámico en el centro y seguimiento de camino a la derecha.

La diferencia fundamental entre el seguimiento de trayectoria “*tracking*” y el de camino “*path following*” es que en el seguimiento de camino no hay referencias temporales, por tanto los controles diseñados para este problema se centran más en mantenerse en el camino y menos en el control de la velocidad hasta que alcanzan la el camino deseado. Esto normalmente produce controles más suaves en la aproximación a la trayectoria.

Desde el punto de vista matemático el problema de “*tracking*” aumenta en una unidad el orden del sistema a controlar ya que una vez que el vehículo se encuentra sobre la trayectoria los controladores diseñados para “*tracking*” hacen un control de posición, mientras que los de “*path following*” hacen solamente un control de velocidad.

Es importante destacar que una vez resuelto el problema de seguimiento de trayectoria es fácil adaptar la solución obtenida para hacer seguimiento de camino. Por este motivo en esta Tesis se estudia en detalle el problema de seguimiento de trayectoria.

2.3. Restricciones no holonómicas

El aerodeslizador es un sistema dinámico subactuado, ya que tiene tres GDL y solo dos acciones de control. Esto impone una restricción sobre el tipo de trayectorias que pueden ser seguidas por el mismo. Para analizar en detalle el tipo de restricciones se establecen las siguientes definiciones.

Sea un sistema dinámico general:

$$f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (2.9)$$

Donde x es un vector de coordenadas del sistema de dimensión n , f es un sistema de ecuaciones diferenciales de orden k en x , u es un vector de entradas de dimensión m y t es el tiempo.

Definición 2.1: Se dice que un sistema de la forma (2.9) es *subactuado* cuando tiene un mayor número de grados de libertad que de acciones de control independientes ($n > m$).

Definición 2.2: Se dice que un sistema dinámico subactuado es *holonómico* cuando es posible expresar las restricciones del movimiento como una ecuación entre las coordenadas dada en la ecuación (2.10).

$$h(x_1, \dots, x_n, t) = 0 \quad (2.10)$$

Donde x_i son las coordenadas de posición, en caso contrario es no holonómico.

Definición 2.3: Dado un sistema no holonómico, el *grado de holonomía* p de una restricción dinámica es el orden mínimo de derivadas que se necesitan para expresar la restricción en la forma:

$$h(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), \dots, x^{(p)}_1(t), \dots, x^{(p)}_n(t), t) = cte(ci) \quad (2.11)$$

Donde, en general, la constante $cte(ci)$ puede ser una función del estado o del tiempo iniciales pero es independiente de la señal de control u .

Según la definición anterior un sistema es no holonómico de segundo orden cuando existe una función h_1 tal que las soluciones (2.9) para cualquier valor de u cumplen la ecuación (2.12) y al mismo tiempo no existe una función h_2 tal que se cumpla (2.13).

$$h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), \ddot{x}_1(t), \dots, \ddot{x}_n(t), t) = cte(ci) \quad (2.12)$$

$$h_2(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t) = cte(ci) \quad (2.13)$$

Lo que caracteriza a los sistemas holonómicos es que existe una relación algebraica entre las variables del sistema. Un ejemplo de sistemas holonómicos es un péndulo, donde la relación entre las variables puede expresarse como $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. De este modo la condición de holonomía es equivalente a poder eliminar algunas variables del sistema o grados de libertad despejando de la ecuación (2.10).

Por otro lado, en un sistema no holonómico de primer orden no es posible despejar unas variables independientes en función de las demás, pero si que es posible encontrar cantidades conservadas de la forma (2.13) que son constantes a lo largo del movimiento. Por ejemplo en los sistemas conservativos h_2 podría ser la energía del sistema.

En un sistema no holonómico el estado final del sistema no depende de la trayectoria seguida para alcanzarlo ya que la restricción que opera sobre los estados del sistema es integrable en la forma de forma exacta como en (2.10). Sin embargo en los sistemas no holonómicos el estado final si depende de la trayectoria que se haya usado para alcanzarlo.

Para ilustrar este concepto conviene considerar el ejemplo mostrado en la Figura 2.6 donde un aro rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. La restricción de no deslizamiento limita el tipo de trayectoria a seguir, sin embargo, el estado final no está unívocamente determinado ya que moviéndose a través de dos caminos distintos A y B desde el mismo punto inicial p_1 es posible alcanzar el punto final p_2 con dos orientaciones diferentes.

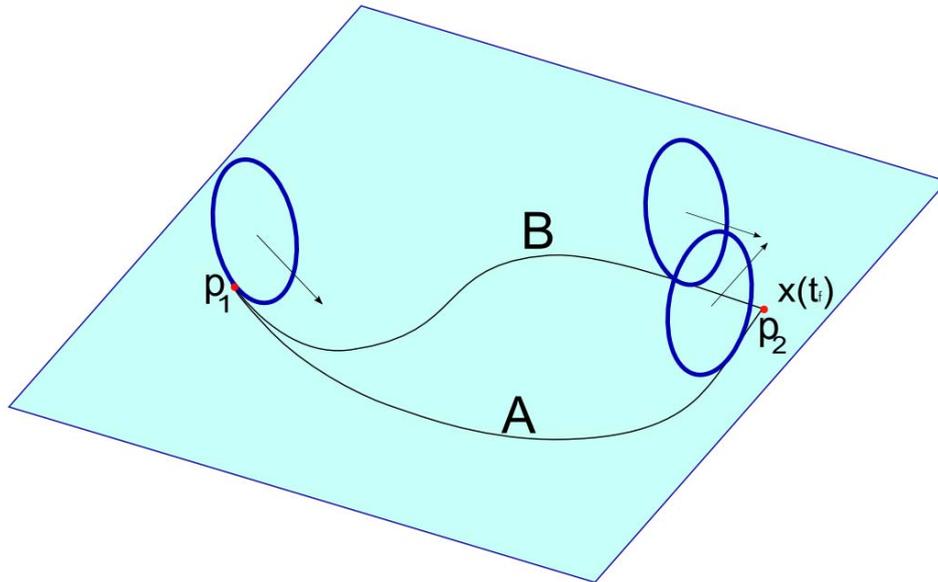


Figura 2.6. Trayectorias en un sistema no holonómico.

El aerodeslizador representado por el sistema (2.8) es un caso claro de sistema no holonómico, para ver esto en primer lugar considérese las ecuaciones para la derivada de la velocidad.

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x \\ \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y\end{aligned}\quad (2.14)$$

Si a partir de estas ecuaciones se elimina el valor de la fuerza se obtiene:

$$(\dot{v}_x + d_u v_x) \sin(\psi) = (\dot{v}_y + d_u v_y) \cos(\psi) \quad (2.15)$$

Que expresado en función de las coordenadas de posición:

$$(\ddot{x} + d_u \dot{x}) \sin(\psi) - (\ddot{y} + d_u \dot{y}) \cos(\psi) = 0 \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) establece una ligadura entre el ángulo ψ y las dos primeras derivadas de la posición. Para comprobar que esta ligadura es no holonómica bastaría probar que la ecuación (2.15) no es integrable.

Teorema 2.1. El aerodeslizador definido por (2.8) es un sistema no holonómico de segundo orden.

Demostración: Es posible demostrar este resultado empleando la teoría general de los sistemas robóticos no holonómicos con restricciones afines (Kai et al., 2005) o (Zhu & Yu, 2002), para ello deberían calcularse los corchetes de Lie iterados y comprobar la dimensión del espacio vectorial generado.

Esto permitiría utilizar el teorema de Frobenius para demostrar la no integrabilidad de (2.15) y puede usarse de forma general en muchos sistemas del estilo de (2.8). Sin embargo aquí se presentará una demostración más elemental que se apoya en el hecho de que la solución libre del sistema (2.8) puede integrarse explícitamente posponiendo el análisis del álgebra de Lie para el análisis de la controlabilidad.

En primer lugar es claro que (2.16) define una función del tipo (2.12), basta entonces con probar que no se puede expresar esta restricción del sistema en la forma (2.13).

Se procede por reducción al absurdo. Para ello se supone que existe una función $h_2(x, y, v_x, v_y, r, t) = 0$ capturando el efecto de la ligadura (2.16). Sea entonces la siguiente solución libre del sistema (2.8):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(0) + \frac{v_x(0)}{d_u} (1 - e^{-d_u t}) \\
 y(t) &= y(0) + \frac{v_y(0)}{d_u} (1 - e^{-d_u t}) \\
 \psi(t) &= \psi(0) + \frac{r(0)}{d_r} (1 - e^{-d_r t}) \\
 v_x(t) &= v_x(0) e^{-d_u t} \\
 v_y(t) &= v_y(0) e^{-d_u t} \\
 r(t) &= r(0) e^{-d_r t}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Es claro por sustitución directa que (2.17) es una solución del sistema (2.8) cuando la fuerza F y el momento τ ambos nulos para cualquier valor arbitrario de las condiciones iniciales $x(0), y(0), v_x(0), v_y(0), \psi(0), r(0)$.

Dado que h_2 debe de ser constante a lo largo de cualquier trayectoria solución de (2.8):

$$h_2(x(t), y(t), v_x(t), v_y(t), \psi(t), r(t), t) = h_2(t) \equiv cte \Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = 0 \tag{2.18}$$

Tomando la derivada de h_2 a lo largo de la trayectoria (derivada de Lie) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dh_2}{dt} &= \frac{\partial h_2}{\partial x} v_x(0)e^{-d_u t} + \frac{\partial h_2}{\partial y} v_y(0)e^{-d_u t} - \frac{\partial h_2}{\partial v_x} d_u v_x(0)e^{-d_u t} \\
&\quad - \frac{\partial h_2}{\partial v_y} d_u v_y(0)e^{-d_u t} + \frac{\partial h_2}{\partial \psi} r(0)e^{-d_r t} - \frac{\partial h_2}{\partial r} d_r r(0)e^{-d_r t} + \frac{\partial h_2}{\partial t} = \\
&= v_x(0)e^{-d_u t} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} - d_u \frac{\partial h_2}{\partial v_x} \right) + v_y(0)e^{-d_u t} \left(\frac{\partial h_2}{\partial y} - d_u \frac{\partial h_2}{\partial v_y} \right) + \\
&\quad + r(0)e^{-d_r t} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \psi} - d_r \frac{\partial h_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Puesto que las condiciones iniciales son arbitrarias la única forma de que (2.19) sea idénticamente nulo para cualquier valor de v_x, v_y y r es que todos los términos entre paréntesis se anulen, y que además la derivada de h_2 respecto al tiempo sea nula (y por tanto h_2 no dependa del tiempo) de modo que se tiene:

$$\left(\frac{\partial h_2}{\partial x} - d_u \frac{\partial h_2}{\partial v_x} \right) = \left(\frac{\partial h_2}{\partial y} - d_u \frac{\partial h_2}{\partial v_y} \right) = \left(\frac{\partial h_2}{\partial \psi} - d_r \frac{\partial h_2}{\partial r} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{2.20}$$

Si ahora se vuelve a calcular la derivada de h_2 en una trayectoria cualquiera y se utiliza la condición (2.20) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{dh_2}{dt} &= \frac{\partial h_2}{\partial x} v_x + \frac{\partial h_2}{\partial y} v_y + \frac{\partial h_2}{\partial v_x} (-d_u v_x + F \sin(\psi)) + \frac{\partial h_2}{\partial v_y} (-d_u v_y + F \cos(\psi)) + \\
&\quad + \frac{\partial h_2}{\partial \psi} r + \frac{\partial h_2}{\partial r} (-d_r r + \tau) + \frac{\partial h_2}{\partial t} = \\
&= \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} - d_u \frac{\partial h_2}{\partial v_x} \right) v_x + \left(\frac{\partial h_2}{\partial y} - d_u \frac{\partial h_2}{\partial v_y} \right) v_y + \left(\frac{\partial h_2}{\partial \psi} - d_r \frac{\partial h_2}{\partial r} \right) r + \\
&\quad + \frac{\partial h_2}{\partial v_x} F \sin(\psi) + \frac{\partial h_2}{\partial v_y} F \cos(\psi) + \frac{\partial h_2}{\partial r} \tau = \\
&= \frac{\partial h_2}{\partial v_x} F \sin(\psi) + \frac{\partial h_2}{\partial v_y} F \cos(\psi) + \frac{\partial h_2}{\partial r} \tau = 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Como (2.21) tiene que cumplirse para cualquier valor de las fuerzas y momentos, h_2 no puede depender de r , y en virtud de (2.20) h_2 tampoco puede depender de ψ .

$$F \left(\frac{\partial h_2}{\partial v_x} \sin(\psi) + \frac{\partial h_2}{\partial v_y} \cos(\psi) \right) + \frac{\partial h_2}{\partial r} \tau \equiv 0 \quad \forall F, \tau \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial \psi} = 0 \tag{2.22}$$

Pero entonces, para que (2.21) se cumpla, y dado que h_2 no depende de ψ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h_2}{\partial v_x} \sin(\psi) + \frac{\partial h_2}{\partial v_y} \cos(\psi) \\ \frac{\partial h_2}{\partial \psi} \end{aligned} \right\} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial v_x} = \frac{\partial h_2}{\partial v_y} = 0 \quad (2.23)$$

Reuniendo todos los resultados se concluye que h_2 no depende de ninguna variable contradiciendo la hipótesis inicial.

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial v_x} = \frac{\partial h_2}{\partial v_y} = \frac{\partial h_2}{\partial \psi} = \frac{\partial h_2}{\partial r} = \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

■

2.4. Nociones de controlabilidad no lineal

Es muy frecuente en los sistemas de transporte que los vehículos sean subactuados y no holonómicos, como de los coches, la mayoría de los barcos, aviones, etc. La razón por la que existen tantos vehículos de este tipo es un simple criterio de economía y sencillez: dichos vehículos son “controlables”. En otras palabras, es posible llevar a estos vehículos hacia el estado deseado o hacerlos recorrer ciertos tipos de trayectorias usando solamente las acciones de control disponibles. Por este motivo, no tiene sentido añadir más actuadores al vehículo que los estrictamente necesarios para poder controlarlo.

Por ejemplo, la Figura 2.7 muestra la complejidad de un coche completamente actuado. Resulta evidente a primera vista que un coche normal es mucho más simple, económico y eficiente que su homólogo completamente actuado y aún así cubre ampliamente todas las necesidades normales de conducción. La única ventaja del vehículo totalmente actuado radica en que simplificaría drásticamente las maniobras (por ejemplo el aparcamiento) o las condiciones de conducción extremas.



Figura 2.7. Coche omnidireccional (Mitsubisi MMR25)

El hecho de que el sistema sea no nolonómico significa que aunque existan ligaduras como (2.16), que impiden cierto tipo de trayectorias no implica que no sea posible llegar a cualquier estado. De hecho como se muestra en este capítulo es posible pasar desde cualquier condición inicial a cualquier estado final en un tiempo finito.

Para poder analizar posteriormente la controlabilidad del aerodeslizador es necesario en primer lugar introducir los siguientes conceptos.

2.4.1. Controlabilidad en un punto

La teoría general de controlabilidad de sistemas no lineales está basada en la geometría de las variedades diferenciables (*Hausdorff manifolds*). A continuación se exponen un conjunto de definiciones de estabilidad para sistemas no lineales autónomos basados en la formulación Hermann-Krener, véase (Hermann & Krener, 1977) así como (James, 1987). Pueden encontrarse ejemplos de aplicación de esta teoría al tipo de sistemas que estamos tratando en (Sira-Ramírez, 2002) y en (Kai et al., 2005).

Antes de comenzar el análisis conviene introducir un conjunto de herramientas matemáticas que permitan nuestro análisis. Para ello se considera el sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.25}$$

Definición 2.4: Sea un sistema no lineal de la forma (2.25) donde \mathbf{x} pertenece a la variedad diferenciable M y tanto \mathbf{f} como \mathbf{g} son funciones suaves (C^∞). Se dice que el estado \mathbf{x}_1 es *accesible* desde \mathbf{x}_0 si existe una acción de control $\mathbf{u}(t)$, definida en un intervalo finito $[t_0, t_1]$ tal que la solución de (2.25) bajo la acción de control \mathbf{u} cumple que $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}_1$. El conjunto de puntos accesibles desde \mathbf{x}_0 se denotará como $A(\mathbf{x}_0)$.

Una versión más débil del concepto de accesibilidad puede definirse de la siguiente forma:

Definición 2.5: \mathbf{x}_f es *débilmente accesible* desde \mathbf{x}_0 si existe una secuencia finita de puntos $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ tales que para cualquier $0 < i < n-1$ o bien \mathbf{x}_i es alcanzable desde \mathbf{x}_{i+1} o bien \mathbf{x}_{i+1} es alcanzable desde \mathbf{x}_i . El conjunto de puntos débilmente controlables se denomina $WA(\mathbf{x}_0)$.

La accesibilidad débil no exige que se pueda ir de un punto a otro del espacio de estados, solamente exige que haya un conjunto de trayectorias que conecten ambos puntos, como se muestra en la Figura 2.8.

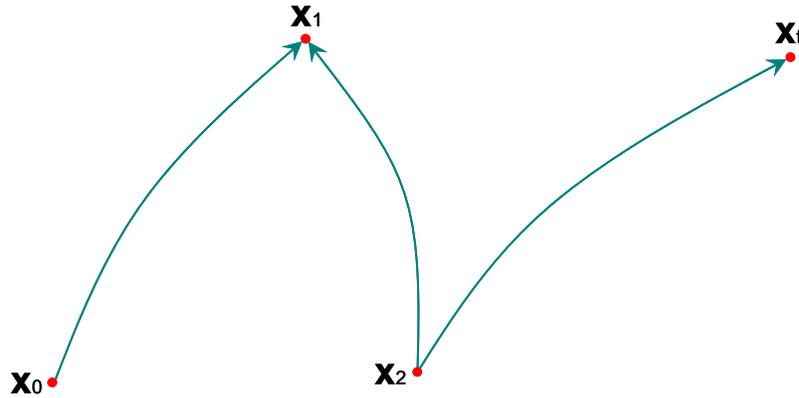


Figura 2.8. Accesibilidad débil. El punto x_1 es accesible desde x_0 , mientras que el punto x_f es débilmente accesible desde x_0 ya que hay un conjunto de trayectorias que los conectan. Sin embargo en general no es posible ir de x_0 a x_f ya que la trayectoria entre x_1 y x_2 podría no ser reversible.

Definición 2.6: Sea un sistema no lineal de la forma (2.25) Se dice que x_1 es *U-accesible* desde x_0 si existe una acción de control $u(t)$, definida en un intervalo finito $[t_0, t_1]$ tal que la solución de (2.25) bajo la acción de control u cumple que $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ y $x(t) \in U$ para $t \in [t_0, t_1]$. El conjunto de puntos *U-accesibles* desde x_0 se denotará como $A_U(x_0)$.

Del mismo modo el punto x_n es *débilmente U-accesible* desde x_0 si existe una secuencia finita de puntos $\{x_1 \dots x_n\}$ tales que o bien x_i es *U-accesible* desde x_{i+1} o bien x_{i+1} es *U-accesible* desde x_i . El conjunto de puntos débilmente *U-accesibles* se denomina $WA_U(x_0)$.

Una vez bien establecidos los conceptos de accesibilidad pueden introducirse las definiciones de controlabilidad y controlabilidad débil.

Definición 2.7: Se dice que un sistema es *controlable* en x_0 si es accesible desde cualquier punto de M . Esto es, si $A(x_0)=M$. Se dice que el sistema es controlable si esto se cumple para todo x_0 .

La definición anterior afirma que un sistema es controlable si es posible pasar de un estado a otro en un tiempo finito, sin embargo para pasar de un punto a otro del espacio de estados puede ser necesario recorrer una gran distancia o puede ser necesario mucho tiempo. Existe una definición más estricta de controlabilidad conocida como controlabilidad local.

Definición 2.8: Un sistema es *localmente controlable* en $x_0 \in M$ si para todo entorno U de x_0 , $A_U(x_0)$ es también un entorno de x_0 . Si esto es cierto para todo x_0 el sistema es localmente controlable.

La idea básica de la controlabilidad local es que es posible acceder a puntos suficientemente próximos a x_0 sin salirse de un entorno U que puede ser elegido arbitrariamente pequeño como se muestra en la Figura 2.9.

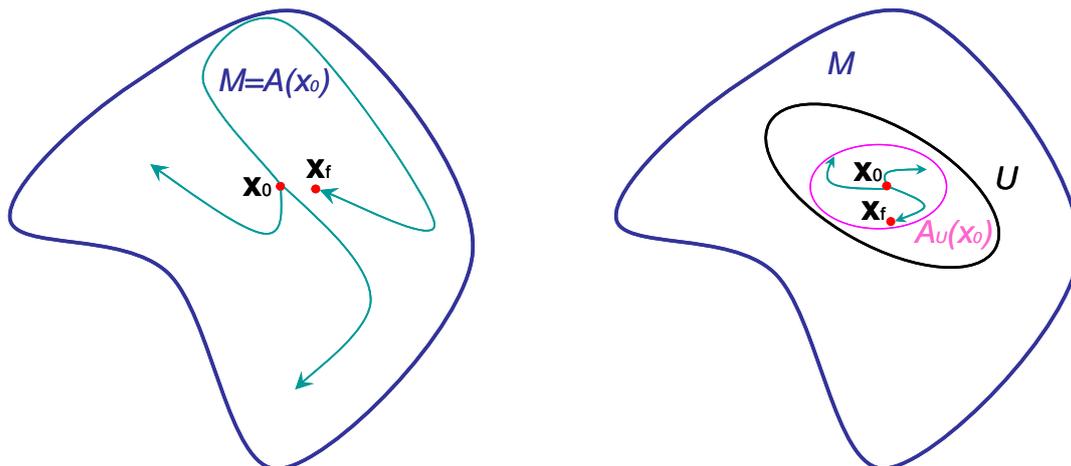


Figura 2.9. Controlabilidad (izquierda) y controlabilidad local (derecha). Un sistema es controlable en x_0 si es posible llegar desde x_0 a cualquier otro punto x_f . Es localmente controlable en tiempo corto STLC en x_0 si es posible ir a puntos próximos x_f sin abandonar un pequeño entorno U de dicho punto.

Más concretamente:

$$\forall \varepsilon \exists \delta / |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| < \varepsilon \Rightarrow \exists u(t) / \begin{cases} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \delta \quad t \in [t_0, t_1] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \\ \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \end{cases} \quad (2.26)$$

Esta condición es mucho más estricta que la controlabilidad ya que no es difícil demostrar, usando la transitividad de la accesibilidad y la compacidad de M , que la controlabilidad local implica la controlabilidad global (Hermann & Krener, 1977). Habitualmente en la literatura se conoce a la controlabilidad local por el nombre STLC (“*Small time local cotrollable*”) controlable localmente en tiempo corto.

De la misma forma que se ha definido la controlabilidad y la controlabilidad local se define la controlabilidad débil y la controlabilidad local débil sin más que sustituir $A(\mathbf{x}_0)$ por $WA(\mathbf{x}_0)$ y $A_U(\mathbf{x}_0)$ por $WA_U(\mathbf{x}_0)$ en las definiciones anteriores.

Es importante destacar que un sistema lineal controlable lo es también en el sentido Hermann-Krener. Por otro lado, la controlabilidad de la linealización del sistema en un punto implica la controlabilidad local en dicho punto, (James, 1987).

2.4.2. Controlabilidad a lo largo de una trayectoria

Otro aspecto interesante de la controlabilidad de sistemas no lineales es la controlabilidad a lo largo de una trayectoria. En este caso el interés se centra en saber si es posible moverse en un entorno de una trayectoria solución de (2.25) mediante la aplicación de una pequeña variación en la señal de control.

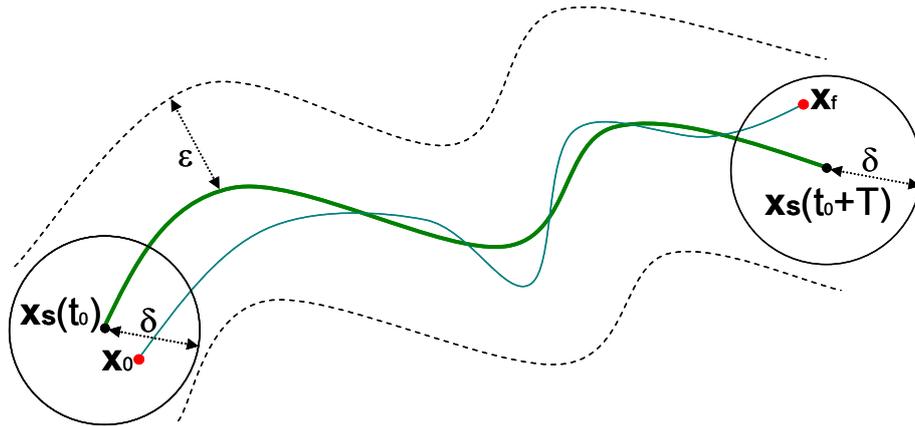


Figura 2.10. Controlabilidad a lo largo de una trayectoria. Dada una trayectoria x_s , si el sistema es controlable entonces es posible moverse entre dos puntos x_0 y x_f suficientemente próximos a la trayectoria sin abandonar un entorno ε de la misma.

Definición 2.9: Sea $x_s(t)$ una trayectoria solución del sistema (2.25) definida en el intervalo $[t_0, t_0+T]$ con entrada de control $u_s(t)$. Se dice que el sistema (2.25) es *controlable a lo largo de una trayectoria* $x_s(t)$ si para todo ε existe un δ tal que para todo x_0 y x_T que satisfagan

$$|x_0 - x_s(t_0)| < \delta, \quad |x_T - x_s(t_0+T)| < \delta$$

existe una función $u(t)$ definida en el mismo intervalo $[t_0, t_0+T]$ tal que:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0+T) = x_T, \quad |x(t) - x_s(t)| < \varepsilon, \quad |u(t) - u_s(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0+T]$$

Según la definición anterior la controlabilidad a lo largo de una trayectoria es muy similar a las condiciones de controlabilidad local (2.26). Esencialmente un sistema es controlable a lo largo de una trayectoria si es posible moverse entre estados próximos a la trayectoria sin abandonar un entorno de la misma, como se muestra en la Figura 2.10.

Es importante destacar sin embargo que a diferencia de (2.26), en este caso las condiciones son dependientes del tiempo a través de la trayectoria $x_s(t)$ por lo que será necesario analizar la controlabilidad de sistemas no autónomos. Es fácil demostrar que en este caso la condición suficiente para la controlabilidad a lo largo de la trayectoria es la controlabilidad de la linealización del sistema en torno a la misma (Megretski, 2003).

2.5. Controlabilidad del aerodeslizador a lo largo de trayectorias

Asociado al problema de seguimiento de trayectoria es interesante saber cual es el comportamiento del aerodeslizador cuando se mueve en el entorno de una determinada trayectoria del sistema. De acuerdo con la definición del apartado anterior, sea $x_s(t)$ una trayectoria solución de (2.8) con entradas F_s y τ_s . La idea es comprobar como cambia el estado cuando sobre las señales F_s y τ_s se añaden unas pequeñas variaciones δF y $\delta \tau$.

Para ello se definen variables de error como la desviación del estado respecto a la trayectoria nominal considerada $\mathbf{x}_s(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
 e_x &= x - x_s \\
 e_y &= y - y_s \\
 e_{vx} &= v_x - v_{xs} \\
 e_{vy} &= v_y - v_{ys} \\
 e_\psi &= \psi - \psi_s \\
 e_r &= r - r_s \\
 \delta F &= F - F_s \\
 \delta \tau &= \tau - \tau_s
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Teniendo en cuenta que tanto \mathbf{x} como \mathbf{x}_s son soluciones del sistema (2.8) y derivando (2.27) pueden obtenerse las ecuaciones dinámicas para las variables de error:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_x &= e_{vx} \\
 \dot{e}_y &= e_{vy} \\
 \dot{e}_{vx} &= -d_u e_{vx} + F \cos(\psi) - F_s \cos(\psi_s) = \\
 &\quad -d_u e_{vx} + (F_s + \delta F) \cos(\psi_s + e_\psi) - F_s \cos(\psi_s) \\
 \dot{e}_{vy} &= -d_u e_{vy} + F \sin(\psi) - F_s \sin(\psi_s) = \\
 &\quad -d_u e_{vy} + (F_s + \delta F) \sin(\psi_s + e_\psi) - F_s \sin(\psi_s) \\
 \dot{e}_\psi &= e_r \\
 \dot{e}_r &= -d_r e_r + \delta \tau
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Una vez que el sistema dinámico (2.28) ha sido expresado en función de las variables de error y de las funciones conocidas $\psi_s(t)$, $F_s(t)$ y $\tau_s(t)$, es posible analizar la controlabilidad a lo largo de la trayectoria.

Si se linealiza el sistema en torno al origen (el origen del error corresponde al seguimiento exacto de la trayectoria) se obtiene la expresión siguiente:

$$\dot{\mathbf{e}}_l = \mathbf{A}(t)\mathbf{e}_l + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u}$$

$$\text{Donde } \mathbf{e}_l = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{vx} \\ e_{vy} \\ e_\psi \\ e_r \end{pmatrix}, \delta\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta F \\ \delta \tau \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Es importante darse cuenta de que las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ son funciones del tiempo ya que dependen de la trayectoria del sistema a través de $\psi(t)$ como evidencia la siguiente ecuación.

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_u & 0 & -F_s \sin(\psi_s(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_u & F_s \cos(\psi_s(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos(\psi_s(t)) & 0 \\ \sin(\psi_s(t)) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Para analizar el sistema (2.30) es necesario recordar la condición suficiente de controlabilidad de un sistema lineal dependiente del tiempo. Para ello sean $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ continuamente diferenciables $n-1$ veces donde n es el número de estados. Defínase las siguientes matrices \mathbf{M}_i de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{M}_{m+1} &= -\mathbf{A}\mathbf{M}_m + \frac{d\mathbf{M}_m}{dt} \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.31)$$

La condición suficiente para que el sistema lineal (2.29) sea controlable es que exista un tiempo $t_1 > t_0$ para el cual la matriz de controlabilidad \mathbf{C} cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= [\mathbf{M}_0(t_1) \quad \mathbf{M}_1(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t_1)] \\ \text{rango}(\mathbf{C}) &= n \end{aligned} \quad (2.32)$$

Cuando las matrices son estacionarias esto se reduce a la bien conocida condición de la matriz de controlabilidad de los sistemas lineales e independientes del tiempo. Para una explicación en profundidad véase (Rugh, 1996).

Siguiendo la definición anterior es posible calcular \mathbf{M}_i para el aerodeslizador y con ellas la matriz de controlabilidad \mathbf{C} . La matriz de controlabilidad obtenida es demasiado larga para mostrarla aquí. (Si el lector desea verificar por sí mismo los cálculos puede hacerlo ejecutando la hoja de trabajo *controlabilidad.mw* que se adjunta en el CD).

Afortunadamente es posible reducir considerablemente dicha matriz mediante la aplicación de reducciones gaussianas. Sea \mathbf{v}_i el i -ésimo vector columna de la matriz \mathbf{C} , entonces se define la matriz de controlabilidad reducida \mathbf{C}_r como la matriz cuyas columnas \mathbf{y}_i se obtienen mediante la transformación gaussiana triangular siguiente.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{y}_3 &= -\mathbf{v}_3 + d_u \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{y}_4 &= -\mathbf{v}_4 + d_r \mathbf{v}_2 \\
\mathbf{y}_5 &= \mathbf{v}_5 + d_u \mathbf{y}_3 - (d_u^2 - r_s^2) \mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_6 &= \mathbf{v}_6 + d_r \mathbf{y}_4 - d_r^2 \mathbf{y}_2 \\
\mathbf{y}_7 &= -\mathbf{v}_7 + (-d_u^2 + 3r_s^2) \mathbf{y}_3 + (d_u^3 - 3d_u r_s^2 - 3r_s \dot{r}_s) \mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_8 &= \mathbf{v}_8 + d_r^2 \mathbf{y}_4 - d_r^3 \mathbf{y}_2 + F_s r_s \mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_9 &= -\mathbf{v}_9 + (-d_u^3 + 6d_u r_s^2 + 12r_s \dot{r}_s) \mathbf{y}_3 \\
&\quad - (12d_u r_s \dot{r}_s + d_u^4 + r_s^4 - 3\dot{r}_s^2 - 4r_s \ddot{r}_s - 6d_u^2 r_s^2) \mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_{10} &= \mathbf{v}_{10} + d_r^3 \mathbf{y}_4 - 2F_s r_s \mathbf{y}_3 - d_r^4 \mathbf{y}_2 - (-2d_u F_s r_s - F_s r_s d_r - 2\dot{F}_s r_s - F_s \dot{r}_s) \mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_{11} &= \mathbf{v}_{11} - (15\dot{r}_s^2 + 20r_s \ddot{r}_s + 10d_u^2 r_s^2 - d_u^4 - 5r_s^4 + 30d_u r_s \dot{r}_s) \mathbf{y}_3 - \\
&\quad - (5d_u r_s^4 + d_u^5 - 30d_u^2 r_s \dot{r}_s - 20d_u r_s \ddot{r}_s - 15d_u \dot{r}_s^2) \mathbf{y}_1 \\
&\quad + (10r_s^3 \dot{r}_s - 10\dot{r}_s \ddot{r}_s - 5r_s \ddot{r}_s - 10d_u^3 r_s^2) \mathbf{y}_1 \\
\mathbf{y}_{12} &= -\mathbf{v}_{12} - d_r^4 \mathbf{y}_4 + (3d_u F_s r_s + 2d_r F_s r_s + 6\dot{F}_s r_s + 3F_s \dot{r}_s) \mathbf{y}_3 + d_r^5 \mathbf{y}_2 + \\
&\quad + (-d_r^2 F_s r_s - 6d_u F_s r_s - 3d_u F_s \dot{r}_s - 2d_r \dot{F}_s r_s - d_r F_s \dot{r}_s - \\
&\quad - 3d_u^2 F_s r_s - 3\dot{F}_s r_s - 3\dot{F}_s \dot{r}_s - F_s \ddot{r}_s - 2d_u d_r F_s r_s + F_s r_s^3) \mathbf{y}_1
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Tras aplicar dicha transformación la matriz de controlabilidad reducida C_r resulta ser:

$$\mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 & 2r_s s & 0 & 3g_1 s & F_s s & 2g_3 s & h_2 s & 5g_5 s & h_4 s \\ 0 & 0 & s & 0 & -2r_s c & 0 & -3g_1 c & -F_s c & -2g_3 c & -h_2 c & -5g_6 c & -h_4 c \\ c & 0 & r_s s & 0 & g_1 s & -F_s s & g_2 s & h_1 s & g_4 s & h_3 s & g_6 s & h_5 s \\ s & 0 & -r_s c & 0 & -g_1 c & F_s c & -g_2 c & -h_1 c & -g_4 c & -h_3 c & -g_6 c & -h_5 c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Donde por conveniencia de notación se ha substituido $s = \sin(\psi_s)$ y $c = \cos(\psi_s)$ y las funciones h_i y g_i se definen en como:

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= -d_u r_s - \dot{r}_s \\
g_2(t) &= 2d_u^2 r_s + 3d_u \dot{r}_s + 2r_s^3 + \ddot{r}_s \\
g_3(t) &= -2d_u^2 r_s - 3d_u \dot{r}_s + 2r_s^3 - 2\ddot{r}_s \\
g_4(t) &= \ddot{r}_s(t) + 2d_u r_s^3 + 6r_s^2 \dot{r}_s + 3d_u^3 r_s + 6d_u^2 \dot{r}_s + 4d_u \ddot{r}_s \\
g_5(t) &= 2d_u \ddot{r}_s - 6r_s^2 \dot{r}_s - 2d_u r_s^3 + 2d_u^2 \dot{r}_s + d_u^3 r_s + \ddot{r}_s \\
g_6(t) &= -10d_u^3 \dot{r}_s - 4d_u^4 r_s - 5d_u \ddot{r}_s + 4r_s^5 - \ddot{r}_s - 10r_s^2 \ddot{r}_s - 10d_u^2 \dot{r}_s \\
h_1(t) &= -d_u F_s - d_r F_s - \dot{F}_s \\
h_2(t) &= d_u F_s + d_r F_s + 2\dot{F}_s \\
h_3(t) &= -d_u^2 F_s - d_u d_r F_s - 2d_u \dot{F}_s - d_r^2 F_s - d_r \dot{F}_s - \ddot{F}_s - F_s r_s^2 \\
h_4(t) &= -d_u^2 F_s - d_u d_r F_s - 3d_u \dot{F}_s - d_r^2 F_s - 2d_r \dot{F}_s - 3\ddot{F}_s + 3F_s r_s^2 \\
h_5(t) &= d_r \ddot{F}_s + 3d_u \ddot{F}_s + d_r^2 \dot{F}_s + d_r^3 F_s + \ddot{F}_s + 3\dot{F}_s r_s^2 + 3d_u^2 \dot{F}_s + d_u^3 F_s \\
&\quad + 2d_u d_r \dot{F}_s + d_r d_u^2 F_s + d_r^2 d_u F_s + d_r F_s r_s^2
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Es importante destacar que las reducciones gaussianas (2.33) simplifican considerablemente la matriz de controlabilidad sin afectar al rango de misma, de este modo una vez calculada dicha matriz es posible exponer el principal resultado de esta sección:

Teorema 2.2. Sean $F_s(t)$ y $\mathbf{x}_s(t)$ dos funciones de clase C^3 y C^2 respectivamente definidas en el intervalo $[t_0, t_1]$. Y sea $\mathbf{x}_s(t)$ la trayectoria definida por la solución de la ecuación (2.8) para las entradas de control $F_s(t)$ y $\mathbf{x}_s(t)$, la condición necesaria para que el sistema (2.8) sea controlable en torno a la trayectoria $\mathbf{x}_s(t)$ es que exista un tiempo $t \in [t_0, t_1]$ tal que:

$$\left(\dot{v}(t)_{xs} + d_u v(t)_{xs} \right)^2 + \left(\dot{v}(t)_{ys} + d_u v(t)_{ys} \right)^2 + \left(d_u^2 r_s(t)^2 + 4r_s(t)^4 + 2r_s(t)\ddot{r}_s(t) - 3\dot{r}_s(t)^2 \right)^2 \neq 0$$

Demostración: Teniendo en cuenta la restricción (2.14):

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_{xs} + d_u v_{xs} &= F_s \cos(\psi_s) \\ \dot{v}_{ys} + d_u v_{ys} &= F_s \sin(\psi_s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_s^2 = (\dot{v}_{xs} + d_u v_{xs})^2 + (\dot{v}_{ys} + d_u v_{ys})^2 \neq 0 \tag{2.36}$$

Por tanto la condición de controlabilidad puede reescribirse como:

$$F_s(t)^2 + \left(d_u^2 r_s(t)^2 + 4r_s(t)^4 + 2r_s(t)\ddot{r}_s(t) - 3\dot{r}_s(t)^2 \right)^2 \neq 0 \tag{2.37}$$

Puesto que $\tau_s(t)$ es una función de clase C^2 y dado que $r_s(t)$ es solución de (2.8) se deduce que $r_s(t)$ es una función con derivada tercera continua. Además ya que F_s también es una función C^3 entonces las matrices \mathbf{C} y \mathbf{C}_r están bien definidas.

Teniendo en cuenta que la expresión (2.37) es suma de dos cantidades no negativas y es distinta de cero para algún tiempo t se deduce que las dos cantidades no pueden ser nulas para todo tiempo $t \in [t_0, t_1]$. En particular distinguiremos dos casos:

I) Supóngase que F_s es distinto de cero en algún tiempo t :

Calculando el determinante de la matriz formada agrupando los vectores columna y_1, y_2, y_3, y_4, y_6 e y_8 de la matriz de controlabilidad C_r se obtiene lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 & 0 & F_s s \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & -F_s c \\ c & 0 & r_s s & 0 & -F_s s & -(d_u F_s + F_s d_r + \dot{F}_s) s \\ s & 0 & -r_s c & 0 & F_s c & (d_u F_s + F_s d_r + \dot{F}_s) c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = F_s^2 \quad (2.38)$$

Puesto que F_s no es cero en el tiempo t el determinante (2.38) no se anula y por tanto la matriz de controlabilidad C_r tiene rango seis. Por la condición de controlabilidad de sistemas dependientes del tiempo la linealización en torno a trayectorias (2.29) es controlable y por lo tanto el sistema no lineal (2.8) es controlable en torno a la trayectoria x_s , (Hermann & Krener, 1977) o (Brockett, 1976).

II) Supongamos por el contrario que $F_s(t)=0$ para todo tiempo $t \in [t_0, t_1]$. En este caso F_s y sus derivadas se anulan por lo que todas las funciones h_i son cero. En estas condiciones la matriz de controlabilidad se reduce a:

$$C_r|_{F_s=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 & 2r_s s & 0 & 3g_1 s & 0 & 2g_3 s & 0 & 5g_5 s & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & -2r_s c & 0 & -3g_1 c & 0 & -2g_3 c & 0 & -5g_6 c & 0 \\ c & 0 & r_s s & 0 & g_1 s & 0 & g_2 s & 0 & g_4 s & 0 & g_6 s & 0 \\ s & 0 & -r_s c & 0 & -g_1 c & 0 & -g_2 c & 0 & -g_4 c & 0 & -g_6 c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Para determinar el rango de la matriz de controlabilidad en principio sería necesario calcular los determinantes de todas las combinaciones de vectores columna tomados de seis en seis. Afortunadamente este cálculo puede simplificarse considerablemente si se hacen varias observaciones interesantes.

En primer lugar, por simple inspección, es inmediato comprobar que las columnas y_6, y_8, y_{10} e y_{12} de la matriz C se anulan cuando F_s es idénticamente nulo. Por otra parte las columnas y_1, y_2, y_4 son ortogonales entre si y también a las columnas y_3, y_5, y_7, y_9 e y_{12} .

Además, todos los vectores columna excepto el tercero son ortogonales al vector $[s \ -c \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Esto significa en particular que no es posible encontrar una base de vectores linealmente independientes que no contenga al vector y_3 .

Por lo tanto de todos los determinantes posibles solo es necesario comprobar seis ya que los determinantes que no contengan las columnas y_1, y_2, y_3, y_4 o que contengan las

columnas y_6, y_8, y_{10} e y_{12} son automáticamente nulos, y el resto de determinantes serían permutaciones cíclicas de los seis determinantes siguientes:

$$\begin{aligned}
 de_1 &= \det(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_7) = 2r_s g_2(t) - 3g_1(t)^2 \\
 de_2 &= \det(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_9) = 2r_s g_4(t) - 2g_1(t)g_3(t) \\
 de_3 &= \det(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_{11}) = 2r_s g_6(t) - 5g_1(t)g_5(t) \\
 de_4 &= \det(y_1, y_2, y_3, y_4, y_7, y_9) = 3g_1(t)g_4(t) - 2g_2(t)g_3(t) \\
 de_5 &= \det(y_1, y_2, y_3, y_4, y_7, y_{11}) = 3g_1(t)g_6(t) - 5g_2(t)g_5(t) \\
 de_6 &= \det(y_1, y_2, y_3, y_4, y_9, y_{11}) = 2g_3(t)g_6(t) - 5g_4(t)g_5(t)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Calculando en particular en el primero (y más simple) de los determinantes se tiene que:

$$de_1(t) = d_u^2 r_s(t)^2 + 4r_s(t)^4 + 2r_s(t)\ddot{r}_s(t) - 3\dot{r}_s(t)^2 \neq 0 \tag{2.41}$$

Utilizando (2.37) y usando el hecho de que $F_s=0$ se obtiene finalmente:

$$0^2 + (de_1(t))^2 = (d_u^2 r_s(t)^2 + 4r_s(t)^4 + 2r_s(t)\ddot{r}_s(t) - 3\dot{r}_s(t)^2)^2 \neq 0 \tag{2.42}$$

Esto significa la matriz de controlabilidad C_r tiene rango seis y por tanto, como en el caso anterior, el sistema es controlable en torno a la trayectoria x_s ■

En principio podría pensarse que la condición (2.37) no agota todas las posibilidades en las cuales se cumple la condición de controlabilidad ya que aunque el determinante de_1 sea nulo el resto de los determinantes podrían, al menos en principio, ser distintos de cero. De este modo el criterio de controlabilidad de sistemas lineales dependientes del tiempo seguiría garantizando la controlabilidad.

Sin embargo, la ecuación (2.37) da una caracterización exacta de todas las trayectorias que no cumplen la condición de controlabilidad. Para verlo se calcula la expresión explícita de las trayectorias que no cumplen (2.37). Basta con resolver la siguiente ODE:

$$\begin{aligned}
 d_u^2 r_s(t)^2 + 4r_s(t)^4 + 2r_s(t)\ddot{r}_s(t) - 3\dot{r}_s(t)^2 &= 0 \\
 r_s(t_0) &= r_0 \\
 \left. \frac{dr_s(t_0)}{dt} \right|_{t=t_0} &= \dot{r}_0
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Es fácil comprobar por inspección directa que las soluciones de (2.43) vienen dadas por:

$$r_s(t) = \begin{cases} \frac{4d_u^2 r_0^3 e^{-d_u t}}{\left((\dot{r}_0 + d_u r_0)^2 + 4r_0^4\right) e^{-2d_u t} + (-2\dot{r}_0^2 - 8r_0^4 + 2d_u^2 r_0^2) e^{-d_u t} + (\dot{r}_0 - d_u r_0)^2 + 4r_0^4} & \text{si } d_u \neq 0 \\ \frac{4r_0^3}{(4r_0^4 + \dot{r}_0^2)t^2 - 4r_0\dot{r}_0 t + 4r_0^2} & \text{si } d_u = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

De esta forma inmediato aunque muy largo (véase *controlabilidad.mw*) comprobar por sustitución directa que las soluciones de (2.37) hacen nulos los de_2 hasta de_6 .

Por tanto, si la expresión (2.37) no se verifica, entonces el rango de la matriz de controlabilidad es estrictamente menor que seis. En estas condiciones la linealización del sistema es no controlable luego no es posible afirmar nada acerca de la controlabilidad del aerodeslizador.

El Teorema 2.2 da un criterio algebraico simple que permite comprobar cuando el aerodeslizador es controlable en torno a una trayectoria. Es muy conveniente hacer ciertas observaciones acerca del tipo de trayectorias que pueden seguirse.

Corolario: Bajo las condiciones del Teorema 2.2 el aerodeslizador es controlable en cualquier trayectoria tal que $r(t) \rightarrow r_f \neq 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración: Para comprobarlo basta con ver que el límite de las trayectorias (2.44) cuando $t \rightarrow \infty$ es cero. Para ello cabría considerar dos casos. En primer lugar si $r_0 = 0$ el resultado es trivial. Si por el contrario r_0 es distinto de cero se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_s(t) = \begin{cases} \frac{0}{(dr_0 - r_0 d_u)^2 + 4r_0^4} = 0 & \text{si } d_u \neq 0 \\ \frac{4r_0^3}{(4r_0^4 + dr_0^2)^\infty - 4tr_0 dr_0 + 4r_0^2} = 0 & \text{si } d_u = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Este resultado completa un resultado parcial demostrado en (Fantoni et al., 2000) en el cual se afirmaba que el aerodeslizador era controlable en las trayectorias en las que $r(t)$ no se anule.

Para entender un poco mejor este resultado se desarrollan en serie de Taylor las ecuaciones del error:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= e_{vx} \\ \dot{e}_y &= e_{vy} \\ \dot{e}_{vx} &= -d_u e_{vx} + \delta F \cos(\psi_s) - F_s \sin(\psi_s) e_\psi + o(e_\psi^2) + o(\delta F^2) + o(\delta F e_\psi) \\ \dot{e}_{vy} &= -d_u e_{vy} + \delta F \sin(\psi_s) + F_s \cos(\psi_s) e_\psi + o(e_\psi^2) + o(\delta F^2) + o(\delta F e_\psi) \\ \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= -d_r e_r + \delta \tau \end{aligned} \quad (2.46)$$

Lo que hace la linealización es eliminar todos los términos de orden superior marcados con la “o” pequeña. Las ecuaciones del error (2.46) contienen un acoplamiento entre la fuerza y la orientación del vehículo.

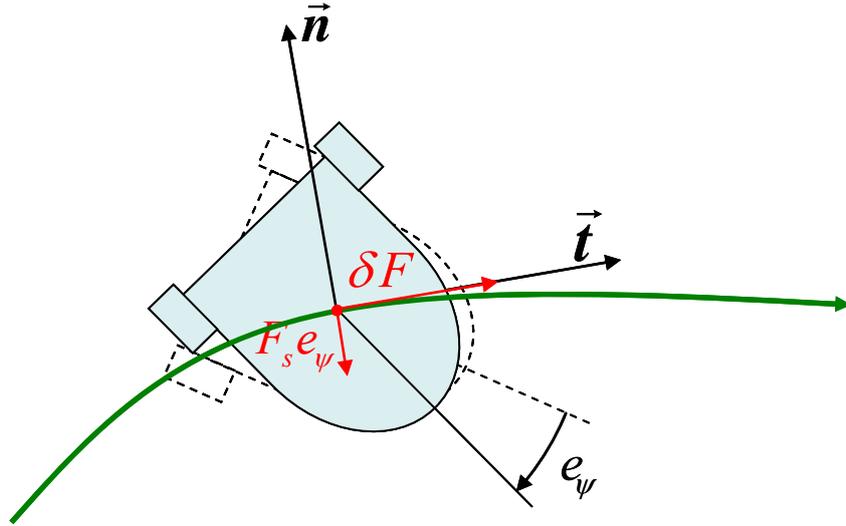


Figura 2.11. Aceleraciones del aerodeslizador moviéndose sobre una trayectoria. El aerodeslizador es controlable siempre que F_s no sea cero o bien el vector normal cambie adecuadamente en el tiempo.

Cuando F_s es distinto de cero las aceleraciones que actúan sobre las variables de error (2.46) tienen dos componentes. La primera componente depende de δF y apunta en la dirección tangente a la trayectoria. La segunda componente multiplicada por $F_s e_\psi$ es normal a dicha trayectoria como se muestra en la Figura 2.11.

Intuitivamente, la acción δF sirve para acelerar o frenar a lo largo de la trayectoria deseada mientras que el término con $F_s e_\psi$ permite controlar el deslizamiento tangencial a la trayectoria, usando para ello la orientación (en particular e_ψ).

$$\left. \begin{array}{l} \dot{e}_\psi = e_r \\ \dot{e}_r = -d_r e_r + \delta\tau \end{array} \right\} \rightarrow \text{rango}(C_2) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad (2.47)$$

Dado que el error en la orientación es directamente controlable en virtud de (2.47) se deduce que mientras F_s no sea cero el sistema es controlable localmente en el origen.

Lo que ocurre cuando F_s es nulo es que desaparece el término con e_ψ de modo que se pierde la fuerza en la dirección normal a la trayectoria.

No obstante, puesto que el vector normal a la trayectoria en general no es un vector constante, la dirección en la que la linealización del sistema no puede controlarse va cambiando a lo largo del tiempo. Si este cambio es “adecuado” (lo cual se cumple en las trayectorias que no verifican (2.43)) la dirección no controlable en t_0 pasará a serlo en un tiempo futuro t_f .

Esto puede entenderse más claramente con ayuda de la Figura 2.11. En esta figura la trayectoria se marca en color verde mientras que las aceleraciones que experimentan las variables de error están en rojo. En la figura los vectores tangente y normal a la trayectoria son t y n respectivamente.

2.6. Controlabilidad del aerodeslizador en un punto de equilibrio

Un problema interesante de control de los vehículos subactuados es la estabilización en un punto. Es importante destacar que un punto de equilibrio puede verse como una trayectoria en la cual la condición de controlabilidad del Teorema 2.2 no se cumple. Por tanto dicho teorema no afirma nada acerca de la controlabilidad del sistema no lineal.

2.6.1. Controlabilidad del modelo linealizado en un punto

Para analizar en detalle la controlabilidad en este caso se linealizan las ecuaciones del aerodeslizador en un punto de equilibrio. Para ello en primer lugar se buscan los puntos de equilibrio del sistema.

Estos puntos corresponden a cualquier configuración estática del aerodeslizador en el espacio $\mathbf{x}=[x,y,v_x,v_y,\psi,r]^T=[x_0,y_0,0,0,\psi_0,0]^T$, como se comprueba en (2.48).

$$\left. \begin{array}{l} 0 = v_x \\ 0 = v_y \\ 0 = F \cos(\psi) - d_u v_x \\ 0 = F \sin(\psi) - d_u v_y \\ 0 = r \\ 0 = \tau - d_r r \end{array} \right\} \Rightarrow v_x = v_y = r = F = \tau = 0 \quad (2.48)$$

A continuación, se determina la linealización local del sistema (2.25) en cualquiera de los puntos de equilibrio obteniendo:

$$\dot{\mathbf{x}}_l = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_l + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_l \quad (2.49)$$

Donde

$$\mathbf{x}_l = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ v_x \\ v_y \\ \psi - \psi_0 \\ r \end{pmatrix}, \mathbf{u}_l = \begin{pmatrix} F \\ \tau \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_r \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos(\psi_0) & 0 \\ \sin(\psi_0) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Este sistema tiene la misma forma que el sistema (2.29) pero en el que se han eliminado los términos dependientes de F_s . Si se calcula la matriz de controlabilidad $\mathbf{C}=[\mathbf{B},\mathbf{A}\mathbf{B},\mathbf{A}^2\mathbf{B},\mathbf{A}^3\mathbf{B},\mathbf{A}^4\mathbf{B},\mathbf{A}^5\mathbf{B}]$, donde ahora $s=\sin(\psi_0)$ y $c=\cos(\psi_0)$, se tiene que:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 & -d_u c & 0 & d_u^2 c & 0 & -d_u^3 c & 0 & d_u^4 c & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & -d_u s & 0 & d_u^2 s & 0 & -d_u^3 s & 0 & d_u^4 s & 0 \\ c & 0 & -d_u c & 0 & d_u^2 c & 0 & -d_u^3 c & 0 & d_u^4 c & 0 & -d_u^5 c & 0 \\ s & 0 & -d_u s & 0 & d_u^2 s & 0 & -d_u^3 s & 0 & d_u^4 s & 0 & -d_u^5 s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -d_r & 0 & d_r^2 & 0 & -d_r^3 & 0 & d_r^4 \\ 0 & 1 & 0 & -d_r & 0 & d_r^2 & 0 & -d_r^3 & 0 & d_r^4 & 0 & -d_r^5 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Observando (2.51) es fácil ver que las columnas 5ª, 7ª, 9ª y 11ª son proporcionales a la tercera columna, mientras que las columnas 6ª, 8ª, 10ª y 12ª lo son a la cuarta. Esto significa que se han perdido dos columnas linealmente independientes respecto a la ecuación (2.34). Si se hace una reducción gaussiana se obtiene:

$$\text{rango}(C_2) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ c & 0 & -d_u c & 0 \\ s & 0 & -d_u s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -d_r \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 \quad (2.52)$$

Dado que existen seis estados y el rango de la matriz de controlabilidad es tan solo cuatro el sistema linealizado es no controlable. Además el subespacio ortogonal al espacio de vectores controlables de C_2 claramente corresponde a $\text{lin}([s, -c, 0, 0, 0, 0]^T, [0, 0, s, -c, 0, 0]^T)$.

Para comprobar esto basta con ver que si se amplía la matriz de controlabilidad con estos dos vectores queda un conjunto de seis vectores columna linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = c^2(c^2 + s^2) + s^2(c^2 + s^2) = 1 \quad (2.53)$$

El resultado obtenido tiene una sencilla interpretación física. Los estados no controlados son los siguientes:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sin(\psi_0)(x - x_0) + \cos(\psi_0)(y - y_0) \\ z_2 &= v_l = -\sin(\psi_0)v_x + \cos(\psi_0)v_y \end{aligned} \quad (2.54)$$

Lo que indica (2.54) es que no es posible controlar la velocidad de deriva lateral en el sistema linealizado v_l ni la posición asociada a dicha velocidad. Esto era de esperar si se tiene en cuenta que la linealización congela el estado del aerodeslizador en una orientación ψ_0 dada.

Puesto que los motores sólo producen fuerza en dicha dirección, las coordenadas perpendiculares a dicha fuerza no son controlables como se puede ver en la Figura 2.12.

Resulta interesante observar la dinámica del subsistema no controlable para ver si al menos el sistema es estabilizable en los puntos de equilibrio, esto es, si la dinámica del subsistema no controlable es al menos estable.

Esto es crucial ya que si dicho subsistema es estable el sistema no lineal sería estabilizable mediante una ley de control lineal en un entorno del punto de equilibrio, (Khalil, 2002). Si por el contrario el subsistema no controlable fuese inestable entonces el sistema no lineal tampoco podría estabilizarse.

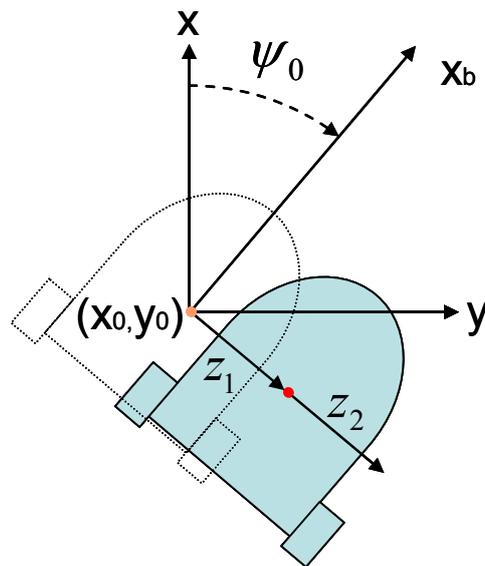


Figura 2.12. Estados no controlables de la linealización del aerodeslizador en un punto.

Para analizar dicha estabilidad se determina la dinámica de las variables no controladas, descubriendo que la dinámica es marginalmente estable ya que los autovalores del sistema son $\lambda_i = 0, -d_u$. (2.55). Dado que el sistema es solo marginalmente estable, la linealización del sistema en el punto de equilibrio no nos dice nada acerca de la controlabilidad del sistema no lineal en dicho punto.

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -d_u z_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -d_u - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(d_u + \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -d_u \end{cases} \quad (2.55)$$

Este sistema se encuentra en el límite de la controlabilidad, por este motivo no se podrá entender completamente su comportamiento sin utilizar el teorema de Brockett. Este análisis se lleva a cabo en el apartado 2.8.

2.7. Controlabilidad del estado

A continuación se presenta un análisis de la controlabilidad del estado del aerodeslizador, para ello se comienza estudiando la controlabilidad mediante la condición LARC (“*Lie algebra rank condition*”). Posteriormente se obtendrán resultados más fuertes de controlabilidad en los puntos de equilibrio del sistema.

2.7.1. Controlabilidad local débil

El primer método para analizar la controlabilidad en los puntos de equilibrio es la linealización. Puesto que este método fracasa es posible utilizar condiciones de controlabilidad no lineal basadas en LARC.

Se comienza haciendo una pequeña revisión informal de la técnica. Supóngase un sistema sin deriva expresable en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \quad (2.56)$$

La condición LARC consiste en ver el sistema como un campo vectorial, donde los vectores \mathbf{g}_i son los generadores diferenciales de trayectorias.

La idea básica es que si en el sistema (2.56) se pone la entrada u_i a 1 y el resto a cero la trayectoria del sistema se mueve localmente en la dirección del vector \mathbf{g}_i :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{t^2}{2}\right) \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_0) + o(t^3) \quad (2.57)$$

Esto significa que a nivel local el sistema puede moverse en todas las direcciones formadas por $\text{lin}\{\mathbf{g}_i\}$. Supóngase ahora que se aplica la siguiente secuencia de movimientos durante un tiempo t cada uno de ellos:

- I Movimiento en la dirección \mathbf{g}_i ($u_i=1$ y el resto nulos)
- II Movimiento en la dirección \mathbf{g}_j ($u_j=1$ y el resto nulos)
- III Movimiento en la dirección $-\mathbf{g}_i$ ($u_i=-1$ y el resto nulos)
- IV Movimiento en la dirección $-\mathbf{g}_j$ ($u_j=-1$ y el resto nulos)

El resultado de aplicar (2.57) reiteradamente a cada uno de los puntos intermedios después de una serie de manipulaciones algebraicas elementales es el siguiente:

$$\mathbf{x}(4t) = \mathbf{x}_0 + t^2[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j](\mathbf{x}_0) + o(t^3) \quad (2.58)$$

Donde $[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j]$ es el corchete de Lie de \mathbf{g}_i , con \mathbf{g}_j , definido en como:

$$[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j] = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_j - \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_i \quad (2.59)$$

Si \mathbf{x} , \mathbf{y} , y \mathbf{z} son vectores y a y b son escalares entonces es fácil verificar las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= -[\mathbf{y}, \mathbf{x}] && \text{(Antisimetría)} \\ [a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}] &= a[\mathbf{x}, \mathbf{z}] + b[\mathbf{y}, \mathbf{z}] && \text{(Linealidad)} \\ [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] &= 0 && \text{(Identidad de Jacobi)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Lo que muestra (2.58) es que a nivel local es posible moverse no solo en la dirección dada por \mathbf{g}_i y \mathbf{g}_j sino también en la nueva dirección $[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j]$. La Figura 2.13 resume el procedimiento de construcción de los corchetes de Lie.

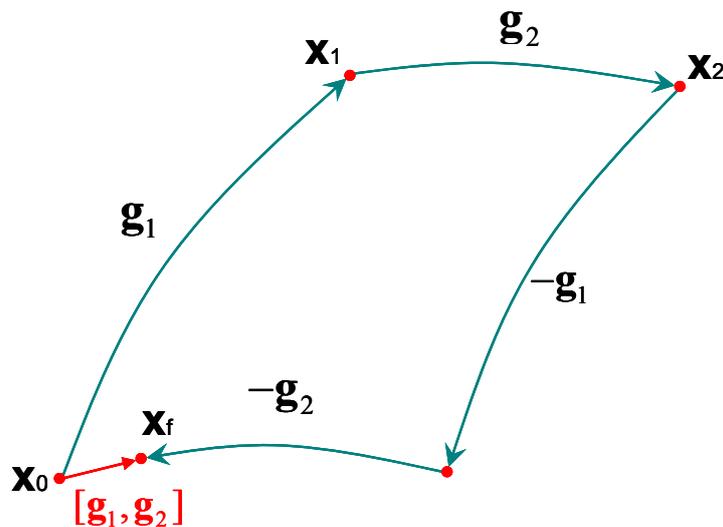


Figura 2.13. Significado de los corchetes de Lie. La aplicación sucesiva de movimiento a través de dos vectores \mathbf{g}_1 y \mathbf{g}_2 produce como resultado una nueva dirección de movimiento $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$.

Repitiendo este razonamiento es fácil ver que también es posible moverse en las direcciones $[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j]$ etc....

La condición del rango del algebra de Lie (LARC) simplemente afirma que si el algebra de Lie generada por todos los corchetes de Lie iterados $[\mathbf{g}_i, \dots, [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]]$ tiene la dimensión del espacio de estados, entonces, es posible moverse en todas las direcciones del espacio de estados.

La formalización de este resultado viene de la mano del teorema de Chow que afirma que si se cumple la condición LARC, entonces (2.56) es localmente controlable en \mathbf{x}_0 (Brockett, 1976)

El principal problema para aplicar este simple criterio de controlabilidad es que el aerodeslizador no puede ponerse en la forma sin deriva que exige (2.56) mediante ningún cambio de coordenadas aceptable, esto es, que sea un difeomorfismo (al menos localmente).

Teorema 2.3. No existe ningún difeomorfismo $\mathbf{x}' = \mathbf{h}_1(\mathbf{x})$ ni ninguna redefinición de las señales de control $\mathbf{u}' = \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ que transforme el sistema (2.8) en la forma (2.56).

En otras palabras, no existe ningún cambio de variables invertible y suave al menos localmente ni ninguna transformación de las señales de control que convierta el aerodeslizador en un sistema sin deriva:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{u}')) := \mathbf{g}\mathbf{u}' \quad (2.61)$$

Demostración: Procediendo por reducción al absurdo, supóngase que existe dicha transformación. En el sistema (2.61) todos los puntos son puntos de equilibrio cuando las señales de control se anulan. Esto implica que existen soluciones de (2.61) de la forma $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{c}$, con $\mathbf{u}'=0$ para \mathbf{c} arbitrario. En particular, existen soluciones de la forma $\mathbf{x}'(t)=\mathbf{h}_1(\mathbf{x}_0)$ para cualquier \mathbf{x}_0 .

Invirtiendo el difeomorfismo, deberían existir soluciones de la ecuación (2.8) de la forma $\mathbf{x}(t)=\mathbf{h}_1^{-1}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x}_0))=\mathbf{x}_0$ para algún valor de \mathbf{u} . Esto implica que cualquier estado \mathbf{x}_0 sería un punto de equilibrio de (2.8) lo cual, como se vio en (2.48), es falso ya que los únicos puntos de equilibrio se obtenían cuando las velocidades son nulas. ■

Intuitivamente el resultado es fácil de entender. Si el sistema puede ponerse en la forma sin deriva todos los puntos serían puntos de equilibrio (para algún valor de \mathbf{u}). Sin embargo en el aerodeslizador los únicos puntos de equilibrio son las configuraciones estáticas donde las velocidades son todas nulas (es claro que no se puede detener el aerodeslizador en un punto del espacio con una velocidad no nula).

Aunque el modelo no puede ponerse en la forma lineal en \mathbf{u} que exige (2.56) todavía es posible ponerlo en la forma afín siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i \quad (2.62)$$

Donde el campo de vectores viene descrito por

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ -d_u v_x \\ -d_u v_y \\ r \\ -d_r r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Es claro que \mathbf{f} representa el movimiento libre (deriva) del sistema mientras que \mathbf{g}_1 representa la aceleración angular y \mathbf{g}_2 la aceleración lineal.

Dado un modelo en la forma (2.62) la condición LARC debe de ser extendida con la nueva dirección de movimiento \mathbf{f} . Esto implica calcular el rango del conjunto de vectores de la forma $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_k]]$. El problema básico consiste en que mientras la acción de \mathbf{g} puede invertirse fácilmente (cambiando u_i por $-u_i$) la acción de \mathbf{f} no es en general reversible.

De hecho invertir f es equivalente a retroceder a lo largo de la trayectoria (si se cambia el signo de la parte derecha de (2.62) se está resolviendo la ecuación diferencial hacia atrás en el tiempo).

En el caso de sistemas con deriva (2.62) la condición algebraica de Lie sólo permite deducir que el sistema es local débilmente controlable (Hermann & Krener, 1977) Algunos autores se refieren a esto como *alcanzabilidad local*.

La razón por lo que esto es así puede entenderse fácilmente si se analiza la construcción de $[g_1, g_2]$. Dado que el sistema tiene deriva, cuando se aplica $u_i=1$ manteniendo el resto a cero el sistema no se mueve en la dirección g_i sino en la dirección $g_i + f$. Sin embargo si se permite retroceder a lo largo de trayectorias (soluciones retrógradas) todavía es posible moverse en la dirección $[g_1, g_2]$, para ello basta con moverse primero en la dirección $[f+g_1, f+g_2]$ para después moverse en la dirección $[-f+g_1, -f+g_2]$. El resultado a nivel diferencial sería un movimiento en la dirección $[g_1, g_2]$ como se muestra en la Figura 2.14.

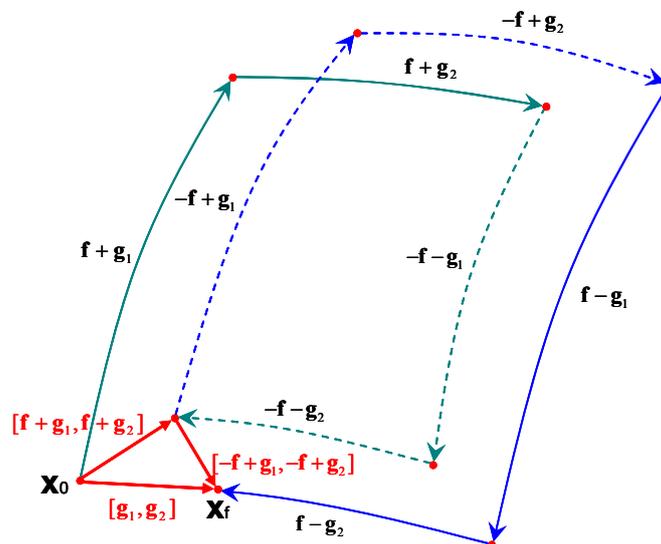


Figura 2.14. Corchetes de Lie en sistemas con deriva y flujo retrógrado. El esquema muestra como existen trayectorias que conectan x_0 y x_f mediante trayectorias (sólido) y trayectorias recorridas a la inversa (discontinuo).

Para comprobar esto algebraicamente basta con tener en cuenta la propiedad de bilinealidad de los corchetes de Lie.

$$\begin{aligned}
 [f + g_1, f + g_2] + [-f + g_1, -f + g_2] &= \\
 [f, f] + [f, g_2] + [g_1, f] + [g_1, g_2] + [f, f] - [f, g_2] - [g_1, f] + [g_1, g_2] &= \quad (2.64) \\
 2[f, f] + 2[g_1, g_2] &= 2[g_1, g_2]
 \end{aligned}$$

A partir de este criterio es fácil comprobar la condición LARC en el aerodeslizador.

Teorema 2.4. El sistema (2.8) es local débilmente controlable en todos sus puntos.

Demostración: Para determinar el rango del espacio generado por el álgebra de Lie se procede a calcular corchetes de Lie iterados hasta que la dimensión del sistema no

amente. En el caso particular del aerodeslizador, para cubrir todo el espacio se necesitan los corchetes de Lie de primer orden

$$\mathbf{L}_1 = [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] = \begin{pmatrix} c \\ s \\ -d_u c + rs \\ -d_u s - rc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -d_r \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

así como los corchetes de Lie de orden superior

$$\mathbf{L}_3 = [\mathbf{g}_1[\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -s \\ c \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_4 = [\mathbf{f}[\mathbf{g}_1[\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]]] = \begin{pmatrix} -s \\ c \\ d_u s + rc \\ -d_u s + rs \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Para comprobar la condición LARC basta con calcular el rango de la siguiente matriz formada por $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4$. Para ello sea el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 & 0 & -s \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & c \\ c & 0 & -d_u c + rs & 0 & -s & d_u s + rc \\ s & 0 & -d_u s - rc & 0 & c & -d_u c + rs \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & 0 & 0 & -s \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & 0 & -s & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad (2.67)$$

Puesto que el determinante es distinto de cero entonces $\text{rango}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3, \mathbf{L}_4\} = 6$ y LARC se verifica en todos los puntos. De este modo de acuerdo con el teorema de Chew (Hermann & Krener, 1977) el sistema es local débilmente controlable en todos sus puntos ■

2.7.2. Resultados ampliados de controlabilidad

La controlabilidad débil aunque resulta simple de comprobar mediante la condición LARC, es una condición poco satisfactoria desde el punto de vista de la teoría del control.

Esta condición afirma que existen trayectorias que conectan los puntos del espacio de estados pero no demuestra que sea posible pasar de un punto a otro mediante una acción de control adecuada.

En este apartado se demostrará que el aerodeslizador es controlable y además es localmente controlable en todos sus puntos de equilibrio. Para ello se emplea un procedimiento constructivo.

2.7.2.A. El aerodeslizador es estabilizable en el origen

Para comprobar este resultado vuélvase a las ecuaciones del sistema (2.8). Centrando la atención en la orientación del aerodeslizador se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= r \\ \dot{r} &= \tau - d_r r\end{aligned}\quad (2.68)$$

Es claro a primera vista que el subsistema (2.68) es controlable, de hecho calculando la siguiente matriz de controlabilidad se aprecia que es de rango completo.

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -d_r \end{pmatrix}\quad (2.69)$$

Puesto que el sistema es controlable esto implica que dadas unas condiciones iniciales arbitrarias ψ_0 y r_0 existe una señal de control $\tau(t)=h_1(t-t_0, \psi_0, r_0, \psi_f, r_f)$ definida en $[t_0, t_0+T]$ tal que la solución de (2.68) cumple que $\psi(t_0)=\psi_0$, $r(t_0)=r_0$ y $\psi(t_0+T)=\psi_f$, $r(t_0+T)=r_f$. Esto es, que existe una señal de control que permite llevar la orientación del aerodeslizador en determinado intervalo de tiempo a cualquier estado deseado.

Una vez fijado el ángulo ψ mediante la ley de control anterior en, es posible aplicar el difeomorfismo para trasladar dicho punto de equilibrio al origen de coordenadas.

$$\begin{aligned}w_1 &= \cos(\psi)(x - x_0) + \sin(\psi)(y - y_0) \\ w_2 &= \cos(\psi)v_x + \sin(\psi)v_y \\ z_1 &= -\sin(\psi)(x - x_0) + \cos(\psi)(y - y_0) \\ z_2 &= -\sin(\psi)v_x + \cos(\psi)v_y\end{aligned}\quad (2.70)$$

Las variables w representan la parte controlable del sistema (a través de F) mientras que las variables z son la parte no controlable pero marginalmente estable. Esto significa que existe una función $F=h_2(t-t_0, w_{1i}, w_{2i}, w_{1f}, w_{2f})$ definida en $[t_0, t_0+T]$ tal que la solución de (2.70) cumple que $w_1(t_0)=w_{1i}$, $w_2(t_0)=w_{2i}$, y $w_1(t_0+T)=w_{1f}$, $w_2(t_0+T)=w_{2f}$.

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= -d_u z_2 + F \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -d_u z_2\end{aligned}\quad (2.71)$$

También es claro por substitución directa que las ecuaciones para z_1 y z_2 admiten soluciones de la forma:

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= z_2(t_0) + z_2(t_0) \frac{(1 - e^{-d_u(t-t_0)})}{d_u} \\
z_2(t) &= -d_u z_2(t_0) e^{-d_u(t-t_0)}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

En particular el análisis considera dos posibles casos. Primero supóngase que $\psi_0=0$, entonces substituyendo en (2.8) se obtiene.

$$\psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y}_x = F - d_u v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = -d_u v_y \end{cases} \tag{2.73}$$

Es claro del mismo modo que en (2.69) que x y v_x son controlables mientras y , y v_y son no controlables pero sí son marginalmente estables. Por tanto existe una ley de control $F = h_2(t-t_0, y, v_y, y_f, v_{yf})$ definida en $t=[t_0, t_0+T]$ tal que la solución de (2.73) cumple que $y(t_0)=y$, $v_y(t_0)=v_{y0}$ e $y(t_0+T)=y_f$, $v_y(t_0+T)=v_{yf}$

Por otra parte si $\psi=\pi/2$ los papeles se invierten, ahora y , y v_y son controlables mientras que x y v_x son marginalmente estables. Por tanto es posible usar la misma señal de control $f = h_2(t-t_0, x_0, v_{x0}, x_f, v_{xf})$ definida en $t=[t_0, t_1]$ de tal modo que la solución de (2.74) cumple que $x(t_0)=x_0$, $v_x(t_0)=v_{x0}$, $x(t_1)=x_f$ y $v_x(t_1)=v_{xf}$

$$\psi = \pi / 2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{v}_x = -d_u v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_y = F - d_u v_y \end{cases} \tag{2.74}$$

Es importante observar que durante la aplicación de las acciones de control h_1 y h_2 las soluciones de (2.8) para el conjunto de las variables no controladas obedece las ecuaciones (2.17) por lo que todas las variables del sistema permanecen acotadas.

Lema 2.1. Para toda condición inicial x_0 existe una ley de control $F(t)$, $\tau(t)$ definida en un intervalo finito de tiempo tal que la solución de (2.8) cumple que $x(0)=x_0$ y $x(T)=x_0$. En otras palabras, el origen es alcanzable desde cualquier estado inicial.

Demostración: Para demostrarlo se construye una ley de control por etapas. Partiendo del estado inicial $x(0)=[x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}, \psi_0, r_0]^T$:

$$s_1 = [F(t), \tau(t)] = \begin{cases} [0, h_1(t, \psi_0, r_0, \pi/2, 0)] & 0 < t < T \\ [h_2(t-T, y_1, v_{y1}, 0, 0), 0] & T < t < 2T \\ [0, h_1(t-2T, \psi_0, \pi/2, 0, 0, 0)] & 2T < t < 3T \\ [h_2(t-3T, x_3, v_{x3}, 0, 0), 0] & 3T < t < 4T \end{cases} \tag{2.75}$$

Donde x_i, y_i, v_{xi}, v_{yi} vienen dadas por la solución libre del sistema (2.8) y por lo tanto vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 + \frac{v_{x0}}{d_u} (1 - e^{-d_u T}); \quad v_{x1} = e^{-d_u T} v_{x0} \\
 y_1 &= y_0 + \frac{v_{y0}}{d_u} (1 - e^{-d_u T}); \quad v_{y1} = e^{-d_u T} v_{y0} \\
 x_2 &= x_0 + \frac{v_{x0}}{d_u} (1 - e^{-2d_u T}); \quad v_{x2} = e^{-2d_u T} v_{x0} \\
 x_3 &= x_0 + \frac{v_{x0}}{d_u} (1 - e^{-3d_u T}); \quad v_{x3} = e^{-3d_u T} v_{x0}
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Es inmediato comprobar que la secuencia de estados por la que pasará el sistema es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(0) &= [x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}, y_0, r_0]^T \\
 \mathbf{x}(T) &= [x_1, y_1, v_{x1}, v_{y1}, \pi/2, 0]^T \\
 \mathbf{x}(2T) &= [x_2, 0, v_{x2}, 0, \pi/2, 0]^T \\
 \mathbf{x}(3T) &= [x_3, 0, v_{x3}, 0, 0, 0]^T \\
 \mathbf{x}(4T) &= [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

La idea detrás de este lema es simple. Dado que la orientación es controlable primero se pone $\psi = \pi/2$ para poder a continuación controlar y , y v_y . Durante estas dos fases x y v_x van a la deriva según (2.72). Finalmente se hace $\psi = 0$ para poder controlar x y v_x . Mientras y , y v_y permanecen a cero en virtud de (2.73). ■

Teorema 2.5. El sistema (2.8) es controlable (globalmente).

Demostración: Por el Lema 2.1 es posible ir en tiempo finito desde cualquier posición inicial hasta el origen mediante las entradas de control de s_2 . Lo que queda por demostrar es que también es posible ir desde el origen a cualquier estado final.

Dado que las trayectorias del sistema no son reversibles no es posible usar las señales de control anteriores a la inversa. No obstante se puede utilizar la siguiente secuencia de control que parte de la condición inicial $\mathbf{x}(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$

$$s_2 = [F(t), \tau(t)] = \begin{cases} [h_3(t, 0, 0, x'_3, v'_{x3}), 0] & 0 < t < T \\ [0, h_1(t-T, 0, 0, \pi/2, 0)] & T < t < 2T \\ [h_1(t-2T, 0, 0, y'_1, v'_{y1}), 0] & 2T < t < 3T \\ [0, h_1(t-3T, \pi/2, 0, \psi_f, r_f)] & 3T < t < T \end{cases} \tag{2.78}$$

Donde las variables primadas se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 v'_{x1} &= v_{xf} e^{d_u T} \\
 v'_{y1} &= v_{yf} e^{2d_u T} \\
 x'_1 &= x_f - \frac{v'_{x1}}{d_u} (1 - e^{-3d_u T}) \\
 y'_1 &= y_f - \frac{v'_{y1}}{d_u} (1 - e^{-2d_u T})
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

A continuación se analiza el efecto sobre el estado de dicha secuencia s_2 , para ello inicialmente se aplica h_3 definida en el intervalo $[0, T]$, llevando el sistema hasta:

$$\mathbf{x}(T) = [x_1, 0, v_{x1}, 0, 0, 0]^T \tag{2.80}$$

Donde x_1' y v_{x1}' son dos constantes definidas en (2.79). A continuación se aplica h_1 durante el intervalo $[T, 2T]$ de este modo se controla el ángulo mientras la posición evoluciona libremente. Es fácil ver con ayuda de (2.72) que después de aplicar dicha acción del control el estado es:

$$\mathbf{x}(2T) = \left[x_1 + \frac{v_{x1}}{d_u} (1 - e^{-d_u T}), 0, v_{x1} e^{-d_u T}, 0, \pi/2, 0 \right]^T \tag{2.81}$$

Si seguidamente se aplica la acción de control h_2 durante el periodo $[2T, 3T]$ se obtiene:

$$\mathbf{x}(3T) = \left[x_1 + \frac{v_{x1}}{d_u} (1 - e^{-2d_u T}), y_1, v_{x1} e^{-2d_u T}, v_{y1}, \pi/2, 0 \right]^T \tag{2.82}$$

Finalmente basta con aplicar h_1 nuevamente, durante el intervalo $[3T, 4T]$ para terminar la secuencia de posicionamiento.

El estado final del sistema es:

$$\mathbf{x}(4T) = \left[x_1 + \frac{v_{x1}}{d_u} (1 - e^{-3d_u T}), y_1 + \frac{v_{y1}}{d_u} (1 - e^{-2d_u T}), v_{x1} e^{-3d_u T}, v_{y1} e^{-2d_u T}, \psi_f, r_f \right]^T \tag{2.83}$$

Si las variables x_1 , v_{x1} , y_1 y v_{y1} han sido escogidas de modo que se satisfaga la condición (2.79) entonces el estado final resulta ser:

$$\mathbf{x}(T) = [x_f, y_f, v_{xf}, v_{yf}, \psi_f, r_f]^T = \mathbf{x}_f \tag{2.84}$$

Que es el estado final deseado como se quería demostrar ■

El funcionamiento de estas secuencias de control queda resumido en la Figura 2.15. Dicha figura muestra las trayectorias que sigue el aerodeslizador bajo la acción de las

leyes de control s_1 y s_2 . En la trayectoria producida por s_1 el estado del sistema siempre está frenando mientras que en generada por s_2 el sistema comienza acelerando para después frenar.

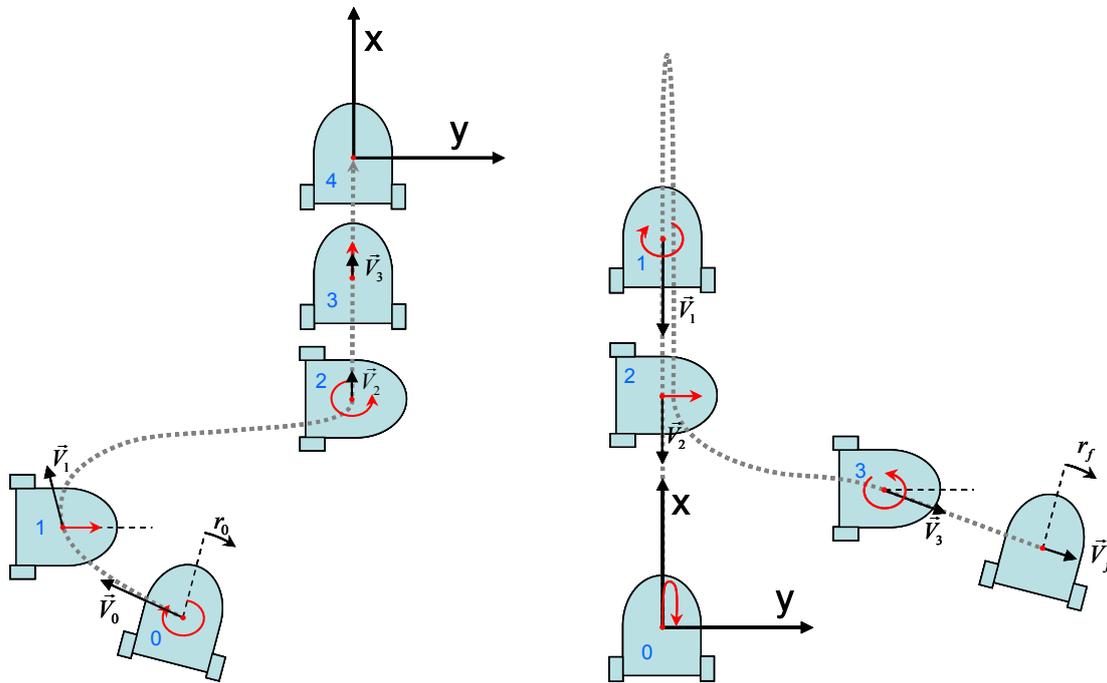


Figura 2.15. Controlabilidad del aerodeslizador. El aerodeslizador es estabilizable en el origen (derecha) y cualquier estado es alcanzable desde el origen (izquierda).

2.7.2.B. El aerodeslizador es localmente controlable en el origen

En el apartado anterior se demuestra que el estado del aerodeslizador es localmente accesible (local débilmente controlable) en todos los puntos. A continuación se comprobará como en los puntos de equilibrio el sistema es también localmente controlable.

En primer lugar conviene notar que la controlabilidad local solo puede darse en puntos de equilibrio del sistema. Esto es fácil de ver a partir de la definición ya que en puntos de no equilibrio $f(x_0, u)$ no vale cero y por tanto dado que f es continua, alguna de sus componentes debe de ser no nula en un entorno U de x_0 .

Por tanto $f_i(x, u) > 0$ o bien $f_i(x, u) < 0$ para cualquier $x \in U$. Supóngase primero que la componente i -ésima del vector f fuese positiva, entonces de acuerdo con (2.25), la derivada de la componente x_i sería siempre positiva y por lo tanto x_i crece a lo largo de las trayectorias pertenecientes al conjunto U . Esto implica que el conjunto de estados tales que $x_i < x_{i0}$ no sería alcanzable.

En el caso de que $f_i(x, u)$ fuese negativo el razonamiento sería el similar al del caso anterior y los estados no alcanzables serían de la forma $x_i > x_{i0}$ de tal modo que el sistema sólo puede ser localmente controlable en los puntos de equilibrio como se muestra en la Figura 2.16

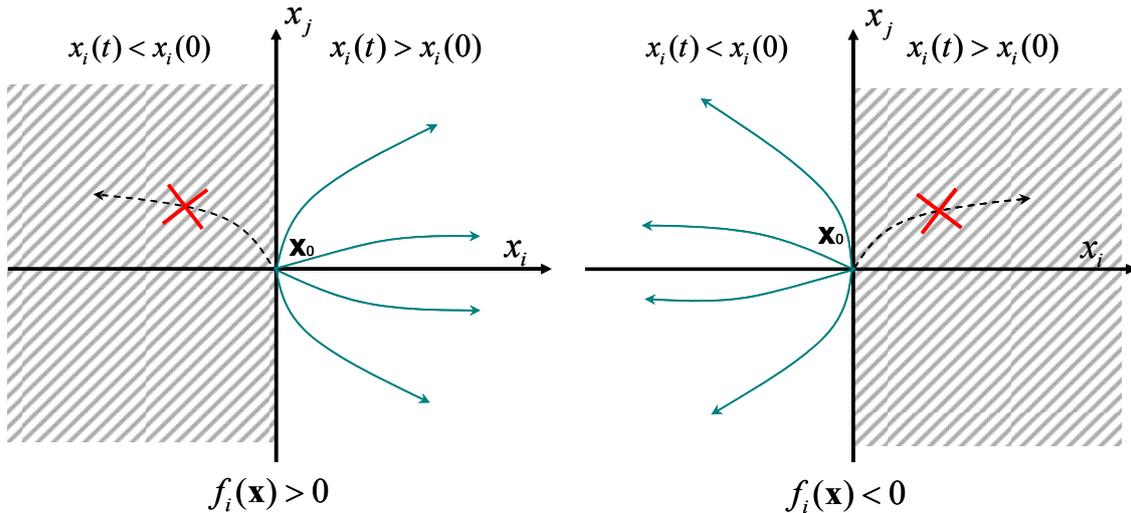


Figura 2.16. La controlabilidad local sólo puede darse en puntos de equilibrio. En el entorno de un punto en el que la deriva no es nula al menos la mitad del espacio de estados no es localmente accesible.

En segundo lugar es inmediato comprobar que (2.8) es invariante bajo el difeomorfismo global (2.85) que convierte cualquier punto de equilibrio en el origen del sistema. Por tanto, y sin pérdida de generalidad, se analiza la controlabilidad local del sistema en el origen.

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= \cos(\psi_0)x - \sin(\psi_0)y - x_0 \\
 \hat{y} &= \sin(\psi_0)x + \cos(\psi_0)y - y_0 \\
 \hat{v}_x &= \cos(\psi_0)v_x - \sin(\psi_0)v_y \\
 \hat{v}_y &= \sin(\psi_0)v_x + \cos(\psi_0)v_y \\
 \hat{\psi} &= \psi - \psi_0 \\
 \hat{r} &= r
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

En el Teorema 2.5 se dio una secuencia de control que era capaz de llevar el sistema desde el origen hacia cualquier estado final, el problema de s_2 es que para ir al estado final del sistema hay que pasar necesariamente por un punto intermedio de la forma $\mathbf{x}(T)=[x_I, 0, v_{xI}, 0, \pi/2, 0]^T$ que claramente no se encuentra en un pequeño entorno del origen.

Por otro lado en la verificación de LARC se vio que existían corchetes de Lie no nulos que aportaban movimiento en la dirección transversal, el problema es que al ser un sistema sin deriva dichos corchetes no son “implementables” ya que involucran invertir las trayectorias del sistema, lo cual en general no es posible.

A continuación se verá como es posible obtener movimiento en la dirección y mediante una secuencia de control que mantiene las variables del sistema en un entorno local del origen. Además dicho entorno puede hacerse arbitrariamente pequeño y la trayectoria puede llevarse a cabo en un tiempo arbitrariamente corto.

Lema 2.2. Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -av + u\end{aligned}\quad (2.86)$$

Entonces dado un tiempo T y para cualquier constante ε existe un δ y una función $u(t)=h_\varepsilon(t-t_0, x_0, v_0, x_f, v_f)$ definida en $[t_0, t_0+T]$ tal que si $|x_0|, |x_f|, |v_0|, |v_f| < \delta$, la solución de (2.68) cumple que $x(t_0)=x_0$, $v(t_0)=v_0$ y $x(t_0+T)=x_f$, $v(t_0+T)=v_f$ y además en el intervalo $[t_0, t_0+T]$ se cumple que $|x(t)|, |v(t)| < \varepsilon$.

Demostración: Dada la trayectoria polinómica

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + Tv_0 \left(\frac{t-t_0}{T} \right) + (3x_f - 3x_0 - (2v_0 + v_f)T) \left(\frac{t-t_0}{T} \right)^2 - (2x_f - 2x_0 - (v_f + v_0)T) \left(\frac{t-t_0}{T} \right)^3 \\ v(t) &= v_0 + \frac{2}{T} (3x_f - 3x_0 - (2v_0 + v_f)T) \left(\frac{t-t_0}{T} \right) - \frac{3}{T} (2x_f - 2x_0 - (v_f + v_0)T) \left(\frac{t-t_0}{T} \right)^2\end{aligned}\quad (2.87)$$

Es inmediato comprobar por sustitución directa que $x(t_0)=x_0$, $v(t_0)=v_0$ y $x(t_0+T)=x_f$, $v(t_0+T)=v_f$. Sustituyendo (2.87) en (2.86) es fácil comprobar que dicha trayectoria es la solución del sistema para la entrada de control:

$$\begin{aligned}u(t) = h_\varepsilon(t-t_0, x_0, v_0, x_f, v_f) &= av_0 + (3x_f - 3x_0 - 2v_0T - v_fT) \left(\frac{2}{T^2} + \frac{2a}{T} \left(\frac{t-t_0}{T} \right) \right) + \\ &+ (-2x_f + 2x_0 + v_fT + v_0T) \left(\frac{6}{T^2} + \frac{3a}{T} \left(\frac{t-t_0}{T} \right)^2 \right)\end{aligned}\quad (2.88)$$

Además esta trayectoria es acotada. En particular las cotas para x y v en el intervalo $[t_0, t_0+T]$ son:

$$\begin{aligned}|x(t)| &\leq \delta + T\delta \left(\frac{t-t_0}{T} \right) + (6\delta + 3T\delta) \left(\frac{t-t_0}{T} \right)^2 + (4\delta + 2T\delta) \left(\frac{t-t_0}{T} \right)^3 \leq (11 + 6T)\delta \\ |v(t)| &\leq \delta + \frac{2}{T} (6\delta + 3T\delta) \left(\frac{t-t_0}{T} \right) + \frac{3}{T} (4\delta + 2T\delta) \left(\frac{t-t_0}{T} \right)^2 \leq \left(\frac{24}{T} + 13 \right) \delta\end{aligned}\quad (2.89)$$

Por tanto si se escoge el valor de δ especificado por

$$\delta < \varepsilon \min \left(\frac{1}{11 + 6T}, \frac{T}{13T + 24} \right) \Rightarrow |x(t)|, |v(t)| < \varepsilon, t \in [t_0, t_0 + T]\quad (2.90)$$

Entonces se verifica la cota de la trayectoria. ■

Una vez que se dispone de señales de control que mantienen el estado acotado es posible construir el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.6. El sistema (2.8) es localmente controlable en todos sus puntos de equilibrio.

Demostración: Sea la siguiente secuencia de control:

$$s_3 = \begin{cases} [0, h_{1\varepsilon}(t, 0, 0, \delta, 0)] & 0 < t < T \\ [h_{2\varepsilon}(t-T, 0, 0, p_1, p_2), 0] & T < t < 2T \\ [0, h_{1\varepsilon}(t-2T, \delta, 0, 0, 0)] & 2T < t < 3T \\ [h_{2\varepsilon}(t-3T, c_1, c_2, p_3, p_4), 0] & 3T < t < 4T \\ [0, h_{1\varepsilon}(t-4T, 0, 0, \psi_f, r_f)] & 4T < t < 5T \end{cases} \quad (2.91)$$

Donde p_i son parámetros libres tales que:

$$\begin{aligned} c_1 &= p_1 \sin(\delta) + \frac{p_2 \sin(\delta)}{d_u} (1 - e^{-d_u T}) \\ c_2 &= p_2 \sin(\delta) e^{-d_u T} \\ p_i &< \frac{d_u \delta}{d_u + 1} < \delta \end{aligned} \quad (2.92)$$

A continuación se analiza en detalle el funcionamiento de la secuencia s_3 (para entender su funcionamiento conviene inspeccionar la Figura 2.17). En la primera fase de la señal de control se llega desde el origen hasta el estado (2.93), además h_ε es tal que garantiza que $|y|, |r| < \varepsilon$.

$$\mathbf{x}(T) = [0, 0, 0, 0, \delta, 0]^T \quad (2.93)$$

La segunda parte de la secuencia de control controla la posición a lo largo de la dirección δ hasta llegar a

$$\mathbf{x}(2T) = [p_1 \cos(\delta), p_1 \sin(\delta), p_2 \cos(\delta), p_2 \sin(\delta), \delta, 0]^T \quad (2.94)$$

Además puesto que $|p_1|$ y $|p_2| < \delta$ entonces todas las variables de estado permanecen menores que ε . Después de aplicar la señal del segundo periodo es fácil ver que se llega a:

$$\mathbf{x}(3T) = \left[p_1 \cos(\delta) + \frac{p_2 \cos(\delta)}{d_u} (1 - e^{-d_u T}), p_1 \sin(\delta) + \frac{p_2 \sin(\delta)}{d_u} (1 - e^{-d_u T}), p_2 \cos(\delta) e^{-d_u T}, p_2 \sin(\delta) e^{-d_u T}, 0, 0 \right]^T$$

Si seguidamente se aplica la acción de control h_2 durante el periodo $[3T, 4T]$ se obtiene:

$$\mathbf{x}(4T) = \left[p_3, p_1 \sin(\delta) + \frac{p_2 \sin(\delta)}{d_u} (1 - e^{-d_u 2T}), p_4, p_2 \sin(\delta) e^{-d_u 2T}, 0, 0 \right]^T$$

Finalmente solo resta aplicar h_I nuevamente, durante el intervalo $[4T, 5T]$ para terminar la secuencia de posicionamiento. El estado final del sistema es:

$$\mathbf{x}(T) = \left[p_3 + \frac{p_4}{d_u} (1 - e^{-d_u T}), p_1 \sin(\delta) + \frac{p_2 \sin(\delta)}{d_u} (1 - e^{-d_u 3T/5}), p_4 e^{-d_u T}, p_2 \sin(\delta) e^{-d_u 3T}, p_5, p_6 \right]^T$$

Es inmediato comprobar que la secuencia s_3 mantiene acotadas todas las variables de estado. Para comprobarlo basta con darse cuenta de que las variables que evolucionan libremente permanecen siempre acotadas por δ en virtud de:

$$\begin{aligned} \left| p_i \cos(\delta) + \frac{p_j \cos(\delta)}{d_u} (1 - e^{-d_u t}) \right| &\leq |p_i| + \left| \frac{p_j}{d_u} \right| \leq \frac{d_u \delta}{d_u + 1} + \frac{\delta}{d_u + 1} = \delta \\ \left| p_i \sin(\delta) + \frac{p_j \sin(\delta)}{d_u} (1 - e^{-d_u t}) \right| &\leq |p_i| + \left| \frac{p_j}{d_u} \right| \leq \delta \\ |p_i \cos(\delta) e^{-d_u t}| &< |p_i| < \delta \\ |p_i \sin(\delta) e^{-d_u t}| &< |p_i| < \delta \end{aligned} \quad (2.95)$$

Y como además, si los parámetros p_i cumplan la condición (2.92) entonces las funciones h_ε garantizan que las variables controladas siempre están acotadas también por ε . Por otra parte el estado final $\mathbf{x}(5T) = \mathbf{k}(\mathbf{p})$ es una función continua y derivable del vector de parámetros \mathbf{p} . Si se calcula el determinante de la matriz hessiana de \mathbf{k} :

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{p}} \right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \frac{(1 - e^{-d_u T})}{d_u} & 0 & 0 \\ \sin(\delta) \frac{\sin(\delta)}{d_u} (1 - e^{-3d_u T}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-d_u T} & 0 \\ 0 & \sin(\delta) e^{-3d_u T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\sin(\delta)^2 e^{-4d_u T} \neq 0 \quad (2.96)$$

Puesto que la matriz hessiana no es singular, el teorema de la función inversa garantiza que $\mathbf{p} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{x})$ está definida en una bola de radio ε centrada en el origen $B(\varepsilon, \mathbf{0})$. Por tanto para todo ε_I existe un δ_I tal que si $|\mathbf{x}_f| < \delta_I$ entonces existe un vector de parámetros $\mathbf{p} = \mathbf{k}^{-1}(\mathbf{x}_f)$ tal que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}(5T) = \mathbf{x}_f$.

Por otro lado mediante la aplicación de la secuencia s_3 se cumple que las variables son acotadas por ε_I , por tanto:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + \psi(t)^2 + r(t)^2} \leq \\ &\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2} = \sqrt{6} \varepsilon_1 = \varepsilon \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.97)$$

De donde se deduce que el origen es localmente controlable.

Puesto que el difeomorfismo (2.85) transforma cualquier punto de equilibrio en el origen y que un difeomorfismo no afecta a la controlabilidad local, se tiene que el aerodeslizador es STLC en todos sus puntos de equilibrio ■

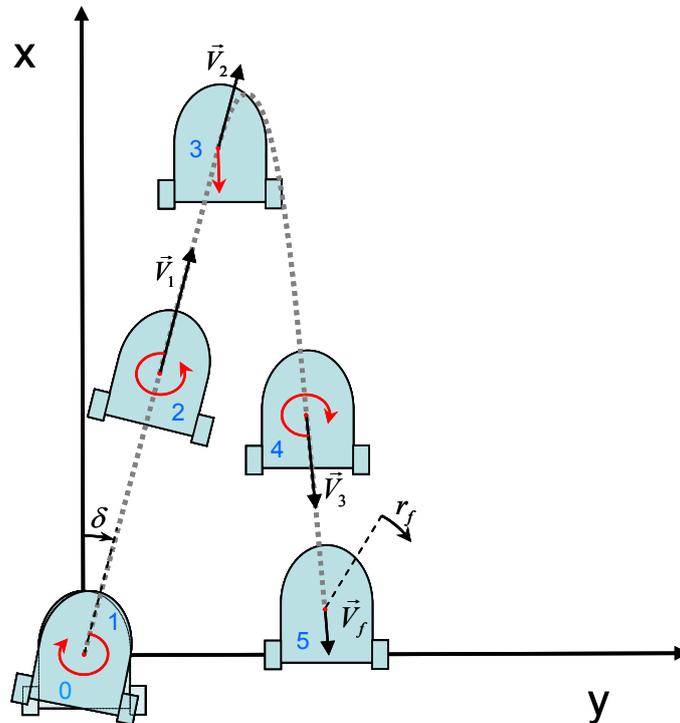


Figura 2.17. Acción de control local. Por medio de trayectorias locales es posible obtener movimiento en todas las direcciones posibles en el espacio de estados sin abandonar un entorno del origen.

2.8. Teorema de Brockett

En las secciones anteriores se ha demostrado que el sistema es todo lo controlable que cabría esperar teniendo en cuenta la restricción no holonómica. Al fin y al cabo es posible controlar el aerodeslizador localmente en torno a cualquier trayectoria en la que F_s no sea cero, e incluso en caso de que F_s se anule es posible controlar el sistema siempre y cuando la orientación no cumpla (2.43).

También se ha visto que es posible ir desde cualquier estado inicial hasta cualquier estado final, de hecho, en los puntos de equilibrio esto puede hacerse localmente y en tiempo corto (el sistema es STLC).

Sin embargo las secuencias de control en lazo abierto que se han usado en las demostraciones de los teoremas anteriores tienen varios problemas cuando quieren convertirse en leyes de control en lazo cerrado ya que se trata de señales de control definidas por intervalos.

En particular cabría preguntarse si es posible obtener una ley de realimentación suave (o por lo menos continua) que permita controlar el aerodeslizador en un punto de equilibrio.

En las trayectorias en las cuales F_s no es nulo la respuesta es afirmativa ya que al ser (2.28) controlable existe una ley de control por realimentación de estados que estabiliza las variables de error al menos localmente, véase (Khalil, 2002).

De hecho en el Capítulo 5 se diseñan una ley de realimentación suave que permiten controlar el aerodeslizador globalmente haciendo que siga trayectorias con F_s no nulo.

Sin embargo, cuando el objetivo del problema es detenerse en un punto el problema se complica, ya que la controlabilidad de la linealización se pierde. Un conocido resultado (Brockett, 1983) permite analizar lo que ocurre en esta situación.

Teorema 2.7. Teorema de Brockett: Dado un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.98)$$

Y un punto de equilibrio x_0 con señal de control nula ($f(x_0, 0) = 0$) admitiendo f derivadas continuas en un entorno de x_0 . Las condiciones necesarias para que exista una ley de control continua independiente del tiempo $u = h(x)$ que haga al sistema en lazo cerrado

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, u) \\ u = h(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{x} = f(x, h(x)) := g(x) \quad (2.99)$$

Sea asintóticamente estable en dicho punto son:

- I El sistema linealizado no debe tener modos inestables no controlables.
- II Existe un entorno de x_0 tal que para cada punto del mismo exista una ley de control que lleve el sistema al origen. (Accesibilidad) $\forall \varepsilon \exists \delta$ tal que $\|\xi\| < \delta$
- III Existe solución de $\xi = f(x, u)$ con $\|x\|, \|u\| < \varepsilon$.

Demostración: ver (Brockett, 1983) ■

La primera condición del teorema es evidente a partir de los autovalores obtenidos en (2.55), por otro lado la segunda condición se cumple trivialmente ya que el sistema es estabilizable en el origen se demuestra en el apartado anterior.

La tercera condición es sin embargo más complicada. Para poder controlar (2.98) mediante una ley continua e independiente del tiempo la ecuación $\xi = f(x, u)$ tiene que admitir soluciones locales en el punto de equilibrio para ξ pequeño.

Teorema 2.8. No es posible hallar una ley de control suave e independiente del tiempo que estabilice al aerodeslizador (2.8) en un punto de equilibrio.

Demostración: Sin pérdida de generalidad se estudia la estabilización en el origen. Como ya se vio en el apartado anterior las dos primeras condiciones del teorema de Brockett se cumplen para el aerodeslizador. Los modos no controlables de la linealización del estado en el origen son marginalmente estables (2.55) y el sistema es estabilizable.

No obstante si se analiza la tercera condición resulta que:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= v_x \\
 \xi_2 &= v_y \\
 \xi_3 &= -d_u v_x + F \cos(\psi) \\
 \xi_4 &= -d_u v_y + F \sin(\psi) \\
 \xi_5 &= r \\
 \xi_6 &= -d_r r + \tau
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

El sistema (2.100) no admite soluciones locales en el origen, para verlo se resuelve el sistema para $y_1 = y_2 = y_5 = y_6 = 0$ mientras que $y_3 = \delta$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} 0 &= v_x \\ 0 &= v_y \end{aligned} \right\} &\Rightarrow v_x = v_y = 0 \\
 \left. \begin{aligned} 0 &= -d_u v_x + F \cdot \cos(\psi) \\ \delta &= -d_u v_y + F \cdot \sin(\psi) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = (n + \frac{1}{2})\pi; F = \delta \\
 \left. \begin{aligned} 0 &= r \\ 0 &= -d_r r + \tau \end{aligned} \right\} &\Rightarrow r = \tau = 0
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

De este modo aunque δ sea arbitrariamente pequeño (y por lo tanto también $\|\xi\| < \delta$) la solución (2.101) cumple que $\|\mathbf{x}\| > \pi/2$ que no puede hacerse menor que un ε arbitrario ■

2.9. Conclusiones

En este capítulo se ha introducido un modelo del aerodeslizador como un vehículo naval de tres grados de libertad. El modelo es lo suficientemente simple para poder ser tratado analíticamente y al mismo tiempo lo suficientemente complejo para capturar la no linealidad esencial del sistema, que hace al mismo interesante desde el punto de vista del control.

El vehículo es subactuado ya que sólo dispone de dos entradas de control y hay tres variables independientes a ser controladas. Esto introduce una restricción no holónomica de segundo orden al movimiento.

La característica fundamental de la restricción no holónomica es que aunque limita las trayectorias que puede seguir el aerodeslizador permite alcanzar todos los puntos del espacio de estados desde cualquier configuración inicial (el sistema es controlable).

Además el aerodeslizador es todo lo controlable que puede ser ya que todos los estados del sistema son localmente accesibles (controlabilidad débil en todos los puntos), y, en particular todos los puntos de equilibrio el sistema es localmente controlable en tiempo corto (STLC).

También se ha demostrado que el vehículo es controlable en torno a cualquier trayectoria en la cual el aerodeslizador no vaya a la deriva ($F_s=0$) o en torno a trayectorias en las cuales la velocidad de guiñada no siga la ecuación (2.37). Esto significa que será posible controlar el aerodeslizador en torno a todas las trayectorias “buenas” al menos en un entorno local de la misma (como se verá en capítulos posteriores también puede hacerse de forma global).

Finalmente cabe destacar que aunque el sistema es localmente controlable en todas sus configuraciones de equilibrio no existe una ley de control por realimentación suave e independiente del tiempo que pueda posicionar al aerodeslizador en ninguno de sus puntos de equilibrio. Por tanto para hacer estabilización en un punto será necesario emplear leyes de control discontinuas o dependientes del tiempo.

Capítulo 3 Sistema Experimental

En este capítulo se analiza en detalle la implementación del sistema de laboratorio con el cual se ha llevado a cabo la validación experimental de las leyes de control del Capítulo 4 y del Capítulo 6.

En primer lugar se da una visión general de la arquitectura del sistema de laboratorio, describiendo cada uno de los componentes hardware que se utilizan. Seguidamente se muestra una visión general de la arquitectura del software.

A continuación se analiza la implementación del sistema. Para ello se describen en primer lugar los módulos constructivos que se encargan de las tareas de visión (de alto y bajo nivel), el control, el registro de datos, la presentación gráfica de los mismos y la interfaz de salida, entre otros. Finalmente se muestra el funcionamiento conjunto de los elementos con un ejemplo concreto de aplicación.

Para concluir el capítulo se hará un estudio del modelo experimental mostrando las principales dificultades de modelado así como las soluciones adoptadas. Se justifica la estructura del modelo utilizado adoptado en el Capítulo 2 y se valida un modelo del aerodeslizador para unas condiciones concretas.

3.1. Introducción

Las simulaciones son una herramienta indispensable en el diseño de leyes de control ya que permiten analizar el comportamiento esperado de un sistema de forma rápida y segura. Además permiten obtener medidas directas del comportamiento de una ley de control en condiciones que serían difíciles de reproducir en un sistema real.

Sin embargo, por muy elaborado y preciso que pueda ser un modelo de simulación, siempre existen detalles de los sistemas físicos reales que resultan imposibles de modelar. Por este motivo la utilización de prototipos de laboratorio para validar las leyes de control diseñadas aportan un gran valor añadido al diseño del control. Estos prototipos permiten comprobar el efecto de perturbaciones y dinámicas no modeladas, retardos en el sistema, incertidumbre en los parámetros etc.

El aerodeslizador es un sistema que sirve como prototipo de vehículo autónomo subactuado. Se trata de un vehículo difícil de controlar, ya que presenta un gran

deslizamiento lateral. Esto acentúa las dificultades que se presentan de forma natural en el control de vehículos marinos de superficie.

Además este sistema tiene la ventaja de que puede ser utilizado tanto en agua como en tierra sin que haya cambios cualitativos en la dinámica del modelo. Este hecho simplifica considerablemente los requerimientos del sistema experimental.

Por este motivo se han desarrollado varias plataformas a nivel internacional que utilizan el aerodeslizador como modelo a controlar. Entre ellas cabe destacar la plataforma MVWT (*multi-vehicle wireless testbed*) desarrollada en el Caltech, (MVWT). Esta plataforma se describe en detalle en (Jin et al., 2004) y (Chung et al., 2002) respectivamente. En ella se construye tanto el vehículo como el sistema de visión y control.

Esta plataforma ha sido utilizada con éxito para la validación de varias estrategias de control, véase por ejemplo el trabajo de (Aguar et al., 2003) o (Cremean et al., 2002).

En otras plataformas se utilizan aerodeslizadores de radiocontrol disponibles comercialmente, de este modo solo es necesario añadir sensorización externa y diseñar una interfaz para enviar comandos de control al vehículo. Esta aproximación es la que se utiliza en el sistema experimental implementado en (Seguchi & Ohtsuka, 2002) y (Seguchi & Ohtsuka, 2003). En esta Tesis se utilizará esta misma aproximación.

El sistema experimental resultante es muy flexible, de hecho algunos autores (Vladimerou et al., 2004) utilizan el aerodeslizador como modelo para control de formaciones descentralizado.

El denominador común de las aproximaciones anteriores es que utilizan un sistema de visión externo para el posicionamiento del vehículo. Esta aproximación es frecuentemente usada en vehículos marinos de superficie que operan en el agua. Ejemplos conocidos de este tipo de vehículos son el Cybership que se utiliza en (Pettersen & Fossen, 1998) así como en (Lefeber, Pettersen & Nijmeijer, 2003) o el vehículo de prueba del MIT, que se utiliza en (Greytak & Hover, 2008).

Algunos autores, inspirados en la sensorización de los robots móviles autónomos utilizan un sistema de visión interno para el posicionamiento, como es el caso de (Okawa & Yuta, 2003). Este sistema no obstante dificulta el montaje experimental al añadir peso y complejidad al aerodeslizador. Esta aproximación además requiere de la presencia de un entorno estructurado por lo que no sería aplicable fuera de un entorno de laboratorio.

La ventaja fundamental del sistema de posicionamiento externo por visión es que imita el funcionamiento de los sistemas de posicionamiento absoluto que se emplean en los vehículos reales (véase por ejemplo (Caccia, 2008)). De este modo las estrategias de control validadas en estos vehículos pueden aplicarse en un vehículo real de superficie dotado con un compás y un receptor GPS.

3.2. Arquitectura general del sistema

El sistema experimental consta de un aerodeslizador de radiocontrol, una cámara de video que permite calcular la posición y orientación del vehículo por medio de un sistema de visión artificial, un ordenador dotado de una tarjeta de adquisición de imagen donde se implementan los algoritmos de visión y la ley de control y una interfaz de comunicación que permite enviar las señales de control al aerodeslizador por medio de un mando de radiocontrol. La Figura 3.1 muestra una imagen esquemática del sistema experimental.



Figura 3.1. Sistema experimental.

A continuación se describen en detalle cada uno de los componentes software y hardware del sistema.

3.2.1. Componentes hardware

En este punto se describen cada uno de los elementos físicos que constituyen el sistema de laboratorio.

3.2.1.A. aerodeslizador de radiocontrol

El vehículo subactuado que se utiliza en el sistema experimental es un aerodeslizador de radiocontrol de la marca Graupner (en particular se trata del *Graupner 8607*) que se muestra en la Figura 3.2. El vehículo posee dos hélices impulsoras en la popa y un ventilador centrífugo en el centro que se utiliza para hinchar el colchón de aire que le proporciona sustentación.

Las dimensiones del vehículo son 495mm de manga y 300mm de eslora. La masa nominal del vehículo es de 995g si bien esta puede variar en función del juego de

baterías que se utilice así como de ciertas modificaciones en su estructura que se comentan a continuación.



Figura 3.2. aerodeslizador de radiocontrol

El vehículo se controla por medio del mando de radiocontrol Graupner TX 3000 que trabaja en una frecuencia de 40Mhz . El mando posee tres canales de control, uno de ellos para encender y apagar el ventilador central y los otros dos para controlar las hélices impulsoras.

El sistema de sustentación solo puede estar totalmente encendido o apagado y cada uno de los impulsores solo admite tres modos de funcionamiento: todo, nada e inversión. La fuerza proporcionada por los impulsores no es simétrica, siendo mayor en la dirección de avance que en la dirección de retroceso.

Para poder detectar la posición del vehículo se han añadido tres *Leds* de alto brillo alimentados por una pila de 9V . Estos *Leds* actúan como balizas en el sistema de visión artificial. Los *Leds* se encuentran formando un triángulo isósceles (ver Figura 3.2) que comparte el mismo eje de simetría que el aerodeslizador.

El lado mayor del triángulo mide 25cm y el lado menor 16cm de tal modo que la relación de aspecto es $25/16$. El centro de gravedad del vehículo se encuentra a 2cm por detrás del centro de la turbina de sustentación, esto es, a 8cm por detrás de la luz frontal. La luz frontal está montada en un soporte de tal modo que cuando el vehículo se encuentra en funcionamiento las tres luces se muevan sobre un mismo plano horizontal a 21.5cm del suelo.

3.2.1.B. Cámara y óptica

Para la adquisición de imágenes se utiliza la cámara CCD en color de alta resolución de Basler A631fc. Aunque se trata de una cámara en color se trabajará con ella en modo monocromo para aprovechar al máximo la resolución espacial y la velocidad de disparo.

En estas condiciones se obtienen imágenes con una resolución de 1388×1038 píxeles a una velocidad de 18.7fps . La cámara se encuentra montada en un soporte anclado al

techo del laboratorio de tal modo que se realiza observación del suelo desde una posición cenital. La cámara se conecta con el ordenador mediante un cable de enlace *Fire-wire* (IEEE 1394a) de 10m de longitud que se encuentra anclado al techo.



Figura 3.3. Cámara y óptica.

Sobre esta cámara se monta una óptica de gran apertura Pentax de 4.8mm de distancia focal y 1:1.8 de apertura. Con este sistema es posible cubrir un área de observación de aproximadamente 3x4 m en el suelo desde una altura de observación de 2.7m. (La forma exacta de la región de visibilidad se muestra en la Figura 3.11).

No obstante, el disponer de un campo visual tan grande (aproximadamente 86°) tiene como contrapartida una gran distorsión en la imagen que deberá ser corregida por el algoritmo de visión artificial.

3.2.1.C. Equipo informático

El procesamiento de la imagen y la implementación de la ley de control se llevan a cabo en un PC y con un procesador Pentium 4 a 3GHz con 1GB de memoria principal y un bus de 400Mhz.

Para la adquisición de la imagen se utiliza una tarjeta PCI de adquisición (*frame grabber*) Matrox Meteor2-1394 controlada a través de unas librerías especiales de procesamiento de imagen MIL (*Matrox Image Library*).

3.2.1.D. Interfaz de radiocontrol

La salida de comandos por parte del ordenador hacia el aerodeslizador se lleva a cabo a través del puerto paralelo utilizando un circuito adaptador con el mando de radiocontrol.

El mando de radiocontrol que permite interactuar con el vehículo es un sistema relativamente simple. Su interfaz externa posee un pulsador para detener el vehículo (apagando el turboventilador de sustentación) y dos palancas para el control de cada uno de los motores tal como se muestra en la Figura 3.4.

El funcionamiento interno del mando es muy simple. Puesto que todas las órdenes son todo/nada el sistema tiene en su interior 5 interruptores (dos por cada motor para implementar todo-nada-inversión y otro adicional para el pulsador de parada). Cada vez que uno de los interruptores se pulsa la línea correspondiente se pone a tierra.

La salida de estas líneas es codificada modulando la amplitud de salida de un circuito oscilante con un cristal de cuarzo resonante de 50MHz. Esta señal modulada es la que se transmite al aerodeslizador.



Figura 3.4. Interfaz de radiocontrol.

De este modo la conexión con el PC se realiza utilizando las primeras 5 líneas de salida del puerto paralelo por medio de un circuito adaptador implementado mediante el array de siete Darlington uln2003a.

El objetivo de este circuito es adaptar la salida del puerto paralelo del ordenador a la tensión de funcionamiento del mando. Cuando una de las señales de salida se pone a nivel alto (5V) el Darlington conduce poniendo la salida a tierra (lo que emula la pulsación de uno de los botones). Por otra parte cuando la salida está a nivel bajo (0V) la línea de salida queda en estado de alta impedancia de tal modo que la entrada al circuito modulador será la tensión de alimentación del mando (9V).

Esta configuración permite el control manual por medio del mando y también el control a través del puerto paralelo del ordenador (aunque como es lógico no deben usarse los dos al mismo tiempo).

3.2.2. Componentes software

La arquitectura del sistema tiene la estructura mostrada en la Figura 3.5. La aplicación de control se ha desarrollado en el lenguaje de programación LabVIEW de National Instruments.

Las operaciones de visión de bajo nivel (captura, preprocesado, segmentación y cálculo de centroides) son programadas utilizando visual C++ y hacen uso a su vez de las librerías MIL que gestionan la tarjeta de adquisición de imágenes. De este modo el software se descompone en tres partes:

- I Librería de visión de bajo nivel (en visual C++)
- II Librerías MIL (*Matrox Image Library*)
- III Algoritmos de control (implementados en LabVIEW)

El subsistema de visión de bajo nivel se empaqueta en una librería dinámica que posee una interfaz con operaciones para inicializar el hardware del sistema de visión, obtener los puntos detectados en la imagen y detener la cámara en la finalización del programa.

Esta librería intercambia estructuras de alto nivel con la interfaz de LabVIEW (vectores de puntos detectados y parámetros de configuración del hardware).

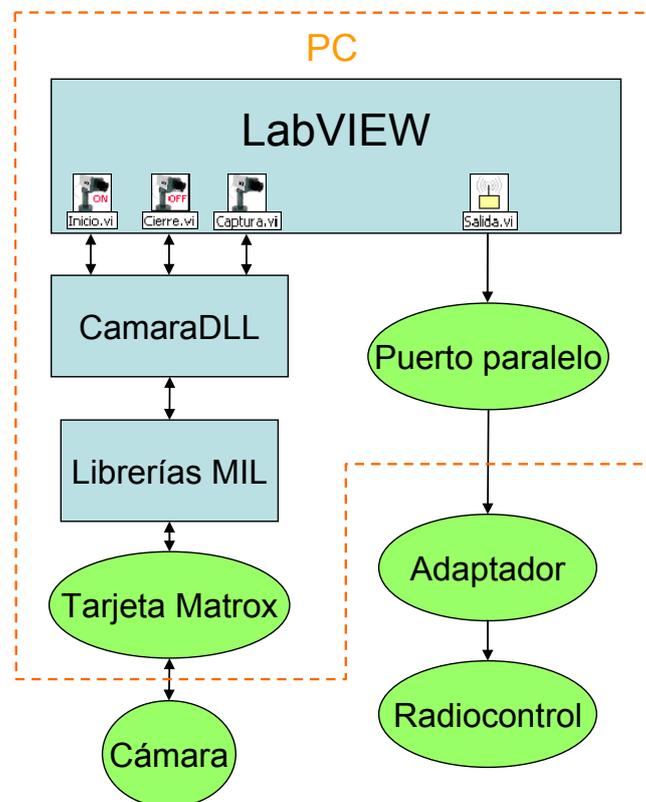


Figura 3.5. Arquitectura del sistema. Las cajas rectangulares representan elementos de software mientras que los contenedores elípticos son los elementos hardware.

Por otra parte las rutinas de visión de alto nivel (cálculo de la posición del vehículo) así como el control y la gestión de las señales de salida y la presentación de los datos a través de la interfaz gráfica de usuario GUI se lleva a cabo dentro de LabVIEW.

Las razones por las que se elige este lenguaje son la simplicidad y rapidez en el desarrollo de interfaces gráficas, la integración directa con el hardware y sobre todo la simplicidad a la hora de crear hilos y tareas de control en Tiempo Real.

3.3. Implementación

En este apartado se describen todos los elementos de software desarrollados para el control del aerodeslizador.

Puesto que LabVIEW es un lenguaje de programación gráfico, cada uno de los componentes de software desarrollados tendrá una o varias interfaces compuestas por un icono y varias líneas de entrada y salida. Cada uno de las interfaces se corresponde a un bloque en LabVIEW y se representa mediante un icono.

En la Figura 3.6 se muestran los iconos correspondientes a los principales elementos de software empleados en la implementación y que se describen en detalle en los apartados siguientes.

Este conjunto de módulos compone una librería de bloques funcionales que permiten la implementación de leyes de control en el laboratorio.

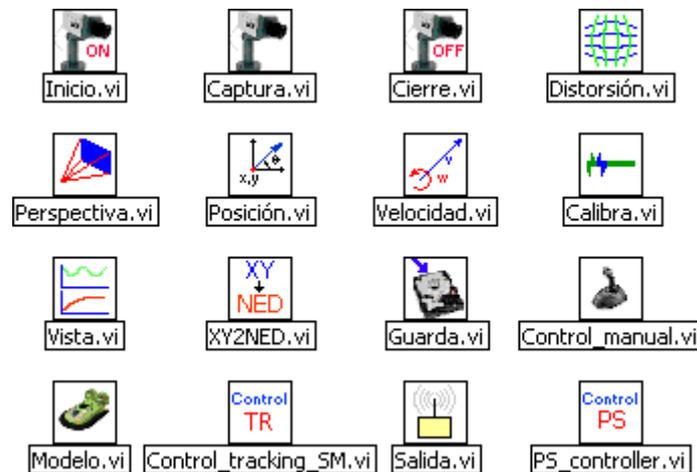


Figura 3.6. Librería en LabVIEW de los elementos software.

Para una mejor comprensión de cada una de las partes que componen el sistema se realiza un estudio del funcionamiento en orden lógico de ejecución de las mismas, esto es captura de datos, cálculo del control y generación de la salida.

1.1.1. Visión de bajo nivel

El sistema de visión de bajo nivel se encarga de las siguientes tareas:

- I Inicializar los dispositivos de visión.
- II Capturar, post-procesar las imágenes y obtener la posición de las balizas de posicionamiento del aerodeslizador.
- III Cierre de los dispositivos hardware.

El sistema de visión de bajo nivel se ha desarrollado en C++ empleando las funciones de las librerías MIL. El proyecto se compila en la librería dinámica *camaraDLL.dll*. Dicha librería posee tres funciones principales, *inicio*, *captura* y *cierre*.

Para poder utilizar estas funciones se han implementado las siguientes interfaces en LabVIEW que se muestran en la Tabla 3.1. A continuación se describe lo que hace cada una de ellas.

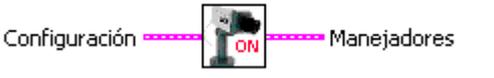
<p style="text-align: center;">Inicio.vi</p> 	<p>Inicializa el sistema de visión de bajo nivel. Devuelve una estructura con los manejadores del dispositivo.</p>
<p style="text-align: center;">Captura.vi</p> 	<p>Toma una imagen y localiza los puntos luminosos. La señal de desbordamiento se activa si se detectan demasiados puntos.</p>
<p style="text-align: center;">Cierre.vi</p> 	<p>Finaliza todos los elementos de visión y libera la memoria reservada.</p>

Tabla 3.1. Elementos de visión de bajo nivel.

1.1.1.A. Inicialización de la cámara.

Para poder trabajar con la cámara en primer lugar es necesario inicializarla y reservar espacio en memoria para almacenar las imágenes. Para ello se emplea la función *Inicio.vi*. Esta función acepta como entrada una estructura con los siguientes parámetros de configuración de la cámara.

En primer lugar los parámetros N y M definen el tamaño del buffer intermedio donde se almacenará la imagen para su procesamiento. El parámetro *Shuter* establece el tiempo de exposición de la cámara. Por su parte la ganancia hardware se configura por medio del parámetro *Gain*.

Los parámetros *Radio*, *Umbral* y *NumPuntos* configuran el algoritmo de detección de puntos. *Radio* es una estimación del radio máximo (en píxeles) que puede tener una baliza luminosa, por otro lado *Umbral* determina el umbral de binarización de la imagen y *NumPuntos* establece una cota máxima del número de puntos a detectar.

Por último el parámetro binario “*Ver imagen*” indica si se muestra o no la imagen del buffer intermedio por pantalla (esta opción resulta muy útil durante la calibración de la cámara).

En la invocación de esta función se crea un hilo de ejecución que se encarga de cargar las imágenes registradas por la cámara en el buffer de almacenamiento intermedio, además configura los valores de *radio*, *umbral* y *NumPuntos* que utilizará el algoritmo de detección de puntos. Puesto que este buffer no tiene que tener necesariamente el mismo tamaño que la imagen original se establece el mecanismo transformación de escala (postproceso de la imagen).

La salida de dicho bloque es una estructura que contiene la estructura de datos de entrada así como todos los manejadores de los elementos software y hardware que se han inicializado.

3.3.1.B. Captura de la imagen

El bloque *Captura.vi* es el encargado de obtener la posición de los puntos luminosos del aerodeslizador. Para ello admite como entrada la estructura de los manejadores y parámetros que se creó en el módulo de inicialización.

Cuando es invocada la función de librería solicita la transferencia de una imagen desde el buffer intermedio hacia una matriz $M \times N$ donde se realizará el procesamiento. Una vez que la transferencia se ha completado ejecuta el algoritmo de detección de puntos sobre dicha matriz.

El algoritmo de detección de puntos implementa la binarización y el cálculo de centroides en una sola pasada. La estructura del algoritmo se muestra en la Figura 3.7.

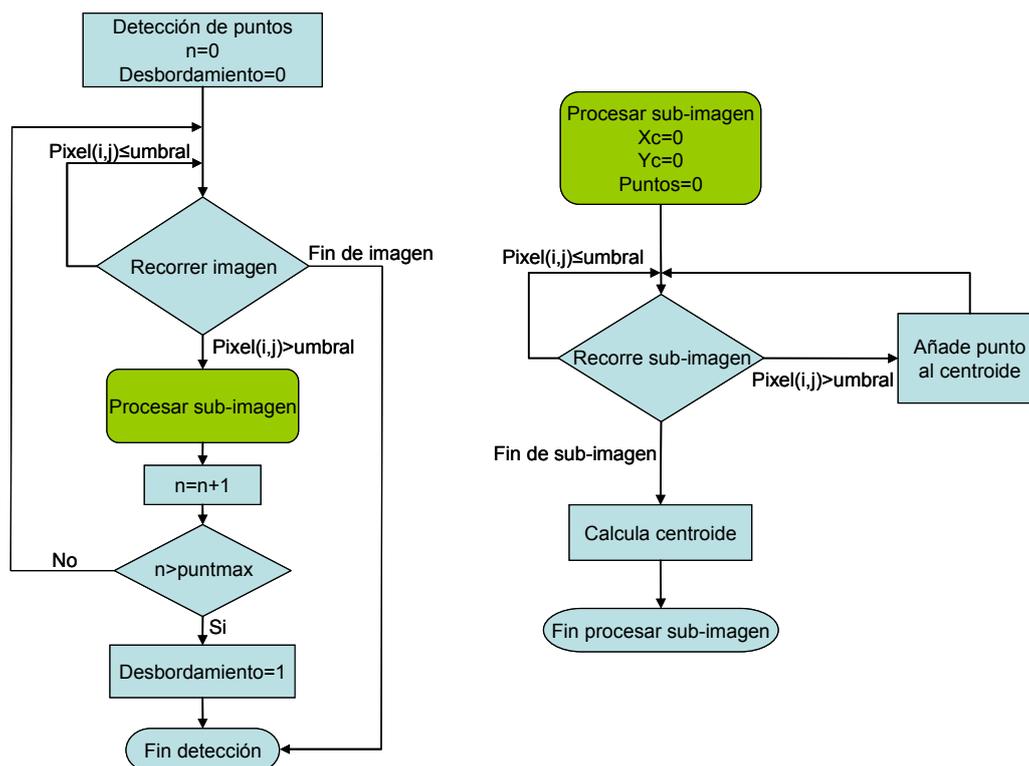


Figura 3.7. Algoritmo de detección de puntos. A la derecha se encuentra la rutina principal que analiza toda la imagen, a la izquierda la subrutina que calcula el centroide de cada sub-imagen.

El algoritmo funciona de la siguiente forma:

Primero se recorre la matriz de imagen por filas hasta encontrar un punto cuya intensidad sea mayor a la del umbral o se termine con toda la imagen.

Si se encuentra un punto que supera el umbral se inicia el proceso de la sub-imagen de vértices $(i, j - \text{Radio})$, $(i, j + \text{Radio})$, $(i + 2\text{Radio}, j - \text{Radio})$ y $(i + 2\text{radio}, j + \text{Radio})$. Puesto que

Radio es una cota máxima del radio del punto luminoso entonces todos los píxeles que conforman dicho punto deberían encontrarse dentro de esta sub-imagen. Si el punto se encontrase cerca del borde de la imagen la sub-imagen se ajusta para no salirse de los márgenes de la misma.

En el proceso de la sub-imagen en primer lugar se inicializan las variables x , y , y *puntos* a cero. Cada vez que se detecta un punto por encima del umbral en la sub-imagen (punto de coordenadas (i,j)) se añaden sus coordenadas a x e y ($x=x+i$, $y=y+j$) incrementado además el contador *puntos* y poniendo el píxel correspondiente de la imagen a cero (para evitar una doble detección del mismo punto).

Cuando se ha terminado de recorrer la sub-imagen se calcula el centroide del punto $X_c=x/puntos$ $Y_c=y/puntos$, se almacena en un array de puntos detectados $puntosX[n]=X_c$, $puntosY[n]=Y_c$ y se incrementa n . Si el número n de puntos almacenados es menor que *MumPuntos* se vuelve al primer paso y se continúa buscando más puntos, en caso contrario se termina y se activa el indicador de desbordamiento.

Al finalizar el algoritmo se devuelven dos vectores *puntosX* y *puntosY* que contienen las coordenadas del centroide de todos los puntos detectados y un indicador de desbordamiento que indica que se han detectado demasiados puntos tal como se muestra en la interfaz de la Tabla 3.1.

3.3.1.C. Cierre de la aplicación y liberación de memoria

El cierre de los manejadores del hardware que han sido inicializados por el bloque de inicio se lleva a cabo por medio de la función *cierre.vi*. Dicha función admite como parámetros la estructura de manejadores y no devuelve ningún argumento.

Este módulo también se encarga de liberar toda la memoria que ha sido reservada para almacenar las estructuras de almacenamiento intermedio que emplea el sistema de visión de bajo nivel.

Al cerrar los componentes software también se finalizan los hilos en ejecución de la DLL que se encargaban de tomar imágenes del dispositivo, de este modo la cámara queda totalmente liberada y la aplicación puede cerrarse de forma segura.

3.3.2. Visión de alto nivel

Una vez que se han detectado en la imagen los puntos de baliza que tiene el aerodeslizador es necesario convertir la posición en píxeles de dichos puntos a las variables de estado del mismo, esto es, la posición, la orientación y sus respectivas velocidades.

En primer lugar hay que tener en cuenta que la óptica del sistema introduce una distorsión en la imagen con respecto a un modelo de cámara perfecta “*pinhole*”. Por este motivo el primer paso será corregir la posición de los puntos para eliminar la distorsión de la óptica.

En segundo lugar, una vez que la distorsión ha sido eliminada es necesario obtener las posiciones de los puntos en el plano objeto a partir de los puntos en el espacio imagen, esto requiere conocer la transformación de perspectiva entre ambos espacios de coordenadas.

A partir de la posición de los puntos en el sistema de referencia del suelo se calcula la posición del centro de masas del aerodeslizador así como su orientación teniendo en cuenta la morfología de los puntos obtenidos.

Finalmente, utilizando las posiciones y orientaciones del vehículo en diferentes instantes de tiempo se determinan las velocidades lineales y angulares del aerodeslizador.

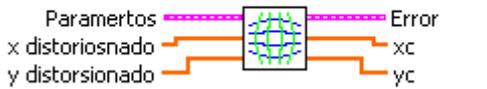
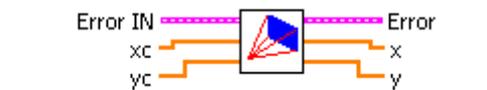
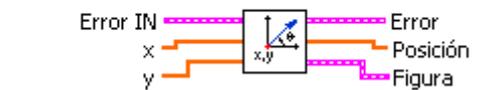
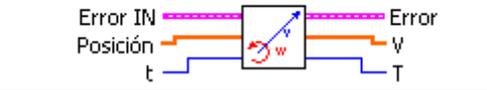
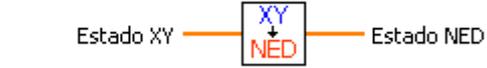
<p style="text-align: center;">Distorsión.vi</p> 	Corrige la distorsión de la cámara.
<p style="text-align: center;">Perspectiva.vi</p> 	Calcula las posiciones objeto x e y a partir de las posiciones imagen x_c e y_c .
<p style="text-align: center;">Posición.vi</p> 	Calcula la posición y orientación del vehículo.
<p style="text-align: center;">Velocidad.vi</p> 	Estima las velocidades del aerodeslizador a partir de la posición y el tiempo.
<p style="text-align: center;">XY2NED.vi</p> 	Transforma las coordenadas al sistema NED.
<p style="text-align: center;">Calibra.vi</p> 	Obtiene los parámetros de calibración de perspectiva.

Tabla 3.2. Elementos de visión de alto nivel.

Los módulos encargados de realizar estas tareas se muestran en la Tabla 3.2. A continuación se procede a analizar pormenorizadamente el funcionamiento de cada uno de ellos.

3.3.2.A. Distorsión

La Figura 3.8 muestra una imagen del suelo tal como es capturada por la cámara. En la imagen se aprecia claramente la distorsión de tipo *barril*. De este modo las líneas rectas paralelas en el espacio objeto (véase la unión de las baldosas en el suelo del laboratorio) se ven en la imagen como líneas curvas que se encuentran más separadas en el centro y más juntas en las esquinas.

Este efecto se debe a que la óptica de la cámara tiene una mayor potencia en los puntos que se encuentran cerca del eje focal (por este motivo la imagen se ve más grande en el centro) y menor potencia cerca de los bordes (de tal modo que las esquinas se ven más cerca de lo que realmente están).

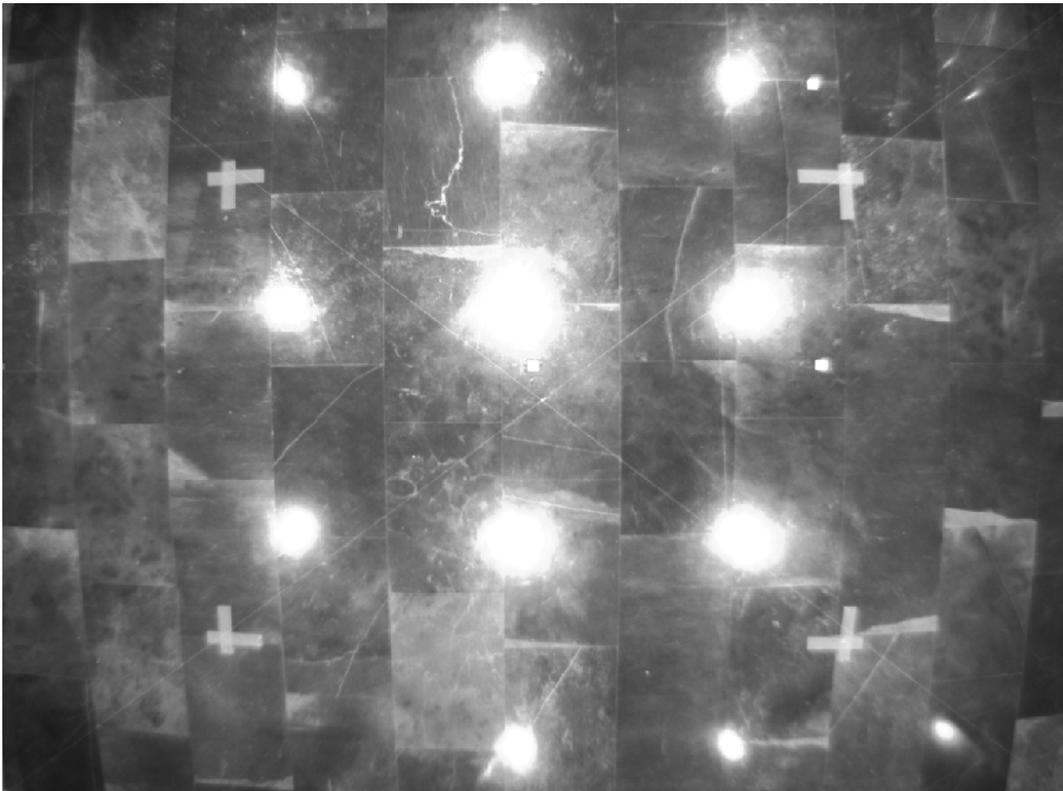


Figura 3.8. Imagen del suelo con distorsión en barril.

Puesto que la distorsión en barril posee simetría de revolución puede describirse fácilmente como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_d - x_0 \\ y_d - y_0 \end{pmatrix} = L(R) \begin{pmatrix} x_c - x_0 \\ y_c - y_0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$R = \sqrt{(x_c - x_0)^2 + (y_c - y_0)^2}$$

Donde x_c e y_c son las posiciones correctas en el espacio imagen, x_d e y_d son las posiciones en la imagen distorsionada y x_0 e y_0 las posiciones del centro óptico de la cámara (véase Alvarez 2009). La función $L(R)$ es la ganancia del sistema. Nótese que si L fuese constante no habría distorsión (solo transformación de escala).

La transformación inversa de distorsión puede entonces escribirse del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} x_d - x_0 \\ y_d - y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{L(R)} \begin{pmatrix} x_c - x_0 \\ y_c - y_0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

El problema de dicha expresión es que R es desconocido, de este modo es conveniente reescribir (3.2) en términos de R_d que es directamente medible:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_d - x_0 \\ y_d - y_0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{L(R + o(R^2))} \begin{pmatrix} x_c - x_0 \\ y_c - y_0 \end{pmatrix} = \left(L(0) + \frac{R_d}{R_{\max}} + o(R_d^2) \right) \begin{pmatrix} x_c - x_0 \\ y_c - y_0 \end{pmatrix} \\ R_d &= \sqrt{(x_d - x_0)^2 + (y_d - y_0)^2} = R + o(R^2) \\ R_{\max} &= \frac{1}{2} \sqrt{N^2 + M^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Finalmente y sin pérdida de generalidad se puede asumir que $L(0)=1$ (en caso contrario dividiendo por $L(0)$ se obtendría una transformación de escala que será tratada en el siguiente apartado). Por su parte R_{\max} es la mitad de la diagonal del rectángulo imagen (la distancia al centro del punto más alejado) que se calcula a partir del tamaño de la imagen en píxeles. De este modo la corrección de perspectiva de primer orden resulta ser:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_d - x_0 \\ y_d - y_0 \end{pmatrix} &= \left(1 + k_1 \frac{R_d}{R_{\max}} \right) \begin{pmatrix} x_c - x_0 \\ y_c - y_0 \end{pmatrix} \\ R_d &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_d - x_0)^2 + (y_d - y_0)^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

La razón por la cual no se aplica una corrección de distorsión de orden superior es que, como se verá posteriormente, con esta corrección se alcanza un nivel de precisión suficiente y sólo requiere sintonizar un único parámetro k_1 . Además la división por R_{\max} se emplea para normalizar el valor de k_1 quedando como una constante adimensional.

Para la obtención del parámetro de corrección de distorsión k_1 es necesario un proceso de calibración empleando una imagen estructurada. En este caso se emplean las líneas rectas paralelas del embaldosado del suelo del laboratorio como patrón de calibración.

Si no hubiese distorsión dichas líneas deberían ser líneas rectas y paralelas en la imagen. No obstante como se muestra en la Figura 3.9 existe una separación considerable entre cada punto x_i y la recta que pasa por los puntos extremos de la línea (línea roja).

De esta forma sea $\mathbf{p}_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}]^T$ el vector de posición del punto i -ésimo de la recta de calibración j -ésima. \mathbf{p}_{0j} y \mathbf{p}_{Fj} son entonces las posiciones de los puntos extremos de la recta de calibración j -ésima.

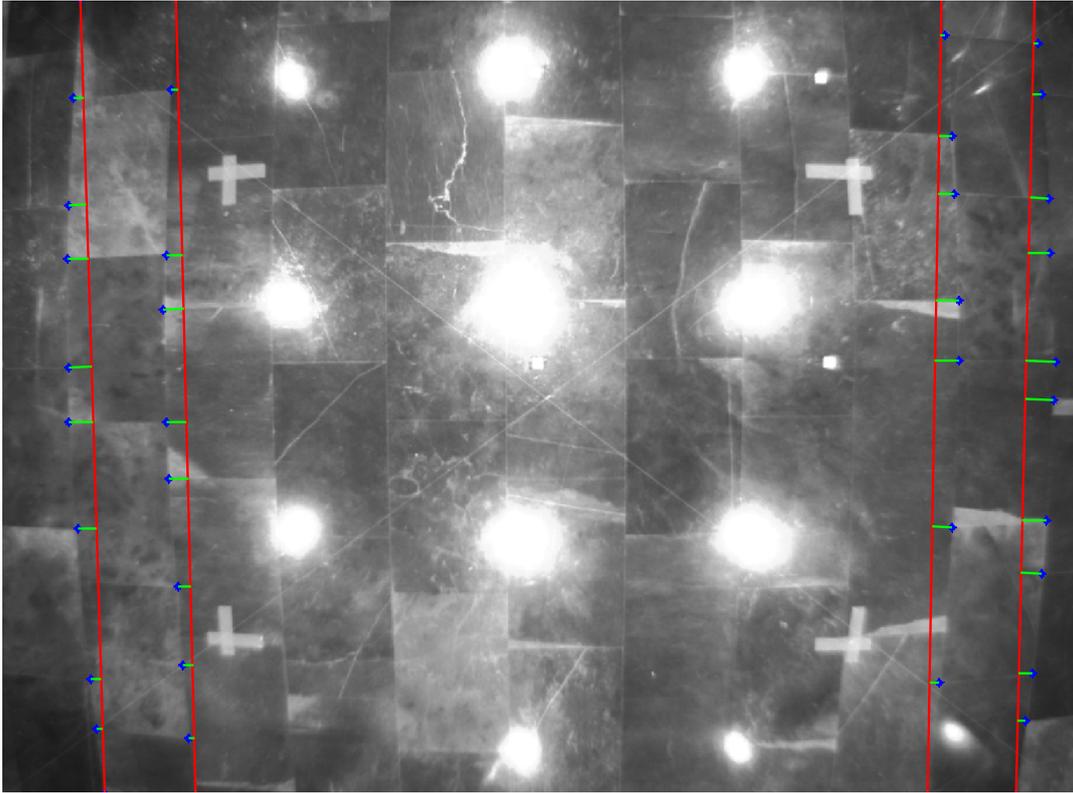


Figura 3.9. Medida del grado de distorsión. La distorsión puede medirse como la separación de los puntos de la imagen (azul) con respecto a las líneas rectas que unen los dos puntos extremos (rojo). Si no hubiese distorsión los puntos deberían estar alineados.

El vector \mathbf{n}_j normal a dicha recta puede definirse como:

$$\mathbf{n}_j = \frac{1}{\|\mathbf{p}_{Fj} - \mathbf{p}_{0j}\|} \begin{pmatrix} -y_{Fj} + y_{0j} \\ x_{Fj} - x_{0j} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Esto permite definir la siguiente medida de distorsión:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \mathbf{n}_j^T \cdot (\mathbf{p}_{ij} - \mathbf{p}_{0j}) \\ D &= \max_{\substack{i=0..F \\ j=0..3}} (|d_{ij}|) \end{aligned} \quad (3.6)$$

La interpretación de esta medida es bastante simple: d_{ij} es el producto escalar del vector que va del punto \mathbf{p}_{0j} hasta el punto \mathbf{p}_{ij} con la dirección normal a la recta que pasa por \mathbf{x}_{0j} y \mathbf{x}_{Fj} . Con lo que d_{ij} es la distancia orientada del punto a la recta de calibración, tal como se observa en la Figura 3.10.

Las distancias d_{ij} así definidas se corresponden a los segmentos verdes de la Figura 3.9. De este modo D es la máxima desalineación de un punto respecto a la recta en la que debería encontrarse.

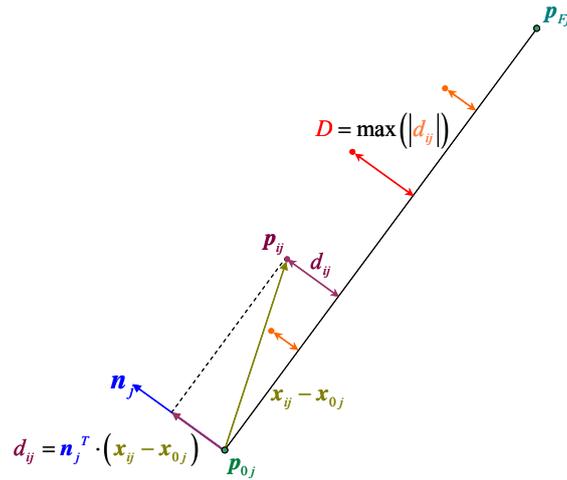


Figura 3.10. Medida del grado de desalineación D .

El criterio que se utiliza para la calibración de la cámara consiste en tomar las cuatro rectas mostradas en la Figura 3.9 y calcular el valor de k_l que minimice la desalineación D tras aplicar la corrección de perspectiva, esto es:

$$k_1 = \arg \min \left(D \left(p_{cij} \left(p_{dij}, k_1 \right) \right) \right) \quad (3.7)$$

Aplicando este criterio al sistema cámara-óptica descrito anteriormente se obtiene el valor $k_j=0.2015$. El resultado de la corrección de distorsión empleando dicho modelo se muestra en la Figura 3.11. Como puede apreciarse en la figura la desalineación es prácticamente nula y la poca desalineación que existe se debe al error de detección de los puntos de calibración. De este modo el orden de la corrección que se está empleando es suficiente para el grado de precisión necesario en el sistema experimental.

Aunque las rectas en el espacio objeto (el suelo) se corresponden con rectas en el espacio imagen, el paralelismo entre ellas no se mantiene, ya que en la imagen las líneas convergen hacia un cierto punto situado en el horizonte (que quedaría muy por debajo de la Figura 3.11). Este efecto se debe a la transformación de perspectiva que se analizará en el siguiente apartado.

La corrección de distorsión es llevada a cabo por el módulo *Distorsión.vi* mostrado en la Tabla 3.2. Dicho módulo admite como entrada el vector de puntos afectados por la distorsión y los parámetros de configuración (que utiliza para calcular R_{max}).

Mediante la expresión (3.4) y utilizando el valor de k_l calibrado anteriormente corrige la posición de los puntos detectados por la cámara y devuelve los puntos corregidos x_c e y_c .

El sistema devuelve además un manejador de códigos de error en el que se registra un error en caso de que el número de puntos de entrada válidos (no nulos) no sea el correcto.

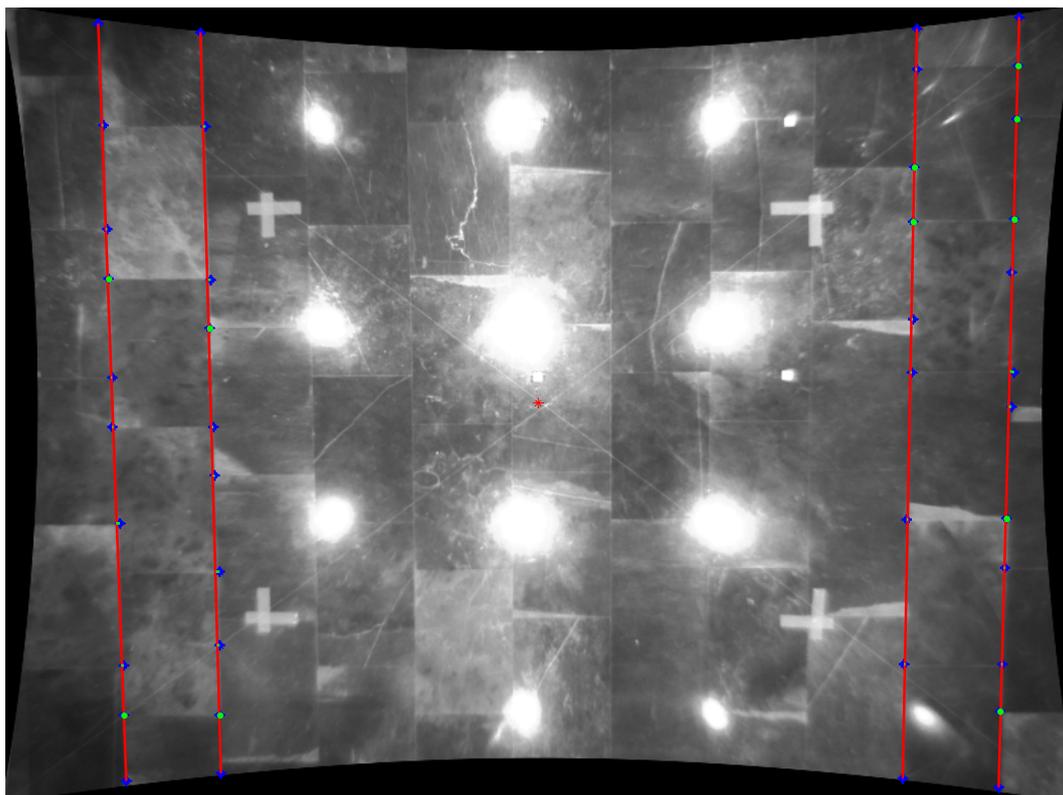


Figura 3.11. Imagen corregida de la distorsión en barril.

3.3.2.B. Perspectiva

Una vez corregida la distorsión es necesario transformar las posiciones de los puntos de la imagen expresados en píxeles a posiciones del plano del suelo expresado en metros.

Para ello hay que tener en cuenta tres factores. En primer lugar hay que considerar la transformación de perspectiva que resulta de proyectar el punto objeto en el plano focal de la cámara. En segundo lugar hay que considerar la transformación de escala de píxeles a metros. Finalmente hay que tener en cuenta la rotación y traslación entre las coordenadas en el sistema de referencia de la cámara y el sistema de referencia paralelo al suelo tal y como se muestra en la Figura 3.12.

Puesto que la imagen se encuentra corregida de distorsión, la transformación entre los puntos del espacio objeto (coordenadas del mundo real) y los puntos del espacio imagen (coordenadas de la cámara) puede modelarse mediante el uso de óptica paraxial.

En la Figura 3.13 se analiza la transformación de perspectiva vista desde el sistema de coordenadas ligado a la cámara. Para ello se utiliza un modelo proyectivo de cámara estenopéica (*pinhole camera*). Es importante destacar que ese modelo es similar al de lente delgada en aproximación paraxial y por tanto representa correctamente a un sistema óptico sin distorsión.

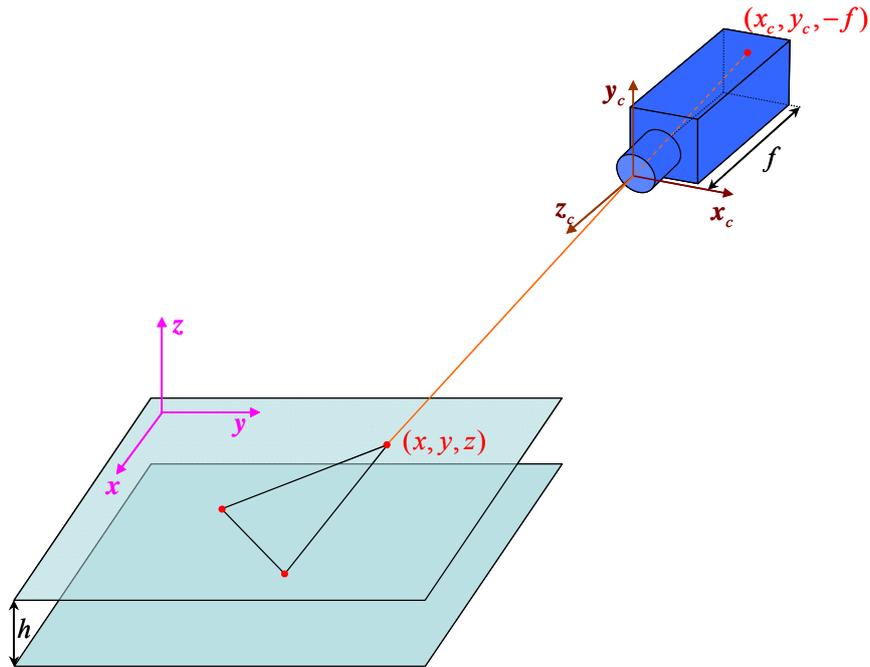


Figura 3.12. Transformación general de perspectiva.

En el sistema de referencia de la cámara el punto (x, y, z) tendrá las coordenadas $x_1, y_1, y z_1$ tal como se muestra en la Figura 3.13. Entonces aplicando semejanza de triángulos se sabe que la posición de la imagen de dicho punto en el plano focal de la cámara viene dada por:

$$\frac{x_c}{f} = \frac{x_1}{z_1} \quad (3.8)$$

$$\frac{y_c}{f} = \frac{y_1}{z_1}$$

Estas relaciones pueden escribirse cómodamente utilizando coordenadas homogéneas $x_h = x_c z_h$ e $y_h = y_c z_h$ del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Puesto que tanto las transformaciones de escala como las rotaciones y traslaciones también pueden describirse como una transformación lineal en coordenadas homogéneas, entonces es posible componer dichas transformaciones obteniendo la transformación general de perspectiva. Para una explicación en detalle puede consultarse (Hartley & Zisserman, 2003).

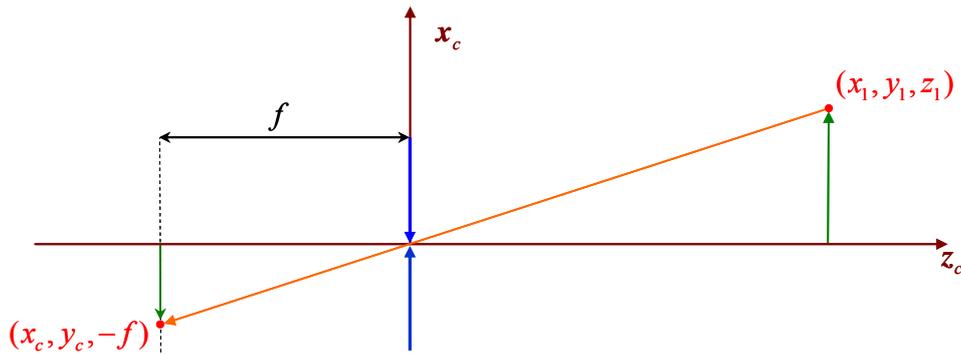


Figura 3.13. Transformación *pinhole* vista desde el sistema de referencia de la cámara. El eje y_c de la imagen se encuentra orientado hacia el espectador y por tanto no se muestra.

De este modo la relación entre las coordenadas homogéneas de la cámara y las coordenadas homogéneas de la posición espacial vienen dadas por una matriz de perspectiva general que adopta la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

El problema del sistema (3.10) es que la transformación de coordenadas no es invertible. Esto es lógico ya que se trata de una transformación de un espacio tridimensional a otro bidimensional.

Para poder obtener las coordenadas de los puntos en el sistema tridimensional es necesario establecer alguna ligadura adicional entre los puntos en el espacio objeto. En el caso que nos ocupa las balizas luminosas se encuentran todas a la misma altura h respecto del suelo, esta es la condición adicional necesaria para calcular las posiciones.

Entonces sin pérdida de generalidad es posible establecer un sistema de coordenadas de tal manera que el origen de coordenadas se encuentre en el plano en el que se encuentran los tres puntos luminosos mientras que los ejes x e y sean paralelos al suelo tal y como se muestra en la Figura 3.12.

Esto significa que en este sistema de coordenadas la tercera componente de la posición siempre será cero y por tanto la ecuación (3.10) puede reducirse a:

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Calculando las coordenadas x_c e y_c se tiene:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{x_h}{z} = \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{14}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{34}} \\y_c &= \frac{y_h}{z} = \frac{c_{21}x + c_{22}y + c_{24}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{34}}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Si la configuración de la cámara no es singular, (esto es, si la transformación de coordenadas es invertible) entonces c_{34} será distinto de cero y por tanto dividiendo numerador y denominador por c_{34} puede escribirse:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{x_h}{z} = \frac{c_1x + c_2y + c_3}{c_7x + c_8y + 1} \\y_c &= \frac{y_h}{z} = \frac{c_4x + c_5y + c_6}{c_7x + c_8y + 1}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Por lo que la transformación general de perspectiva puede parametrizarse por medio de ocho parámetros $c_1..c_8$.

De forma análoga si la transformación no es singular se verifica que $c_4c_2 - c_1c_5 \neq 0$ (en caso contrario x_c e y_c no serían independientes y no podría invertirse la perspectiva) de tal modo que la transformación inversa de perspectiva está bien definida y tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{x_h}{z} = \frac{c'_1x_c + c'_2y_c + c'_3}{c'_7x_c + c'_8y_c + 1} \\y_c &= \frac{y_h}{z} = \frac{c'_4x_c + c'_5y_c + c'_6}{c'_7x_c + c'_8y_c + 1}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Donde los parámetros de la transformación inversa pueden calcularse a partir de la transformación directa utilizando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}c'_1 &= (c_6c_8 - c_5) / (c_4c_2 - c_1c_5) \\c'_2 &= (c_2 - c_3c_8) / (c_4c_2 - c_1c_5) \\c'_3 &= (c_3c_5 - c_2c_6) / (c_4c_2 - c_1c_5) \\c'_4 &= (c_4 - c_7c_6) / (c_4c_2 - c_1c_5) \\c'_5 &= (c_3c_7 - c_1) / (c_4c_2 - c_1c_5) \\c'_6 &= (c_1c_6 - c_3c_4) / (c_4c_2 - c_1c_5) \\c'_7 &= (c_7c_5 - c_8c_4) / (c_4c_2 - c_1c_5) \\c'_8 &= (c_1c_8 - c_2c_7) / (c_4c_2 - c_1c_5)\end{aligned}\quad (3.15)$$

Todos estos cálculos son llevados a cabo en el bloque *Perspectiva.vi* de la Tabla 3.2. Dicho bloque admite las posiciones en coordenadas de la cámara x_c e y_c y devuelve las posiciones en coordenadas del suelo x e y utilizando para ello los parámetros $c_1..c_8$ y las relaciones (3.14) y (3.15). Además se encarga de propagar la estructura de control de errores a los bloques siguientes.

Los parámetros $c_1..c_8$ se cargan desde un fichero de texto en el inicio del programa. Dicho fichero ha sido creado mediante el procedimiento de calibración que se describe en la siguiente sección.

3.3.2.C. Procedimiento de calibración

El procedimiento utilizado para corregir la distorsión sólo tiene que realizarse una única vez, ya que el parámetro k_f sólo depende del sistema cámara-óptica que permanece fijo. Por este motivo no es necesario automatizar dicho proceso.

De hecho, la selección de los puntos para calibrar la distorsión se realiza sobre una imagen tomada a partir del software genérico de la cámara. Además, las rutinas necesarias para obtener el parámetro óptico k_f involucran el marcado manual de puntos de referencia y los cálculos se realizan utilizando funciones escritas en lenguaje *M* de Matlab.

No obstante, los parámetros de perspectiva de la cámara sí que pueden variar substancialmente entre dos experimentos. Esto es debido a que dichos parámetros dependen de la colocación de la cámara respecto del suelo.

Debido a la holgura presente en el soporte de la cámara y a otros efectos tales como peso del cable así como otras perturbaciones que se producen durante la limpieza del sistema óptico o el ajuste de la apertura del obturador, es imposible obtener exactamente la misma alineación de cámara en dos montajes sucesivos del sistema. Esto obliga a recalibrar $c_1..c_8$ con relativa frecuencia.

Por este motivo se ha diseñado una rutina de calibración en LabVIEW que permite obtener los parámetros $c_1..c_8$ de forma simple y rápida.

Para calcular los parámetros de calibración dicha rutina utiliza un sistema de cuatro puntos. Para ello se coloca manualmente la baliza en los puntos $\mathbf{p}_1=[0,0]^T$, $\mathbf{p}_2=[0,1]^T$, $\mathbf{p}_3=[1,0]^T$ y $\mathbf{p}_4=[1,1]^T$ y se determinan sus posiciones en el espacio imagen \mathbf{p}_{c1} , \mathbf{p}_{c2} , \mathbf{p}_{c3} y \mathbf{p}_{c4} .

De este modo si se substituyen las coordenadas de cada uno de los puntos anteriores en las ecuaciones (3.13), operando se obtiene el siguiente sistema lineal de ocho ecuaciones con ocho incógnitas

$$\begin{aligned}
 c_3 &= x_{c1} \\
 c_6 &= y_{c1} \\
 c_1 + c_3 - x_{c2}c_7 &= x_{c2} \\
 c_4 + c_6 - y_{c2}c_7 &= y_{c2} \\
 c_2 + c_3 - x_{c3}c_8 &= x_{c3} \\
 c_5 + c_6 - y_{c3}c_8 &= y_{c3} \\
 c_1 + c_2 + c_3 - x_{c4}c_7 - x_{c4}c_8 &= x_{c4} \\
 c_4 + c_5 + c_6 - y_{c4}c_7 - y_{c4}c_8 &= y_{c4}
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

La solución del sistema de ecuaciones (3.16) permite calcular de forma directa los valores de los parámetros $c_1..c_8$.

El procedimiento de calibración de perspectiva es llevado a cabo mediante el programa *Calibración.vi* en LabVIEW. El código de dicho programa se muestra en la Figura 3.14 y su funcionamiento es el siguiente:

En primer lugar se inicializa el hardware haciendo uso del bloque *Inicio.vi*, a continuación se entra en un bucle *for* que captura los cuatro puntos necesarios para la calibración.

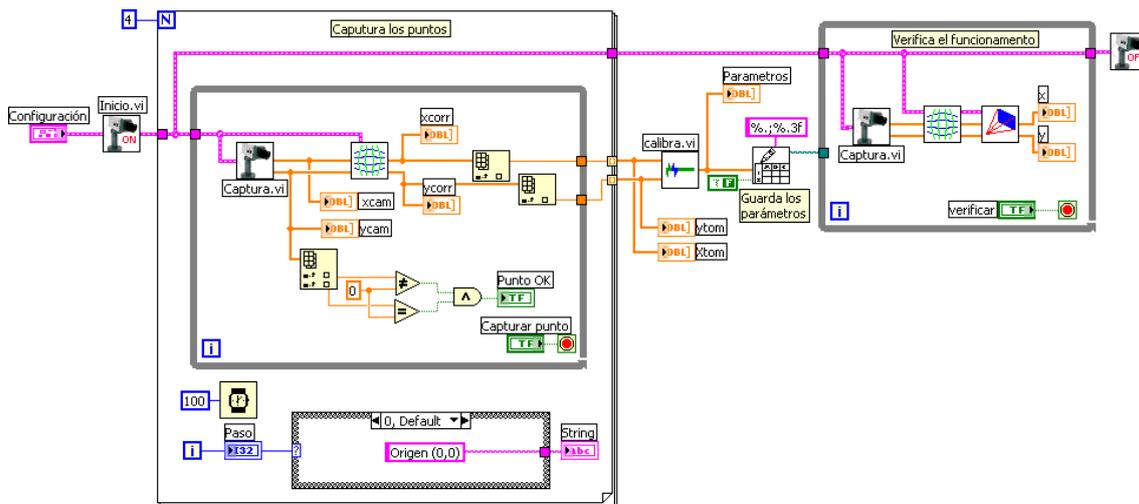


Figura 3.14. Rutina de calibración en LabVIEW.

En cada iteración del bucle se muestran instrucciones en la interfaz gráfica indicando las coordenadas del punto donde debe de colocarse la baliza de calibración. Al mismo tiempo se entra en un bucle *while* que captura imágenes y corrige la distorsión de forma continua, comprobando en cada caso que la detección del punto sea correcta (en particular se comprueba que se ha detectado uno y solamente un punto).

El proceso continua hasta que el usuario presiona el botón *capturar punto*. El punto capturado se almacena en un array indexado hasta que se han detectado los cuatro puntos de calibración.

Hecho esto, se invoca la subrutina *calibra.vi* que se encarga de calcular los parámetros resolviendo el sistema (3.16). El resultado se muestra en la interfaz gráfica y se guarda en un fichero de texto.

Finalmente se entra en un bucle *while* que verifica el correcto funcionamiento de la calibración.

Este bucle toma imágenes de la cámara, aplica la corrección de distorsión y la transformación de perspectiva, obtiene las coordenadas (x,y) de dicho punto y las muestra por pantalla. Esto permite al operario humano comprobar la calibración realizada colocando la baliza en posiciones conocidas.

Terminado este proceso el operario oprime el botón verificar para finalizar el procedimiento.

3.3.2.D. Cálculo de la posición del vehículo

La posición y orientación del aerodeslizador se determina mediante un análisis morfológico de las posiciones de las balizas detectadas mediante el algoritmo de visión.

Como se comenta en el apartado 3.2.1.A, la posición de las balizas luminosas forma un triángulo isósceles similar al de la Figura 3.15 cuyos lados son conocidos. Dados tres puntos imagen p_1 , p_2 y p_3 El procedimiento de cálculo de la posición y orientación consta de los siguientes pasos:

I. Localizar el punto p_c .

Calcular el punto auxiliar x_{int}

Determinar la posición del centro de masas x_{cm} y la orientación θ .

Para determinar cual de los puntos es p_c se calculan las tres distancias entre los puntos que definen los lados del triángulo L_{12} , L_{13} y L_{23} donde la distancia $L_{ij} = \|p_i - p_j\|$. A continuación se busca el mínimo de las tres distancias, L_{ij} , que corresponde al lado opuesto a p_c , de este modo el punto $p_c = p_k$ con $k \neq i, j$.

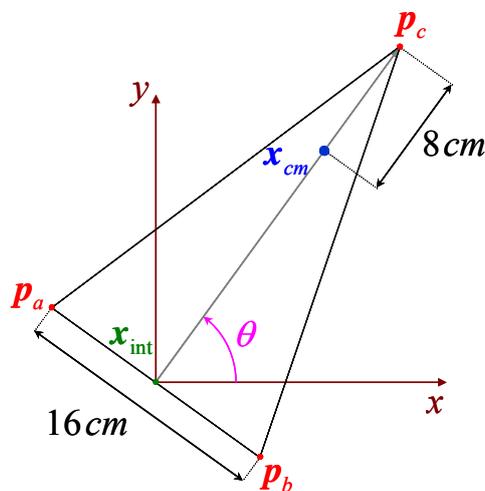


Figura 3.15. Cálculo de la posición y orientación.

A continuación se comprueba que las distancias obtenidas se ajustan dentro de un grado de tolerancia a un triángulo isósceles cuyos lados son conocidos (el grado de tolerancia es ajustable y normalmente se usa un 20%). Si el resultado es correcto la detección es válida y se continua con el proceso. En caso contrario la detección es incorrecta. Entonces se activa el indicador de error *punto_falso* y se devuelve la última posición capturada correctamente.

Con los dos puntos restantes \mathbf{p}_i y \mathbf{p}_j que se corresponden con los puntos \mathbf{p}_a y \mathbf{p}_b se calcula la posición del punto auxiliar $\mathbf{x}_{int}=(\mathbf{p}_i+\mathbf{p}_j)/2$ que se encuentra en el centro del lado opuesto a \mathbf{p}_c .

Dado que el centro de masas se encuentra en el eje de simetría del triángulo (ver Figura 3.15) es posible calcular su posición mediante una media ponderada de los puntos \mathbf{p}_c y \mathbf{x}_{int} . Por otra parte, la orientación θ puede calcularse fácilmente a partir del vector que une \mathbf{x}_{int} con \mathbf{p}_c como sigue:

$$\begin{aligned}x_{cm} &= (1-\alpha)x_c + \alpha x_{int} \\y_{cm} &= (1-\alpha)y_c + \alpha y_{int} \\ \theta &= \text{atan2}(x_c - x_{int}, y_c - y_{int})\end{aligned}\quad (3.17)$$

De acuerdo con los datos del triángulo y sabiendo que la distancia del centro de masas al punto \mathbf{p}_c es de 8cm es fácil calcular el parámetro α , ya que $\alpha h=8$, de donde:

$$\alpha = \frac{8}{h} = \frac{8}{\sqrt{(16/2)^2 + 25^2}} = \frac{8}{\sqrt{689}} \approx 0.3048 \quad (3.18)$$

Todos estos cálculos son llevados a cabo por el bloque *Posición.vi* que devuelve un vector de posición cuyo contenido es $[x_c, y_c, \theta]^T$. Además el bloque se encarga de detectar los errores de detección de puntos y devuelve como salida un objeto gráfico *figura* que permite dibujar la posición del aerodeslizador por pantalla.

3.3.2.E. Cálculo de las velocidades

Una vez calculada la posición del vehículo es necesario estimar las velocidades del mismo, para ello se utiliza el bloque *Velocidad.vi* que se muestra en la Tabla 3.2. Este bloque admite como entradas la posición del punto y el tiempo t en el cual fue tomada la imagen. El bloque devuelve como salidas la estimación de la velocidad por diferencias finitas así como el periodo de muestreo real T .

En cuanto a la implementación de este bloque hay que destacar dos aspectos importantes, en primer lugar la gestión de errores, en segundo lugar la regularización de la orientación.

El bloque que calcula la velocidad admite como entradas los indicadores de error generados en los bloques anteriores, si se ha producido cualquier error en la captura de

la imagen o el procesamiento posterior entonces la posición recibida se descarta y el bloque mantiene como salida la velocidad calculada en el instante anterior.

En caso contrario, si la imagen se ha tomado correctamente y la posición es válida, las velocidades se calculan mediante

$$\begin{aligned}
 T &= t - t_{ant} \\
 v_x &= \frac{x - x_{ant}}{T} \\
 v_y &= \frac{y - y_{ant}}{T} \\
 \omega &= \frac{\text{atan2}(\sin(\theta - \theta_{ant}), \cos(\theta - \theta_{ant}))}{T}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Donde t_{ant} es el instante de captura de la última imagen válida, x_{ant} , y_{ant} y θ_{ant} las posiciones estimadas en el último cálculo correcto de la posición:

El cálculo de las velocidades lineales se lleva a cabo mediante una diferencia finita, sin embargo el cálculo de la velocidad angular requiere una pequeña explicación.

La orientación θ se encuentra definida salvo por un número de vueltas indeterminado, de este modo cuando el aerodeslizador da una vuelta completa se produce necesariamente una discontinuidad de $\pm 2\pi$ radianes.

Si se emplease directamente la diferencia $\theta - \theta_{ant}$ se produciría un error en el cálculo de la velocidad angular w . Para evitarlo en la ecuación (3.19) la diferencia se regulariza al intervalo $[-\pi, \pi]$ por medio de la función $\text{atan2}(\sin(x), \cos(x))$ de este modo se eliminan los saltos de módulo 2π .

3.3.2.F. Sistemas de coordenadas

En el desarrollo del sistema de visión se ha utilizado el sistema de ejes coordenados según el criterio de ejes estándar en tres dimensiones (x crece hacia la derecha, y hacia el frente y z hacia arriba) de tal forma que el estado medido del aerodeslizador es $[x, y, \theta, v_x, v_y, w]^T$.

Sin embargo, en las aplicaciones de control se emplea habitualmente el sistema de coordenadas NED (*North-East-Down*) en el cual x crece hacia el Norte, y hacia el Este y z hacia abajo. Por lo que el estado suele tener la forma $[x_{ned}, y_{NED}, \psi, v_{xNED}, v_{yNED}, r]^T$.

En el sistema de laboratorio resulta irrelevante cual sea la dirección real del Norte, lo verdaderamente importante es mantener la consistencia entre los sistemas de coordenadas. De este modo, si se asume que el eje x apunta en la dirección Norte, entonces la relación entre coordenadas estándar $X-Y$ y las coordenadas NED viene dado por la ecuación siguiente tal como se puede apreciar en la Figura 3.16.

$$\begin{aligned}
 x_{NED} &= y \\
 y_{NED} &= x \\
 \psi &= \pi - \theta \\
 v_{xNED} &= v_y \\
 v_{yNED} &= v_x \\
 r &= -\omega
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

De este modo es posible usar las ecuaciones (3.20) para realizar el cambio de coordenadas $XY \rightarrow NED$.

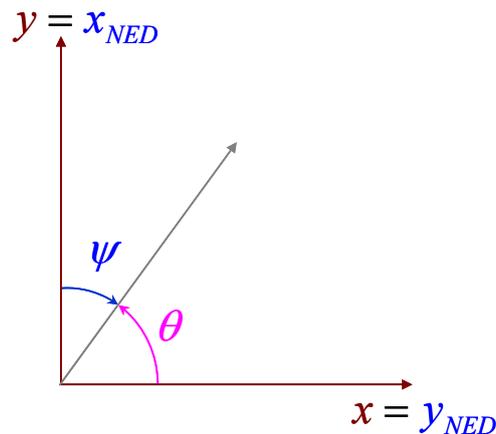


Figura 3.16. Sistemas de coordenadas.

Para ello se ha creado un bloque *xy2NED.vi* que implementa la transformación de coordenadas anterior y devolviendo el estado del sistema en el sistema de coordenadas NED que resulta conveniente para la implementación de las leyes de control.

Nótese que no se ha implementado un bloque para realizar la conversión contraria, esto se debe a que la transformación (3.20) es igual a su inversa. Por tanto el módulo *xy2NED.vi* puede utilizarse en la conversión en ambos sentidos.

3.3.3. Implementación del control

Con el fin de implementar el control se desarrolla una interfaz de control específica para cada ley de control del aerodeslizador. Las tres implementaciones concretas de dicha interfaz del control que se utilizan en la tesis se muestran en la Tabla 3.3.

El bloque de *control_trackingS_M.vi* implementa la ley de control de seguimiento de trayectoria con entradas discretas que se diseña en el Capítulo 6. Admite como entrada el estado del sistema, el tiempo y una estructura que define el problema (en particular el radio y velocidad del círculo a seguir). Las salidas son el vector de salidas de control discretas $U_{dis}=[u_1, u_2]^T$ así como la señal de freno del vehículo.

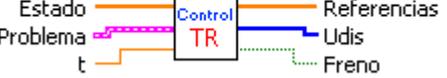
<p style="text-align: center;">PS_controller.vi</p> 	<p>Implementa el control de Posicionamiento Dinámico.</p>
<p style="text-align: center;">Control_tracking_SM.vi</p> 	<p>Implementa el control de seguimiento de trayectoria.</p>
<p style="text-align: center;">Control_manual.vi</p> 	<p>Permite controlar el aerodeslizador manualmente.</p>

Tabla 3.3. Implementaciones del control.

Por su parte el bloque *PS_controller.vi* implementa la ley de control de Posicionamiento Dinámico con entradas discretas del Capítulo 4. El bloque admite como entrada el estado del sistema y produce como salida la señal del control y la señal de freno. Este bloque no produce referencias a la salida puesto que la referencia para el posicionamiento es siempre el origen de coordenadas.

Finalmente el bloque *control_manual.vi* permite que el usuario controle el aerodeslizador enviando comandos por teclado.

3.3.4. Interfaz de salida

El envío de comandos al aerodeslizador se lleva a cabo través del puerto paralelo del PC. La interfaz de salida que se encarga de gestionar la comunicación con el mando de radiocontrol se implementa mediante el siguiente bloque en LabVIEW:

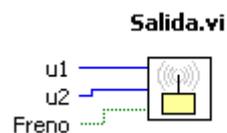


Figura 3.17. Interfaz de salida en LabVIEW

El bloque anterior admite dos parámetros de entrada enteros u_1 y u_2 que pueden tomar los valores 1, 0 y -1. Estas señales codifican los comandos de control todo-nada-inversión que se enviarán a los motores de babor y estribor respectivamente.

Además el bloque posee una entrada adicional *freno* de tipo binario, esta entrada cuando está activa detiene el aerodeslizador apagando el ventilador centrífugo que hincha el colchón de aire y mantiene la sustentación. De este modo se consigue que el vehículo se detenga rápidamente. Esta entrada se activa como medida de seguridad cada vez que se detiene la ejecución del programa principal

3.3.5. Registro de datos

Para mantener un registro estructurado de los datos, el estado del aerodeslizador así como las referencias a seguir, el tiempo, los comandos de control y las señales de error se almacenan de forma automática después de cada experimento.

Los datos se almacenan en un fichero de texto formateado por columnas utilizando puntos para indicar la coma flotante y tabulaciones como separación entre campos. El formato para almacenar los datos está diseñado de tal modo que puedan ser directamente accedidos desde Matlab mediante el comando *load* lo que permite un fácil análisis posterior.

En la cabecera del fichero se incluye información acerca de su contenido con el formato de comentarios de Matlab, de tal forma que no afecte al proceso de lectura de los datos. Además se ha desarrollado la rutina *carga.m* para mostrar y cargar en el espacio de trabajo los resultados del experimento.



Figura 3.18. Bloque de almacenamiento de datos.

En la Figura 3.18 se muestra la interfaz en LabVIEW de la función de almacenamiento de datos, dicha función admite como entradas el nombre que se desea dar al fichero de salida así como la matriz con el registro de datos a guardar y la cabecera del fichero. Dicha función devuelve como salida la ruta del fichero creado. El nombre del fichero se obtiene concatenando la cadena de entrada *nombre* con la hora actual. Por otra parte la ruta donde se guarda el archivo es un directorio creado a partir de la fecha dentro del directorio datos. Por tanto el fichero de salida tiene la forma: *.\datos\DD-MM-AA\nombreHH-MM-SS.txt*, donde “.” es la ruta raíz donde se encuentra el programa.

3.3.6. Otras características implementadas

Además de los bloques funcionales que se han explicado anteriormente se han desarrollado bloques para tareas tales como la presentación gráfica de los datos así como bloques de simulación del aerodeslizador. Los principales bloques se muestran en la Tabla 3.4.

Los experimentos con el sistema físico real son inherentemente rápidos (por la corta duración de las baterías) y se encuentran sometidos a muchas limitaciones prácticas. Por este motivo se ha desarrollado el bloque *Modelo.vi*.

La utilidad fundamental de este bloque es simular el aerodeslizador real dentro del entorno de ejecución del controlador. De ese modo es posible depurar la implementación del algoritmo en LabVIEW mediante el modelo de simulación antes de comenzar con las pruebas reales.

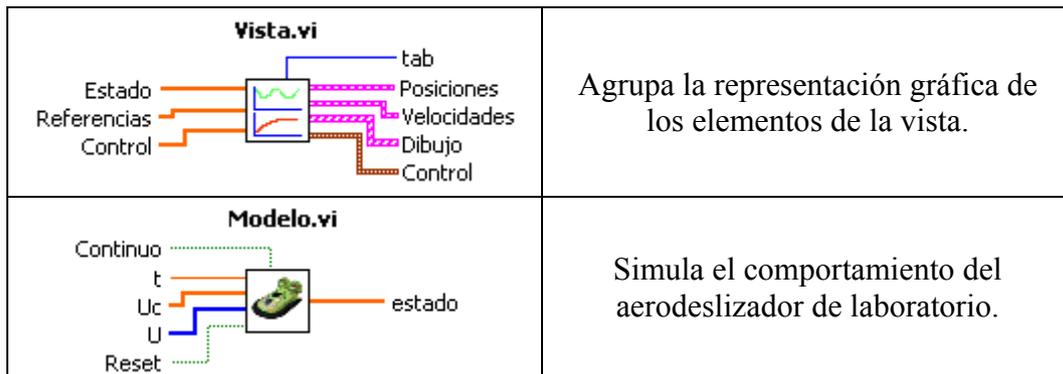


Tabla 3.4. Otros bloques implementados.

El bloque *Vista.vi* por su parte se encarga de generar los gráficos de presentación que se utilizarán en la GUI. De este modo los elementos de presentación pueden agruparse de forma simple y compacta en un único módulo de presentación.

El código de todas estas implementaciones se encuentra en el CD adjunto. Además dentro del CD pueden también encontrarse algunas implementaciones alternativas que no se describen en detalle en esta Tesis.

Algunas de las características adicionales desarrolladas son por ejemplo las implementaciones distribuidas en las cuales los distintos elementos que integran el sistema (visión control y actuación) pueden encontrarse en computadores distintos comunicándose entre ellas por medio de *streams* TCP.

3.3.7. Visión general del conjunto

En este apartado se ilustra el funcionamiento de los elementos descritos anteriormente mediante el análisis de una implementación de control concreta.

El modelo que se analiza en este apartado se corresponde al control discreto de seguimiento de trayectoria del Capítulo 6. El código que implementa la ley de control se muestra en la Figura 3.19. El funcionamiento completo del programa de control es el siguiente.

En primer lugar se inicializa la cámara y obtiene el instante de inicio. A continuación, se entra en el bucle de control y se permanece en él hasta que el usuario active el botón de parada (*stop 2*).

Dentro del bucle de control primero se realiza la secuencia de visión. En esta secuencia se invoca en primer lugar la rutina de captura de bajo nivel que obtiene los puntos luminosos de la imagen, a continuación se registra el tiempo de obtención de la imagen referido al inicio del programa.

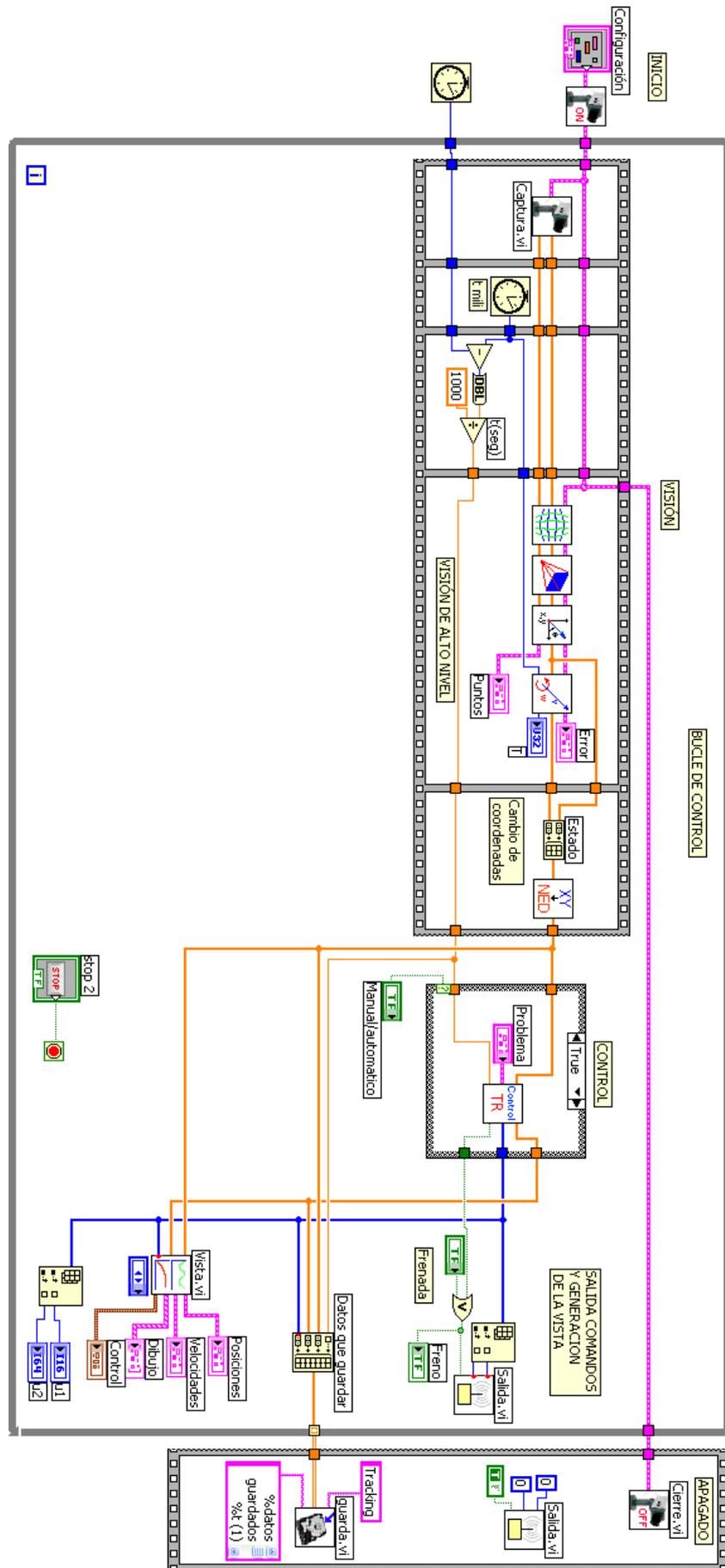


Figura 3.19. Control de seguimiento de trayectoria discreto.

Una vez obtenidas las coordenadas de los puntos luminosos se aplican las rutinas de visión de alto nivel que corrigen la distorsión, se aplica la transformación de perspectiva y se calculan la posición y las velocidades. El estado se forma concatenando las posiciones y las velocidades, finalmente se transforma al sistema de coordenadas NED.

El siguiente paso consiste en el cálculo de la ley de control, para ello existe una estructura *case* que permite elegir entre el control manual y el control automático (que es el que se muestra en la Figura 3.19). Una vez obtenida la señal de control se envía dicha señal al radiocontrol, se guardan todos los datos en una matriz indexada y se muestran los datos en las vistas de la GUI.

Finalmente cuando el usuario activa el botón *stop 2* el bucle de control finaliza y se entra en la secuencia de apagado. En dicha secuencia se procede a detener el aerodeslizador (parando todos los motores), se guardan todos los datos en disco y se cierran los manejadores de la cámara. Hecho esto el programa finaliza.

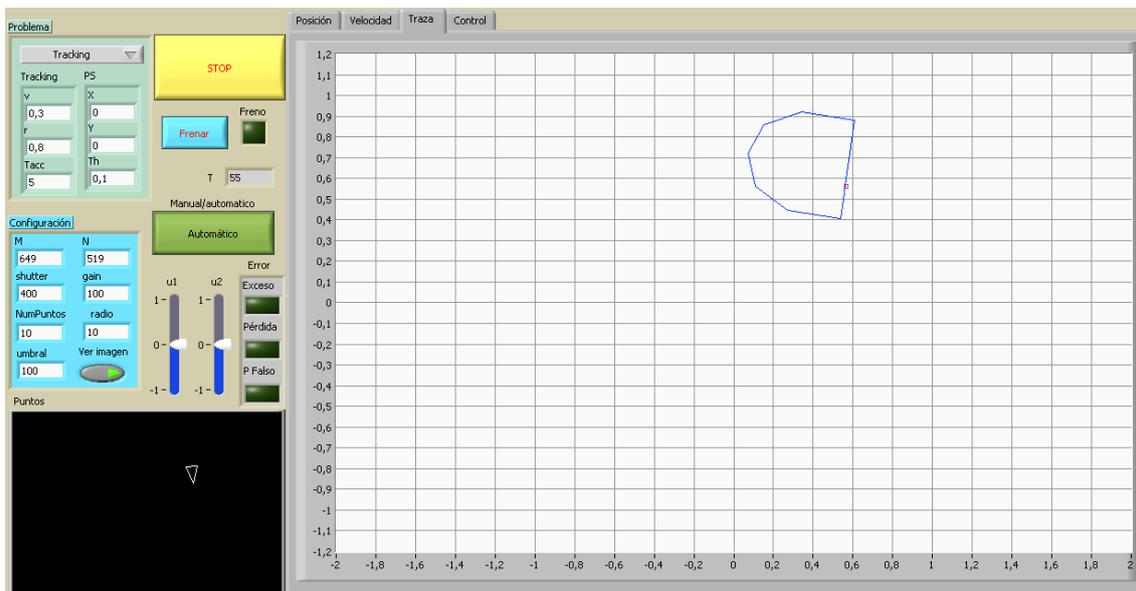


Figura 3.20. Interfaz gráfica del control.

En la Figura 3.20 se muestra la interfaz gráfica del sistema, en la parte izquierda de la misma se encuentran todos los controles que permiten definir el problema y los parámetros de configuración del sistema de visión así como conmutar entre los modos automático y manual. También se encuentran los indicadores que muestran la señal de control que se aplica a los motores, el periodo de muestreo de la cámara y los indicadores de error.

En el panel con pestañas de la derecha se organizan todas las variables de estado y las referencias. En la pestaña posición hay tres gráficos que muestran x , y , y θ frente a sus respectivas referencias. En la pestaña velocidad se hace lo mismo con v_x , v_y , w y sus correspondientes consignas.

En la pestaña traza (que se encuentra seleccionada en la Figura 3.20) se muestra un dibujo esquemático del vehículo así como la posición de la referencia (punto rojo). Por último en la pestaña control se muestran la evolución temporal de las variables de control u_1 y u_2 .

3.4. Modelo y validación experimental

Puesto que el sistema experimental es un modelo de tamaño reducido alimentado por baterías los valores de las constantes del modelo dependen fuertemente de las condiciones del experimento. Además la poca masa del sistema hace que este sea muy sensible ante los cambios en la distribución del peso.

De hecho el nivel de carga de las baterías resulta crítico en la dinámica del sistema ya que no solo modifica el valor de las fuerzas de los motores sino también la sustentación del vehículo (y por tanto los valores del rozamiento).

De este modo no es posible hablar de los *parámetros del sistema* como un concepto estático ya que estos cambian según las condiciones del experimento, dependiendo de factores tan diversos como el nivel de carga de las baterías, la temperatura (que afecta al rendimiento de las mismas), el grado de suciedad del suelo, etc...

Por lo que el objetivo de este apartado es obtener un modelo del aerodeslizador en unas condiciones de funcionamiento concretas así como comprobar mediante una validación de los mismos que la estructura del modelo descrita en el Capítulo 2 es correcta.

De acuerdo con el modelo expuesto en el apartado 2.1.2 la dinámica del aerodeslizador viene dada por el sistema (2.7) que se vuelve a escribir a continuación.

$$\begin{aligned} m\dot{u} - mrv + D_u u &= F_b + F_e \\ m\dot{v} + mru + D_u v &= 0 \\ J\dot{r} + D_r r &= l(F_b - F_e) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Donde m , J , D_u , D_v y l son los parámetros físicos del modelo (masa, momento de inercia, rozamientos lineal y rotacional y brazo de palanca del motor respecto al centro de masas respectivamente). Además las fuerzas sólo pueden tomar tres valores posibles $F_{e,b} \in \{u_{min}, 0, u_{max}\}$. El estado del vehículo viene entonces dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x \\ \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y \\ \dot{\psi} &= r \\ \dot{r} &= \tau - d_r r \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde $F = (F_b + F_e)/m$ es la fuerza normalizada que tiene unidades de aceleración (m/s^2), $\tau = l(F_b - F_e)/J$ es el momento normalizado que tiene unidades de aceleración angular

(rad/s^2) y $d_u=D_u/m$ así como $d_r=D_r/J$ son los coeficientes de rozamiento normalizados y tienen unidades de (s^{-1}).

Las medidas disponibles en el sistema de visión son la posición y el tiempo, de este modo las variables normalizadas son medibles mediante observaciones ya que tienen unidades de aceleración o inversas del tiempo. Sin embargo la masa, el momento de inercia, la fuerza de los motores, el brazo de palanca y las fuerzas de rozamiento no son directamente medibles a partir de experimentos que solo empleen la visión artificial.

De los siete parámetros del modelo $m, J, D_u, D_v, l, u_{min}$ y u_{max} las medidas de visión sólo permiten estimar cinco, ya que sólo pueden medirse los dos parámetros normalizados d_u y d_r así como las fuerzas y momentos normalizados independientes $u_{max}/m, u_{min}/m$ y $u_{max}l/J$. El resto de las fuerzas y momentos pueden obtenerse a partir de los anteriores.

Puesto que los parámetros más fáciles de medir por otros medios son la masa y el par de palanca del motor, en la identificación se tomará $m=0.995kg$ y $l=0.075m$ como constantes y se estimarán el resto de los parámetros a partir de estos.

3.4.1. Dinámica de traslación

Para estimar la dinámica de traslación se realiza un experimento simple que consiste en acelerar y después frenar el aerodeslizador partiendo de condiciones iniciales nulas. En todo instante de tiempo se envía la misma señal de control a los dos motores.

Puesto que los dos motores actúan a la vez y las fuerzas son iguales, el modelo (3.21) predice que $r=v=0$ y por tanto:

$$m\dot{u} - D_u u = F_b + F_e = 2F_e \quad (3.23)$$

En realidad, puesto que los motores del aerodeslizador tienen cierta dinámica la fuerza de control F_e no se hace igual a la referencia instantáneamente. Para tener en cuenta este efecto se modela la dinámica de los motores por medio de un retardo.

$$m\dot{u} - D_u u = F_e(t + \delta) = \begin{cases} 2u_{max} & si \quad u_1(t) = u_2(t) = 1 \\ 0 & si \quad u_1(t) = u_2(t) = 0 \\ 2u_{min} & si \quad u_1(t) = u_2(t) = -1 \end{cases} \quad (3.24)$$

En la Figura 3.21 se muestra la velocidad de avance u frente al tiempo, es claro visualmente que existe un retardo entre el envío de los comandos u_1 y u_2 y la aceleración del vehículo.

En la misma figura se muestra el resultado de un ajuste por mínimos cuadrados de los parámetros del sistema. Los parámetros que mejor ajustan la dinámica del sistema real en el experimento son: $u_{max}=0.545N, u_{min}=-0.347N, D_u=0.357kg/s$ y $\delta=0.341s$.

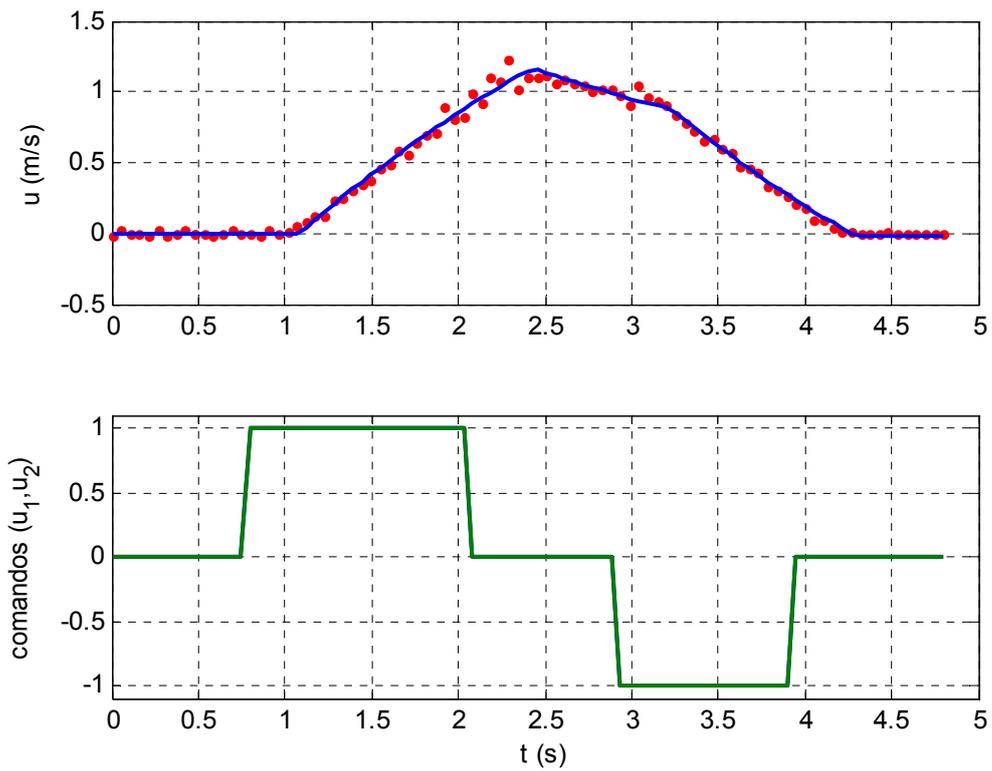


Figura 3.21. Ajuste de los parámetros de traslación. Los datos experimentales se representan mediante puntos rojos mientras que el ajuste se muestra en azul.

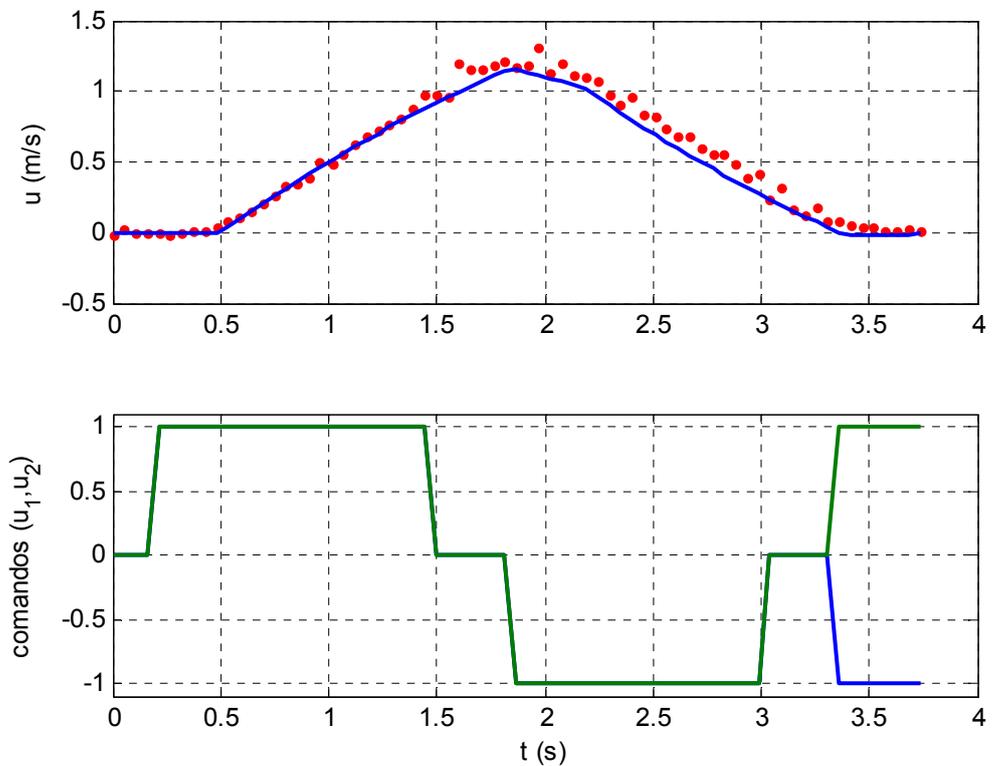


Figura 3.22. Validación de los parámetros de traslación. Los datos experimentales se representan mediante puntos rojos mientras que el ajuste se muestra en azul.

Con el fin de validar el resultado obtenido a continuación se realiza una segunda prueba y se compara el resultado del ajuste con los valores experimentales. El resultado se muestra en la Figura 3.22. En este experimento se aplica un par de giro al final de la trayectoria (a partir de los 3.25s $u_1 \neq u_2$). Como puede apreciarse, el modelo ajusta razonablemente bien las medidas del segundo experimento.

3.4.2. Dinámica de rotación

Con el fin de identificar los dos parámetros restantes se hace una prueba de la dinámica de rotación. Para ello se envían comandos de control opuestos a ambos motores. De este modo el aerodeslizador estará sometido a un par de fuerzas máximo.

Durante el experimento la orientación del aerodeslizador se acelera con un par máximo durante un cierto tiempo en una dirección y después en la otra hasta que se invierte el sentido de rotación.

La dinámica de los motores se modela mediante el mismo retardo que en el caso anterior, de forma que el modelo de ajuste queda como sigue:

$$J\dot{r} + D_r r = \begin{cases} lu_{\max} & \text{si } u_1(t) = 1, u_2(t) = 0 \\ 0 & \text{si } u_1(t) = u_2(t) = 0 \\ -lu_{\max} & \text{si } u_1(t) = 0, u_2(t) = 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

El resultado del ajuste se muestra en la Figura 3.23. Como puede verse el ajuste es razonablemente bueno. Los valores obtenidos mediante el ajuste por mínimos cuadrados de la dinámica (3.25) son: $J=0.014Kg/m^2$ y $D_r=0.0243Kgm^2s$.

De nuevo como en el caso anterior se realiza una validación de los parámetros del modelo obtenidos mediante una segunda prueba experimental. El resultado de dicha validación se muestra en la Figura 3.24.

Llegados a este punto conviene destacar dos aspectos fundamentales. En primer lugar, los parámetros obtenidos ajustan bien la dinámica del aerodeslizador en un experimento concreto y para una distribución de peso y nivel de carga de las baterías. Los datos de ajuste y validación han sido tomados con una diferencia de tiempo corta (inferior a 30 segundos).

Los datos obtenidos en este ajuste son los datos del modelo que se resumen en la Tabla 2.1 que se utiliza como estándar en las simulaciones para mantener la coherencia a lo largo de la tesis.

También es interesante destacar la presencia del retardo δ en la dinámica del sistema que se debe fundamentalmente al tiempo que requieren los motores para acelerar debido a su dinámica interna. Este retardo es grande y supone una dura prueba para los algoritmos de control que se desarrollan a lo largo de esta tesis.

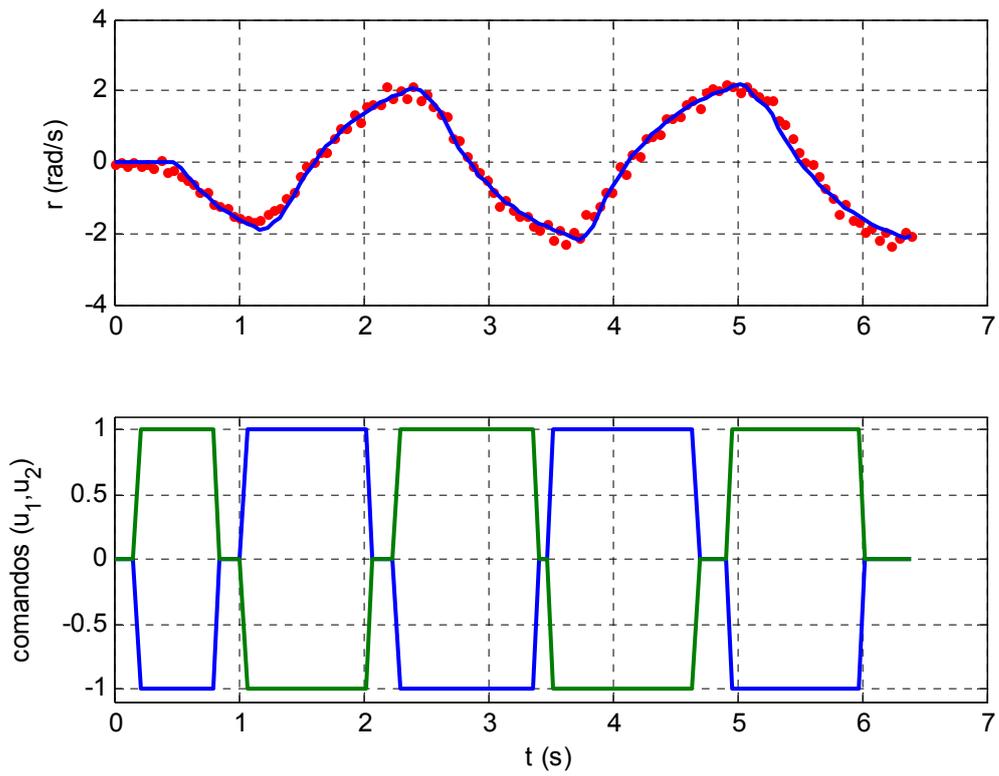


Figura 3.23. Ajuste de los parámetros de rotación.

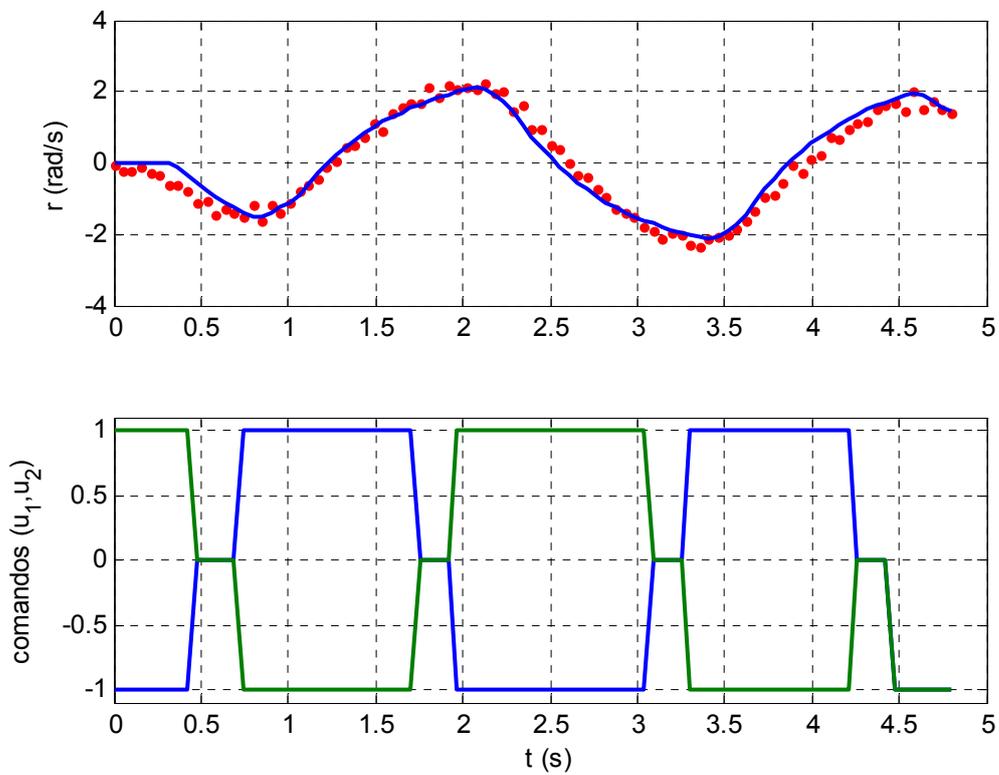


Figura 3.24. Validación de la dinámica de rotación.

3.5. Conclusiones

En este capítulo se ha analizado la implementación del sistema experimental de laboratorio para el control de un aerodeslizador.

Se ha desarrollado una librería de módulos en LabVIEW que permiten la implementación de las tareas de visión artificial, cálculo de la ley de control, formateo de datos, calibración del sistema y presentación de resultados entre otras.

Además se ha analizado el caso práctico de aplicación al problema de seguimiento de trayectoria.

El sistema experimental cuenta además con herramientas para la simulación del aerodeslizador dentro de la propia plataforma de control lo que permite la depuración de prototipos, previa a las pruebas reales de laboratorio.

Se han obtenido los parámetros del aerodeslizador bajo unas condiciones concretas de carga y distribución de pesos. Se comprueba que la estructura del modelo es correcta ya que permite ajustar con bastante precisión la dinámica del mismo. El modelo obtenido determina los parámetros que se usarán en las simulaciones de la tesis.

Capítulo 4 Posicionamiento dinámico de un aerodeslizador con entradas discretas

El objetivo de este capítulo es construir una ley de control que resuelva el problema de posicionamiento dinámico de un aerodeslizador subactuado. Tal como se expuso en el Capítulo 2 este problema es especialmente difícil debido al teorema de Brockett que impide la existencia de leyes de control por realimentación continuas e invariantes en el tiempo que estabilicen el aerodeslizador.

Además de esta dificultad inherente al sistema, existe una complicación adicional ya que el vehículo posee actuadores todo-nada lo que hace que las posibles entradas de control pertenezcan a un conjunto discreto de valores.

El capítulo se estructura de la siguiente forma: primero se realiza un breve análisis del problema, seguidamente se resuelven los problemas de control de la dinámica longitudinal y transversal para finalmente ensamblar ambas en una ley de control que estabilice ambas dinámicas al mismo tiempo. El capítulo concluirá con la validación experimental del control desarrollado y las conclusiones.

4.1. Introducción al problema

El problema de la estabilización en un punto, también conocido como posicionamiento dinámico (*point stabilization*) de vehículos subactuados es un tema de investigación muy activo durante los últimos años (Aguiar & Hespanha, 2007; Pettersen & Fossen, 1998 ; Seguchi & Ohtsuka, 2002) y (Greytak & Hover, 2008) por citar algunos ejemplos.

Dado un vehículo de superficie en 3GDL cuyo modelo general se presenta en el Capítulo 2, el problema del posicionamiento dinámico consiste en hallar una ley de control que sea capaz de llevar el vehículo desde cualquier estado inicial $[x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}, \psi_0, r_0]^T$ hacia un punto de equilibrio manteniendo una orientación determinada ψ_f . Además dicha ley de control debería ser capaz, en presencia de perturbaciones acotadas

e incertidumbre en los parámetros del modelo, de mantener el vehículo en un entorno de dicho punto de equilibrio.

Sin pérdida de generalidad, se toma como punto de equilibrio el origen de coordenadas, en cuanto a la orientación final corresponde al vehículo orientado según el eje x de coordenadas ($\psi_f = 0$). Esta configuración se muestra en la Figura 4.1

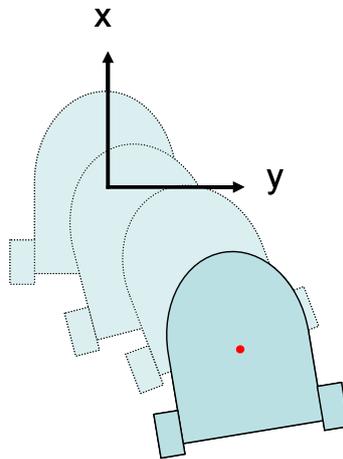


Figura 4.1. Posicionamiento dinámico del aerodeslizador.

Como se mostró en el Capítulo 2 existe una dificultad inherente al control de este tipo de sistemas debida al teorema de Brockett. Dicho teorema implica que no es posible hallar una ley de control suave e independiente del tiempo que estabilice al aerodeslizador en ningún punto de equilibrio.

En esencia, el problema radica en que una vez que la orientación está fijada se pierde la acción de control en la dirección del eje y .

4.1.1. Soluciones de control existentes

Para resolver el problema del posicionamiento dinámico existe una gran variedad de soluciones posibles. Una posible clasificación de las mismas de acuerdo a como se eluden las condiciones de Brockett podría ser la siguiente:

- I Leyes de control continuas dependientes del tiempo.
- II Leyes de control discontinuas independientes del tiempo.
- III Leyes de control basadas en planificación.
- IV Leyes de control conmutadas.

A continuación se analizarán las principales características de estas estrategias.

4.1.1.A. Leyes de control continuas dependientes del tiempo

Una de las soluciones usadas para lidiar con la condición de Brockett consiste en incluir términos dependientes del tiempo en una ley de realimentación continua. Esta es la aproximación usada en (Pettersen & Egeland, 1996), (Pettersen & Fossen, 1998) y

(Mazenc, Pettersen & Nijmeijer, 2008) entre otros. Los términos añadidos suelen ser funciones periódicas que afectan a la orientación del vehículo. Estas leyes de control evitan que el sistema pierda la controlabilidad ya que la orientación se mantiene oscilando mientras el sistema se aproxima al origen de coordenadas.

Estas leyes de control permiten alcanzar convergencia exponencial, esto las hace robustas frente a perturbaciones acotadas e incertidumbre como se demuestra en (Pettersen & Fossen, 1998). Estos controles además tienen una tendencia natural a producir soluciones oscilantes en torno al punto de equilibrio.

4.1.1.B. Leyes de control discontinuas independientes del tiempo

Las leyes de control discontinuas e independientes del tiempo han sido un campo muy importante de estudio y actualmente engloban gran parte de las soluciones de control existentes en la literatura.

La aproximación seguida en este esquema de control es atacar al problema mediante funciones de control que al ser discontinuas no se encuentran sometidas a las limitaciones impuestas por el teorema de Brockett. Un problema frecuente en esta aproximación es que las entradas de control necesarias para estabilizar el sistema pueden llegar a ser muy grandes.

Un ejemplo lo constituye el trabajo de Fantoni et al. (2000). En este estudio las aproximaciones al problema de control, si bien son capaces de estabilizar al sistema en simulación, generan señales de control discontinuas y de muy alta frecuencia para r . Puesto que la dinámica de la velocidad angular r se genera mediante la aplicación de un par de fuerzas τ y el aerodeslizador real es un sistema paso-bajo (ver ecuación (2.8)) resulta imposible reproducir los resultados de simulación en un sistema físico real.

Otras aproximaciones basadas en leyes de control discontinuas invariantes en el tiempo producen señales de control mucho más razonables que sí podrían aplicarse en un sistema físico real. Véase por ejemplo el trabajo de (Reyhanoglu, 1997) y también el de (Aguilar & Pascoal, 2001). En ambos casos se consigue una convergencia exponencial a la configuración de equilibrio mediante un cambio de variables que implica un cociente entre algunos de los estados.

La discontinuidad en la ley de control aparece al dividir por una variable que se hace cero en el estado de equilibrio. En ausencia de ruido y perturbaciones dicha variable nunca llega a anularse, puesto que la convergencia es exponencial. De este modo existe un delicado equilibrio entre el numerador y el denominador que mantiene acotada la señal de control. Sin embargo, cuando el sistema se encuentra cerca del origen, la adición de una pequeña cantidad de ruido o perturbaciones puede desestabilizar temporalmente el sistema haciendo que se aleje substancialmente del punto de equilibrio.

4.1.1.C. Controles basados en planificación

Las leyes de control basadas en planificación intentan solucionar el problema de posicionamiento dinámico mediante una planificación de la trayectoria a priori. Esta estrategia imita el modo en que un operario humano planificaría mentalmente la maniobra antes de realizarla.

Dentro de esta estrategia se encuentran una gran variedad de aproximaciones. En (Seguchi & Ohtsuka, 2002), por ejemplo, se utiliza un controlador predictivos de horizonte deslizante. En el trabajo de (Kim & Başar, 2003) se plantea un planificador lógico en el cual se realiza una planificación por etapas fuertemente inspirada en las estrategias de planificación de los controles cinemáticos usados en robots móviles.

Por último (Greytak & Hover, 2008) muestra una estrategia de posicionamiento en dos etapas: primero se lleva el modelo hacia una variedad diferenciable en el espacio de estados desde la cual es estabilizable mediante una ley de control de bajo nivel. A continuación se activa dicha ley de bajo nivel que lleva el vehículo de forma exacta hacia el origen. La planificación en esta aproximación consiste en el cálculo mediante un modelo del sistema, del conjunto de estados desde los cuales el control de bajo nivel alcanza el punto de equilibrio deseado.

4.1.1.D. Leyes de control conmutadas

Las leyes de control conmutadas son una línea actual de soluciones al problema de posicionamiento dinámico de vehículos subactuados de superficie. Ejemplos de esta metodología pueden verse en el trabajo de (Aguiar & Pascoal, 2002) y (Aguiar, Hespanha & Pascoal, 2007).

Puesto que no es posible diseñar un control suave, invariante e independiente del tiempo que estabilice al mismo tiempo todos los estados la idea básica de estas técnicas es dividir los estados del sistema en subconjuntos de estados que sí puedan ser controlados simultáneamente. A continuación se diseñaba un conjunto de controladores, uno para cada subconjunto de los estados.

Bajo ciertas condiciones de conmutación es posible combinar ambos controladores de tal modo que se estabilicen todos los estados.

La mayor dificultad a la hora de poner en práctica estas técnicas de control es que, en general, no existe un algoritmo adecuado para sintonizar el conjunto de controladores ni para calcular los tiempos en los que el sistema debe conmutar entre ellos.

Los resultados en este campo se limitan a condiciones de existencia de dichas soluciones dejando abierto el problema de sintonía y el de los tiempos de conmutación para unas condiciones iniciales dadas.

4.1.2. Entradas de control discretas

El vehículo de laboratorio usado para las pruebas experimentales tiene una dificultad añadida en su funcionamiento. Debido a que las entradas de control son las fuerzas aplicadas por los propulsores de babor y estribor, F_b y F_e respectivamente, y que estos

propulsores solo funcionan en modo todo-nada-inversión, las entradas de control aplicables son $F_{b,e} \in \{-u_{min}, 0, u_{max}\}$.

Recordando el modelo propuesto en el Capítulo 2:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \tau - d_r r
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Las fuerzas y momentos normalizados se relacionan con las fuerzas disponibles mediante las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 F &= (F_b + F_e) / m \\
 \tau &= l(F_b - F_e) / J \\
 F_{b,e} &\in \{-u_{min}, 0, u_{max}\}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

De este modo el conjunto de entradas disponibles (F_i, τ_i) , $i=1,2..9$ contiene todas las combinaciones de las tres posibles entradas de control para el motor de babor con las tres posibles entradas del motor de estribor. Las nueve señales de control resultantes se muestran de forma gráfica en la Figura 4.2 y su signo se analiza en la Tabla 4.1.

	$F_b = u_{max}$	$F_b = 0$	$F_b = -u_{min}$
$F_e = u_{max}$	$F_1 > 0 \quad \tau_1 = 0$	$F_2 > 0 \quad \tau_2 < 0$	$F_3 > 0^* \quad \tau_3 < 0$
$F_e = 0$	$F_4 > 0 \quad \tau_4 > 0$	$F_5 = 0 \quad \tau_5 = 0$	$F_6 < 0 \quad \tau_6 < 0$
$F_e = -u_{min}$	$F_7 > 0^* \quad \tau_7 > 0$	$F_8 < 0 \quad \tau_8 > 0$	$F_9 < 0 \quad \tau_9 = 0$

Tabla 4.1. Fuerzas y momentos disponibles. *Estos resultados dependen del hecho de que $u_{max} > u_{min}$.

La Figura 4.2 muestra gráficamente como siempre es posible encontrar acciones de control que vayan en la dirección correcta, esto es, fijado el signo deseado para F y τ siempre existe una combinación adecuada de F_b y F_e que los produzca. Un posible esquema de elección se muestra en la Tabla 4.2.

	$\tau_i > 0$	$\tau_i < 0$
$F_i > 0$	$F_b = u_{max} \quad F_e = -u_{min}$	$F_b = -u_{min} \quad F_e = u_{max}$
$F_i < 0$	$F_b = 0 \quad F_e = -u_{min}$	$F_b = -u_{min} \quad F_e = 0$

Tabla 4.2. Tabla de selección de las señales de control.

Algunos estudios previos que se han llevado a cabo con vehículos similares a nuestro modelo, como puede ser (Seguchi & Ohtsuka, 2002), enfrentan este problema asumiendo entradas de control saturadas en el diseño del controlador. Estas entradas de control se substituyen posteriormente por el valor más próximo disponible. Puesto que

el control predictivo empleado produce señales de control *bang-bang*, esta estrategia ofrece resultados relativamente satisfactorios.

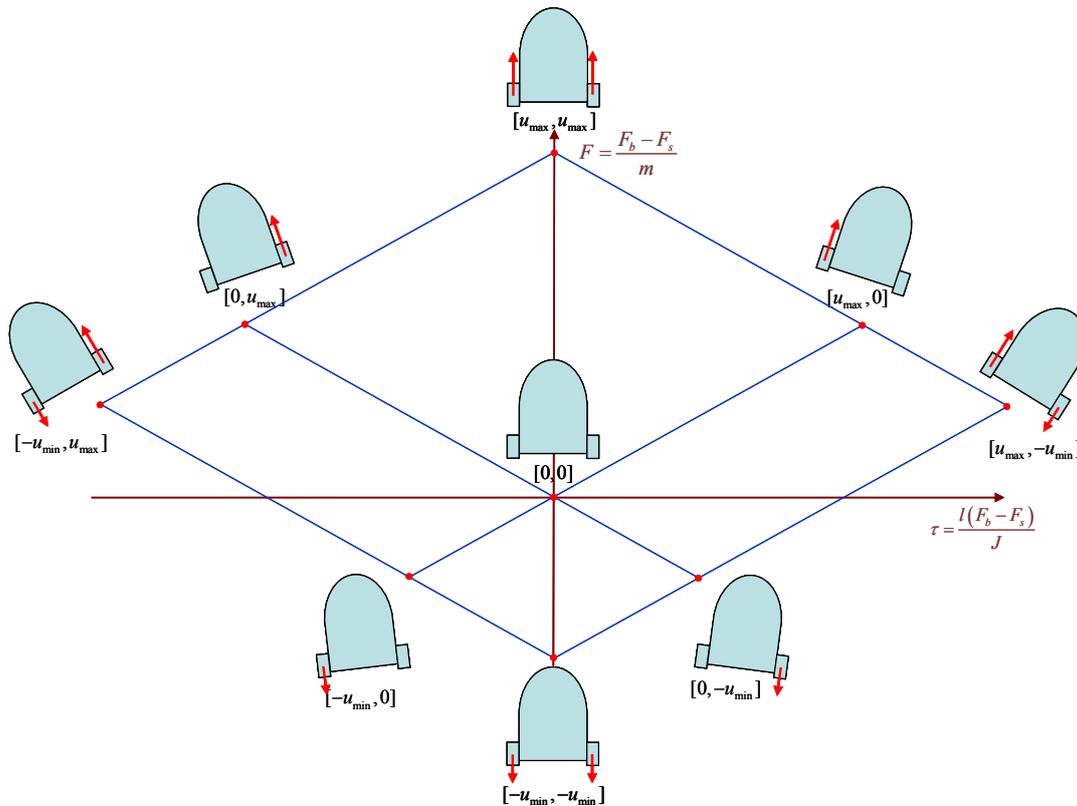


Figura 4.2. Entradas de control disponibles en el aerodeslizador.

Sin embargo, el objetivo de este capítulo es diseñar una ley de control que tenga en cuenta las restricciones del sistema. Por lo tanto, en vez de aproximar las entradas de control discretas por entradas continuas durante la fase de diseño, se diseñará teniendo en consideración las entradas discretas.

4.1.3. Formulación del problema

Llegados a este punto ya se está en condiciones de plantear rigurosamente los objetivos de este capítulo.

Sea el sistema dinámico

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x + p_{vx} \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y + p_{vy} \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \tau - d_r r + p_r
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

que representa al aerodeslizador subactuado (4.1) en presencia de un vector de perturbaciones acotadas $\mathbf{p}=[p_v, p_{vy}, p_r]^T$ que representa las perturbaciones del sistema y la dinámica no modelada.

Sea $\mathbf{x}=[x, y, v_x, v_y, \psi, r]^T$ el vector de estados del sistema e y la salida del mismo incluyendo un ruido acotado en la medida \mathbf{n} .

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (4.4)$$

Y sean p_{max} y n_{max} las cotas de la perturbación y el error de medida respectivamente. Esto es, p_{max} y n_{max} son dos constantes positivas tales que:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{p}\| &\leq p_{max} \\ \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{n}\| &\leq n_{max} \end{aligned} \quad (4.5)$$

El objetivo de este capítulo es hallar una ley de realimentación robusta que:

- I Partiendo desde cualquier condición inicial $\mathbf{x}_0=[x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}, \psi_0, r_0]^T$, establezca el vector de estados $\mathbf{x}=[x, y, v_x, v_y, \psi, r]^T$ en un entorno del origen $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon(n_{max}, p_{max})$ sometida a las restricciones (4.2) y a las perturbaciones y ruido \mathbf{p} y \mathbf{n} siempre y cuando estas sean suficientemente pequeñas.
- II Además, si el ruido y las perturbaciones se anulan, la ley de control debería estabilizar el sistema en un entorno del origen $\|\mathbf{x}\| < \varepsilon$, que podría escogerse arbitrariamente pequeño.

En términos simples, se trata de encontrar una estrategia de control que consiga “aparcar” el aerodeslizador cerca del origen como se muestra en la Figura 4.1 y mantenerlo ahí siempre y cuando el ruido y las perturbaciones no sean demasiado grandes, haciendo uso de las acciones de control disponibles, véase la Figura 4.2.

4.2. Preliminares

Con el fin de estudiar la estabilidad del sistema se introduce una serie de definiciones que resultarán de utilidad a lo largo del capítulo.

Definición 4.1: Una función continua $\alpha:[0, a) \rightarrow [0, \infty)$ pertenece a la clase K si es estrictamente creciente, y $\alpha(0)=0$. Si además $a=\infty$ y $\alpha(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$, la función es de clase K_∞ .

Definición 4.2: Una función continua $\beta:[0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ Pertenece a la clase KL si para un y fijo $\beta(x, y)$ es una función de clase K respecto a x y, además, para x fijo β es una función decreciente en y tal que $\beta(x, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$

Definición 4.3: Dado un sistema dinámico de la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4.6)$$

Se dice que el sistema es global, final y uniformemente acotado si existe una función β de clase KL y una constante c tales que para cualquier condición inicial:

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta(|\mathbf{x}(t_0)|, t - t_0) + c \quad (4.7)$$

Definición 4.4: Dado un sistema dinámico de la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}, t, \mathbf{u}) \quad (4.8)$$

Dicho sistema es estable entrada-salida (ISS) si existen funciones β y γ de clase KL y K respectivamente tales que para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ y cualquier entrada acotada \mathbf{u} , la solución de (4.8) está bien definida para $t < t_0$ y además cumple que:

$$|\mathbf{x}(t)| \leq \beta(|\mathbf{x}(t_0)|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{u}(\tau)\|\right) \quad (4.9)$$

4.3. Estrategia de control

La estrategia de control aplicada a la estabilización del aerodeslizador consiste en dividir el estado del sistema \mathbf{x} en dos subestados $\mathbf{x}_l = [x, v_x]^T$ y $\mathbf{x}_t = [y, v_y, \psi, r]^T$ que representan la dinámica longitudinal y transversal respectivamente.

Para controlar la dinámica longitudinal se hace uso de la fuerza F mientras que la dinámica transversal se controla por medio del momento τ . Los controladores de la dinámica longitudinal y transversal se coordinan indicándose el signo de la fuerza y el valor de una variable de histéresis h como puede verse en la Figura 4.3.

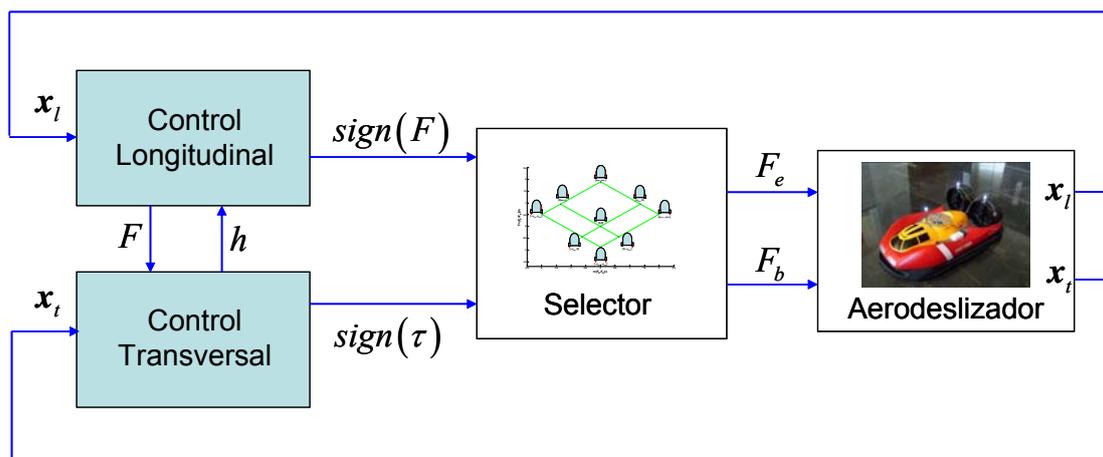


Figura 4.3. Esquema general del algoritmo de control.

Las leyes de control de la dinámica longitudinal y transversal no decidirán el valor de la fuerza y el momento aplicados sino solo sus signos. La elección de las fuerzas F_b y F_e que se aplican al vehículo se lleva a cabo mediante una tabla de selección.

En los siguientes apartados se analizan por separado las estrategias de control de la dinámica longitudinal y transversal.

4.4. Control de la dinámica transversal

En primer lugar se centrará la atención en este subproblema, para ello se diseña un control que establezca la dinámica del estado transversal $\mathbf{x}_t = [y, v_y, \psi, r]^T$. Para el control de dichas variables se mantiene F constante (positiva o negativa) y se hace uso del par τ como variable de control.

El objetivo del control es llevar el sistema hacia el eje x en la orientación adecuada $\psi=0$, como se muestra en la Figura 4.4.

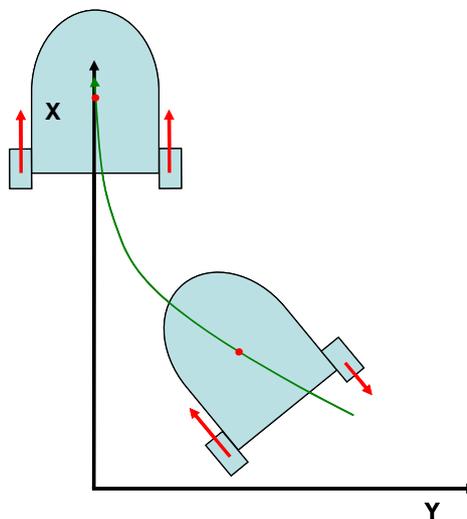


Figura 4.4. Estabilización de la dinámica transversal. El objetivo de la ley de control es llevar el aerodeslizador hacia el eje x

Se parte de la observación de que dado que las entradas de control y las perturbaciones son acotadas, las velocidades del sistema (4.3) son finalmente acotadas para cualquier ley de control.

Lema 4.1. Para cualquier señal de control $F_s(t)$, $F_e(t)$ que cumpla la restricción (4.2) las soluciones del sistema (4.3) mantienen v_x , v_y y r global y finalmente acotadas.

Demostración: En primer lugar, a partir de (4.2) la fuerza F y el momento τ están acotados, basta con ver que:

$$|F| = \left| \frac{F_b + F_e}{m} \right| \leq \left| \frac{\max(u_{\min}, u_{\max}) + \max(u_{\min}, u_{\max})}{m} \right| = \frac{2 \max(u_{\min}, u_{\max})}{m} \equiv F_{\max} \quad (4.10)$$

$$|\tau| = \left| \frac{l(F_b - F_e)}{J} \right| \leq \left| \frac{l(u_{\max} - (-u_{\min}))}{J} \right| = l \frac{u_{\max} + u_{\min}}{J} \equiv \tau_{\max}$$

Se definen entonces las siguientes funciones:

$$w_1 = \frac{v_x^2}{2}; \quad w_2 = \frac{v_y^2}{2}; \quad w_3 = \frac{r^2}{2} \quad (4.11)$$

Tomando la derivada de dichas funciones a lo largo de la trayectoria (derivadas de Lie) y teniendo en cuenta (4.10) y que $\|p\| < p_{max}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -v_x(d_u v_x - F \cdot \cos(\theta) + p_{vx}) < -d_u v_x^2 \left(1 - \frac{F_{max} + p_{max}}{d_u |v_x|}\right) \\ \dot{w}_2 &= -v_y(d_u v_y - F \cdot \sin(\theta) + p_{vy}) < -d_u v_y^2 \left(1 - \frac{F_{max} + p_{max}}{d_u |v_y|}\right) \\ \dot{w}_3 &= -r(d_r r - \tau + p_r) < -d_r r^2 \left(1 - \frac{\tau_{max} + p_{max}}{d_r |r|}\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Las funciones w_i pueden ser vistas como funciones de Lyapunov para la dinámica de cada una de las velocidades. Fijándose por ejemplo en w_1 :

La ecuación (4.12) muestra que la derivada temporal de w_1 es estrictamente negativa siempre que $d_u v_x > (1+\varepsilon)(F_{max} + p_{max})$, la función w_1 toma el valor máximo en la frontera de dicha región $w_{1m} = ((1+\varepsilon)(F_{max} + p_{max})/d_u)^2/2$. Puesto que la función w_1 es estrictamente decreciente para $w_1 > w_{1m}$, se deduce que transcurrido un tiempo finito T , $w_1(T) = w_{1m}$, esto implica que si $t > T$ entonces $d_u v_x < (1+\varepsilon)(F_{max} + p_{max})$.

Repitiendo este razonamiento con las funciones w_2 y w_3 se llega a la conclusión de que las velocidades son finalmente acotadas y que transcurrido un tiempo suficientemente grande el estado del sistema (4.3) pertenece al conjunto Ω_l .

$$\Omega_l = \left\{ (x, y, v_x, v_y, \psi, r) : |v_x|, |v_y| \leq \frac{F_{max} + p_{max}}{d_u}, |r| \leq \frac{\tau_{max} + p_{max}}{d_r} \right\} \quad (4.13)$$

■

Proposición: La estabilidad del sistema (4.3) puede estudiarse restringiéndose al conjunto $x \subset \Omega_l$.

Demostración: Puesto que el sistema es uniformemente Lipschitz en el estado x , el estado del sistema no puede escapar a infinito en el tiempo finito. De este modo durante el tiempo T del Lema 4.1 el estado del sistema permanecerá acotado.

Puesto que para $t > T$ el estado cumple que $x(t) \subset \Omega_l$, de este modo la estabilidad del sistema solo depende del comportamiento de $x(t)$ restringido a dicho conjunto ■

4.4.1. Diseño del control.

Eliminando la componente longitudinal del sistema (4.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y + p_{vy} \\ \dot{\psi} &= r \\ \dot{r} &= \tau - d_r r + p_r\end{aligned}\quad (4.14)$$

Sabiendo que se puede restringir el estudio al caso de que las velocidades lineales y angulares sean acotadas, se puede diseñar la ley de control para estabilizar la dinámica transversal. Para ello se define la siguiente variable de error:

$$e_1 = \psi + k_1 \operatorname{sign}(F) \tanh(y) \quad (4.15)$$

Donde k_1 es una constante positiva menor que $\pi/2$. La introducción de dicha variable de error merece una pequeña justificación intuitiva. Para ello supóngase en primer lugar que $e_1=0$.

Si $F>0$, la ecuación (4.15) implica que $\psi = -k_1 \tanh(y)$, esto significa que la orientación es tal que el vehículo apunta al eje x . Además, puesto que la orientación está saturada por medio de la tangente hiperbólica, el aerodeslizador siempre se encuentra orientado con la proa hacia la dirección positiva del eje x . De este modo, la trayectoria converge hacia el eje x moviéndose hacia delante, como se muestra en la Figura 4.5.

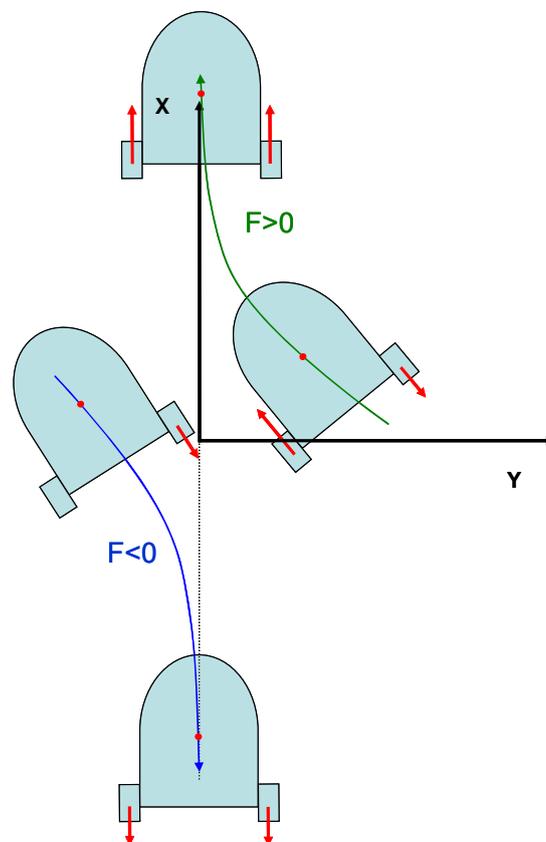


Figura 4.5. Trayectorias con $e_1=0$. Cuando la fuerza es positiva ψ tiene el mismo signo que y , cuando la fuerza es negativa ψ tiene el signo opuesto a y .

Por el contrario, si la fuerza es negativa, entonces $\psi = -k_1 \tanh(y)$, lo que implica que el aerodeslizador converge hacia el eje x moviéndose hacia atrás.

En cualquiera de los dos casos la ecuación (4.15) implica que si y tiende a cero, entonces ψ también tiende a cero. Este es el objetivo de nuestra ley de control.

Calculando la dinámica de la variable de error se obtiene lo siguiente:

$$\dot{e}_1 = r + k_1 \text{sign}(F) (1 - \tanh(y)^2) v_y \quad (4.16)$$

Para estabilizar entonces e_1 se introduce una segunda variable de error e_2 :

$$e_2 = k_2 e_1 + \dot{e}_1 \quad (4.17)$$

Donde k_2 es otra constante positiva de control. De este modo la dinámica de e_2 resulta ser:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= k_2 \dot{e}_1 + \ddot{e}_1 = k_2 (r + k_1 \text{sign}(F) (1 - \tanh(y)^2) v_y) + \\ &\dot{r} + k_1 \text{sign}(F) (-2 \tanh(y) (1 - \tanh(y)^2) v_y^2 + (1 - \tanh(y)^2) \dot{v}_y) \\ &= \tau + (k_2 - d_r) r + p_r + k_1 g(k_2, y, v_y, p_{vy}, \psi) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Siendo g la siguiente función:

$$g = \text{sign}(F) (1 - \tanh(y)^2) ((k_2 - d_u) v_y - 2 \tanh(y) v_y^2 + F \sin(\psi) + p_{vy}) \quad (4.19)$$

Puesto que, de acuerdo con (4.2), la entrada de control τ solo puede tomar un conjunto de valores discretos, se plantea una ley de control en modo deslizante. Para ello en primer lugar es importante darse cuenta de que la función g es acotada en el conjunto Ω_1 , de hecho, teniendo en cuenta que $|1 - \tanh(x)^2| \leq 1$ y que $|2 \tanh(x) (1 - \tanh(x)^2)| < 4/5$:

$$\begin{aligned} |g| &\leq (k_2 + d_u) |v_y| + \frac{4}{5} v_y^2 + |F| + p_{\max} \leq \\ &\leq \left| \frac{(k_2 + d_u)(F_{\max} + p_{\max})}{d_u} \right| + \frac{4}{5} \left(\frac{F_{\max} + p_{\max}}{d_u} \right)^2 + |F_{\max}| + p_{\max} = g_{\max} \end{aligned} \quad (4.20)$$

De la ecuación anterior se deduce que fijado el valor de la constante de diseño k_2 , g es una función acotada y por tanto el producto $k_1 g$ puede hacerse arbitrariamente pequeño eligiendo adecuadamente k_1 .

En la ecuación (4.18) aparece la variable de control τ después de haber derivado la posición y tres veces respecto del tiempo, esto se debe a que y tiene grado relativo 3 respecto a τ (Khalil 2002).

Esto sugiere que τ puede utilizarse para llevar a cero e_2 . Para ello se plantea una ley de control en modo deslizante tomando como superficie de deslizamiento $e_2=0$. De este modo se plantea la siguiente función de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{e_2^2}{2} \quad (4.21)$$

Tomando la derivada a lo largo de la trayectoria se tiene que:

$$\dot{V}_1 = e_2 (\tau + (k_2 - d_r)r + p_r + k_1 g) \quad (4.22)$$

Entonces se plantea la siguiente ley de control en modo deslizante:

$$\text{sign}(\tau) = \begin{cases} -\text{sign}(e_2) & \text{si } |e_2| \geq \varepsilon_1 \\ \text{sign}(\tau^-) & \text{si } |e_2| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (4.23)$$

La ley de control definida en (4.23) no establece el valor de la señal de control, sino solo el signo. Para determinar el valor de la señal de control se utiliza la Tabla 4.2.

Supongamos que $|e_2| < \varepsilon_1$, entonces de acuerdo con la tabla anterior, fijado el signo de la fuerza y del momento el momento total aplicado resulta ser $\tau = -|\tau_i| \text{sign}(F)$ donde τ_i es una constante positiva que depende del signo de la fuerza, de modo que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_2 (-|\tau_i| \text{sign}(e_2) + (k_2 - d_r)r + p_r + k_1 g) = \\ & -|\tau_i| |e_2| \left(1 - \frac{(k_2 - d_r)r + p_r + k_1 g}{\tau_i \text{sign}(e_2)} \right) \leq \\ & -|\tau_i| |e_2| \left(1 - \frac{|(k_2 - d_r)r + p_r + k_1 g|}{\tau_{\min}} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Si $|p_r| < \tau_{\min}$ en principio parece posible escoger k_1 y k_2 de tal modo que:

$$\frac{|(k_2 - d_r)r + p_r + k_1 g|}{\tau_{\min}} \leq 1 - \alpha \quad (4.25)$$

De este modo se tendría que:

$$\dot{V}_1 \leq -|\tau_i| |e_2| \alpha = -|\tau_i| \alpha \sqrt{2V_1} \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) implica que e_2 tendería a cero en tiempo finito, para ver esto último se resuelve el siguiente problema del valor inicial:

$$\begin{aligned} w &= -|\tau_i| \alpha \sqrt{2w} \\ w(0) &= w_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Es fácil comprobar por inspección directa que la solución de (4.27) es:

$$w(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2w_0} - |\tau_i| \alpha t \right)^2 \quad (4.28)$$

De este modo por el principio de comparación (Khalil 2002) resulta que:

$$V_1(t) \leq \frac{1}{2} \left(|e_2(0)| - |\tau_i| \alpha t \right)^2 \rightarrow |e_2(t)| \leq |e_2(0)| - |\tau_i| \alpha t \quad t \leq T_1 = \frac{|e_2(0)|}{|\tau_i| \alpha} \quad (4.29)$$

Esto solo es cierto en el caso de que $|e_2| > \varepsilon_l$. Puesto que en la frontera $|e_2| = \varepsilon_l$ la función de Lyapunov V_1 es negativa, las trayectorias que entren en dicha región no podrán abandonarla en el futuro, de modo que se puede concluir que en general:

$$|e_2(t)| \leq \max \left(\varepsilon_l, |e_2(0)| - |\tau_i| \alpha t \right) \quad (4.30)$$

Lo que implica en particular que $|e_2|$ se hará menor que ε_l en un tiempo máximo T_1 .

$$T_1 = \frac{|e_2(0)|}{\tau_i \beta} \quad (4.31)$$

4.4.2. Efecto del ruido de la medida

En el diseño de la ley de control se asume el conocimiento perfecto de los estados del sistema. Esto permite calcular e_1 y e_2 y generar correctamente la señal de control de acuerdo con (4.23). Sin embargo, en un sistema físico real es necesario además considerar el efecto del ruido en la medida (4.4).

Puesto que el sistema se encuentra afectado por el ruido \mathbf{n} en la medida, lo que realmente se calcula es un estimador de las variables de error \hat{e}_1 y \hat{e}_2 a partir de la medición del estado $y = [x_m, y_m, v_{xm}, v_{ym}, \psi_m, r_m]^T$. De acuerdo a (4.15) se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \psi_m + k_1 \cdot \text{sign}(F) \tanh(y_m) \\ &= \psi + (\psi_m - \psi) + k_1 \cdot \text{sign}(F) \left(\tanh(y) + \left(\tanh(y_m) - \tanh(y) \right) \right) \\ &= e_1 + n_\psi + k_1 \cdot \text{sign}(F) \left(\tanh(y + n_y) - \tanh(y) \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Donde n_y y n_ψ son las componentes del vector de error de la medida \mathbf{n} . Procediendo de igual forma con el resto de las variables se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1 &= \dot{e}_1 + n_r + k_1 \cdot \text{sign}(F) \cdot \left((1 - \tanh(y_m)^2) \cdot v_{ym} - (1 - \tanh(y)^2) \cdot v_y \right) \\ \hat{e}_2 &= k_2 \hat{e}_1 + \dot{\hat{e}}_1 = e_2 + k_2 (\hat{e}_1 - e_1) + (\dot{\hat{e}}_1 - \dot{e}_1) = e_2 + \Delta e_2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Donde

$$\begin{aligned} \Delta e_2 = & k_2 n_\psi + n_r + k_1 k_2 \text{sign}(F) \left(\tanh(y + n_y) - \tanh(y) \right) + \\ & + k_1 \text{sign}(F) \left((1 - \tanh(y + n_y))^2 \cdot (v_y + n_{vy}) - (1 - \tanh(y)^2) \cdot v_y \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

La expresión de Δe_2 es bastante compleja, por fortuna es posible obtener una cota simple de la misma. Para ello aplicando el teorema del valor medio la siguiente expresión se cumple

$$\tanh(y + n_y) - \tanh(y) = (1 - \tanh(y + \xi)^2) n_y \quad (4.35)$$

Para algún valor de ξ , de este modo, teniendo en cuenta que $|1 - \tanh(x)^2| \leq 1$:

$$\left| \tanh(y + n_y) - \tanh(y) \right| \leq |n_y| \quad (4.36)$$

Lo mismo puede hacerse con el resto de los términos:

$$\begin{aligned} & (1 - \tanh(y + n_y)^2) (v_y + n_{vy}) - (1 - \tanh(y)^2) \cdot v_y \\ & = (1 - \tanh(y + n_y)^2) n_{vy} - (\tanh(y + n_y)^2 - \tanh(y)^2) v_y \\ & = (1 - \tanh(y + n_y)^2) n_{vy} - 2 \tanh(y + \xi) (1 - \tanh(y + \xi)^2) n_y v_y \end{aligned} \quad (4.37)$$

Si ahora se aplica el hecho de que $|2 \tanh(x)(1 - \tanh(x)^2)| < 4/5$, entonces:

$$\left| (1 - \tanh(y + n_y)^2) \cdot (v_y + n_{vy}) - (1 - \tanh(y)^2) \cdot v_y \right| \leq |n_{vy}| + \frac{4}{5} |n_y v_y| \quad (4.38)$$

Finalmente combinando todos los resultados junto con la cota de la velocidad (4.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} |\Delta e_2| & \leq k_2 |n_\psi| + |n_r| + k_1 k_2 |n_y| + k_1 |n_{vy}| + \frac{4}{5} k_1 |n_y v_y| \\ & \leq k_2 |n_\psi| + k_1 |n_{vy}| + k_1 \left(k_2 + \frac{4}{5} \frac{F_{\max} + p_{\max}}{d_u} \right) |n_y| \\ & \leq c n_{\max} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Donde:

$$c = \max \left(k_1, k_2, k_1 \left(k_2 + \frac{4}{5} \frac{F_{\max} + p_{\max}}{d_u} \right) \right) \quad (4.40)$$

De este modo es fácil ver que el efecto del ruido de la medida simplemente añade una perturbación acotada a la estimación \hat{e}_2 . Por lo que la ley de control que se aplica realmente será:

$$\text{sign}(\tau) = \begin{cases} -\text{sign}(\hat{e}_2) & \text{si } |\hat{e}_2| \geq \varepsilon_1 \\ \text{sign}(\tau^-) & \text{si } |\hat{e}_2| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (4.41)$$

4.4.3. Estabilidad de la dinámica transversal.

El estudio de la estabilidad procederá del siguiente modo: primero se muestra que es posible llevar la variable de error e_2 a un entorno del origen. A continuación se verá como esto permite calcular una cota final para e_1 . Entonces se ve como y y v_y son finalmente acotadas. Se concluye el estudio analizando el comportamiento de las cotas obtenidas en ausencia de ruido y perturbaciones.

Lema 4.2. Dado el sistema (4.14) en presencia de perturbaciones acotadas tales que $|p_r| < \tau_{min}$ y el ruido en la medida $|n| < n_{max}$, siempre es posible encontrar dos constantes positivas k_1 y k_2 tales que la solución del sistema (4.14) sometido a una fuerza F_i constante y un momento τ_i seleccionados de entre los valores de Tabla 4.2, de acuerdo con la ley de control (4.41), cumple que $e_2(t)$ es global, final y uniformemente acotado.

Demostración: En primer lugar notar que por el Lema 4.1 la trayectoria alcanza finalmente el conjunto Ω_I (véase (4.13)) desde cualquier condición inicial mientras que los estados del sistema permanezcan acotados. Por tanto, y sin pérdida de generalidad, se puede asumir que el sistema se encuentra en Ω_I en el instante inicial.

Para analizar lo que ocurre con e_2 basta con tener en cuenta que (4.41) y (4.23) son iguales siempre y cuando e_2 sea suficientemente grande ya que:

$$\begin{aligned} |e_2| > |\Delta e_2| &\rightarrow \text{sign}(e_2) = \text{sign}(e_2 + \Delta e_2) \\ |e_2| > |\Delta e_2| + \varepsilon_1 &\rightarrow |\hat{e}_2| > \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Puesto que se cumple que $|p_r| < \tau_{min}$, entonces el cociente $|p_r|/\tau_{min}$ es menor que la unidad por lo cual existe una constante positiva α tal que:

$$\frac{|p_{max}|}{\tau_{min}} \leq 1 - 3\alpha \quad (4.43)$$

Es posible entonces elegir k_2 de modo que se cumpla la siguiente desigualdad (esto es siempre posible puesto que se puede tomar $k_2 = d_r$):

$$|k_2 - d_r| \leq \frac{d_r \alpha \tau_{min}}{(\tau_{max} + p_{max})} \quad (4.44)$$

Una vez fijado k_2 también lo estaría el valor de g_{max} de acuerdo con (4.20), de modo que es posible escoger una constante k_1 de tal modo que:

$$|k_1| \leq \frac{\alpha \tau_{min}}{g_{max}} \quad (4.45)$$

Utilizando las desigualdades anteriores es fácil ver que esta elección de las constantes hace que se verifique la ecuación (4.25):

$$\begin{aligned}
\frac{|(k_2 - d_r)r + p_r + k_1 g|}{\tau_{\min}} &\leq \frac{|k_2 - d_r||r|}{\tau_{\min}} + \frac{|p_r|}{\tau_{\min}} + \frac{|k_1 g|}{\tau_{\min}} \\
&\leq \frac{|k_2 - d_r| \tau_{\max} + p_{\max}}{\tau_{\min}} + \frac{|p_r|}{\tau_{\min}} + \frac{|k_1 g|}{\tau_{\min}} \leq \\
&\leq \alpha + (1 - 3\alpha) + \alpha = 1 - \alpha
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Suponiendo en primer lugar que $|e_2| > \max(cn_{\max}, \varepsilon_1)$, entonces (4.42) implica que (4.41) es exactamente igual a (4.23) y como además se cumple (4.41) entonces:

$$|e_2(t)| \leq |e_2(0)| - |\tau_i| \alpha t \quad t \leq T_1 = \frac{|e_2(0)|}{|\tau_i| \alpha} \tag{4.47}$$

De este modo trascurrido un tiempo no superior a T_1 la trayectoria del sistema cruza la frontera $|e_2| = cn_{\max}$. De nuevo la derivada de la función de Lyapunov es negativa en el borde de dicha región, lo que significa que las trayectorias que entren en ella no podrán abandonarla en ningún tiempo futuro $t < T_1$. De este modo se concluye:

$$|e_2(t)| \leq \max(cn_{\max}, \varepsilon_1, |e_2(0)| - \tau_i \alpha t) \tag{4.48}$$

Por lo que $e_2(t)$ es global, final y uniformemente acotado ■

Una vez que se ha establecido una cota para el valor de e_2 , se puede ver que le ocurre a e_1 .

Lema 4.3. Bajo las condiciones del Lema 4.2, $e_1(t)$ es global, final y uniformemente acotado. Más aún, si el ruido en la medida es suficientemente pequeño, existe un tiempo T_2 para el cual $|e_1(t)| < \delta/|F|$ si $t > T_2$, siendo δ una constantes positiva arbitraria.

Demostración: Partiendo de la definición de e_2 (4.17) se tiene que:

$$\dot{e}_1 = -k_2 e_1 + e_2 \tag{4.49}$$

Esta ecuación lineal es fácilmente resoluble obteniendo:

$$e_1(t) = e_1(0)e^{-k_2(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-k_2(t-s)} e_2(s) ds \tag{4.50}$$

Esta ecuación en general es difícil de integrar, aunque es fácil de acotar usando (4.48):

$$\begin{aligned}
|e_1(t)| &\leq |e_1(0)|e^{-k_2 t} + \left| \int_0^t e^{-k_2(t-s)} e_2(s) ds \right| \\
&\leq |e_1(0)|e^{-k_2 t} + \int_0^t e^{-k_2(t-s)} |e_2(s)| ds \\
&\leq |e_1(0)|e^{-k_2 t} + \int_0^t e^{-k_2(t-s)} \max(c_1 n_{\max}, \varepsilon_1, |e_2(0)| - \tau_i \beta s) ds \\
&\leq |e_1(0)|e^{-k_2 t} + \int_0^{T_1} e^{-k_2(t-s)} (|e_2(0)| - \tau_i \beta s) ds + \max(cn_{\max}, \varepsilon_1) \int_{T_1}^t e^{-k_2(t-s)} ds \quad (4.51) \\
&\leq |e_1(0)|e^{-k_2 t} + \int_0^{\frac{|e_2(0)|}{|\tau_i| \alpha}} e^{-k_2(t-s)} |e_2(0)| ds + \max(cn_{\max}, \varepsilon_1) \int_0^t e^{-k_2(t-s)} ds \\
&\leq |e_1(0)|e^{-k_2 t} + |e_2(0)| \frac{e^{\frac{k_2 |e_2(0)|}{|\tau_i| \alpha} - 1}}{k_2} e^{-k_2 t} + \max(cn_{\max}, \varepsilon_1) \frac{(1 - e^{-k_2 t})}{k_2}
\end{aligned}$$

Todos los términos en la expresión anterior tienden a cero cuando t tiende a infinito a excepción del último, de este modo se puede escribir de forma reducida:

$$|e_1(t)| \leq (|e_1(0)| + \gamma(|e_2(0)|)) e^{-k_2 t} + \frac{\max(cn_{\max}, \varepsilon_1)}{k_2} \quad (4.52)$$

Donde γ es una función de clase K , esto demuestra que e_2 es global uniforme y finalmente acotado.

Si el ruido es suficientemente pequeño, entonces se satisface la siguiente relación para algún $\delta > 0$:

$$n_{\max} \max \left(1, \frac{k_1}{k_2}, k_1 \left(1 + \frac{4}{5} \frac{F_{\max} + p_{\max}}{d_u k_2} \right) \right) < \frac{\delta}{|F|} \quad (4.53)$$

Puesto que la desigualdad es estricta, entonces, el miembro derecho de la ecuación anterior es igual a $(\delta - \varepsilon)/|F|$ para algún ε .

Entonces, eligiendo $\varepsilon_1 < (\delta - \varepsilon)/|F|$ en virtud de (4.52) existe un T_2 tal que el término exponencial en (4.52) se hace menor que $\varepsilon/2|F|$ (T_1 en principio depende de las condiciones iniciales), de este modo si $t > T_2$:

$$\begin{aligned}
|e_1(t)| &\leq \frac{\varepsilon}{2|F|} + \frac{\max(cn_{\max}, \varepsilon_1)}{k_2} = \\
&= \frac{\varepsilon}{2|F|} + \max\left(\frac{n_{\max}}{k_2}, n_{\max}, n_{\max}k_1\left(1 + \frac{4}{5}\frac{F_{\max} + p_{\max}}{d_u k_2}\right), \frac{\delta - \varepsilon}{|F|}\right) \quad (4.54) \\
&= \frac{\varepsilon}{2|F|} + \max\left(\frac{\delta - \varepsilon}{|F|}, \frac{\delta - \varepsilon}{|F|}\right) = \frac{\varepsilon}{2|F|} + \frac{\delta - \varepsilon}{|F|} = \frac{\delta}{|F|} - \frac{\varepsilon}{2|F|} < \frac{\delta}{|F|}
\end{aligned}$$

Que era exactamente lo que se quería demostrar ■

Una vez establecidos los resultados anteriores es posible estudiar la estabilidad de la dinámica transversal.

Teorema 4.1. Dado el sistema (4.14) sometido a una fuerza F_i constante y un momento τ_i seleccionados de entre los valores de Tabla 4.2 de acuerdo con la ley de control (4.41), si la perturbación p y el error en la medida n son suficientemente pequeños, siempre es posible encontrar tres constantes positivas k_1 , k_2 y ε_1 de tal modo que:

- I. Las soluciones de (4.14) bajo (4.41) son global finalmente acotadas para cualquier condición inicial.

En ausencia de ruido en la medida y perturbaciones, la cota final del estado puede hacerse arbitrariamente pequeña.

Demostración: Puesto que el ruido y la perturbación son suficientemente pequeñas siempre es posible hacer que se verifique (4.53), Además supóngase que la perturbación es suficientemente pequeña como para que se verifique la siguiente relación:

$$p_{\max} < \min\left(\frac{d_u |F| \sin(k_1)}{\sqrt{2} \max(2, d_u)} - \delta, \tau_{\min}\right) \quad (4.55)$$

Puesto que el ruido y las perturbaciones cumplen (4.53) y (4.55), se verifican las condiciones del Lema 4.2 y del Lema 4.3, de este modo las variables e_1 y e_2 son global final y uniformemente acotadas.

I) Para analizar lo que ocurre con las variables y y v_y se reescribe la ecuación (4.14) en términos de e_1

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= v_y \\
\dot{v}_y &= -d_u v_y - |F| \sin(k_1 \tanh(y) - \text{sign}(F)e_1) + p_y
\end{aligned} \quad (4.56)$$

Puesto que la velocidad es acotada, la solución del sistema (4.56) permanece acotada para todo $t < T_2$. De este modo se puede analizar la estabilidad restringiéndola al caso en el que $|e_1| < \delta/|F|$. Para ello se define la siguiente función:

$$V_2 = \frac{d_u}{4} y^2 + 2|F| \int_0^y \sin(k_1 \tanh(s)) ds + \left(v_y + \frac{d_u y}{2} \right)^2 \quad (4.57)$$

Es evidente que esta función es una función continua y su derivada también lo es, para verificar que se trata de una función de Lyapunov, es necesario comprobar que la función es definida positiva. El primer y último término son claramente definidos positivos, el término integral requiere sin embargo un poco más de atención.

Teniendo en cuenta que $\tanh(s)$ es una función impar y acotada. Puesto que $k_1 < \pi/2$, entonces $\sin(k_1 \tanh(s))$ tiene el mismo signo que s . De este modo si $y > 0$ entonces el integrando es positivo y por tanto la integral también lo es. Si por el contrario y es negativo el integrando es negativo, de tal modo que:

$$\int_0^y \sin(k_1 \tanh(s)) ds = \begin{cases} \int_0^y |\sin(k_1 \tanh(s))| ds > 0 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \\ \int_{-|y|}^0 |\sin(k_1 \tanh(s))| ds > 0 & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

Esto demuestra que V_2 es una función definida positiva. Por otro lado se tiene que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sin(k_1 \tanh(s)) = \sin(k_1) \neq 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \sin(k_1 \tanh(s)) ds = \infty \quad (4.59)$$

De tal modo que la función V_2 es radialmente no acotada. Tomando entonces la derivada de dicha función a lo largo de la trayectoria se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \frac{d_u^2 y v_y}{2} + 2|F| \sin(k_1 \tanh(y)) v_y + \\ & + \left(2v_y + d_u y \right) \left(-|F| \sin(k_1 \tanh(y)) - \text{sign}(F) e_1 \right) - \frac{d_u v_y}{2} + p_{vy} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Esta expresión es continua y derivable con respecto a e_1 y p_{vy} , t por el teorema del valor medio se tiene que existen dos constantes ξ_1 y ξ_2 tales que:

$$\dot{V}_2(y, v_y, p_{vy}, e_1) = \dot{V}_2(y, v_y, 0, 0) + \left(\frac{\partial \dot{V}_2}{\partial e_1} \Big|_{\substack{e_1 = \xi_1 \\ p_{vy} = \xi_2}} \right) e_1 + \left(\frac{\partial \dot{V}_2}{\partial p_{vy}} \Big|_{\substack{e_1 = \xi_1 \\ p_{vy} = \xi_2}} \right) p_{vy} \quad (4.61)$$

Calculando la derivada de la función de Lyapunov en ausencia de ruido y perturbaciones y acotando las derivadas parciales que aparecen en (4.61) se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(y, v_y, 0, 0) &= -d_u v_y^2 - d_u |F| y \sin(k_1 \tanh(y)) \\ \left| \frac{\partial \dot{V}_2}{\partial e_1} \right| &= |2v_y + d_u y| |F| \left| \cos(k_1 \tanh(y) e_1) \right| \Big|_{e_1 = \xi_1} \leq |2v_y + d_u y| |F| \\ \left| \frac{\partial \dot{V}_2}{\partial p_{vy}} \right| &= |2v_y + d_u y|\end{aligned}\quad (4.62)$$

De este modo, substituyendo en (4.61) resulta que:

$$\dot{V}_2 \leq -d_u v_y^2 - d_u |F| y \sin(k_1 \tanh(y)) + |2v_y + d_u y| (|F| |e_1| + |p_{vy}|) \quad (4.63)$$

La expresión (4.63) justifica la elección de V_2 . En ausencia de perturbaciones y ruido la función V_2 es definida negativa. Si se define entonces la variable radial R :

$$R = \sqrt{y^2 + v_y^2} \quad (4.64)$$

Puesto que $y^2 + v_y^2 = R^2$ es claro que o bien $y^2 \geq R^2/2$ o bien $v_y^2 \geq R^2/2$ de este modo:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -d_u |F| y \sin(k_1 \tanh(y)) - d_u v^2 + (2v_y + d_u y) (|F| |e_1| + |p_{vy}|) \\ &\leq -f_1(y) - f_1(v_y) + 2 \max(2, d_u) R (|F| |e_1| + |p_{vy}|) \\ &\leq -f_1\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) + 2 \max(2, d_u) R (|F| |e_1| + |p_{vy}|)\end{aligned}\quad (4.65)$$

Donde f_l es la siguiente función:

$$f_1(R) = \min(d_u |F| R \sin(k_1 \tanh(R)), d_u R^2) \quad (4.66)$$

Para analizar el signo de (4.65) deben estudiarse dos casos. Supóngase en primer lugar que el mínimo de (4.66) fuese el primer operando entonces:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\leq -d_u |F| \frac{R}{\sqrt{2}} \sin\left(k_1 \tanh\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\right) + \max(2, d_u) R (|F| |e_1| + |p_{vy}|) = \\ &= -d_u |F| \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(k_1 \tanh\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{\sqrt{2} \max(2, d_u)}{d_u |F|} (|F| |e_1| + |p_{vy}|) \right) \leq \\ &\leq -d_u |F| \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(k_1 \tanh\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{\sqrt{2} \max(2, d_u)}{d_u |F|} (\delta + p_{\max}) \right)\end{aligned}\quad (4.67)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $|e_l| < \delta |F|$. De este modo la función V_2 sería decreciente si:

$$R \geq R_1 = \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{1}{k_1} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2} \max(2, d_u)}{d_u |F|} (\delta + p_{\max}) \right) \right) \quad (4.68)$$

La expresión (4.68) está bien definida ya que de acuerdo con (4.55):

$$\frac{1}{k_1} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2} \max(2, d_u)}{d_u |F|} (\delta + p_{\max}) \right) < \frac{1}{k_1} \arcsin(\sin(k_1)) = 1 \quad (4.69)$$

Supóngase por el contrario que el mínimo correspondiera al segundo término de (4.66) Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -d_u \frac{R^2}{2} + \max(2, d_u) (|F| |e_1| + |p_{vy}|) = \\ &= -2d_u R \left(R - \frac{2 \max(2, d_u)}{d_u} (\delta + p_{\max}) \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Que es negativo siempre que

$$R > R_2 = \max \left(2, \frac{4}{d_u} \right) (\delta + p_{\max}) \quad (4.71)$$

De modo que sea cual sea el caso si $R > \max(R_1, R_2)$ entonces V_2 será decreciente, de tal forma que la región de crecimiento de V_2 puede acotarse por la región:

$$\Omega_2 = \left\{ (y, v_y) : y^2 + v_y^2 \leq \max(R_1, R_2)^2 \right\} \quad (4.72)$$

Puesto que la región Ω_2 es acotada, V_2 alcanza en ella su valor máximo $V_{2m}(e_1)$, de este modo se sabe que si $V_2 > V_{2m}(e_1)$ entonces V_2 es decreciente a lo largo de la trayectoria. Entonces la superficie de nivel $V_2 = V_{2m}(e_1)$ delimita una región de atracción del sistema R .

$$R = \left\{ (y, v_y) : V_2(y, v_y) \leq V_{2m} \right\} \quad (4.73)$$

Como la función V_2 es radialmente no acotada, las curvas de nivel de V_2 son siempre conjuntos acotados como se muestra en la Figura 4.6. Esto significa que la región de atracción es acotada y por lo tanto y y v_y son global, final y uniformemente acotadas.

Ya que e_1 , e_2 , y , y v_y son global, finalmente acotadas y usando las definiciones de e_1 y e_2 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\psi| &= |e_1 - k_1 \cdot \text{sign}(F) \cdot \tanh(y)| \leq |e_1| + k_1 \tanh(|y|) \\ |r| &= |e_2 - k_2 e_1 - k_1 \cdot \text{sign}(F) \cdot (1 - \tanh(y)^2) \cdot v_y| \\ &\leq |e_2| + k_2 |e_1| - k_1 |v_y| \end{aligned} \quad (4.74)$$

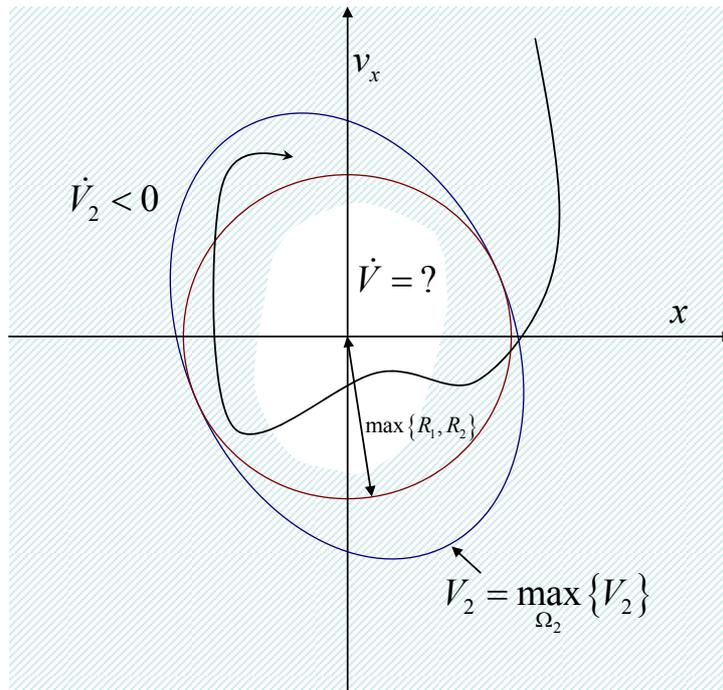


Figura 4.6. Región de decrecimiento de la función V_2 . La función de Lyapunov decrece en todo el área sombreada. La región donde la función de Lyapunov V_2 puede crecer está acotada por una bola de radio $\max(R_1, R_2)$ que a su vez se encuentra acotada por una curva de nivel de la función de Lyapunov. Dicha curva es una región de atracción del sistema.

Con lo que se concluye que x_t es global final y uniformemente acotado.

II) Supóngase que $p_{max}=n_{max}=0$, entonces las condiciones (4.53) y (4.55) se cumplen trivialmente para cualquier δ . De este modo por la continuidad de (4.68) y (4.71) R_1 y R_2 pueden hacerse ambos menores que un ε arbitrario. Luego, tomando δ suficientemente pequeño el conjunto Ω_2 quedara contenido en una bola de radio ε centrada en el origen:

$$\Omega_2|_{p=n=0} \subset \{(y, v_y) : y^2 + v_y^2 \leq \varepsilon^2\} \tag{4.75}$$

Puesto que V_2 es continua se tiene que.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V_{2m} = 0 \tag{4.76}$$

Por tanto queda la cota final del estado puede hacerse arbitrariamente pequeña tomando δ suficientemente pequeño ■

4.4.4. Consideraciones sobre el diseño

En el apartado anterior se ha realizado un análisis riguroso de la estabilidad de la dinámica transversal del aerodeslizador bajo la ley de control (4.41). Sin embargo,

debido a la complejidad de las demostraciones es fácil perder la noción de lo que se estaba demostrando.

Esta sección hará una interpretación intuitiva del significado del Teorema 4.1, que permitirá entender lo que se ha demostrado y además aclarará el significado de (4.53) y (4.55).

Informalmente hablando, el Teorema 4.1 dice que si el ruido y las perturbaciones no son demasiado grandes, entonces se pueden ajustar las constantes del controlador (4.41) de tal manera que “funcione” correctamente.

Recordando que el objetivo del controlador (4.41) es intentar que el aerodeslizador se mueva por la línea $y=0$, por lo que realmente se ha diseñado un control de seguimiento de camino, donde el camino es el eje coordenado x . Este camino se intentará recorrer en el sentido creciente de x si $F > 0$ y en sentido contrario si $F < 0$ como muestra la Figura 4.4.

Dado que x_f es global final y uniformemente acotado, entonces para un cierto nivel de ruido y perturbaciones el aerodeslizador se aproximará al eje x . Transcurrido un cierto transitorio el aerodeslizador se mantendrá cerca de dicho eje y la distancia al mismo será más pequeña cuanto menores sean el ruido y la perturbación.

El Teorema 4.1 y los lemas sobre los que se apoya son constructivos ya que dicen como se puede sintonizar el controlador para que funcione, en particular hay que utilizar las relaciones (4.43), (4.44) y (4.45).

Es importante darse cuenta de un punto esencial: el teorema garantiza que si se eligen las constantes del controlador de acuerdo con una serie de relaciones conservativas el sistema es prácticamente estable. Esto, sin embargo, no significa que una violación de las relaciones (4.43), (4.44) y (4.45) produzca un control inestable.

De hecho, (4.45) sugiere que k_I debe de ser pequeño, sin embargo esto puede no ser conveniente ya que las cotas de error en y decrecen al aumentar dicha constante. De hecho, la elección de las constantes que se hace en el teorema no es la mejor posible en cuanto a rendimiento ya que está basada en cálculos muy conservativos.

Las relaciones (4.53) y (4.55) cuantifican la robustez del controlador. Esto es, dan una estimación conservativa del nivel de ruido o perturbaciones que el control tolera antes de desestabilizarse. Un análisis directo de estas relaciones permite obtener algunas conclusiones simples:

- I El sistema solo se podrá controlar si las perturbaciones son menores que $|F|$ y τ_{min} . Esto resulta bastante obvio, si la perturbación es mayor que las entradas de control disponibles no será posible controlarlo.
- II Si se quiere que el sistema sea muy tolerante al ruido hay que tomar valores de δ grandes, no obstante el valor de δ está limitado ya que p_{max} no puede ser negativo, de este modo si se quiere una gran tolerancia al ruido se está disminuyendo la tolerancia a las perturbaciones y viceversa.

III Para ser robusto ante perturbaciones conviene tomar un valor de k_I elevado (aunque nunca mayor que $\pi/2$).

Para ilustrar estas conclusiones es conveniente mostrar un ejemplo numérico. Supóngase que se quiere sintonizar el controlador teniendo en cuenta los valores nominales de los parámetros del aerodeslizador sin considerar el ruido ni perturbaciones. Si la sintonía se lleva a cabo usando (4.43), (4.44) y (4.45), el cálculo sería como sigue.

Puesto que no hay perturbaciones se puede usar $\alpha=1/3$. De este modo puede elegirse $k_2=d_u=0.3588$, verificándose así inmediatamente (4.44).

Entonces, fijado el valor k_2 también lo está $g_{max}=10.78$, De este modo tomando el valor máximo que permite (4.45), $k_I=0.058$. Adicionalmente se puede tomar $\varepsilon_I=0.001$.

Este sistema resulta ser excesivamente lento y muy poco tolerante a cualquier perturbación ya que, en el mejor de los casos ($\delta=0$) se tendría:

$$p_{\max} < \min\left(\frac{d_u |F| \sin(k_1)}{\max(2, d_u)}, \tau_{\min}\right) = \frac{d_u |F| \sin(k_1)}{2} = 0.0114 \quad (4.77)$$

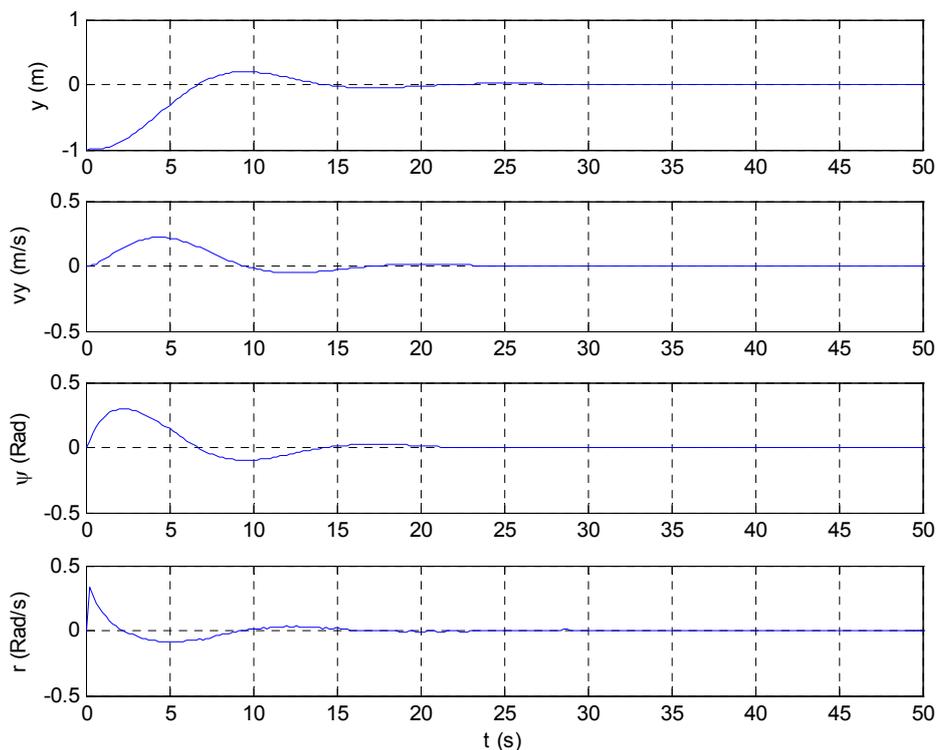


Figura 4.7. En ausencia de perturbaciones el control sintonizado de forma no conservativa es estable. Sin embargo, es posible hacer otra elección de las constantes. Por ejemplo tomando $k_2=1$, $k_I=0.5$ y $\varepsilon_I=0.001$ el resultado es mucho más razonable y además el sistema continúa siendo estable como muestra la Figura 4.7.

Para verificar que el sistema es robusto ante ruido y perturbaciones se introduce una perturbación constante $p_{vy}=0.05$ y un ruido aleatorio de media nula y amplitud 0.1 en todas las variables. El sistema continúa siendo estable como se puede apreciar en la Figura 4.8.

De este modo se ve que la elección de las constantes según las relaciones del Lema 4.2 puede resultar excesivamente conservativa. Es por tanto posible (y en general deseable) elegir los valores de k_1 y k_2 para obtener una respuesta temporal idónea aunque no cumpla las condiciones (4.44) y (4.45).

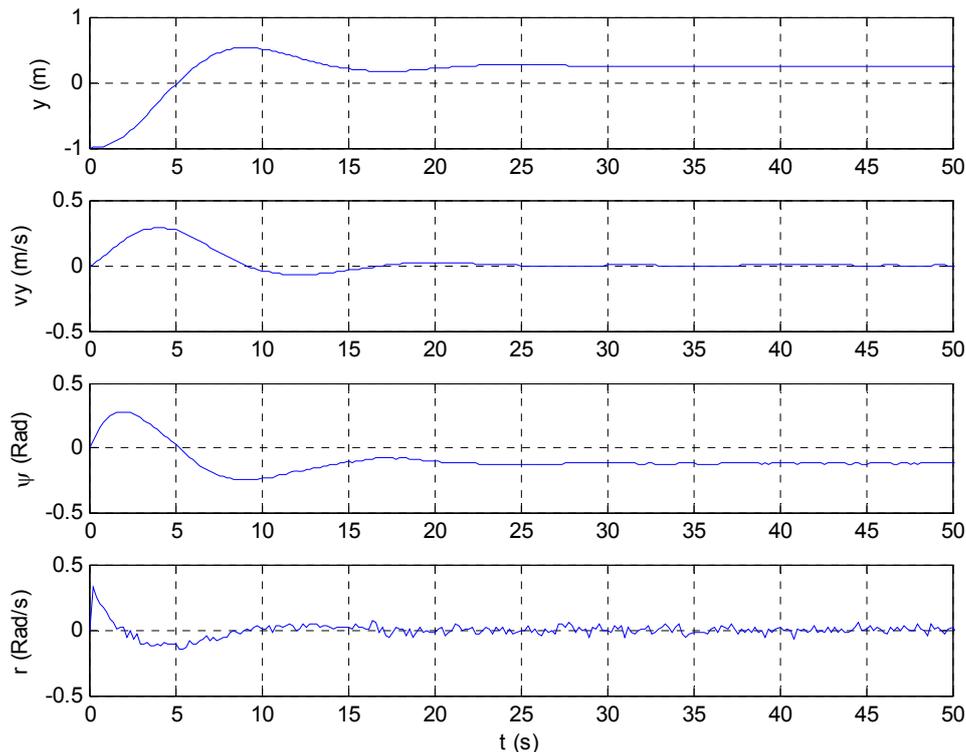


Figura 4.8. La ley de control es robusta a cierto grado de ruido y perturbación. En este caso $p_x=0.05$ y el ruido es de media nula y amplitud 0.1.

4.5. Control de la dinámica longitudinal

El objetivo de esta sección es diseñar una ley de control por realimentación tal que la dinámica longitudinal $\mathbf{x}_l=[x, v_x]^T$ permanezca acotada. Para ello se comienza planteando la dinámica longitudinal del aerodeslizador:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x + p_{vx} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Para controlar la variable de posición x se hace uso de la fuerza F . De acuerdo con la Tabla 4.2 es posible escoger valores de F positivos y negativos para cualquier valor de

τ . Al valor escogido de acuerdo con la Tabla 4.2 se denomina F_i y a los valores máximos y mínimos que F_i puede tomar de acuerdo con dicha tabla F_{max} y F_{min} .

El objetivo de esta sección es desarrollar una ley de control que mantenga los estados x y v_x dentro de una cierta banda. El control se diseñará de tal modo que se cambie el valor de F el mínimo número de veces posible. Esto se muestra en la Figura 4.9.

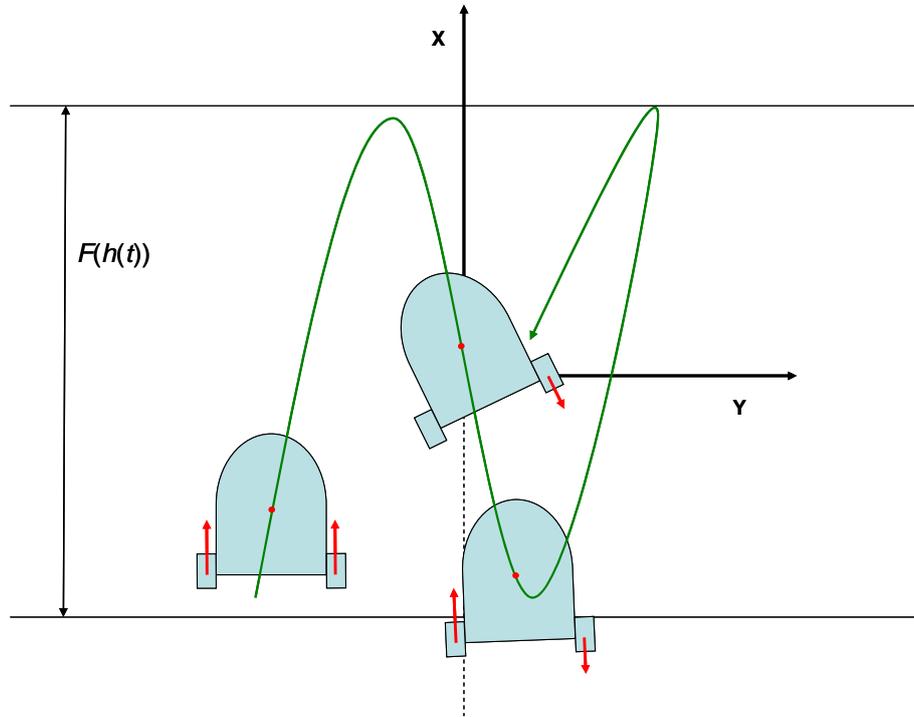


Figura 4.9. Objetivo del control longitudinal. El control longitudinal trata de mantener el aerodeslizador moviéndose en una banda de amplitud h en torno al eje y .

4.5.1. Diseño del control

Para mantener las variables x y v_x dentro de una banda del origen se define la siguiente variable de error:

$$e_3 = x + k_3 v_x \quad (4.79)$$

La interpretación de esta variable es muy simple: si e_3 fuese igual a cero, entonces la derivada de x sería igual a $-x/k_3$ lo que implica que x tendería exponencialmente a cero. De este modo, calculando la dinámica de la variable e_3 :

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 &= \dot{x} + k_3 \dot{v}_x = v_x + k_3 (F \cos(\psi) - d_u v_x + p_{vx}) \\ &= (1 - k_3 d_u) v_x + k_3 F \cos(\psi) + k_3 p_{vx} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Para mantener acotada esta variable de error se puede definir la siguiente función de Lyapunov:

$$V_3 = \frac{e_3^2}{2} \quad (4.81)$$

Calculando la derivada de V_3 a lo largo de la trayectoria se obtiene:

$$\dot{V}_3 = e_3 (k_3 F \cos(\psi) + (1 - k_3 d_u) v_x + k_3 p_{vx}) \quad (4.82)$$

El principal problema de la ecuación anterior es que la acción de control aparece multiplicada por el coseno de ψ , lo cual dificulta ligeramente el análisis ya que si $\psi = \pi/2 + 2n\pi$ entonces la acción de control sobre V_3 se pierde. Para facilitar el análisis supóngase inicialmente que $-\pi/2 < \psi(t) < \pi$ de modo que $\cos(\psi) \neq 0$, y definiendo c_2 como sigue:

$$c_2 = \min |\cos(\psi(t))|, \quad t > 0 \quad (4.83)$$

Entonces se puede reescribir (4.82) de la siguiente forma:

$$\dot{V}_3 = k_3 \cos(\psi) e_3 F \left(1 + \frac{(1 - k_3 d_u) v_x + k_3 p_{vx}}{F k_3 \cos(\psi)} \right) \quad (4.84)$$

Con el fin de que V_3 sea decreciente si e_3 es grande se plantea la siguiente ley de control:

$$\text{sign}(F) = \begin{cases} -\text{sign}(e_3) & \text{si } |e_3| > h(t) \\ \text{sign}(F^-) & \text{si } |e_3| < h(t) \end{cases} \quad (4.85)$$

Esta ley es parecida a (4.23), solo que ahora en vez de usar un ε_l pequeño se usa una función del tiempo $h(t)$ que introduce una histéresis dinámica en la ley de control. Esto puede comprenderse con más claridad analizando la Figura 4.10:

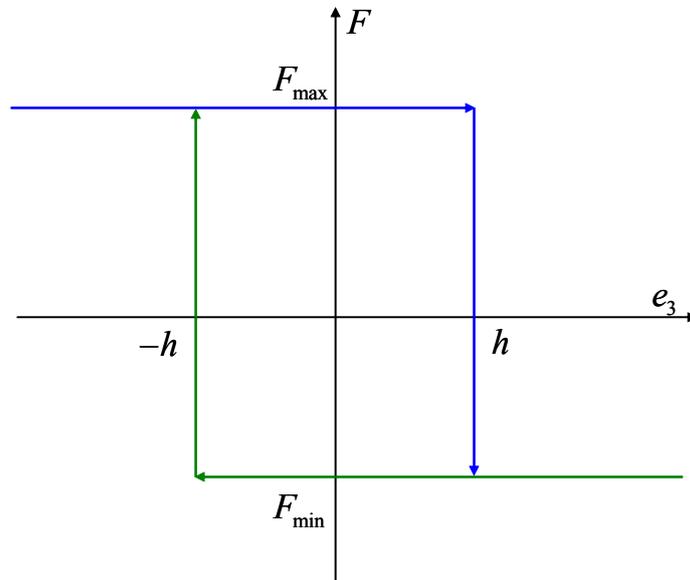


Figura 4.10. Histéresis dinámica $h(t)$. La figura muestra el recorrido de F a lo largo del tiempo para un valor fijo de h .

Puesto que el signo de la fuerza queda establecido por la ley de control (4.85) la señal de control aplicada será el resultado de seleccionar F de entre los valores disponibles de la Tabla 4.2 por tanto se tiene que $F = -|F_i| \text{sign}(e_3)$. De este modo para $|e_3| > h$ resulta que:

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= k_3 \cos(\psi) e_3 \left(-|F_i| \operatorname{sign}(e_3) + \frac{(1 - k_3 d_u) v_x + k_3 p_{vx}}{k_3 \cos(\psi)} \right) \\ &= -k_3 \cos(\psi) |e_3| |F_i| \left(1 - \frac{(1 - k_3 d_u) v_x + k_3 p_{vx}}{|F_i| k_3 \operatorname{sign}(e_3) \cos(\psi)} \right)\end{aligned}\quad (4.86)$$

Siguiendo los pasos del control de x_t , si $|p_{vx}| < F_{\min}$ y ψ es pequeño, es posible escoger k_3 de tal modo que:

$$\frac{(1 - k_3 d_u) v_x + k_3 p_{vx}}{|F_i| k_3 \operatorname{sign}(e_3) \cos(\psi)} \leq 1 - \alpha_2 \quad (4.87)$$

Para una cierta constante α_2 positiva de tal manera que:

$$\dot{V}_3 \leq -k_3 \alpha_2 \cos(\psi) |F_i| |e_3| = -k_3 \alpha_2 |F_i| \cos(\psi) \sqrt{2V_3} \leq -k_3 \alpha_2 c_2 |F_{\min}| \sqrt{2V_3} \quad (4.88)$$

Aplicando de nuevo el principio de comparación se obtiene finalmente que:

$$|e_3(t)| \leq |e_3(0)| - k_3 \alpha_2 c_2 |F_{\min}| t \quad t \leq T_4 = \frac{|e_3(0)|}{k_3 \alpha_2 c_2 F_{\min}} \quad (4.89)$$

Con lo cual, puesto que h es positivo, se ve que e_3 se haría menor o igual que $h(t)$ en tiempo finito.

4.5.2. Efecto del ruido de la medida

Como ocurría en el caso anterior, el diseño del control se ha hecho asumiendo que las variables de estado pueden medirse con total precisión, de tal modo que es posible calcular e_3 exactamente para aplicar la ley de control (4.85).

Puesto que hay error en la medida de x y v_x , solo se puede construir la ley de control utilizando una estimación de los mismos. Entonces la estimación de la variable e_3 será:

$$\begin{aligned}\hat{e}_3 &= \hat{x} + k_3 \hat{v}_x = x + k_3 v_x + (\hat{x} - x) + k_3 (\hat{v}_x - v_x) \\ &= e_3 + n_x + k_3 n_{vx} = e_3 + \Delta e_3\end{aligned}\quad (4.90)$$

Donde Δe_3 es un error acotado, en particular:

$$|\Delta e_3| \leq |n_x| + k_3 |n_{vx}| \leq (1 + k_3) n_{\max} \quad (4.91)$$

De este modo la ley de control quedará como sigue:

$$\operatorname{sign}(F) = \begin{cases} -\operatorname{sign}(\hat{e}_3) & \text{si } |\hat{e}_3| > h(t) \\ \operatorname{sign}(F^-) & \text{si } |\hat{e}_3| < h(t) \end{cases} \quad (4.92)$$

4.5.3. Estabilidad de la dinámica transversal

El análisis de la convergencia de e_3 es ligeramente más complicado que el análisis realizado en el Lema 4.2 ya que en este caso la ley de control depende explícitamente del tiempo a través de la histéresis $h(t)$.

Siguiendo los pasos del Lema 4.2 es fácil comprobar que si $|e_3| \geq (1+k_3)n_{\max} + h(t)$, entonces (4.85) y (4.92) coinciden, de tal forma que las conclusiones de la fase de diseño son válidas y por tanto e_3 disminuye a un ritmo constante, alcanzando la región $|e_3| < (1+k_3)n_{\max} + h(t)$ en un tiempo finito.

No obstante, puesto que h es una función del tiempo, no es posible deducir que e_3 permanezca en dicha región para siempre, ya que $h(t)$ podría disminuir arbitrariamente rápido mientras que en general $e_3(t)$ disminuye con una velocidad acotada como se ilustra en la Figura 4.11.

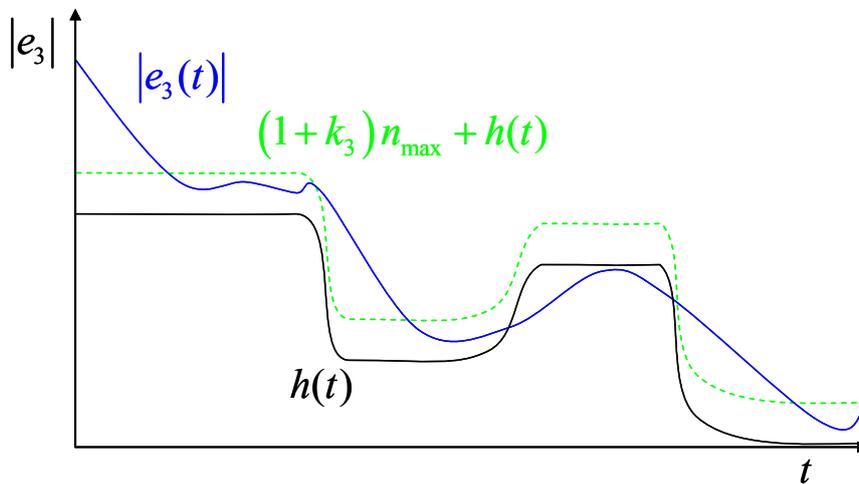


Figura 4.11. La variable e_3 persigue perezosamente a h .

Lema 4.4. Sea e_3 la variable definida por el sistema dinámico (4.80) sometido a una fuerza F elegida según la Tabla 4.2 y la ley de control (4.92) y sea $\psi(\tau)$ una función acotada tal que $|\psi(\tau)| < \pi/2$.

Supóngase además que la perturbación p es tal que $|p_{vx}| < F_{\min} |\cos(\psi(\tau))|$ para $t \geq t_0$. Entonces, siempre es posible escoger una constante k_3 tal que la ley de control (4.92) hace que e_3 sea ISS respecto a $h(t)$ y al ruido en la medida n .

Demostración: Sin pérdida de generalidad el estudio de la estabilidad entrada estado puede restringirse a la región Ω_I .

Puesto que $|\psi(\tau)| < \pi/2$ existe una constante positiva c_2 tal que $|\cos(\psi(\tau))| \geq c_2$ para $\tau \geq t_0$. Puesto que la perturbación es tal que $|p_{vx}| < F_{\min} |\cos(\psi(\tau))|$ entonces existe una constante α_2 tal que:

$$\frac{p_{vx}}{F_{\min} |\cos(\psi)|} \leq 1 - 2\alpha_2 \quad (4.93)$$

De este modo eligiendo k_3 de forma que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\frac{(1 - k_3 d_u)}{k_3 d_u} \leq \frac{F_{\min} c_2 \alpha_2}{F_{\max} + p_{\max}} \quad (4.94)$$

Lo que siempre es posible puesto que se puede tomar $k_3 = 1/d_u$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(1 - k_3 d_u) v_x + k_3 p_{vx}}{|F_i| k_3 \text{sign}(e_3) \cos(\psi)} \right| &\leq \left| \frac{(1 - k_3 d_u) v_x}{F_i k_3 \cos(\psi)} \right| + \left| \frac{p_{vx}}{F_i \cos(\psi)} \right| \leq \\ \left| \frac{1 - k_3 d_u}{F_{\min} k_3 c_2} \frac{F_{\max} + p_{\max}}{d_u} \right| + \left| \frac{p_{vx}}{F_i \cos(\psi)} \right| &= \alpha_2 + (1 - 2\alpha_2) = 1 - \alpha_2 \end{aligned} \quad (4.95)$$

Por lo que se verifica (4.87). Ahora bien, (4.85) es exactamente igual a (4.92) siempre y cuando e_3 sea suficientemente grande ya que:

$$\begin{aligned} |e_3| > |\Delta e_3| &\rightarrow \text{sign}(e_3) = \text{sign}(e_3 + \Delta e_3) \\ |e_3| > |\Delta e_3| + h(t) &\rightarrow |\hat{e}_3| > h(t) \Leftrightarrow |e_3| > h(t) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Si h es una función acotada, entonces tendrá un valor máximo en el intervalo $[t_0, t]$, denominado:

$$h_m = \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{h(\tau)\} \quad (4.97)$$

De este modo si $|e_3| \geq (1 + k_3)n_{\max} + h_m$, (4.85) y (4.92) coinciden. Por tanto las conclusiones de la fase de diseño son válidas y por tanto usando V_3 como función de Lyapunov del sistema. Aplicando el principio de comparación en el intervalo $[t_0, t]$:

$$|e_3(t)| \leq |e_3(t_0)| - k_3 \alpha_2 c_2 |F_{\min}| (t - t_0) \quad 0 \leq t - t_0 \leq \frac{|e_3(0)|}{k_3 \alpha_2 c_2 F_{\min}} \quad (4.98)$$

Esto implica que en un tiempo finito se alcanza $|e_3| = (1 + k_3)n_{\max} + h_m$, y puesto que V_3 decrece en la frontera de dicha región, entonces se cumple que:

$$|e_3(t)| \leq \max\left((1 + k_3)n_{\max} + h_m, |e_3(t_0)| - k_3 \alpha_2 c_2 |F_{\min}| (t - t_0)\right) \quad (4.99)$$

De este modo se tiene que:

$$e_3(t) \leq \beta(|e_3(t_0)|, t - t_0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |h(\tau)| + (1 + k_3) \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|n(\tau)\| \quad (4.100)$$

Por tanto, de acuerdo con la definición (4.9) resulta que e_3 es ISS respecto a h y n ■

Una vez que se sabe que e_3 es ISS respecto a h y al ruido se puede decir que le ocurre a x . Para ello teniendo en cuenta la definición de e_3 (4.79) y la dinámica de x (4.101) se tiene que:

$$\dot{x} = v_x = \frac{-x + e_3(t)}{k_3} \quad (4.102)$$

Lema 4.5. La solución $x(t)$ del sistema (4.102), es estable entrada-estado (ISS) respecto a e_3 .

Demostración: Se define la siguiente función de Lyapunov para el sistema (4.102):

$$V_4 = \frac{x^2}{2} \quad (4.103)$$

Calculando la derivada de dicha función a través de la trayectoria $x(t)$ se tiene que:

$$\dot{V}_4 = \frac{-x^2}{k_3} \left(1 - \frac{e_3(t)}{x} \right) \quad (4.104)$$

Es claro que la función de Lyapunov decrece siempre y cuando $|x| > e_3$. Si e_3 es acotado entonces e_{3m} está bien definido:

$$e_{3m} = \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{e_3(\tau)\} \quad (4.105)$$

De este modo es claro que si $|x| > e_{3m}/(1-\varepsilon)$, entonces se cumple que:

$$|x| > \frac{|e_{3m}|}{(1-\varepsilon)} \rightarrow \dot{V}_4 \leq -\frac{\varepsilon}{k_3} x^2 = -\frac{2\varepsilon}{k_3} V_4 \quad (4.106)$$

Puesto que la solución de (4.106) en caso de igualdad es una exponencial decreciente y aplicando el principio de comparación se tiene que:

$$|x| > (1+\varepsilon)|e_{3m}| \rightarrow \dot{V}_4(t) \leq V_4(t_0) e^{-\frac{2\varepsilon}{k_3}(t-t_0)} \rightarrow |x(t)| \leq |x(t_0)| e^{-\frac{\varepsilon}{k_3}(t-t_0)} \quad (4.107)$$

Además, cuando $|x| = (1+\varepsilon)|e_{3m}|$, entonces la función de Lyapunov es decreciente, lo que implica que $|x|$ no aumenta, de esto se deduce que:

$$|x(t)| \leq \max \left(|x(t_0)| e^{-\frac{\varepsilon}{k_3}(t-t_0)}, (1+\varepsilon)|e_{3m}| \right) \leq |x(t_0)| e^{-\frac{\varepsilon}{k_3}(t-t_0)} + (1+\varepsilon)|e_{3m}| \quad (4.108)$$

Y puesto que ε puede hacerse arbitrariamente pequeño se concluye que x es ISS respecto de e_3 , con $\gamma(e_3) = e_3$ ■

Una vez que se sabe que e_3 es ISS respecto del ruido y de h y que a su vez x es ISS respecto de e_3 , se está en condiciones de estudiar la estabilidad de x . Para ello se

mostrará que la conexión encadenada de dos sistemas ISS con funciones $\gamma_1(x)$ y $\gamma_2(x)$ es un sistema ISS con función $\gamma_2(\gamma_1(x))$.

Teorema 4.2. Sea el sistema dinámico (4.78) sometido a perturbaciones \mathbf{p} y ruido de la medida \mathbf{n} , acotados y $\psi(\tau)$ una función acotada $|\psi(\tau)| < \pi/2$. Si la cota de las perturbaciones y el ruido son suficientemente pequeñas, entonces es posible escoger k_3 de tal modo que el estado del sistema \mathbf{x}_l sea ISS respecto a h y \mathbf{n} , esto es:

$$\|\mathbf{x}_l(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}_l(t_0)\|, t-t_0) + \gamma_1\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |h(\tau)|\right) + \gamma_2\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{n}(\tau)\|\right) \quad (4.109)$$

Donde β es una función de clase KL y γ_1 y γ_2 son funciones de clase K .

Demostración: Si el ruido y las perturbaciones son lo suficientemente pequeños, las condiciones del Lema 4.4 se cumplen, de tal modo que es posible escoger k_3 de forma que e_3 sea ISS respecto a h y \mathbf{n} . Por otro lado, por el Lema 4.5, x es ISS respecto a e_3 . Esto significa que:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \beta_2(|x(t_0)|, t-t_0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |e_3(\tau)| \leq \\ &\leq \beta_2(|x(t_0)|, t-t_0) + \beta_1(|e_3(t_0)|, 0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{n}(\tau)\| + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|h(\tau)\| \end{aligned} \quad (4.110)$$

Donde se ha tenido en cuenta que una función de clase KL toma su valor máximo en el instante inicial. Aplicando la misma expresión para un tiempo inicial t_0+T se tiene que para $t > t_0+T$:

$$|x(t)| \leq \beta_2(|x(t_0)|, t-t_0) + \beta_1(|e_3(t_0)|, T) + \sup_{t_0+T \leq \tau \leq t} \|\mathbf{n}(\tau)\| + \sup_{t_0+T \leq \tau \leq t} \|h(\tau)\| \quad (4.111)$$

La función β_l es decreciente en T y puede hacerse tan pequeña como se quiera cuando $T \rightarrow \infty$, además puesto que $|x|, |e_2| < \|x_l\|$ existirá una función β_3 de clase KL tal que para todo tiempo $t < t_0$:

$$|x(t)| \leq \beta_3(\|\mathbf{x}_l(t_0)\|, t-t_0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{n}(\tau)\| + (1+k_3) \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|h(\tau)\| \quad (4.112)$$

Teniendo en cuenta la definición (4.79) se tiene:

$$|v_x| = \left| \frac{e_3 - x}{k_3} \right| \leq \frac{|e_3| + |x|}{k_3} \leq \frac{\beta_1 + \beta_3}{k_3} + \frac{2}{k_3} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |h(\tau)| + \frac{2(1+k_3)}{k_3} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{n}(\tau)\| \quad (4.113)$$

Puesto que la suma de β_1 y β_3 es una función de clase KL y usando (4.113) y (4.111) se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_t(t)\| &\leq |x(t)| + |v_x(t)| \leq \\ &\leq \beta(\|\mathbf{x}_t(t_0)\|, t-t_0) + \max\left(1, \frac{2}{k_3}\right) \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |h(\tau)| + (1+k_3) \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|\mathbf{n}(\tau)\| \right) \end{aligned} \quad (4.114)$$

Que se ajusta perfectamente a la estructura (4.109) ■

Corolario: En ausencia de ruido en la medida y si además, $h(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $x(t) \rightarrow 0$ y $v_x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.5.4. Consideraciones sobre el diseño

De nuevo, llegados a este punto conviene dar una interpretación intuitiva de lo que acaba de demostrarse en la sección anterior.

El resultado principal de la sección anterior es que si las perturbaciones no son muy grandes y el ángulo ψ es también pequeño, se puede hacer que la dinámica longitudinal del vehículo sea ISS respecto al ruido en la medida y la histéresis h mediante una correcta elección de la constante k_3 .

Además el Lema 4.4 es constructivo, ya que establece las relaciones (4.93) y (4.94) que permiten calcular de forma explícita un valor de k_3 que cumple las premisas del teorema. Aunque como ocurría en el caso anterior, dicho valor está basado en cotas superiores muy conservativas por lo que sintonizando la constante k_3 de acuerdo con (4.115) la respuesta en el transitorio puede ser muy lenta.

El significado de la estabilidad entrada-estado puede entenderse de forma simple teniendo en cuenta su definición (4.9). La idea fundamental es que si un sistema es ISS respecto a una entrada entonces para entradas acotadas, independientemente del estado inicial del sistema, el estado siempre permanece acotado (el sistema es BIBO estable si se considera el estado como una salida).

La función β representa el transitorio del sistema, esto es, nos indica como las variables de estado disminuyen a lo largo del tiempo para una condición inicial dada. Por otra parte la función γ mide la sensibilidad del sistema a la entrada.

De este modo, el control diseñado permite mantener el aerodeslizador en una cierta región en torno al eje y que puede variarse mediante $h(t)$. La Figura 4.12 muestra la trayectoria del sistema y la acción de control en ausencia de perturbaciones y ruido. Mientras la señal de control conmuta entre dos valores, la velocidad oscila en forma de diente de sierra mientras la posición describe una curva suave y finalmente acotada por h .

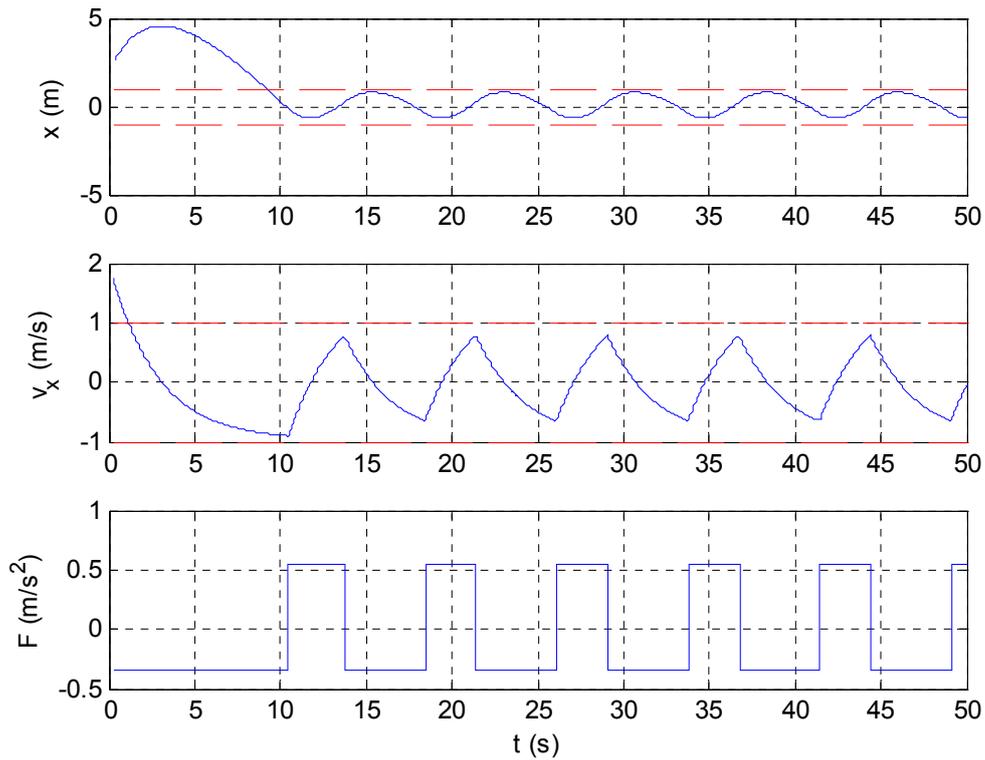


Figura 4.12. Oscilación periódica de x en una banda para $h=1$. La banda de radio h se muestra en línea discontinua.

Por otra parte en la Figura 4.13 se puede apreciar la trayectoria resultante en el espacio de estados. La trayectoria resultante para un valor de h constante es un ciclo límite estable que se encuentra contenido en una banda cuyo tamaño puede controlarse variando h .

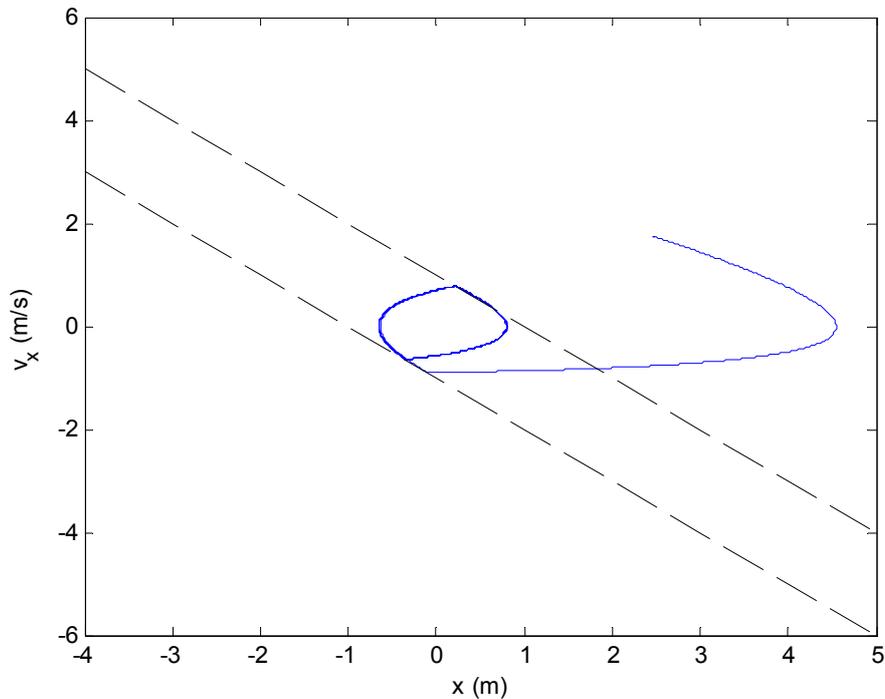


Figura 4.13. Diagrama de fases de la dinámica transversal. La trayectoria (en azul sólido) converge hacia un ciclo límite que se encuentra dentro de la banda $|e_3|=h$ (en negro discontinuo)

El aerodeslizador consigue mantenerse en un entorno del eje y conmutando entre $F > 0$ y $F < 0$. El tiempo que transcurre entre dos conmutaciones sucesivas puede estimarse fácilmente teniendo en cuenta que para que se produzca tal transición \dot{e}_3 debe de cambiar desde $-h$ hasta $+h$ de acuerdo con (4.92), esto determina un tiempo entre dos conmutaciones sucesivas:

$$\begin{aligned} \langle \dot{e}_3 \rangle &= \frac{(h(t_2) + \Delta e_3(t_2)) - (-h(t_1) + \Delta e_3(t_1))}{t_2 - t_1} \\ T_{\min} &= \frac{(h(t_2) + h(t_1)) - (\Delta e_3(t_2) + \Delta e_3(t_1))}{\dot{e}_{3\max}} \end{aligned} \quad (4.116)$$

La ecuación anterior clarifica la utilidad de h . Puesto que la derivada de e_3 es acotada si h es grande, entonces el tiempo mínimo de conmutación también lo es. Esto significa que la fuerza se mantiene constante durante largos periodos de tiempo lo que a su vez hace que el sistema oscile en una banda ancha alrededor del eje y .

Por otra parte al reducir h aumenta la frecuencia con la que conmuta el sistema disminuyendo así T_{\min} . Esto significa que para disminuir el tamaño de la banda es necesario aumentar la frecuencia de conmutación. Esta situación tiene un límite ya que la banda no puede estrecharse por debajo de $(1+k_3)n_{\max}$. Si h se reduce por debajo del nivel de ruido ($|h| < |\Delta e_3|$), el sistema comenzará a tener “chattering” ($T_{\min}=0$).

4.6. Control del sistema completo

En el apartado 4.4 se mostró que es posible diseñar una ley de control que manteniendo la fuerza F constante permitiera llevar y , y ψ a cero. Por otra parte, en el apartado 4.5 se ha diseñado un control que permite mantener x en una banda que puede controlarse por medio de una señal externa $h(t)$.

El objetivo de esta sección es ver como es posible hacer funcionar ambas acciones de control al mismo tiempo mediante una elección adecuada de h .

Supóngase en primer lugar que no existen ruido ni perturbaciones, el Teorema 4.1 afirma que si F permanece constante entonces la ley de control transversal hace que el sistema converja hacia el origen, de tal modo que, tomando un tiempo $T(x_t(t_0))$ suficientemente grande sería posible hacer que:

$$\|x_t(t)\| \leq \alpha \|x_t(t_0)\| \quad \forall t > t_0 + T(x_t(t_0)) \quad (4.117)$$

Siendo α una constante positiva menor que la unidad. Ahora bien, si se toma un valor de h suficientemente grande, entonces, de acuerdo con (4.116), el tiempo entre dos cambios sucesivos de la fuerza puede hacerse mayor que $T(x_t(t_0))$, de este modo, como se muestra en la Figura 4.14 $x_t \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, mientras que x_t permanece acotado.

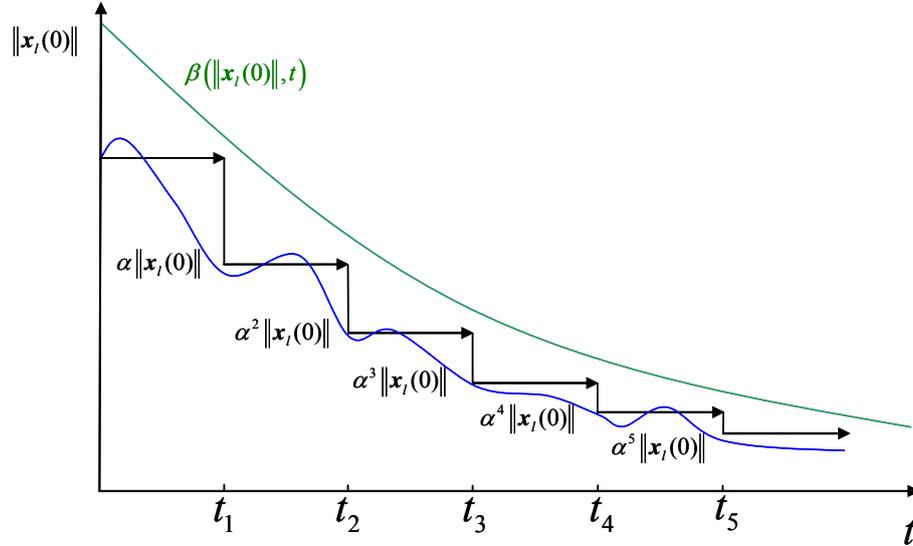


Figura 4.14. Convergencia transversal para h grande. Si se toma h suficientemente grande y en ausencia de ruido y perturbaciones, es posible hacer que $\|x_t\|$ sea α veces más pequeño en cada instante de conmutación. De este modo la trayectoria puede acotarse por una función decreciente β .

Este resultado se extiende de forma inmediata al caso en el cual existe ruido y perturbaciones:

Lema 4.6. Sea el sistema dinámico (4.3) sometido a las leyes de control (4.41) y (4.92), siendo el ruido y las perturbaciones suficientemente pequeños. Entonces existen constantes positivas k_1, k_2, k_3 y ε_l así como ciertas funciones acotadas h_{min} y h_{max} tales que si $h_{min}(\mathbf{x}_t(t_i)) < h(t_i) < h_{max}(\mathbf{x}_t(t_i))$, entonces \mathbf{x}_t es acotado y además \mathbf{x}_t cumple que:

$$\|\mathbf{x}_t(t)\| < \beta(\|\mathbf{x}_t(t_0)\|, t - t_0) + \gamma_1(\max(n_{max}, p_{max}, \varepsilon_1)) \quad (4.118)$$

Siendo β una función de clase KL , γ una función de clase K una constante arbitrariamente pequeña.

Demostración: Sean el ruido y la perturbación lo suficientemente pequeños para verificar las condiciones del Teorema 4.1 y del Teorema 4.2. Entonces el Teorema 4.1 implica que \mathbf{x}_t es global, final y uniformemente acotado, esto significa que existe una función β_1 de clase KL y una constante δ que entre dos instantes de conmutación se verifica:

$$\|\mathbf{x}_t(t)\| < \beta_1(\|\mathbf{x}_t(t_0)\|, t - t_0) + \delta \quad (4.119)$$

Sea $t_1 < t_2 < \dots < t_i$ la secuencia de instantes en el que la fuerza conmuta, entonces, puesto que $\beta_1(x, t)$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, existe un $T(\mathbf{x}_t(t_i))$ tal que

$$\|\mathbf{x}_t(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}_t(t_i)\| + \delta \quad \text{si} \quad t_i + T(\mathbf{x}_t(t_i)) \leq t \leq t_{i+1} \quad (4.120)$$

Siendo α una constante positiva menor que la unidad. Puesto que el tiempo de conmutación está acotado inferiormente por la relación (4.116), es claro que existe una función $h_{min}(\mathbf{x}_t(t_i))$ tal que si $h > h_{min}$ entonces $t_{i+1} - t_i > T(\mathbf{x}_t(t_i))$ y por tanto:

$$\|\mathbf{x}_t(t_{i+1})\| \leq \alpha \|\mathbf{x}_t(t_i)\| + \delta \quad (4.121)$$

Resolviendo la ecuación para la igualdad y aplicando el principio de comparación se tiene que:

$$\|\mathbf{x}_t(t_n)\| \leq \alpha^n \|\mathbf{x}_t(t_i)\| + \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \delta \quad (4.122)$$

Puesto que además \mathbf{x}_t es acotado entre instantes de conmutación, de acuerdo con (4.119) entonces:

$$\|\mathbf{x}_t(t)\| \leq \beta_1 \left(\alpha^n \|\mathbf{x}_t(t_0)\| + \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \delta, t-t_i \right) + cte \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (4.123)$$

Como el primer argumento de la función β_l es acotado y de hecho disminuye en el tiempo existe una función β y una constante δ_2 tal que (véase la Figura 4.14):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_t(t)\| &\leq \beta(\|\mathbf{x}_t(t_0)\|, t-t_0) + \beta_1 \left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \delta, 0 \right) + \delta \\ &= \beta(\|\mathbf{x}_t(t_0)\|, t-t_0) + \delta_2 \end{aligned} \quad (4.124)$$

En ausencia de ruido y perturbaciones δ se hace arbitrariamente pequeña y además δ_l es continua respecto de δ , entonces:

$$\|\mathbf{x}_t(t)\| < \beta(\|\mathbf{x}_t(t_0)\|, t-t_0) + \gamma(\max(n_{\max}, p_{\max}, \varepsilon_1)) \quad (4.125)$$

Por otra parte, el valor de h_{min} está acotado por una cierta función del estado, de modo que es posible escoger una segunda función $h_{max} > h_{min}$. Por lo que si se cumple que $h < h_{max}$, entonces por (4.114) se tiene que:

$$\|\mathbf{x}_t(t)\| \leq \beta_2(\|\mathbf{x}_t(t_0)\|, t-t_0) + \max\left(1, \frac{2}{k_3}\right) (h_{\max} + (1+k_3)n_{\max}) \quad (4.126)$$

Lo que completa la demostración ■

La limitación principal del resultado anterior es que \mathbf{x}_t solo se estabiliza en el caso de que h sea suficientemente grande (h_{min} puede estar acotado inferiormente), esto en general implica que x debe oscilar en un rango muy amplio para permitir la convergencia de y .

La pregunta lógica que cabría plantearse es si es posible disminuir el valor de h cuando \mathbf{x}_t sea suficientemente pequeño sin perder la convergencia. De este modo sería posible reducir \mathbf{x}_l y \mathbf{x}_t al mismo tiempo. El siguiente apartado investigará esta cuestión.

4.6.1. Sistema equivalente

Para analizar lo que le ocurre al aerodeslizador cuando la ley de control transversal opera cerca del origen se comenzará por expresar las ecuaciones dinámicas en torno al origen.

Puesto que la ley de control (4.41) es discontinua, no admite linealización en torno a $\mathbf{x}_r=0$, no obstante es posible considerar e_2 como un término de perturbación y determinar la dinámica que resulta. Utilizando (4.14) y la definición de e_1 se tiene que:

$$\dot{\psi} = -k_1 \text{sign}(F_i) (1 - \tanh(y)^2) v_y + \dot{e}_1 \quad (4.127)$$

Si en (4.14) se substituye la ecuación anterior y la derivada de e_1 por (4.17), teniendo en cuenta (4.15), y tras un poco de álgebra se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= -d_u v_y + F_i \sin(\psi) + p_{vy} \\ \dot{\psi} &= -k_1 \text{sign}(F_i) (1 - \tanh(y)^2) v_y - k_2 \psi - k_2 k_1 \cdot \text{sign}(F) \cdot \tanh(y) + e_2 \end{aligned} \quad (4.128)$$

Este conjunto de ecuaciones es suave y por lo tanto expandiendo en serie de Taylor en torno al origen:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= -d_u v_y - F_i \psi + p_{vy} + o(\psi^3) \\ \dot{\psi} &= -k_1 \text{sign}(F_i) v_y - k_2 \psi - k_2 k_1 \text{sign}(F_i) y + e_2 + o(y^2 v_y) + o(y^3) \end{aligned} \quad (4.129)$$

De este modo definiendo el estado transversal reducido $\mathbf{x}_r = [y, v_y, \psi]^T$ (donde se ha eliminado r de (4.14)) y para un \mathbf{x}_r pequeño la dinámica del sistema puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_r + \mathbf{B} e_2 + \mathbf{C} p_{vx} + o(\|\mathbf{x}_r\|^3) \\ \mathbf{A}_i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d_u & F_i \\ -k_1 k_2 \text{sign}(F_i) & -k_1 \text{sign}(F_i) & -k_2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.130)$$

La estabilidad del sistema estaría entonces definida por el comportamiento de $\mathbf{A}_i(t)$. En general, puesto que el sistema conmuta entre \mathbf{A}_1 ($F < 0$) y \mathbf{A}_2 ($F > 0$), no es fácil deducir la estabilidad del sistema completo cuando la secuencia de conmutación es arbitraria.

Existen estudios de este conjunto de sistemas conmutados que se basan en la existencia de una función de Lyapunov común (Johansson & Rantzer, 1998; Mason & Shorten, 2004; Narendra & Balakrishnan, 1994). Esto garantiza estabilidad sujeta a cualquier secuencia de conmutación. Sin embargo en este caso no se puede hacer uso de estas técnicas, ya que no existe una función de Lyapunov común para \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 . Como se verá

posteriormente, una conmutación arbitraria entre dichas matrices puede producir un sistema inestable.

Por otro lado otra estrategia que establece regiones de conmutación para garantizar la estabilidad en caso de conmutación estructurada se presenta en (Hespanha 2004). No obstante la estructura de control adoptada no permite controlar los instantes de conmutación ya que dependen de una variable exógena e_3 .

Para estudiar entonces el comportamiento del sistema hay que ver qué ocurre con la solución de (4.130) en los instantes de transición cuando se aplica A_1 durante un tiempo T_1 seguida de A_2 durante un tiempo T_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r(t_i + T_1) &= e^{A_1 T_1} \mathbf{x}_r(t_i) + \int_{t_i}^{t_i + T_1} e^{A_1(t_i + T_1 - s)} \left(\mathbf{B}e_2(s) + \mathbf{C}p_{vx}(s) + o(\|\mathbf{x}_r\|^3) \right) ds = \\ &= e^{A_1 T_1} \mathbf{x}_r(t_i) + \mathbf{d}_1(e_2, \mathbf{p}, \varepsilon_1, \mathbf{x}_r) \end{aligned} \quad (4.131)$$

Puesto que A_1 es Hurwitz la integral que aparece en la ecuación anterior es acotada. Teniendo en cuenta que $\|\exp(A_1 t)\| < \text{cond}(A_1) e^{-at}$ donde $a = |\max(\text{Re}(\lambda_i))| > 0$, y λ_i son los autovalores de A_1 , se ve que la integral que involucra p_{vx} es menor que $ap_{max} T_1$. Por otra parte es fácil acotar la integral que involucra e_2 , ya que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_i}^{t_i + T_1} e^{A_1(t_i + T_1 - s)} \mathbf{B}e_2(s) ds \right| &\leq \int_{t_i}^{t_i + T_1} \|e^{A_1(t_i + T_1 - s)}\| \|\mathbf{B}\| |e_2(s)| ds \leq \\ &\leq a \int_{t_i}^{t_i + \frac{|e_2(t_i)|}{|\tau_i| \alpha}} |e_2(t_i)| ds + a \int_{t_i}^{t_i + T_1} \max(cn_{max}, \varepsilon_1) ds = \\ &= acT_1 n_{max} + \frac{|e_2(t_i)|^2}{|\tau_i| \alpha} \end{aligned} \quad (4.132)$$

De este modo existen ciertas constantes c_i tales que para n_{max} y p_{max} suficientemente pequeños:

$$\|\mathbf{d}_1(t_i)\| \leq \left(c_1 n_{max} + c_2 p_{max} + c_3 \|\mathbf{x}_r(t_i)\|^3 \right) T_1 + c_4 \|e_2(t_i)\|^2 \quad (4.133)$$

Repitiendo el mismo razonamiento en el siguiente periodo de tiempo se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r(t_i + T_1 + T_2) &= e^{A_2 T_2} e^{A_1 T_1} \mathbf{x}_r(t_i) + e^{A_2 T_2} \mathbf{d}_1(t_i) + \\ &+ \int_{t_i + T_1}^{t_i + T_1 + T_2} e^{A_2(t_i + T_1 + T_2 - s)} \left(\mathbf{B}e_2(s) + \mathbf{C}p_{vx}(s) + o(\|\mathbf{x}_r\|^3) \right) ds = \\ &= e^{A_2 T_2} e^{A_1 T_1} \mathbf{x}_r(t_i) + \mathbf{d}_2(t_i) \end{aligned} \quad (4.134)$$

$$\|\mathbf{d}_2(t_i)\| \leq \left(c_5 n_{max} + c_6 p_{max} + c_7 \|\mathbf{x}_r(t_i)\|^3 \right) (T_1 + T_2) + c_8 \|e_2(t_i)\|^2$$

El inconveniente de esta expresión es que la cota de la perturbación d_2 depende de una variable exógena e_2 . No obstante, de acuerdo con el Lema 4.2, si T_1 y T_2 son suficientemente grandes e_2 alcanza su cota final proporcional a cn_{max} en cada intervalo de tiempo.

Puesto que en cada transición el valor de e_2 cambia de forma discontinua en una cantidad Δe_2 (ver Figura 4.15) que puede calcularse fácilmente de acuerdo con su definición (4.17) y (4.16), se tiene:

$$\begin{aligned}
 e_2 &= k_2 \psi + k_1 k_2 \text{sign}(F) \tanh(y) + r + k_1 \text{sign}(F) (1 - \tanh(y)^2) v_y \\
 e_2(t_i) &= e_2(t_i^-) + \Delta e_2(t_i) \\
 \Delta e_2(t_i) &= \pm (2k_1 k_2 \tanh(y) + 2k_1 (1 - \tanh(y)^2) v_y) \\
 |\Delta e_2(t_i)| &\leq c_9 \|x_r\|
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

De este modo si se cumple que $T_i > \alpha_i \|x_r(t_i)\|$ para una constante α_i suficientemente grande, entonces el Lema 4.2 implica que transcurrido un tiempo inicial suficientemente grande:

$$\|d_2(t_i)\| \leq (c_5 n_{max} + c_6 p_{max} + c_7 \|x_r(t_i)\|^3) (T_1 + T_2) + (c_8 \|x_r(t_i)\| + cn_{max})^2 \tag{4.136}$$

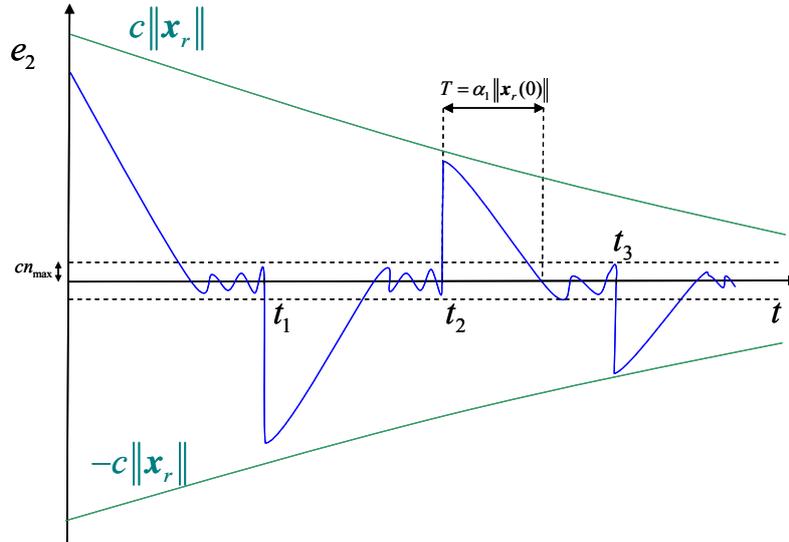


Figura 4.15. Comportamiento de la variable e_2 . Si T es suficientemente grande entonces e_2 se puede acotar finalmente por $\max(\|x_r\|, cn_{max})$.

Para analizar el comportamiento asintótico de T_1 y T_2 cuando h es pequeño se puede utilizar la ecuación (4.116), de este modo:

$$T_i = t_{i+1} - t_i = \frac{(h(t_2) + h(t_1)) - (\Delta e_3(t_2) + \Delta e_3(t_1))}{(1 + k_3 d_u) \langle v_x \rangle + k_3 |F_i| \langle \cos(\psi) \rangle + k_3 \langle p_{vx} \rangle} \tag{4.137}$$

Si se cumplen las condiciones del Teorema 4.2, entonces el denominador no se anula (el término que acompaña a F_i es mayor que el término con v_x y el término con p_{vx}). Esto significa que T_i es una función analítica de sus argumentos y por tanto es posible

desarrollarla en serie de Taylor. Para ello en primer lugar hay que tener en cuenta que para \mathbf{x}_r pequeño $\langle \cos(\psi) \rangle = 1 + o(\|\mathbf{x}_r\|^2)$ y como la cota para la derivada de e_3 (4.91) entonces:

$$T_i = \frac{h(t_2) + h(t_1)}{k_3 |F_i|} \left(1 + o(\langle v_x \rangle) + o(p_{\max}) + o(\|\mathbf{x}_r\|^2) \right) + o(n_{\max}) \quad (4.138)$$

Observando ahora la dinámica de v_x :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= F_i(x, v_x, h_i) - d_u v_x + o(p_{\max}) + o(\|\mathbf{x}_r\|) \end{aligned} \quad (4.139)$$

Supóngase en primer lugar que h es constante, \mathbf{x}_r es cero, y no hay perturbaciones ni ruido, entonces la ecuación anterior no tiene ningún punto de equilibrio (F nunca se anula).

Además por el Teorema 4.2 las trayectorias del sistema son acotadas, de modo que por el criterio de Poincaré-Bendixon, el sistema (4.139) posee una órbita periódica. Esta órbita periódica es además un ciclo límite estable como se ilustra en la Figura 4.13.

Para evidenciar esto basta con ver que v_x es lineal respecto a F_i , además F_i varía entre dos valores constantes en los tiempos T_i de tal manera que:

$$\begin{aligned} v_x(t_{n+1}) &= v_x(t_n) e^{-d_u T_1} + \frac{F_1}{d_u} (1 - e^{-d_u T_1}) \\ v_x(t_{n+2}) &= v_x(t_n) e^{-d_u(T_1+T_2)} + \frac{F_1}{d_u} (1 - e^{-d_u T_1}) e^{-d_u T_2} + \frac{F_2}{d_u} (1 - e^{-d_u T_2}) \end{aligned} \quad (4.140)$$

De este modo la órbita será periódica si $v_x(t_{n+2}) = v_x(t_n) = v_0$. Puesto que T_i es continuo respecto de $\langle v_x \rangle$, si se definen T_{10} y T_{20} como los tiempos en la órbita periódica, y la diferencia $\delta_n = v_x(t_n) - v_0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_{n+2} &= v_x(t_n) - v_0 = v_x(t_n) e^{-d_u(T_1+T_2)} + \frac{F_1}{d_u} (1 - e^{-d_u T_1}) e^{-d_u T_2} + \frac{F_2}{d_u} (1 - e^{-d_u T_2}) - v_0 = \\ &= (\delta_n + v_0) e^{-d_u(T_1+T_2)} - v_0 + \frac{F_1}{d_u} (1 - e^{-d_u T_1}) e^{-d_u T_2} + \frac{F_2}{d_u} (1 - e^{-d_u T_2}) = \\ &= \delta_n e^{-d_u(T_{10}+T_{20})+o(h\langle v_x \rangle)} + \left(e^{-d_u(T_{10}+T_{20})+o(h\langle v_x \rangle)} - 1 \right) v_0 + \\ &\quad + \frac{F_1}{d_u} \left(1 - e^{-d_u T_{10}+o(h\langle v_x \rangle)} \right) e^{-d_u T_{20}+o(h\langle v_x \rangle)} + \frac{F_2}{d_u} \left(1 - e^{-d_u T_{20}+o(h\langle v_x \rangle)} \right) = \\ &= \delta_n e^{-d_u(T_{10}+T_{20})+o(h\langle v_x \rangle)} + o(\delta_n h \langle v_x \rangle) + o(h \langle v_x \rangle) + \\ &\quad + \left(e^{-d_u(T_{10}+T_{20})} - 1 \right) v_0 + \frac{F_1}{d_u} (1 - e^{-d_u T_{10}}) e^{-d_u T_{20}} + \frac{F_2}{d_u} (1 - e^{-d_u T_{20}}) \end{aligned} \quad (4.141)$$

Puesto que en la órbita periódica $v_x(t_n + T_{10} + T_{20}) = v_x(t_n) = v_0$ entonces según (4.140):

$$v_0 = e^{-d_u(T_{10}+T_{20})} v_0 + \frac{F_1}{d_u} (1 - e^{-d_u T_{10}}) e^{-d_u T_2} + \frac{F_2}{d_u} (1 - e^{-d_u T_{20}}) \quad (4.142)$$

Que substituido en (4.141) da:

$$\delta_{n+2} = \delta_n e^{-d_u(T_{10}+T_{20})} + o(\delta_n h \langle v_x \rangle) + o(h \langle v_x \rangle) \quad (4.143)$$

Esto significa que al menos para h suficientemente pequeño δ tiende a cero y por tanto el ciclo límite es estable. Entonces transcurrido un tiempo suficientemente grande y teniendo en cuenta la continuidad de las soluciones respecto del ruido y las perturbaciones se puede concluir que para un ruido y unas perturbaciones suficientemente pequeñas $\langle v_x \rangle$ es, una función suave en h . Este hecho permite reescribir (4.138) como sigue:

$$T_i = \frac{2h_i}{k_3 |F_i|} \left(1 + f(h_i, F_i) + o(\Delta h) + o(p_{\max}) + o(\|\mathbf{x}_r\|^2) \right) + o(n_{\max}) \quad (4.144)$$

Donde f es una función de clase K en h . En particular esto significa que cuando h , el ruido y las perturbaciones son pequeños, entonces los tiempos T_1 y T_2 son aproximadamente proporcionales a h . Si además h varía lentamente entonces T_1 y T_2 son aproximadamente constantes (oscilación cuasi periódica). Si se sustituye el resultado anterior en (4.134) y teniendo en cuenta que la exponencial de matrices es analítica respecto a T_1 y T_2 se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r(t_i + T_1 + T_2) = & e^{A_2 \left(\frac{2h_{i+1}}{k_3 |F_2|} (1 + f(h_{i+1}, F_{i+1})) \right)} e^{A_1 \left(\frac{2h_i}{k_3 |F_1|} (1 + f(h_i, F_i)) \right)} \mathbf{x}_r(t_i) + \\ & + o(\Delta h \|\mathbf{x}_r\|) + o(p_{\max}) + o(n_{\max}) + o(\|\mathbf{x}_r\|^2) \end{aligned} \quad (4.145)$$

La ecuación anterior sugiere que para analizar la estabilidad del sistema hay que estudiar la dinámica del siguiente sistema “equivalente”:

$$\mathbf{x}_{n+1} = e^{A_2 \left(\frac{2h_{n+1}}{k_3 |F_2|} (1 + f(h_{n+1}, F_2)) \right)} e^{A_1 \left(\frac{2h_n}{k_3 |F_1|} (1 + f(h_n, F_1)) \right)} \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n = \mathbf{A}_{eq}(h_n) \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n \quad (4.146)$$

El siguiente lema expresa de forma rigurosa el contenido del análisis anterior:

Lema 4.7. Bajo las condiciones del Teorema 4.1 y del Teorema 4.2 si se cumple que $h_{\max} > h_n > c \|\mathbf{x}_r\|$ para una constante c suficientemente grande, existe un entorno del origen $\|\mathbf{x}_r\| < R$ tal que si las perturbaciones y el ruido son suficientemente pequeñas el valor de \mathbf{x}_r en los instantes de conmutación pares $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_r(t_{2n})$ viene dado por:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_{eq}(h_n) \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n \quad (4.147)$$

Donde la perturbación \mathbf{d} puede acotarse de la siguiente forma:

$$\|\mathbf{d}_n\| \leq c_1 \|\mathbf{x}_n\|^2 + c_2 |\Delta h_n| \|\mathbf{x}_r\| + \gamma_1 (\max(n_{\max}, p_{\max})) \quad (4.148)$$

Siendo γ_l una función de clase K y c_1 y c_2 constantes.

Demostración: Puesto que h es mayor que $c\|\mathbf{x}_r\|$ y teniendo en cuenta (4.116) se tiene que:

$$T_i \geq \frac{2c\|\mathbf{x}_r\| - 2(1+k_3)n_{\max}}{\dot{e}_{3Max}} \quad (4.149)$$

En esta ecuación cabría destacar dos casos. Supongase primeramente que $\|\mathbf{x}_r\| > n_{\max}$, entonces eligiendo $c > 3(1+k_3)/2$ se tiene que $T_i > c/\dot{e}_{3Max}\|\mathbf{x}_r\|$, que puede hacerse mayor que $\alpha_l\|\mathbf{x}_r\|$ tomando c suficientemente grande. Esto implica que la ecuación (4.136) sería válida.

Si entonces R se elige de tal modo que sea menor que el menor radio de convergencia de las series de Taylor utilizadas en (4.129) y (4.137), entonces la relación (4.145) también es válida y de este modo la relación (4.148) se verifica automáticamente en el entorno $\|\mathbf{x}_r\| < R$.

Por otra parte si $\|\mathbf{x}_r\| \leq n_{\max}$, considerando la definición de \mathbf{A}_{eq} , se tiene que para todo $h < h_m$, $\|\mathbf{A}_{eq}\|$ es acotada con cota M . De este modo teniendo en cuenta que (4.128) es Lipschitz respecto al estado con cota de Lipschitz L :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{A}_{eq}(h_n)\mathbf{x}_n\| &\leq \|\mathbf{x}_{n+1}\| + \|\mathbf{A}_{eq}(h_n)\|\|\mathbf{x}_n\| \leq \|\mathbf{x}_n\|e^{LT_i} + M\|\mathbf{x}_n\| \\ &\leq n_{\max}(e^{LT_i} + M) \leq n_{\max}\left(e^{\frac{2Lh_{\max}(1+f(h_{\max}))}{k_3F_i}} + M\right) + o(\Delta h\|\mathbf{x}_r\|) + \\ &\quad + o(p_{\max}) + o(n_{\max}) + o(\|\mathbf{x}_r\|^2) \leq \\ &\leq a\|\mathbf{x}_n\|^2 + b|\Delta h_n|\|\mathbf{x}_r\| + \gamma_1(\max(n_{\max}, p_{\max})) \end{aligned} \quad (4.150)$$

Con lo que la relación (4.148) también se verifica, lo que completa la demostración ■

A continuación se verá de que manera la estabilidad del sistema equivalente está relacionada con la estabilidad del sistema completo en un entorno del origen.

Teorema 4.3. Si el sistema equivalente discreto (4.147) es asintóticamente estable para cualquier $h < h_m$, siendo $0 < \rho(h) < 1$ el radio espectral de \mathbf{A}_{eq} , y además existe una función $h(x)$ de clase K que cumple las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left|x \frac{dh}{dx}\right| &\leq \frac{a}{h}(1 - \rho(h/3))^2 \\ h &\geq c(1 - \rho(h/3))^2 \\ \|\mathbf{x}\| &\leq \min\left(\alpha(x)(1 - \rho(h(x)))^2, bh\right) \end{aligned} \quad (4.151)$$

Para unas constantes a y b pequeñas, una constante arbitraria c , y una función α de clase K .

Entonces existe una constante R_l y unas funciones β y γ de clase KL y K respectivamente, tales que si $\|\mathbf{x}_r(0)\| < R_l$ el sistema (4.128), sometido a la secuencia de conmutación definida por (4.137) siendo $h(t) = h(\|\mathbf{x}_r(t)\|)$, y para p y n suficientemente pequeños, cumple:

$$\|\mathbf{x}_r(t)\| < \beta(\|\mathbf{x}_r(0)\|, t - t_0) + \gamma(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \quad (4.152)$$

Demostración: Primero se analiza lo que ocurre con \mathbf{x}_r en los instantes de conmutación pares, para ello puesto que \mathbf{A}_{eq} es estable, entonces $\|\mathbf{A}_{eq}^n\| < C\rho^n$, donde C es una cota del número de condición de la matriz \mathbf{A}_{eq} (que está bien definido puesto que \mathbf{A}_{eq} no es singular para $h < h_m$). Se define entonces la siguiente función:

$$V(\mathbf{x}, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_{eq}^k(h))^T \mathbf{A}_{eq}^k(h) \mathbf{x} \quad (4.153)$$

V está bien definida ya que $\|\mathbf{A}^n \mathbf{x}\|^2 < C^2 \mathbf{x}_0^2 \rho^{2n}$ de tal forma que el sumatorio puede acotarse por una serie geométrica convergente de razón ρ^2 :

$$V(\mathbf{x}_n, h(\|\mathbf{x}_n\|)) \equiv V(\mathbf{x}_n) \leq \frac{C^2}{1 - \rho^2(h(\|\mathbf{x}_n\|))} \|\mathbf{x}_n\|^2 \leq C^2 \alpha(\|\mathbf{x}_n\|) \|\mathbf{x}_n\| \quad (4.154)$$

$$\|\mathbf{x}_n\|^2 \leq V(\mathbf{x}_n) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}_n\|)$$

V es claramente definido positivo al ser mayor que $\|\mathbf{x}_r\|^2$ por lo que puede usarse como función de Lyapunov discreta para $\mathbf{x}_{n_i} = \mathbf{x}_r(t_{2n_i})$. Antes de poder utilizar dicha función se necesitan unos cálculos previos. En primer lugar calculando la derivada de \mathbf{A}_{eq} respecto de h se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} &= \frac{2\mathbf{A}_2}{k_3 F_2} (1 + f'(h, F_2)) e^{\frac{A_2}{k_3 F_2} (1+f(h, F_2))} e^{\frac{A_1}{k_3 F_1} (1+f(h, F_2))} + \\ &+ e^{\frac{A_2}{k_3 F_2} (1+f(h, F_2))} \frac{2\mathbf{A}_1}{k_3 F_1} (1 + f'(h, F_1)) e^{\frac{A_1}{k_3 F_1} (1+f(h, F_1))} = \\ &= \frac{2\mathbf{A}_2}{k_3 F_2} (1 + f'(h, F_2)) \mathbf{A}_{eq} + \mathbf{A}_{eq} \frac{2\mathbf{A}_1}{k_3 F_1} (1 + f'(h, F_2)) \\ \left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} \right\| &\leq \sup_{h < h_m} \{f'(h, F_i)\} \frac{2C(\|\mathbf{A}_1\| + \|\mathbf{A}_2\|)}{k_3 F_{\min}} \|\mathbf{A}_{eq}\| = c_3 \|\mathbf{A}_{eq}\| \end{aligned} \quad (4.155)$$

Donde se ha usado el hecho de que una matriz conmuta con su exponencial, así como la cota para la norma de una matriz, y que f es acotado. Generalizando para la potencia n -ésima se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{A}_{eq}^k}{dh} &= \frac{d}{dh}(\mathbf{A}_{eq}\mathbf{A}_{eq}\mathbf{A}_{eq}\dots\mathbf{A}_{eq}) = \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh}\mathbf{A}_{eq}\mathbf{A}_{eq}\dots\mathbf{A}_{eq} + \\
&+ \mathbf{A}_{eq}\frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh}\mathbf{A}_{eq}\dots\mathbf{A}_{eq} + \mathbf{A}_{eq}\mathbf{A}_{eq}\frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh}\dots\mathbf{A}_{eq} + \\
&+ \dots + \mathbf{A}_{eq}\mathbf{A}_{eq}\mathbf{A}_{eq}\dots\frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh}
\end{aligned} \tag{4.156}$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}^k}{dh} \right\| &\leq \left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} \right\| \|\mathbf{A}_{eq}^{k-1}\| + \|\mathbf{A}_{eq}\| \left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} \right\| \|\mathbf{A}_{eq}^{k-2}\| + \dots + \|\mathbf{A}_{eq}^{k-1}\| \left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} \right\| \leq \\
&\leq \left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} \right\| (C\rho^{k-1} + C\rho C\rho^{k-2} + C\rho^2 C\rho^{k-3} + \dots + C\rho^{k-1}) \leq \\
&\leq C^2 k \rho^{k-1} \left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} \right\| \leq C^2 c_3 \left\| \frac{d\mathbf{A}_{eq}}{dh} \right\| \cdot k \rho^{k-1} \leq c_3 C^3 k \rho^k
\end{aligned} \tag{4.157}$$

De este modo el efecto de la variación de h entre instantes de conmutación puede cuantificarse utilizando el teorema del valor medio como sigue:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{V(\mathbf{x}, h_{n+1}) - V(\mathbf{x}, h_n)}{\Delta h_n} \right| &= \left| \frac{\partial V(\mathbf{x}, h)}{\partial h} \Big|_{h=\xi \in [h_n, h_{n+1}]} \right| \leq \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{d}{dh} \left((\mathbf{A}_{eq}^k(h))^T \mathbf{A}_{eq}^k(h) \right) \Big|_{h=\xi} \right\| \leq \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2 \left\| \left(\frac{d\mathbf{A}_{eq}^k(h)}{dh} \right)^T \mathbf{A}_{eq}^k(h) \right\|_{h=\xi} \leq \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_1 C^3 k \rho^k C \rho^k = c_3 C^4 \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^{2k} \\
&\leq c_3 C^4 \|\mathbf{x}\|^2 \frac{\rho(\xi)}{(1-\rho(\xi)^2)^2} \leq c_3 C^4 \|\mathbf{x}\|^2 \frac{1}{(1-\rho(h-|\Delta h|)^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.158}$$

Puesto que ρ es una función no creciente en h , entonces la cota mínima se obtiene en el caso de que h sea mínimo lo que justifica el último paso de la secuencia anterior.

Para analizar la estabilidad es conveniente analizar dos casos.

Caso A) Supongase que $\min(h, \|\mathbf{x}_r\|) > \max(p_{max}, n_{max})$, entonces de la relación (4.151) se puede deducir una cota para Δh_n .

$$\Delta h_n = \frac{dh(\|\mathbf{x}_r\|)}{d\|\mathbf{x}_r\|} \frac{d\|\mathbf{x}_r\|}{dt} \Delta t_n$$

$$|\Delta h_n| \leq \left| \frac{dh}{d\|\mathbf{x}_r\|} \right|_{h=\xi} \left(\|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}_r\| + o(p_{\max}) + o(\|\mathbf{x}_r\|^2) \right) \frac{\Delta t_n}{h_n} \quad (4.159)$$

Puesto que $h > n_{\max}$, entonces $\Delta t/h_n$ es acotado como se deduce de la siguiente relación:

$$\frac{t_{n+1} - t_n}{h_n} \leq \frac{\frac{h_{n+1}}{h_n} + 1 + 2(1+k_3) \frac{n_{\max}}{h_n}}{(1+k_3 d_u) \langle v_x \rangle + k_3 F_i \langle \cos(\psi) \rangle + k_3 \langle p_{vx} \rangle} \leq M_2 \quad (4.160)$$

De este modo eligiendo a suficientemente pequeño y puesto $\|\mathbf{x}_r\| > p_{\max}$ se tiene:

$$|\Delta h_n| \leq a M_2 (1 - \rho(\xi/3))^2 \left(\|\mathbf{A}_i\| + \frac{c_4 p_{\max}}{\|\mathbf{x}_n\|} + c_5 \|\mathbf{x}_n\| \right) \leq$$

$$\leq a c M_2 h_n (\|\mathbf{A}_i\| + c_4 + c_5 R) \leq \frac{h_n}{2} \quad (4.161)$$

De este modo finalmente si la constante a del es suficientemente pequeño tal como se exige en las condiciones el teorema se obtiene:

$$|V(\mathbf{x}, h_{n+1}) - V(\mathbf{x}, h_n)| \leq$$

$$\leq a M_2 c_3 C^4 \left(\|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}\|^2 + c_4 p_{\max} \|\mathbf{x}\| + c_5 \|\mathbf{x}\|^3 \right) \frac{(1 - \rho(\xi/3))^2}{(1 - \rho(h-h/2))^2} \Big|_{\xi \in [h, h+h/2]} \leq$$

$$\leq a M_2 c_3 C^4 \left(\|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}\|^2 + c_4 R p_{\max} + c_5 \|\mathbf{x}\|^3 \right) \frac{(1 - \rho(h/2))^2}{(1 - \rho(h/2))^2} \leq \quad (4.162)$$

$$\leq a M_2 c_3 C^4 \left(\|\mathbf{A}_i\| \|\mathbf{x}\|^2 + c_4 R p_{\max} + c_5 \|\mathbf{x}\|^3 \right)$$

$$\leq a c_6 \|\mathbf{x}\|^2 + a c_7 p_{\max} + a c_8 \|\mathbf{x}\|^3$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\Delta V_n &= V(\mathbf{x}_{n+1}, h_{n+1}) - V(\mathbf{x}_n, h_n) = \\
&= (V(\mathbf{x}_{n+1}, h_{n+1}) - V(\mathbf{x}_{n+1}, h_n)) + (V(\mathbf{x}_{n+1}, h_n) - V(\mathbf{x}_n, h_n)) = \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}_n^T \mathbf{A}_{eq}^T + \mathbf{d}_n^T) (\mathbf{A}_{eq}^l)^T \mathbf{A}_{eq}^l (\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n^T (\mathbf{A}_{eq}^l)^T \mathbf{A}_{eq}^l \mathbf{x}_n + \\
&\quad + ac_6 \|\mathbf{x}_{n+1}\|^2 + ac_7 p_{\max} + ac_8 \|\mathbf{x}_{n+1}\|^3 = \\
&= -\mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{A}_{eq}^l)^T \mathbf{A}_{eq}^l \right) \mathbf{d}_n + 2\mathbf{x}_n^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{A}_{eq}^{l+1})^T \mathbf{A}_{eq}^l \right) \mathbf{d}_n + \quad (4.163) \\
&\quad + ac_4 \|\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n\|^2 + ac_4 p_{\max} + ac_5 \|\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n\|^3 \leq \\
&\leq -\|\mathbf{x}_n\|^2 + ac_6 \|\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n\|^2 + ac_7 p_{\max} + ac_8 \|\mathbf{A}_{eq} \mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n\|^3 \\
&\quad + \frac{C^2}{1-\rho^2} \|\mathbf{d}_n\|^2 + \frac{2C^2}{1-\rho^2} \|\mathbf{A}_{eq}\| \|\mathbf{x}_n\| \|\mathbf{d}_n\|
\end{aligned}$$

En primer lugar nótese que por la segunda condición de (4.151) $\|\mathbf{x}_r\| < b|h|$, para b suficientemente grande se verifican las condiciones del Lema 4.7. Utilizando $V(\mathbf{x}_r, h(\|\mathbf{x}_r\|)) = V(\mathbf{x}_r)$ como función de Lyapunov discreta del sistema junto con la relación anterior se llega al resultado (4.163).

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación (4.138), puesto que $h > b\|\mathbf{x}_r\|$ para c suficientemente grande se verifica que $T_i > \alpha_i \|\mathbf{x}_r\|$, de este modo la cota (4.145) para \mathbf{d} es válida y es posible expandir la expresión (4.163) en términos de las potencias de \mathbf{x}_n .

Por simple inspección de la expresión (4.163) es claro que los términos del desarrollo contendrán potencias de la forma $\|\mathbf{x}_n\|^3$, $\|\mathbf{x}_n\|^2 \|\mathbf{d}_n\|$, $\|\mathbf{x}_n\| \|\mathbf{d}_n\|^2$ y $\|\mathbf{d}_n\|^3$ multiplicadas por a y otras constantes, así como términos de la forma $\|\mathbf{x}_n\|^3$, $\|\mathbf{x}_n\|^2 \|\mathbf{d}_n\|$, $\|\mathbf{x}_n\| \|\mathbf{d}_n\|^2$ divididos por $1-\rho^2$. Puesto que $1/(1-\rho^2)$ es mayor que la unidad, los primeros términos serán menores que los segundos a excepción de $\|\mathbf{d}_n\|^3$ de tal manera que finalmente existen ciertas constantes c_i tales que:

$$\begin{aligned}
\Delta V_n &\leq -\|\mathbf{x}_n\|^2 \left(1 - \left(\frac{c_9 \|\mathbf{x}_n\|}{1-\rho^2} + \frac{2c_1 c_2 c_9 |\Delta h_n| \|\mathbf{x}_n\|}{1-\rho^2} + \frac{c_1^2 c_9 \|\mathbf{x}_n\|^2}{1-\rho^2} + \frac{c_2 c_9 |\Delta h_n|}{1-\rho^2} + \frac{c_2^2 c_9 |\Delta h_n|^2}{1-\rho^2} \right) \right) + \\
&\quad + 2c_9 \frac{C^2}{1-\rho^2} \left(\gamma(\max(n_{\max}, p_{\max})) + 2c_1 \|\mathbf{x}_n\|^2 + c_2 |\Delta h_n| \|\mathbf{x}_n\| \right) \gamma(\max(n_{\max}, p_{\max})) \\
&\quad + ac_7 \gamma(\max(n_{\max}, p_{\max}))^3
\end{aligned} \quad (4.164)$$

Teniendo en cuenta las condiciones del teorema, los términos del primer paréntesis que involucran $|\Delta h|$ pueden acotarse del mismo modo que se hizo en (4.162), además los términos de la forma $\|\mathbf{x}_n\|/(1-\rho^2)$ también pueden acotarse por la función $\alpha(\|\mathbf{x}_n\|)$. De este modo puesto que α es continua existe un δ tal que si $\|\mathbf{x}_n\| < \delta$, entonces los términos entre paréntesis son menores que 1/2.

Por otra parte los términos que involucran el ruido y la perturbación se encuentran multiplicados por términos de la forma $1/(1-\rho^2)$ que pueden acotarse por $\alpha(\|\mathbf{x}_n\|)/\|\mathbf{x}_n\|$, por lo que si $\|\mathbf{x}_n\| < R_I < \min(R, \delta)$ y además el ruido y las perturbaciones son suficientemente pequeños existe una función γ_2 de clase K de modo que finalmente:

$$\Delta V_n \leq -\frac{\|\mathbf{x}_n\|^2}{2} + \frac{\gamma_2(\max(n_{\max}, p_{\max}))}{\|\mathbf{x}_n\|} \leq 0 \text{ si } \|\mathbf{x}_n\| \geq \sqrt[3]{2\gamma_2(\max(n_{\max}, p_{\max}))} \quad (4.165)$$

El miembro derecho de la ecuación (4.165) es negativo cuando $\|\mathbf{x}_n\|$ es mayor que una cierta función de clase K de las perturbaciones y el ruido.

Caso B) Supóngase por el contrario que $\min(h, \|\mathbf{x}_r\|) \leq \max(p_{\max}, n_{\max})$, esto implica que o bien $\|\mathbf{x}_r\| \leq \max(p_{\max}, n_{\max})$ o bien $\|\mathbf{x}_r\| \leq h^{-1}(\max(p_{\max}, n_{\max}))$ que es una función de clase K . En cualquiera de los dos casos existe una función γ_3 de clase K tal que si $\gamma_3(\max(p_{\max}, n_{\max})) < \|\mathbf{x}_n\| < \min(R, \delta)$ entonces V disminuye.

La ecuación (4.154) implica que las curvas de nivel de V están atrapadas entre dos bolas. En particular la curva de nivel $\min(R, \delta)$ está dentro de la bola de radio $\min(R, \delta)$ ya que si $V < \min(R, \delta)$ entonces $\|\mathbf{x}_n\| < V < \min(R, \delta)$. De este modo si $R_I = \alpha_2^{-1}(\min(R, \delta))$ se tiene que si $\|\mathbf{x}_n\| < R_I$ entonces $V < \min(R, \delta)$ (la bola de radio R_I está dentro de la curva de nivel $V = \min(R, \delta)$), véase la Figura 4.16.

Esto implica que la trayectoria que comienza en la bola de radio R_I no podrá abandonar dicha región sin entrar antes en la bola $\|\mathbf{x}_n\| < \gamma_3$ ya que en caso contrario se atravesaría la curva de nivel $V = \min(R, \delta)$ lo que implica que V aumentaría contradiciendo (4.165).

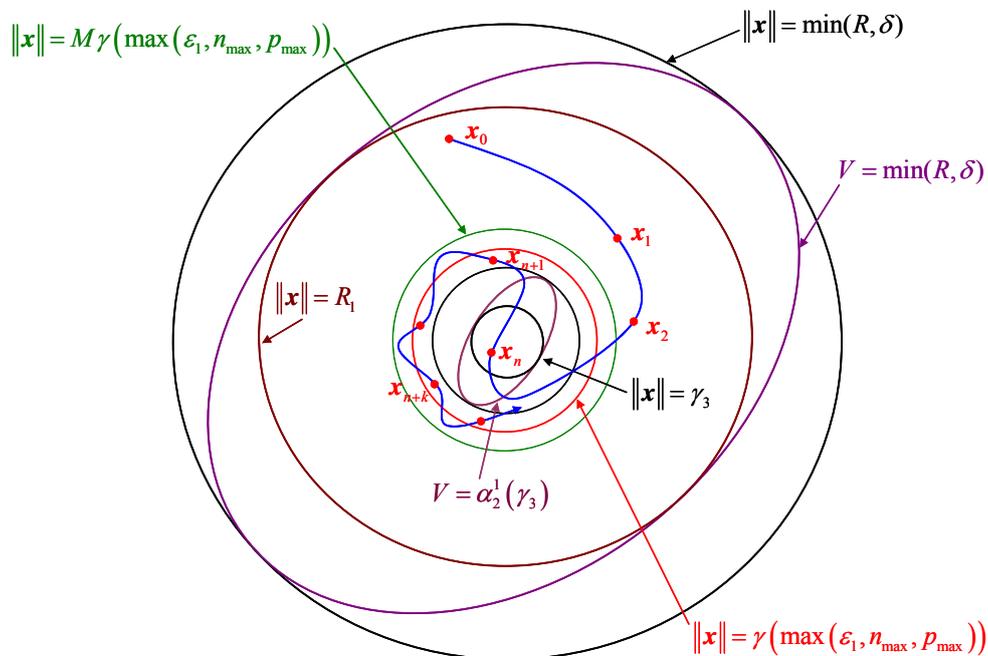


Figura 4.16. Regiones de interés. Las trayectorias en tiempo discreto \mathbf{x}_n que comienzan en la bola marrón acabarán metiéndose en la bola roja y permanecerán dentro para siempre (Puntos rojos). La trayectoria en tiempo continuo (línea azul) que pasa por los puntos \mathbf{x}_n es global finalmente acotada por la bola verde.

Por lo que si $V_n > \alpha_2^{-1}(\gamma_3)$, entonces $\|\mathbf{x}_n\| > \gamma_3$ y por lo tanto V_n disminuye. Esto implica que las trayectorias del sistema se introducen en la bola de radio $\alpha_2^{-1}(\gamma_3)$ ya que dicha bola contiene a la curva de nivel $V_n = \alpha_2^{-1}(\gamma_3)$ (si $\|\mathbf{x}_n\| > \alpha_2^{-1}(\gamma_3)$ entonces $V > \|\mathbf{x}_n\| > \alpha_2^{-1}(\gamma_3)$).

Una vez que \mathbf{x}_n ha entrado en la bola de radio $\alpha_2^{-1}(\gamma_3)$, V puede aumentar, lo que significa que las trayectorias pueden salirse de dicha bola, no obstante las trayectorias que parten de $\|\mathbf{x}_n\| < \alpha_2^{-1}(\gamma_3)$ no pueden llegar muy lejos de acuerdo con (4.166).

La función γ_4 es de clase K , de este modo si el ruido y las perturbaciones son suficientemente pequeñas, las trayectorias del sistema entran en la bola de radio $\alpha_2^{-1}(\gamma_3)$ y una vez allí pueden saltar hacia cualquier posición de la bola $\|\mathbf{x}_n\| < \gamma_4$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_{eq}(h_n)\mathbf{x}_n + \mathbf{d}_n &\rightarrow \|\mathbf{x}_{n+1}\| \leq \|\mathbf{A}_{eq}(h_n)\| \|\mathbf{x}_n\| + c_1 \|\mathbf{x}_n\|^2 + c_2 \frac{h_m}{2} \|\mathbf{x}_n\| + \gamma_1 \\
 &\leq \left(C + c_2 \frac{h_n}{2} \right) \|\mathbf{x}_n\| + c_1 \|\mathbf{x}_n\|^2 + \gamma_1 \leq \\
 &\leq \left(C + c_2 \frac{h_n}{2} \right) \alpha_2^{-1}(\gamma_3) + c_1 \left(\alpha_2^{-1}(\gamma_3) \right)^2 + \gamma_1 \\
 &= \gamma_4 \left(\max(n_{\max}, p_{\max}) \right)
 \end{aligned} \tag{4.166}$$

Si el ruido y la perturbación son suficientemente pequeños la bola de radio γ_4 está dentro de la bola de radio R_l y puesto que en el exterior de dicha bola V disminuye, repitiendo el razonamiento que se hizo para R_l es claro que las trayectorias no abandonarán la bola de radio $\alpha_2^{-1}(\gamma_4)$.

De este modo si el ruido y la perturbación son pequeños existen funciones β y γ de clase KL y K tales que:

$$\|\mathbf{x}_r(t_i)\| < \beta(\|\mathbf{x}_r(0)\|, t_i - t_0) + \gamma(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \tag{4.167}$$

La ecuación anterior solo predice el comportamiento de la solución en los instantes de conmutación, afortunadamente es fácil ver que ocurre en los instantes de tiempo intermedios. Para ello basta con observar que (4.128) es Lipschitz respecto de \mathbf{x}_r de modo que para $t_i \leq t \leq t_{i+2}$:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{x}_r(t)\| &\leq \|\mathbf{x}_r(t_i)\| e^{L(t-t_i)} \leq \|\mathbf{x}_n\| e^{L(t_i-t_0)} \leq M \|\mathbf{x}_n\| \leq \\
 &\leq M \beta(\|\mathbf{x}_r(0)\|, t_i - t_0) + M \gamma(\max(n_{\max}, p_{\max}))
 \end{aligned} \tag{4.168}$$

Lo que completa la demostración ■

4.6.2. Estabilidad del sistema equivalente

El Teorema 4.3 reduce el estudio de la estabilidad cerca del origen al estudio de los autovalores de A_{eq} . A continuación se ve que valor toman cuando h es suficientemente pequeño.

Para ello y con el fin de simplificar el análisis se hacen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2A_2}{k_3 F_{\max}} \\ A &= \frac{2A_1}{k_3 F_{\min}} \\ \tau &= (1 + f(h, F_{\max}))h \\ \alpha &= \frac{1 + f(h, F_{\min})}{2 + f(h, F_{\min}) + f(h, F_{\max})} \end{aligned} \quad (4.169)$$

Con lo que la matriz equivalente puede expresarse como:

$$A_{eq}(h) = e^{\frac{A_2}{k_3 |F_{\max}|} (1+f_2)} e^{\frac{A_1}{k_3 |F_{\min}|} (1+f_1)} = e^{B\alpha\tau} e^{A(1-\alpha)\tau} \quad (4.170)$$

En general, el valor de los autovalores de A_{eq} dependen del valor de α y de τ . De hecho la Figura 4.17 muestra el radio espectral de A_{eq} cuando $F_{\max}=k_1=k_2=k_3=1$ y $F_{inv}=-1/2$ para un valor de $\tau=0.1$. La figura demuestra que en el rango $0.502 < \alpha < 0.660$, A_{eq} es inestable.

Por este motivo no existe en general una función de Lyapunov común para A y B (en caso de existir el sistema sería estable independientemente del valor de α).

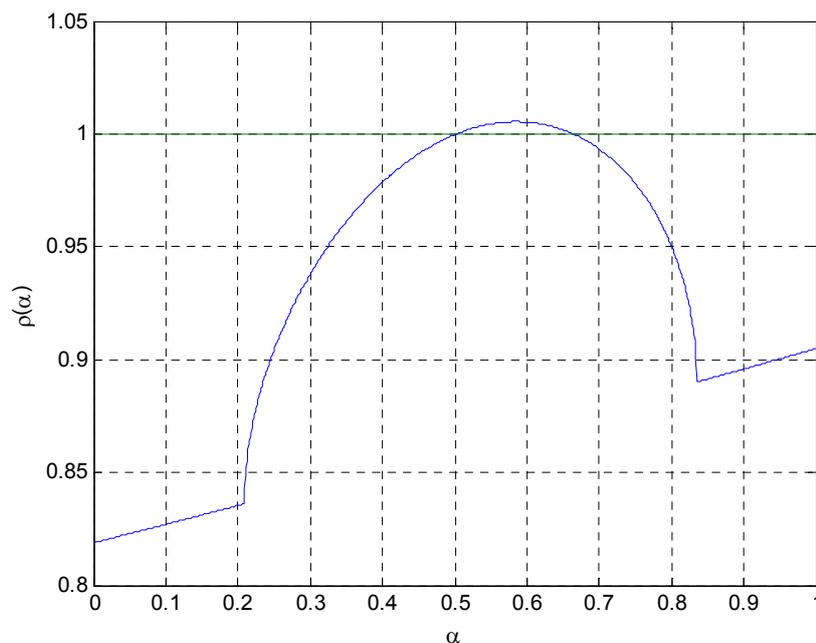


Figura 4.17. El sistema equivalente no es estable para todas las combinaciones de tiempos de conmutación.

Por lo tanto, para analizar la estabilidad del sistema equivalente es imprescindible conocer el valor de α . Afortunadamente este valor puede calcularse fácilmente utilizando el balance de fuerzas. Para ello en primer lugar obsérvese que en ausencia de ruido y perturbaciones y suponiendo que $\dot{x}_r=0$ los tiempos en los que el sistema está en F_{max} y F_{min} vienen dados por:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2h}{k_3 F_{max}} (1 + f(h, F_{max})) \\ T_2 &= \frac{2h}{k_3 |F_{min}|} (1 + f(h, F_{min})) \end{aligned} \quad (4.171)$$

Puesto que la posición x es acotada, entonces la fuerza promedio a lo largo de un periodo debe de ser cero

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = 0 &= T_1 F_{max} + T_2 F_{min} = \frac{2h F_{max}}{k_3 F_{max}} (1 + f(h, F_{max})) + \frac{2h F_{min}}{k_3 |F_{min}|} (1 + f(h, F_{min})) \\ \frac{2h}{k_3} (1 + f(h, F_{max})) - \frac{2h}{k_3} (1 + f(h, F_{min})) &= 0 \\ f(h, F_{max}) &= f(h, F_{min}) \end{aligned} \quad (4.172)$$

Substituyendo esto en la definición de α se tiene que:

$$\alpha = \frac{1 + f(h, F_{min})}{2 + f(h, F_{min}) + f(h, F_{min})} = \frac{1 + f(h, F_{min})}{2 + 2f(h, F_{min})} = \frac{1}{2} \quad (4.173)$$

Expandiendo A_{eq} en serie de Taylor respecto a τ .

$$\begin{aligned} A_{eq} &= e^{B\alpha\tau} e^{A(1-\alpha)\tau} = (I + \alpha B\tau + o(\tau^2))(I + (1-\alpha)A\tau + o(\tau^2)) = \\ &= I + (\alpha A + (1-\alpha)B)\tau + o(\tau^2) = \frac{(A+B)}{2}\tau + o(\tau^2) = I + C_1\tau + o(\tau^2) \end{aligned} \quad (4.174)$$

En primer orden de aproximación en τ los autovalores de A_{eq} estarían definidos por los autovalores de la siguiente matriz C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{k_3 F_{max} |F_{min}|} \begin{pmatrix} 0 & (|F_{min}| + F_{max}) & 0 \\ 0 & -d_u (|F_{min}| + F_{max}) & 0 \\ k_1 k_2 (F_{max} - |F_{min}|) & -k_1 (F_{max} - |F_{min}|) & -k_2 (|F_{min}| + F_{max}) \end{pmatrix} \quad (4.175)$$

Por desgracia la matriz C_1 es singular lo que implica que uno de los autovalores es nulo. De los autovalores de C_1 se deduce que:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 - \frac{k_2 (|F_{min}| + F_{max})}{k_3 F_{max} |F_{min}|} \tau + o(\tau^2) = 1 - c_1 \tau + o(\tau^2) \\
\lambda_2 &= 1 - \frac{d_u (|F_{min}| + F_{max})}{k_3 F_{max} |F_{min}|} \tau + o(\tau^2) = 1 - c_2 \tau + o(\tau^2) \\
\lambda_3 &= 1 + o(\tau^2)
\end{aligned} \tag{4.176}$$

Donde c_1 y c_2 son constantes positivas. Los dos primeros autovalores son claramente estables (caen dentro del círculo unitario) en la aproximación de orden τ^2 . Sin embargo el tercero se encuentra justo en el límite de la estabilidad. De este modo es necesaria una aproximación de orden superior para poder decidir la estabilidad.

Para obtener una mejor aproximación del tercer autovalor se utiliza el método de la potencia (Watkins 2002) aplicado a la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{eq})^{-1}$. A continuación se muestra el procedimiento de cálculo así como el resultado final. Para consultar los resultados intermedios véase el contenido de la hoja de cálculo simbólico *Autovalores.ws* que se encuentra en el CD adjunto.

El método de la potencia es un algoritmo para calcular el mayor autovalor de una matriz y su autovector asociado, en esencia la iteración del método consiste en partir de una aproximación del autovector \mathbf{v}_0 y aplicar el siguiente algoritmo iterativo:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{\mathbf{M}\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{M}\mathbf{v}_k\|} \tag{4.177}$$

La aproximación del autovalor puede entonces obtenerse como:

$$\lambda_{\max k} = \frac{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{A} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{v}_k} \tag{4.178}$$

La convergencia del método es geométrica de razón, $\max(\lambda_{\max}/\lambda_1)$ y puesto que el mayor autovalor de $\mathbf{M}=(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{eq})^{-1}$ es λ_3 , entonces la razón de convergencia es:

$$\max \left(\frac{1 - (1 - o(\tau^2))}{1 - (-c_1 \tau - o(\tau^2))}, \frac{1 - (1 - o(\tau^2))}{1 - (-c_2 \tau - o(\tau^2))} \right) = \max(o(\tau), o(\tau)) = o(\tau) \tag{4.179}$$

Esto significa que puesto que la razón es de orden τ , entonces cada iteración del método de la potencia devuelve un orden más en el desarrollo en serie de Taylor del autovalor λ_3 .

Para llevar a cabo los cálculos es necesario utilizar una aproximación de orden superior de \mathbf{A}_{eq} , en este caso el mínimo orden necesario para obtener términos no nulos es de orden τ^3 . De este modo los cálculos se realizan con la siguiente aproximación de \mathbf{A}_{eq} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{eq} &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{B} \frac{\tau}{2} + \mathbf{B}^2 \frac{\tau^2}{8} + \mathbf{B}^3 \frac{\tau^3}{48} + o(\tau^4) \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\tau + \mathbf{A}^2 \frac{\tau^2}{8} + \mathbf{A}^3 \frac{\tau^3}{48} + o(\tau^4) \right) = \\
&= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{4} \tau + \frac{\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + 2\mathbf{A}\mathbf{B}}{8} \tau^2 + \frac{\mathbf{A}^3 + 3\mathbf{A}^2\mathbf{B} + 3\mathbf{A}\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^3}{48} \tau^3 + o(\tau^4) = (4.180) \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{C}_1\tau + \mathbf{C}_2\tau^2 + \mathbf{C}_3\tau^3 + o(\tau^4)
\end{aligned}$$

Realizando los cálculos anteriores con precisión $o(\tau^4)$ se obtiene que:

$$\lambda_3 = 1 - c_3\tau^3 + o(\tau^4) \quad (4.181)$$

Donde c_3 es la siguiente constante positiva:

$$c_3 = \frac{\left(k_1 (|F_{min}| - F_{max})^2 + 2(|F_{min}| + F_{max})k_2^2 \right) k_1}{12F_{max}|F_{min}|k_3^3 d_u (|F_{min}| + F_{max})} \quad (4.182)$$

La Figura 4.18 muestra la bondad de la aproximación de la serie de Taylor del autovalor máximo de \mathbf{A}_{eq} , como puede apreciarse en la figura, para $\tau < 0.3$ la aproximación de la serie de Taylor es muy exacta, además (4.181) tiene un comportamiento cualitativamente correcto hasta $h=1.8$.

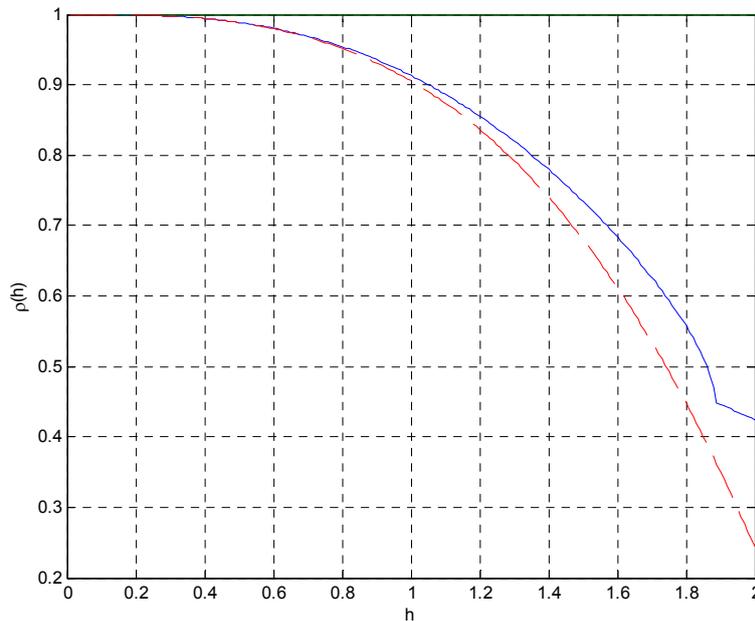


Figura 4.18. Radio espectral de \mathbf{A}_{eq} para las constantes nominales del problema y $k_1=0.5$ $k_2=k_3=1$. El valor exacto se muestra en azul sólido, la estimación de Taylor en rojo discontinuo.

Lema 4.8. Sea la matriz equivalente \mathbf{A}_{eq} definida en (4.170), entonces:

I Existe un ε tal que \mathbf{A}_{eq} es estable para $0 < h < \varepsilon$.

II Si A_{eq} es estable para $0 < h < h_m$, entonces existe una constante positiva c tal que para cualquier valor se cumple que:

$$0 < h < h_m \Rightarrow \rho(A_{eq}(h)) \leq 1 - ch^3 \quad (4.183)$$

Demostración: El término $f(h, F_{max})$ es $o(h)$, de este modo, para h suficientemente pequeño según la definición de τ , los autovalores del sistema equivalente son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - c_1(1 + f(h, F_{max}))h + o(h^2) = \\ &= 1 - c_1(1 + o(h))h + o(h^2) = 1 - c_1h + o(h^2) \\ \lambda_2 &= 1 - c_2h + o(h^2) \\ \lambda_3 &= 1 - c_3(1 + o(h))^3 h^3 + o((1 + o(h))h^4) = \\ &= 1 - c_3(1 + o(h))h^3 + o(h^4) = 1 - c_3h^3 + o(h^4) \end{aligned} \quad (4.184)$$

I) De acuerdo con el radio espectral de A_{eq} , si h es suficientemente pequeño entonces:

$$\begin{aligned} \rho(h) = |\lambda_{\max}| &= \max(|1 - c_1h| + o(h^2), |1 - c_2h| + o(h^2), |1 - c_3h^3| + o(h^4)) \\ &\leq 1 - c_3h^3 + o(h^4) \end{aligned} \quad (4.185)$$

Por lo que existe un ε tal que si $h < \varepsilon$ el término h^3 domina sobre el término $o(h^4)$ y por tanto A_{eq} es estable.

II) Supóngase A_{eq} es estable para $0 < h < h_m$, entonces definiendo la siguiente función:

$$f(h) = \frac{\rho(A_{eq}(h)) - 1}{h^3} \quad (4.186)$$

Es fácil ver que f es una función negativa en el intervalo semiabierto $(0, h_m]$. Calculando el límite cuando h tiende a cero se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - c_3h^3 + o(h^4)) - 1}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} -c_3 + o(h) = -c_3 \quad (4.187)$$

Con lo que resulta que f es continua en el origen, y por tanto en todo el intervalo $[0, h_m]$, de este modo f toma su valor máximo $-c$ en dicho intervalo siendo c una constante positiva de modo que:

$$0 < h < h_m \Rightarrow f \leq -c \Rightarrow \rho(A_{eq}(h)) - 1 \leq -ch^3 \Rightarrow \rho(A_{eq}(h)) \leq 1 - ch^3 \quad (4.188)$$

Lo que completa la demostración ■

4.6.3. Estabilidad del sistema completo

Llegados a este punto, ya se está en condiciones de establecer la estabilidad del sistema completo. Para ello solo queda comprobar que existe una función h que cumple con las condiciones del Teorema 4.3 así como del Lema 4.6.

Lema 4.9. Existe una función $h(x)$ y una constante R tal que para $|x| < R$ la función h verifica (4.151) y además si $|x| < R$ entonces se cumple que $h_{min}(x) < h < h_{max}(x)$ siendo h_{min} y h_{max} las funciones del Lema 4.6. Si además A_{eq} es estable para $h < h_{min}(0)$, entonces la función h puede escogerse de clase K .

Demostración:

En primer lugar se ve que existe una función h de clase K que cumple las condiciones (4.151) en un entorno local del origen. Para ello sea la siguiente función:

$$h(x) = \frac{h_R}{\sqrt[4]{1 - c \ln\left(\frac{x}{R}\right)}} \quad (4.189)$$

Es claro que h es de clase K y que $h(R) = h_R$. Substituyendo en la primera condición de (4.151) se tiene:

$$x \frac{dh}{dx} = \frac{h_R x}{4} \left(1 - c \ln\left(\frac{x}{R}\right)\right)^{-5/4} \frac{cR}{x} = \frac{cR}{4h_R^4} h^5 \quad (4.190)$$

De acuerdo a la cota del radio espectral del A_{eq} que ofrece el Lema 4.8 para $h < h_m$:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \rho(h/3)^2)^2}{h} &\geq \frac{\left(1 - \left(1 - c_3 \left(\frac{h}{3}\right)^3 + o(h^4)\right)^2\right)^2}{h} = \\ &= \frac{\left(1 - \left(1 - 2c_3 \left(\frac{h}{3}\right)^3 + o(h^4)\right)\right)^2}{h} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3^3} c_3 h^3 + o(h^4)\right)^2}{h} = \frac{2^2}{3^3} c_3^2 h^5 + o(h^6) \geq c_4 h^5 \quad \text{si } h < h_m \end{aligned} \quad (4.191)$$

Por lo tanto para $h < h_m$ y tomando c suficientemente pequeño se tiene que:

$$\left| x \frac{dh}{dx} \right| \leq \frac{cR}{4h_R^4} h^5 \leq c_4 h^5 \leq \frac{a}{h} (1 - \rho(h/3)^2)^2 \quad (4.192)$$

Por otra parte la segunda condición puede comprobarse directamente ya que existe algún c tal que:

$$(1 - \rho(h/3))^2 \leq ac_4 h^6 + o(h^7) \leq ch \text{ si } h < h_m \quad (4.193)$$

De este modo si $h_R < h_m$ entonces para $|x| < R$ se verifican las dos primeras condiciones de (4.151).

Para comprobar la última relación hay que analizar dos casos, en primer lugar se ve que $|x| < bh$, en un entorno del origen, para ello sea $f(x) = x/h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^4 - cx^4 \ln\left(\frac{x}{R}\right) \right)^{1/4}}{h_R} = 0 \quad (4.194)$$

Puesto que el límite es cero, existe un entorno del origen tal que $|x| < bh$ para cualquier constante positiva b . Además puesto que f es una función creciente y $f(R) = R/h_R$, entonces tomando un valor de R tal que $R/h_R = b$, se tiene que $f(x) < b$ para $|x| < R$.

Por otra parte sea el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1 - \rho(h(x))^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2c_3 h^6 + o(h^7)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 - c \ln\left(\frac{x}{R}\right) \right)^{3/2}}{h_R^6} = 0 \quad (4.195)$$

Puesto que el límite es cero, el cociente es acotado y además tiende a cero cuando x tiende a cero, por lo que finalmente existe una función α de clase K tal que b para $|x| < R$ que verifica:

$$|x| \leq \min\left(\alpha(x)\left(1 - \rho(h(x))^2\right), bh\right) \quad (4.196)$$

Lo que completa la comprobación de las condiciones (4.151).

Si $|x| > R$ es siempre posible encontrar una función de clase K tal que $h_{\min}(x) < h < h_{\max}(x)$ para las funciones del Lema 4.6. Si además, A_{eq} es estable para $h < h_{\min}(0)$, entonces existe un r tal que $h_m = h_{\min}(r)$, de tal manera que si $x=r$ se cumple que $h=h_m$ y de este modo la función h es continua.

Esto significa que la función h así elegida es de clase K para cualquier valor de x ■

En estas condiciones ya es posible demostrar el resultado final del capítulo:

Teorema 4.4. Dado el sistema (4.14) sometido a una fuerza $F_i(t)$ y un momento $\tau_i(t)$ seleccionados de entre los valores de Tabla 4.2 de acuerdo con las leyes de control (4.41) y (4.92). Si la perturbación p y el error en la medida n son suficientemente pequeños, existen cuatro constantes positivas k_1, k_2, k_3 y ε_1

así como una función $h(\|\mathbf{x}_r\|)$, tales que la solución de (4.14) cumple (4.197) para ciertas funciones de γ_1 y γ_2 de clase K y β de clase KL .

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t-t_0) + \gamma(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \quad (4.197)$$

Demostración:

Sea $h(\|\mathbf{x}_r\|)$ la función cuya existencia garantiza el Lema 4.9, supóngase en primer lugar que $\|\mathbf{x}_l\| > R$. Entonces el Lema 4.6 garantiza que existen ciertas funciones β_l y γ_l tales que:

$$\|\mathbf{x}_l(t)\| < \beta_l(\|\mathbf{x}_l(t_0)\|, t-t_0) + \gamma_l(\max(n_{\max}, p_{\max}, \varepsilon_1)) \quad (4.198)$$

Al mismo tiempo se cumple que \mathbf{x}_l es global finalmente acotada por $h(\|\mathbf{x}_r\|)$ de tal manera que teniendo en cuenta que $\|\mathbf{x}_r\| < \|\mathbf{x}_l\|$:

$$\|\mathbf{x}_l(t)\| < \beta_2(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t-t_0) + h(\gamma_1(\max(n_{\max}, p_{\max}, \varepsilon_1))) \quad (4.199)$$

Por tanto dado que h siempre puede acotarse por una función de clase K se cumple finalmente que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{\|\mathbf{x}_l\|^2 + \|\mathbf{x}_r\|^2} < \beta_3(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t-t_0) + \gamma_3(\max(n_{\max}, p_{\max}, \varepsilon_1)) \quad (4.200)$$

Por otro lado suponiendo que $\|\mathbf{x}_r\| \leq R$, entonces de acuerdo con el Teorema 4.3

$$\|\mathbf{x}_r(t)\| < \beta_4(\|\mathbf{x}_r(0)\|, t-t_0) + \gamma_4(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \quad (4.201)$$

Ahora bien, por la condición (4.151) $\|\mathbf{x}_l\| < bh(\|\mathbf{x}_r\|)$ lo que a su vez implica que $\|e_3\| < \|\mathbf{x}_r\|$ y por consiguiente:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_l(t)\| &\leq \|\mathbf{x}_l(t)\| + \|e_3(t)\| < 2\beta_4(\|\mathbf{x}_r(0)\|, t-t_0) + 2\gamma_4(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \leq \\ &\leq 2\beta_4(\|\mathbf{x}_l(0)\|, t-t_0) + 2\gamma_4(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \quad (4.202) \\ \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \beta_5(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t-t_0) + \gamma_5(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \end{aligned}$$

De este modo en cualquier caso se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq \max(\beta_3 + \beta_5) + \max(\gamma_3 + \gamma_5) = \\ &= \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t-t_0) + \gamma(\max(\varepsilon_1, n_{\max}, p_{\max})) \quad (4.203) \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. ■

4.7. Resultados experimentales

En este apartado se comprobará la validez de la estrategia de control diseñada mediante dos procedimientos distintos. En primer lugar se comprobará mediante simulación que el funcionamiento en condiciones ideales sin perturbaciones externas ni ruido es correcto. En segundo lugar se validará el control experimentalmente utilizando el sistema de laboratorio.

La dificultad matemática de las demostraciones de estabilidad puede sugerir erróneamente que la técnica de control es compleja o difícil de aplicar en la práctica. Con el fin de aclarar completamente este aspecto y mostrar la simplicidad del controlador diseñado el siguiente apartado muestra la ley de control al completo.

4.7.1. Algoritmo de control

En primer lugar es necesario calibrar las constantes k_1 , k_2 y ε , que controlan la dinámica transversal. Para ello pueden usarse las condiciones restrictivas dadas en el Teorema 4.1 o como se vio en el ejemplo numérico es posible establecer $F=\text{cte}$ y sintonizar k_1 , k_2 y ε libremente para obtener una respuesta temporal idónea.

A continuación es necesario calibrar el control de la dinámica longitudinal. De nuevo el procedimiento puede llevarse a cabo mediante las relaciones del Teorema 4.2 o simplemente es posible sintonizar k_3 mediante simulación para obtener la respuesta temporal adecuada.

Una vez establecido el valor de estas constantes hay que elegir una función h . Puede parecer una tarea delicada debido a las restricciones impuestas en el Lema 4.6 y el Teorema 4.3. En principio siempre es posible elegir una función de la forma establecida en el Lema 4.9.

Sin embargo los experimentos numéricos muestran que es fácil elegir una función simplemente por el método de prueba y error. La única condición necesaria en la práctica es que dicha función decrezca con la suficiente rapidez cuando x_r tienda a cero y que sea razonablemente grande cuando x_r también lo sea.

Sintonizado el controlador, el algoritmo de control queda como sigue:

- 1) Medir el estado del sistema x cada periodo de muestreo.
- 2) Calcular el valor e_3 y h para a continuación determinar el signo de F :

$$e_3 = x + k_3 v_x \quad (4.204)$$

$$\text{sign}(F) = \begin{cases} -\text{sign}(e_3) & \text{si } |e_3| > h(t) \\ \text{sign}(F^-) & \text{si } |e_3| < h(t) \end{cases} \quad (4.205)$$

- 3) Conocido el signo de F calcular el valor de la variable de error e_2 de acuerdo con (4.15), (4.16) y (4.17) para a continuación determinar el signo de τ .

$$e_2 = k_2 (\psi + k_1 \text{sign}(F) \tanh(y)) + r + k_1 \text{sign}(F) (1 - \tanh(y)^2) v_y \quad (4.206)$$

$$\text{sign}(\tau) = \begin{cases} -\text{sign}(e_2) & \text{si } |e_2| \geq \varepsilon_1 \\ \text{sign}(\tau^-) & \text{si } |e_2| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (4.207)$$

4) Una vez conocido el signo de F y de τ basta con escoger dos valores de F_e y F_b coherentes con dichos signos de acuerdo con la Tabla 4.1. La forma más evidente de hacerlo es utilizar la Tabla 4.2.

Como se aprecia en el análisis anterior la implementación del algoritmo es relativamente simple ya que sólo requiere la evaluación de unas pocas ecuaciones algébricas, así como la búsqueda en una tabla.

4.7.2. Resultados de simulación

En este apartado se lleva a cabo una simulación del modelo nominal del aerodeslizador con las siguientes constantes del controlador $k_1=k_2=k_3=1$, $\varepsilon=0.001$. La función de histéresis dinámica empleada en la simulación es $h = \sqrt{\|\mathbf{x}_r\|}$. Las simulaciones parten de un estado inicial $\mathbf{x}=[-1.5 \ -1.5 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y no se aplicará ruido ni perturbaciones.

El periodo de muestreo en el sistema físico real es de 0.059s ya que se encuentra limitado por tasa de adquisición de imágenes de la cámara que se usa en el posicionamiento (17 imágenes por segundo). Para que la simulación sea realista se usa también el mismo periodo de muestreo en el cálculo de la señal de control.

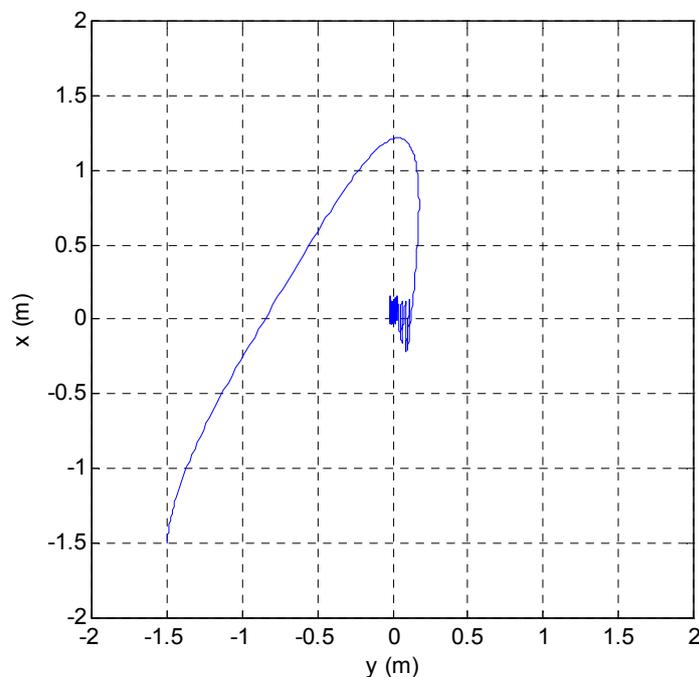


Figura 4.19. Trayectoria espacial del aerodeslizador.

La Figura 4.19 muestra la trayectoria espacial del aerodeslizador, como puede apreciarse la trayectoria converge hacia el origen de coordenadas. Para observar la evolución temporal de dichas variables conviene analizar detenidamente la Figura 4.20.

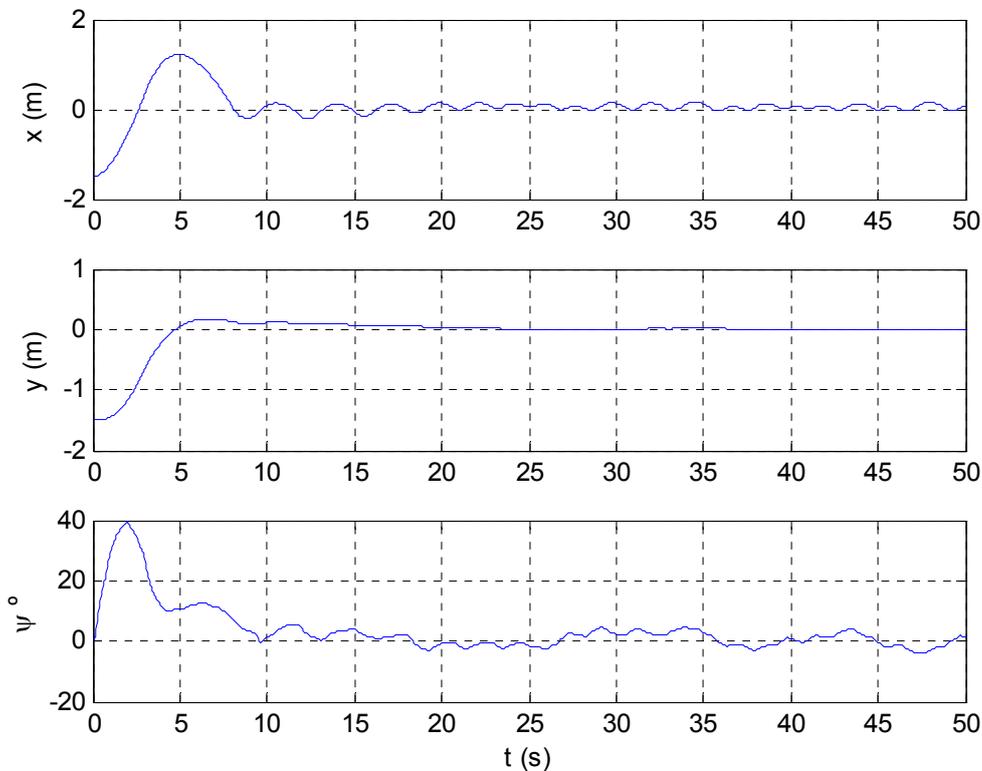


Figura 4.20. Evolución temporal de las coordenadas espaciales

La simulación muestra que la coordenada y converge mientras la coordenada x es oscilante. Esta oscilación decrece en amplitud a medida que el estado \mathbf{x} , se reduce.

Por su parte la orientación del vehículo comienza siendo paralela a la orientación final deseada para el vehículo. La acción de control hace que la orientación del vehículo tome valores positivos con el fin de aproximar el vehículo al eje x , a continuación, la orientación tiene un comportamiento oscilatorio para finalmente acabar estabilizándose en el origen.

La Figura 4.21 muestra la evolución de las variables de error e_1 , e_2 y e_3 . Si se observa detenidamente la variable de error e_2 es fácil ver como dicha variable presenta saltos de amplitud decreciente cada vez que cambia el signo de la fuerza. Este es el comportamiento predicho en la Figura 4.15.

La elección de la histéresis h es correcta ya que como se muestra en la figura, existe tiempo suficiente para que la variable de error converja hacia un entorno del origen entre dos cambios consecutivos del valor de la fuerza, lo que justifica la validez de (4.135).

Es importante destacar que la variable de error e_2 no converge al origen sino sólo a un entorno del mismo, la estrategia de control presenta un cierto “chattering”. Esto se debe a que el control está muestreado en el tiempo, de este modo, entre instantes de muestreo

la variable e_2 se separa ligeramente del origen. (Para mantener e_2 exactamente en el origen se necesitan oscilaciones de frecuencia infinita en el signo de τ).

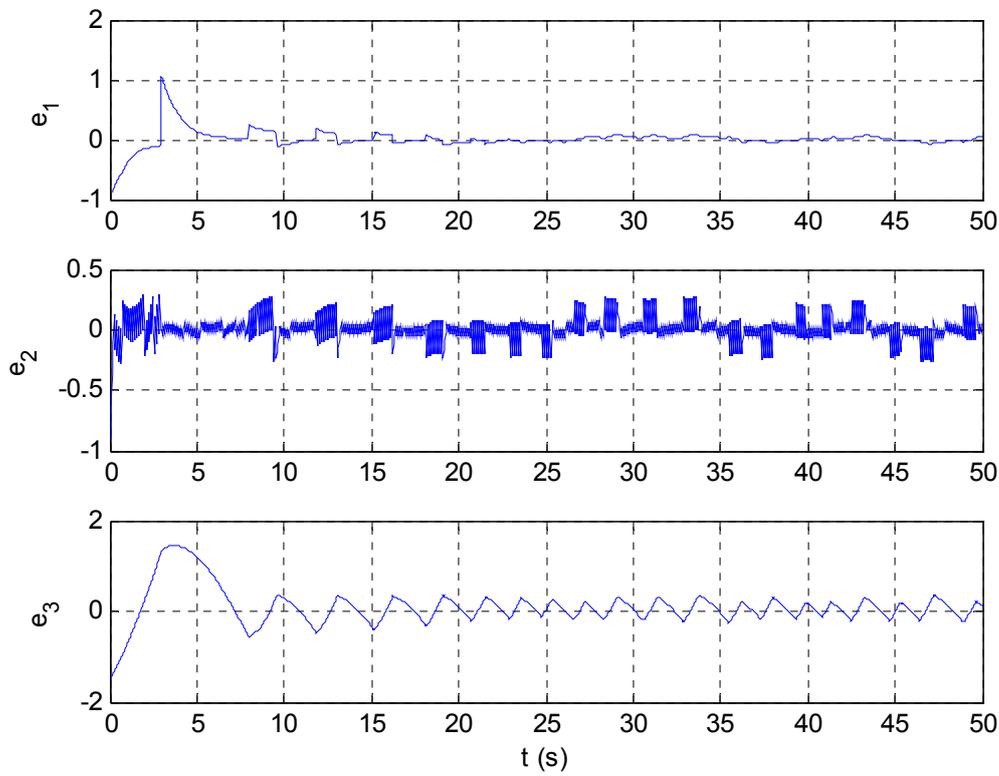


Figura 4.21. Evolución de las variables de error.

La variable de error e_1 por su parte también presenta saltos con cada cambio en el valor de la fuerza. La principal diferencia con e_2 , es que mientras e_2 converge en tiempo finito (bajada lineal con el tiempo) la convergencia de e_1 es exponencial.

Finalmente la variable de error e_3 oscila entre valores positivos y negativos, la amplitud de la oscilación viene controlada por la histéresis dinámica h y su valor disminuye en el tiempo de tal modo que la oscilación es finalmente acotada por un valor pequeño.

La dinámica de las variables de error condiciona la dinámica del sistema completo. Con la ayuda de la Figura 4.22 es posible realizar un análisis de las velocidades lineal y angular así como la orientación que no se aprecia en la Figura 4.19.

Como muestra la Figura 4.22 la velocidad v_y decrece suavemente en el tiempo mientras que v_x oscila entre dos valores de signo opuesto. Esto hace que la variable y se aproxime suavemente al origen mientras x oscila como ya pudimos ver en la Figura 4.22.

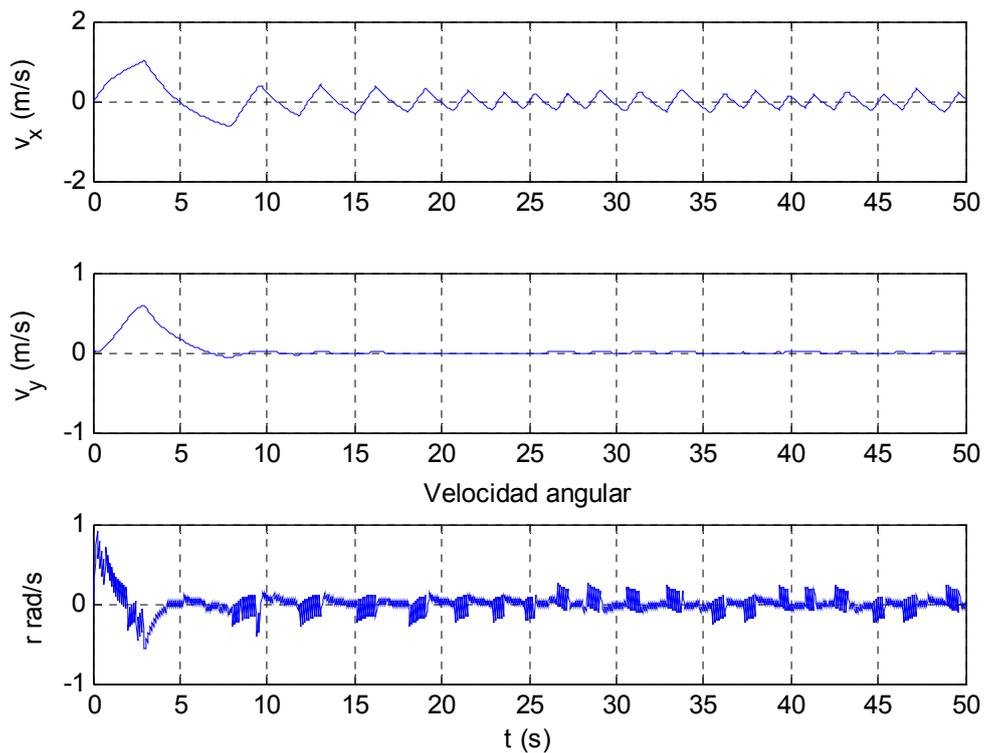


Figura 4.22. Velocidades del aerodeslizador.

La velocidad angular r resulta ser bastante ruidosa, esto se debe a que la frecuencia de muestreo es finita del mismo modo que ocurría con e_2 . Puesto que entre dos instantes de muestreo consecutivos el par de fuerzas τ permanece constante y no nulo, la velocidad angular r presenta necesariamente una oscilación en torno al origen.

El análisis concluye observando las señales de control que actúan sobre el vehículo con ayuda de la Figura 4.23. En primer lugar si se observa la fuerza resultante F es fácil ver que dicha fuerza oscila entre un valor positivo y otro negativo.

Puesto que el aerodeslizador se mantiene cerca del origen la fuerza promedio debe de ser nula. De este modo puesto que la fuerza en sentido directo es superior en módulo a la fuerza en sentido inverso, el tiempo que F permanece en el valor negativo es mayor que el tiempo en el valor positivo de acuerdo a la relación (4.172).

Cuando la fuerza F está en su valor máximo (positivo), τ oscila entre dos valores grandes, por el contrario, cuando la fuerza toma el valor mínimo (negativo) la oscilación que realiza el momento es claramente menor. En cualquier caso el momento τ siempre es oscilante mientras que la fuerza F permanece constante en intervalos de tiempo decrecientes.

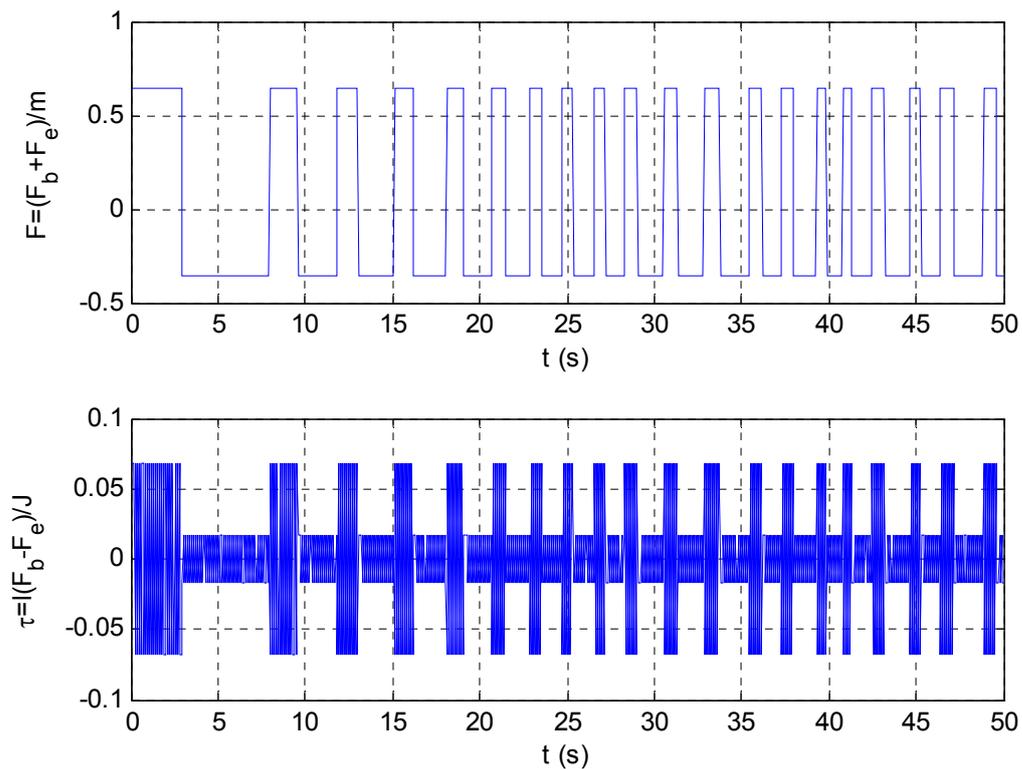


Figura 4.23. Acciones de control.

4.7.3. Experimentos reales

En este apartado se muestra el resultado de aplicar la ley de control diseñada anteriormente a un aerodeslizador real de laboratorio. Los detalles de la implementación del sistema se discuten Capítulo 3.

Para tener un entendimiento profundo del funcionamiento del sistema es conveniente visualizar los vídeos que se encuentran en el CD adjunto. En dichos vídeos se muestra el funcionamiento de la ley de control desde diversas condiciones iniciales, esto permite hacerse una idea clara de como actúa la ley de control.

A continuación se muestra un caso de estudio del posicionamiento dinámico que se corresponde con el video “*PS1.avi*”. En este caso se parte del estado $[-1, 1.1, -\pi/2, 0, 0, 0]^T$. La Figura 4.24 muestra la trayectoria del sistema.

Dicha figura evidencia que la trayectoria converge a un entorno del origen, cabe destacar que mientras en la Figura 4.19 las trayectorias son “suaves”, en el sistema real de laboratorio las trayectorias son más “picudas”.

Este comportamiento se debe esencialmente a que el aerodeslizador se mueve sobre un medio sólido. En estas condiciones cuando el aerodeslizador se encuentra próximo a detenerse el modelo de rozamiento no es totalmente correcto puesto que aparecen efectos de la adherencia de la superficie sólida y el colchón de aire. Estos efectos no modelados actúan como perturbaciones en el sistema.

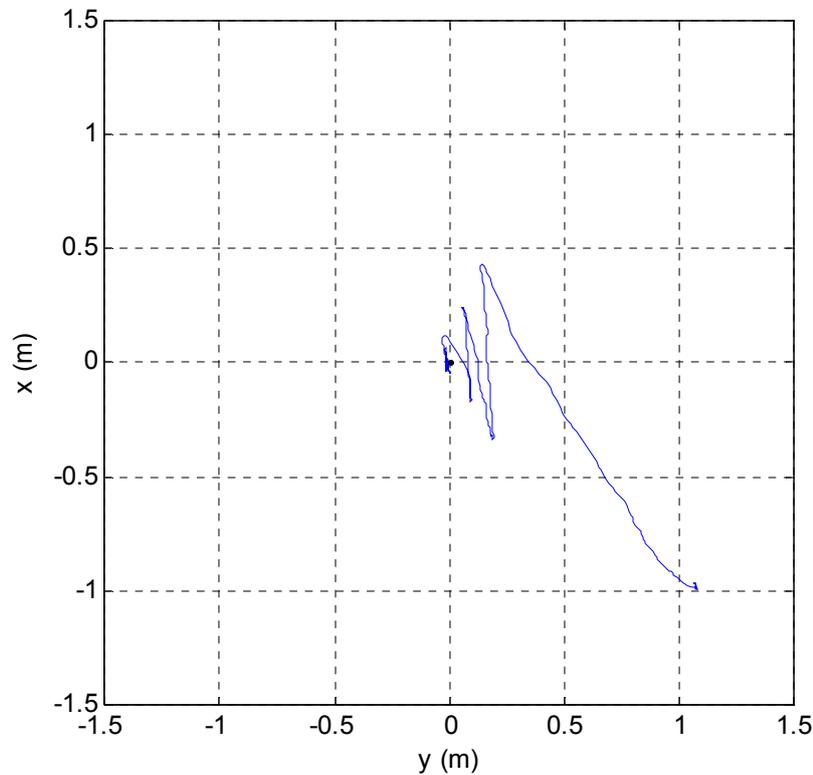


Figura 4.24. Trayectoria del aerodeslizador real.

La ley de control de posicionamiento dinámico resulta ser bastante robusta frente a este tipo de perturbaciones ya que la posición del vehículo converge correctamente hacia el origen como muestra claramente la Figura 4.24.

La variable más afectada por las perturbaciones y el ruido resulta ser la orientación como muestra la Figura 4.25. Hay que destacar además que el sistema real posee cierto retardo lo que hace que dicha variable sea más oscilante que en la simulación. Si se observa con cierto detenimiento, a los 27 segundos puede apreciarse una perturbación en el sistema que hace oscilar fuertemente a la orientación, mientras que este hecho apenas se aprecia en las variables de posición. Esta perturbación es efecto del rozamiento con el suelo, en particular el aerodeslizador se queda “pegado” mientras intenta avanzar y eso le hace girar sobre si mismo. Resulta interesante observar dicho efecto en el vídeo adjunto.

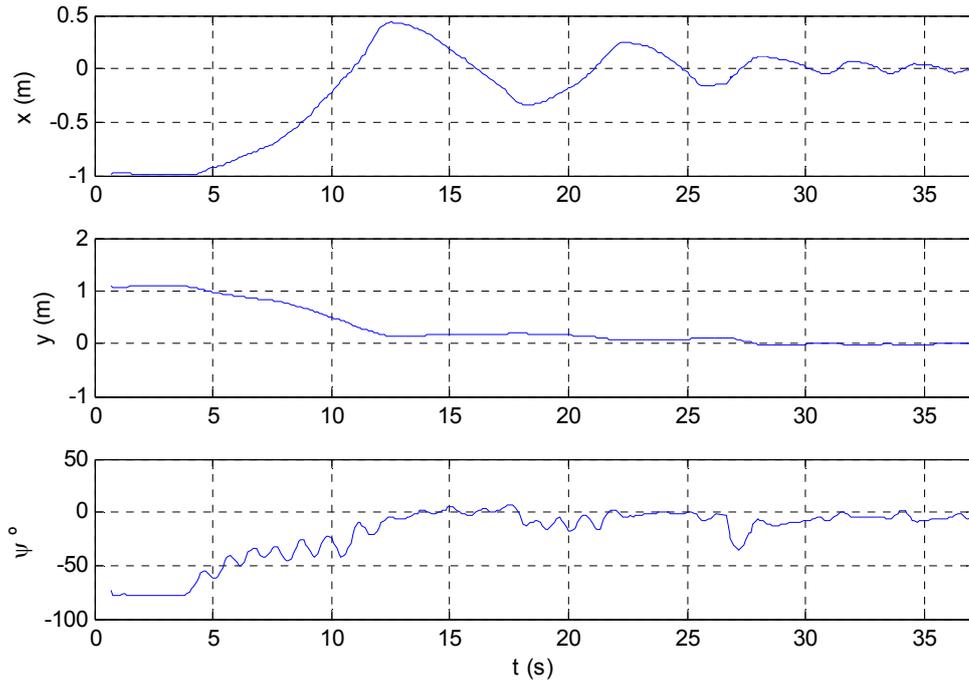


Figura 4.25. Trayectoria temporal del aerodeslizador real

En la Figura 4.26 pueden observarse las velocidades en el aerodeslizador real. Como muestra la figura, el comportamiento es cualitativamente similar al que muestra la Figura 4.22 aunque en este caso el efecto del ruido claramente visible. Esencialmente v_x es oscilante mientras que v_y converge suavemente.

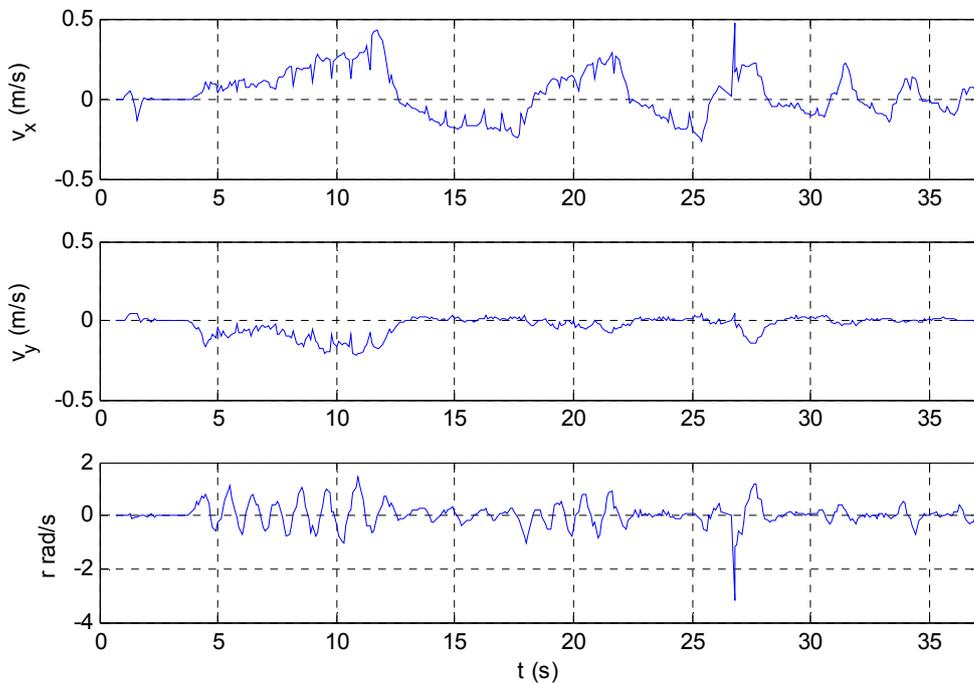


Figura 4.26. Velocidades del aerodeslizador real.

En esta gráfica resulta más evidente el efecto de la perturbación ya que puede apreciarse un salto brusco en v_y en el segundo 27 así como un salto brusco en v_x cuando el aerodeslizador se “despega” del suelo.

Con el fin de evitar oscilaciones de muy alta frecuencia se establece un umbral en el momento aplicado, de este modo, en vez de mantener el momento constante si el error e_2 es bajo se permite que el momento τ se haga cero.

Esta medida tiene un escaso impacto en el rendimiento del sistema pero ayuda a reducir el número de oscilaciones en la ley de control, lo cual reduce el consumo energético del aerodeslizador.

Si se permite que el momento se haga cero, entonces de acuerdo con la Tabla 4.1 es posible elegir valores de la fuerza y el momento más grandes (ya que es posible hacer funcionar los dos motores con la fuerza máxima al mismo tiempo). El resultado se aprecia en la señal de control que muestra en la Figura 4.27. En dicha figura existen picos esporádicos en el valor de F .

La Figura 4.27 muestra una reducción substancial en el número de cambios en la ley de control.

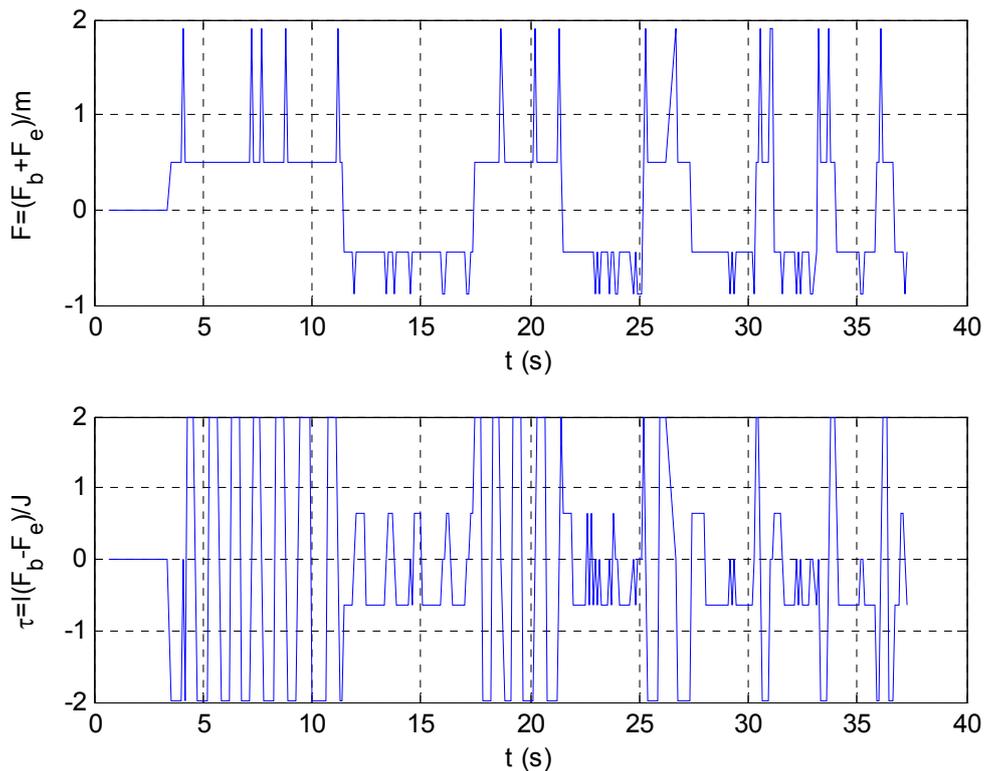


Figura 4.27. Señales de control en el aerodeslizador real.

4.8. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una ley de control de posicionamiento dinámico de un aerodeslizador. Dicha ley de control se descompone en dos subproblemas.

En primer lugar se ha controlado la dinámica transversal (perpendicular a la dirección del impulso aplicable cuando el vehículo se encuentra cerca del origen).

A continuación se ha desarrollado un control de la dinámica longitudinal (que controla la variable de posición paralela al impulso cerca del origen). Dicho control tenía como misión mantener acotadas la posición x del aerodeslizador.

Finalmente se ha mostrado como es posible de forma simple coordinar la acción de las dos leyes de control mediante la introducción de una histéresis dinámica h . Se ha demostrado teóricamente que una elección correcta de dicha función permitía la convergencia de todo el estado del sistema hacia el origen.

El análisis teórico de la ley de control ha requerido de potentes herramientas matemáticas como la teoría de estabilidad de sistemas no lineales, así como la introducción de conceptos teóricos nuevos como el de sistema equivalente.

El Teorema 4.3 ha establecido una nueva herramienta teórica que permite analizar el comportamiento de sistemas conmutados en el tiempo en torno a un punto de equilibrio.

Dicho teorema establece condiciones que permiten unir, mediante una adecuada secuencia de control, leyes de control que inicialmente tienen objetivos contrapuestos.

Finalmente la ley de control ha sido validada con éxito tanto en simulación como en experimentos reales de laboratorio, lo que muestra su robustez frente a perturbaciones, ruido y dinámica no modelada.

Capítulo 5 Seguimiento de trayectoria con entradas continuas

El objetivo de este capítulo es construir una ley de control continua por realimentación de estados que resuelva el problema de seguimiento de trayectoria (*tracking*). Esto es, diseñar una ley de control por realimentación que haga que la trayectoria del aerodeslizador converja hacia una trayectoria espacial parametrizada en el tiempo.

El capítulo comienza analizando el problema y el tipo de trayectorias que pueden ser seguidas por una ley de control por realimentación. A continuación se diseña la ley de control y se ve el efecto que sobre ella tienen las perturbaciones y el ruido, analizando en detalle la estabilidad del conjunto. El capítulo concluye con una verificación del control diseñado por medio de simulaciones.

5.1. Introducción al problema

El problema de seguimiento de trayectoria de robots móviles subactuados no holonómicos es un campo de gran interés en la disciplina del control automático debido a las dificultades que presentan este tipo de sistemas. Para una revisión de los principales problemas y técnicas ver (Kolmanovsky & Clamroch, 1995).

La dificultad involucrada en el control de dichos vehículos depende en gran parte de la configuración de los mismos. Así por ejemplo en los vehículos que no poseen deslizamiento (restricciones no holonómicas de primer orden) existe toda una gama de soluciones de control cinemáticas, ver por ejemplo (Balluchi, Bicchi, Piccoli & Souères, 2000), así como dinámicas como es el caso de (Oya, Su & Katoh, 2003).

Sin embargo, cuando existe deslizamiento (condiciones no holonómicas de segundo orden), las leyes de control deben de considerar necesariamente las condiciones dinámicas del sistema, (Behal, Dawson, Dixon & Fang, 2002).

Llegados a este punto conviene recordar la distinción entre seguimiento de camino (*path following*) y seguimiento de trayectoria (*tracking*).

Según el criterio de Encarnaçao y Pascoal, (2001) es posible distinguir los siguientes problemas de seguimiento:

- I Seguimiento de trayectoria (*tracking*): En este problema el vehículo debe seguir una trayectoria espacial que se encuentra parametrizada en el tiempo $(x(t), y(t))$.
- II Seguimiento de camino (*Path following*): En este problema el vehículo debe converger hacia un camino preestablecido $(x(s), y(s))$. Donde s puede ser cualquier parametrización de la trayectoria (normalmente la longitud de arco). Y una vez haya llegado hacia el camino deberá seguirlo con una velocidad de crucero especificada.

Algunos autores no hacen esta distinción al considerar el seguimiento de camino como un seguimiento de velocidad, véase por ejemplo (Ashrafiuon & Muske, 2008).

Conviene aclarar que este capítulo se ocupa únicamente del seguimiento de trayectoria aunque, en general, un control de seguimiento de trayectoria pueda ser fácilmente modificado para convertirlo en un control de seguimiento de camino, ya que se reduce en una unidad la dimensionalidad del problema (no se controla s , solo su derivada) (Aguiar et al., 2007) muestra un ejemplo de diseño que explota esta posibilidad.

Uno de los mayores problemas con los que se encuentra el control de vehículos subactuados es la existencia de restricciones no holonómicas en el movimiento. Estas restricciones reducen el conjunto de trayectorias factibles en el espacio de configuraciones (Aguiar et al., 2003).

En general las leyes de control de seguimiento de trayectoria, se encuentran fuertemente influidas por las condiciones de controlabilidad del vehículo en la trayectoria (véase Capítulo 2) y con el teorema de Brockett (1976).

De este modo las leyes de control por realimentación del estado imponen condiciones sobre el tipo de trayectorias que pueden seguirse. Así por ejemplo en Lefeber et al. (2003) se exigen condiciones de persistencia de la excitación en la velocidad angular r (lo que como se vio en el Capítulo 2 garantiza la controlabilidad local en torno a la trayectoria). Lo mismo ocurre en (Dong & Guo, 2005). El problema de estas leyes de control es que son incapaces de seguir trayectorias rectilíneas ($r=0$).

Lo mismo ocurre en (Toussaint, Tamer Başar & Bullo, 2000), donde se diseña un control que estabiliza un vehículo de superficie en trayectorias que produzcan una dinámica cero estable para la orientación (lo que en particular se cumple en trayectorias de curvatura constante).

También existen en la literatura soluciones de control variantes en el tiempo, por ejemplo (Ariaei & Jonckheere, 2006) diseña un control de seguimiento de trayectorias circulares mediante controladores LDV (*Linear Dynamically Varying*) para un aerodeslizador subactuado.

En otras ocasiones se alcanza seguimiento de trayectoria en un sentido práctico (el error de seguimiento no es nulo pero puede hacerse tan pequeño como se quiera aumentando la señal de control) en esta línea se encuentra el trabajo de (Aguiar et al., 2003) y

(Aguilar et al., 2007). La ventaja de esta técnica es que puede aplicarse a trayectorias muy generales ya que basta únicamente con que las trayectorias espaciales sean suficientemente suaves.

Conviene destacar que el aerodeslizador es diferencialmente plano para un amplio conjunto de trayectorias, esto es, que conocido un subconjunto de las salidas (variables planas) y sus derivadas hasta cierto orden, es posible invertir el sistema obteniendo así el conjunto de los estados así como las entradas de control necesarias para seguir la trayectoria. Véase (Fliess, Lévine, Martin & Rouchon, 1995) para una descripción exhaustiva de este concepto.

Algunas leyes de control hacen uso de esta propiedad en su diseño, como es el caso de (Sira-Ramírez & Ibañez, 2000). Estas leyes de control producen no obstante leyes de control variantes en el tiempo.

En (Dumbar et al., 2003) se explota otra técnica de control que consiste en desacoplar el sistema en dos sistemas no lineales en cascada. Dicha idea se apoya sobre la base del trabajo previo de (Olfati-Saber, 2002). En dicho trabajo se afirma que es posible diseñar la ley de control de modo tal que se satisfagan ciertas restricciones de saturación. Desafortunadamente no existen referencias posteriores que confirmen esta afirmación.

En este capítulo se desarrolla una estrategia de desacoplamiento que, como en (Dumbar et al., 2003), utiliza un desacoplamiento entre la posición y la orientación del vehículo. Además de demuestra la estabilidad asintótica global para cualquier trayectoria bien definida. Finalmente se hará un análisis detallado de la robustez del sistema mediante el estudio de las perturbaciones y también del ruido en la medida.

5.1.1. Tipos de trayectoria

A continuación se analiza la planitud diferencial del aerodeslizador con respecto a las variables de posición x e y . Para ello se considera el aerodeslizador cuyo modelo se presenta en el Capítulo 2:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \tau - d_r r
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

El aerodeslizador representado por (5.1) es un sistema no nolonómico de segundo orden, de hecho haciendo uso de las ecuaciones para la velocidad se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Y tras algunas manipulaciones algebraicas simples se llega a

$$\begin{aligned}(\dot{v}_x + d_u v_x) \sin(\psi) &= (\dot{v}_y + d_u v_y) \cos(\psi) \\ F^2 &= (\dot{v}_x + d_u v_x)^2 + (\dot{v}_y + d_u v_y)^2\end{aligned}\quad (5.3)$$

Que expresado en función de las coordenadas de posición:

$$\begin{aligned}(\ddot{x} + d_u \dot{x}) \sin(\psi) - (\ddot{y} + d_u \dot{y}) \cos(\psi) &= 0 \\ F^2 &= (\ddot{x} + d_u \dot{x})^2 + (\ddot{y} + d_u \dot{y})^2\end{aligned}\quad (5.4)$$

Supóngase que se desea seguir una trayectoria parametrizada en el tiempo $[x_r(t), y_r(t)]^T$, entonces la restricción (5.4) permite calcular el valor de $\psi_r(t)$ y F_r :

$$\begin{aligned}\tan(\psi_r) &= \frac{\ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r}{\ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r} \\ F_r &= \pm \sqrt{(\ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r)^2 + (\ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r)^2}\end{aligned}\quad (5.5)$$

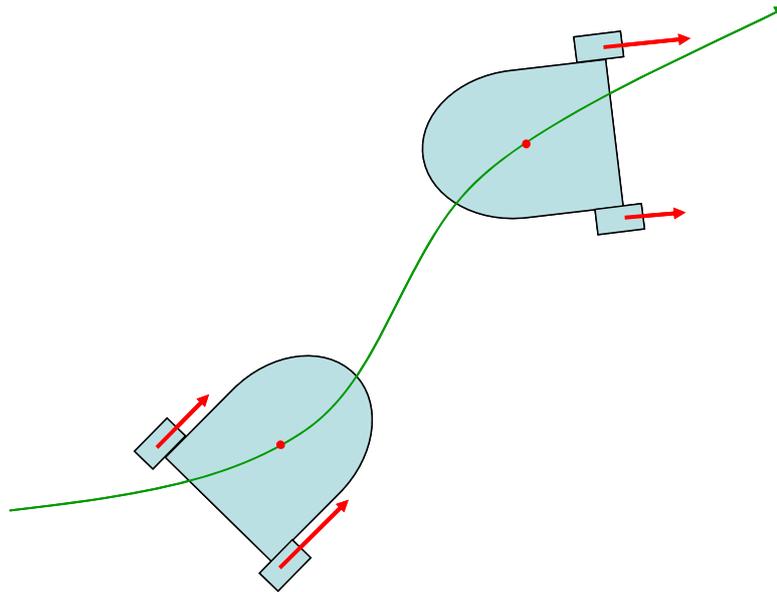


Figura 5.1. Posibles soluciones al seguimiento de una trayectoria. La misma trayectoria puede seguirse hacia delante o hacia atrás.

Las ecuaciones (5.5) presentan infinitas soluciones posibles para el valor de ψ_r y dos soluciones para el valor de F_r . De todas las soluciones posibles, las únicas que verifican simultáneamente (5.4) son las siguientes:

$$\begin{aligned}\psi_r &= \arctan 2(\ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r, \ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r) + n\pi \\ F_r &= (-1)^n \sqrt{(\ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r)^2 + (\ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r)^2}\end{aligned}\quad (5.6)$$

Donde n es cualquier número entero. La ecuación (5.6) muestra que todas las soluciones pueden agruparse en dos familias equivalentes, aquellas con n par representan al

aerodeslizador “*hacia delante*” (La fuerza F_r es positiva) mientras que las soluciones con n impar representan al aerodeslizador moviéndose “*hacia atrás*” (la fuerza F_r es negativa) como se muestra en la Figura 5.1.

Para simplificar las expresiones subsiguientes se definen las fuerzas de referencia en el sistema inercial F_{xr} y F_{yr} del siguiente modo:

$$\begin{aligned} F_{xr} &= \ddot{x}_r + d_u \dot{x}_r \\ F_{yr} &= \ddot{y}_r + d_u \dot{y}_r \end{aligned} \quad (5.7)$$

Derivando entonces ψ_r se obtiene:

$$\begin{aligned} r_r &= \frac{d\psi_r}{dt} = \frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{F_{xr}}{F_{yr}}\right) = \frac{F_{xr} \dot{F}_{yr} - \dot{F}_{xr} F_{yr}}{F_{xr}^2 + F_{yr}^2} \\ \dot{r}_r &= \frac{F_{xr} \ddot{F}_{yr} - \ddot{F}_{xr} F_{yr}}{F_{xr}^2 + F_{yr}^2} - 2r_r \frac{F_{xr} \dot{F}_{xr} - \dot{F}_{yr} F_{yr}}{F_{xr}^2 + F_{yr}^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Donde las derivadas de F_{xr} y F_{yr} pueden calcularse inmediatamente a partir de su definición:

$$\begin{aligned} \dot{F}_{xr} &= x_r^{(3)} + d_u \ddot{x}_r \\ \dot{F}_{yr} &= y_r^{(3)} + d_u \ddot{y}_r \\ \ddot{F}_{xr} &= x_r^{(4)} + d_u x_r^{(3)} \\ \ddot{F}_{yr} &= y_r^{(4)} + d_u y_r^{(3)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

De este modo si F_r no se anula, la expresión (5.8) está bien definida de modo que finalmente se obtiene:

$$\tau_r = \dot{r}_r + d_r r_r \quad (5.10)$$

Conviene en este punto hacer una pequeña aclaración sobre la notación. A lo largo del capítulo se habla de *trayectoria* para referirse a la trayectoria en el espacio de configuraciones $[x(t), y(t), \psi(t)]^T$, asimismo se habla de *trayectoria espacial* para referirse solamente a las variables de posición $[x(t), y(t)]^T$.

El análisis anterior demuestra que en general es posible calcular el estado del sistema así como las entradas solamente con el conocimiento de la trayectoria espacial y sus derivadas hasta cuarto orden. La planitud diferencial significa que el estado del sistema (y en particular la orientación) es observable en la trayectoria a partir de las variables de posición.

Lema 5.1. Sea $[x(t), y(t)]^T$ una trayectoria espacial cuatro veces derivable que verifica

$$(\ddot{x}(t) + d_u \dot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t) + d_u \dot{y}(t))^2 \neq 0 \quad \forall t \quad (5.11)$$

Fijado el signo de F_r en cualquier instante de tiempo t , entonces el sistema (5.1) es diferencialmente plano con respecto a las variables de posición x , e y en dicha trayectoria.

Demostración: Puesto que la posición es cuatro veces derivable, la expresión (5.9) está bien definida. Por otra parte, la condición (5.11) garantiza que el denominador (5.8) no se anula y por tanto las expresiones (5.6) y (5.10) también están bien definidas.

De este modo todo r_r y τ_r están unívocamente determinados por la trayectoria espacial $[x(t), y(t)]^T$. Por otra parte puesto que el F_r no se anula, su signo permanece constante de tal manera que la ecuación (5.6) tiene solución única, de tal modo que ψ y F están unívocamente determinados.

■

Si la trayectoria espacial es suficientemente suave y verifica (5.11), entonces el aerodeslizador (2.8) es diferencialmente plano (observable) y al mismo tiempo es controlable en torno a dicha trayectoria.

Para comprobarlo basta con darse cuenta de que la condición (5.11) es la primera condición de controlabilidad en el entorno de una trayectoria del Teorema 2.2.

5.1.1.A. Trayectorias factibles

Puesto que las entradas de control del aerodeslizador están limitadas, no todas las posibles soluciones de (2.8) serán físicamente realizables. Recordando la relación entre la fuerza de los motores y las señales de control se tiene que:

$$\begin{aligned} F &= (F_b + F_e) / m \\ \tau &= l(F_b - F_e) / J \end{aligned} \quad (5.12)$$

Invirtiendo estas relaciones:

$$\begin{aligned} F_b &= \frac{1}{2} \left(mF + \frac{J\tau}{l} \right) \\ F_e &= \frac{1}{2} \left(mF - \frac{J\tau}{l} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

La saturación en la fuerza de los motores hace que las fuerzas de babor y estribor F_e y F_b estén limitadas superior e inferiormente de tal manera que $F_{b,e} \in [-u_{min}, u_{max}]$. Esto justifica la siguiente definición:

Definición 5.1: Una trayectoria $[x(t), y(t), \psi(t)]$ en el espacio de configuraciones es factible si es solución de (5.1) para $F(t)$ y $\tau(t)$ y además para todo tiempo t se cumple que:

$$\begin{aligned}
 -u_{\min} &\leq \frac{1}{2} \left(mF(t) + \frac{J\tau(t)}{l} \right) \leq u_{\max} \\
 -u_{\min} &\leq \frac{1}{2} \left(mF(t) - \frac{J\tau(t)}{l} \right) \leq u_{\max}
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Definición 5.2: Una trayectoria $[x(t), y(t), \psi(t)]$ es estrictamente factible si es factible y además existe un ε tal que:

$$\begin{aligned}
 -u_{\min} + \varepsilon &\leq \frac{1}{2} \left(mF(t) + \frac{J\tau(t)}{l} \right) \leq u_{\max} - \varepsilon \\
 -u_{\min} + \varepsilon &\leq \frac{1}{2} \left(mF(t) - \frac{J\tau(t)}{l} \right) \leq u_{\max} - \varepsilon
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Según las definiciones anteriores una trayectoria es factible cuando es posible recorrerla usando las fuerzas disponibles. Una trayectoria factible puede estar al límite de lo que el aerodeslizador puede hacer, por ello se define la trayectoria estrictamente factible.

En una trayectoria estrictamente factible el aerodeslizador no solamente puede recorrer la trayectoria sino que además siempre existe un margen de actuación ε en cada uno de los actuadores.

El conjunto de fuerzas y momentos normalizados (F, τ) permitidos por la relación (5.14) se muestran en la Figura 5.2. Una trayectoria no factible es aquella que abandona la región de fuerzas disponibles. Una trayectoria factible es aquella que permanece en dicha región aunque puede saturar los actuadores. Una trayectoria estrictamente factible es aquella que permanece en el interior de la región sin tocar su frontera (sin saturar los actuadores)

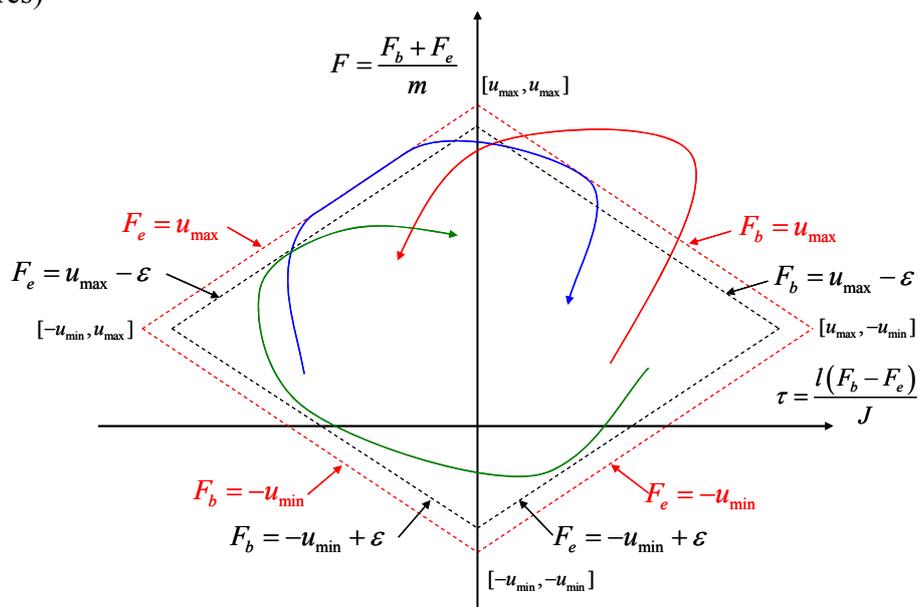


Figura 5.2. Diagrama de fuerzas admisibles. Se muestran ejemplos de tres tipos de trayectorias: no factible (rojo), factible (azul) y estrictamente factible (verde).

5.1.1.B. Trayectorias bien definidas

Dada una trayectoria espacial $[x(t), y(t)]^T$ suave que verifica (5.11) siempre es posible calcular $\psi(t)$ y de este modo obtener la trayectoria en el espacio de configuraciones $[x(t), y(t), \psi(t)]^T$ de forma única. Además, también es posible calcular F y τ y verificar la factibilidad de la trayectoria usando (5.14) o (5.15).

El problema fundamental ocurre cuando la trayectoria espacial $[x(t), y(t)]$ no es suficientemente suave o viola (5.11), en este caso podría existir una trayectoria $[x(t), y(t), \psi(t)]^T$ factible que sea compatible con la trayectoria espacial, sin embargo (5.8) no puede usarse para verificarlo, y de hecho el problema se complica.

Para ilustrar la variedad de casos posibles conviene usar unos sencillos ejemplos:

Ejemplo 5.1: Supongase en primer lugar la siguiente trayectoria espacial:

$$x(t) = \begin{cases} at & t \leq 1 \\ a \left(2t + \frac{e^{-d_u(t-1)}}{d_u} \right) & t > 1 \end{cases} \quad (5.16)$$

$$y(t) = 0$$

Si $t < 1$ La trayectoria (5.16) es solución de (5.1) con $F = d_u a$ y $\psi = 0$ o bien para $F = -d_u a$ y $\psi = \pi/2$. Esto es, el aerodeslizador avanza por el eje x manteniendo los motores con fuerza constante. Durante este periodo es claro que $\tau = 0$.

Cuando $t > 1$ entonces la trayectoria (5.16) sigue siendo solución de (5.1) pero ahora con $F = 2d_u a$ y $\psi = 0$ o bien para $F = -2d_u a$ y $\psi = \pi/2$. En cualquier caso τ sigue siendo nulo. La trayectoria espacial es solamente de clase C^2 ya que:

$$\ddot{x}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ ad_u e^{-d_u(t-1)} & t > 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

Pese a que la derivada segunda es discontinua en $t=1$, si se cumple que $a < 2u_{max}/m$ entonces la trayectoria es estrictamente factible. Conocido el signo de F en el instante inicial (que indica si el aerodeslizador avanza o retrocede) la trayectoria queda totalmente definida por su parte espacial. Entonces una trayectoria factible no tiene por que ser cuatro veces derivable como se exige en Lema 5.1.

Ejemplo 5.2: Sea esta otra trayectoria espacial:

$$x(t) = \frac{v_x(0)}{d_u} (1 - e^{-d_u t})$$

$$y(t) = \frac{v_y(0)}{d_u} (1 - e^{-d_u t}) \quad (5.18)$$

La trayectoria es suave C^∞ pero $F=0$, lo que directamente viola la condición (5.11). En este caso (5.6) no aporta ninguna información acerca de la orientación del sistema:

$$\begin{aligned} 0 \sin(\psi) - 0 \cos(\psi) &= 0 \\ F^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Puesto que $\psi(t)$ queda libre, $\tau(t)$ puede escogerse arbitrariamente de modo que verifique (5.14) por lo que existen infinitas trayectorias factibles que recorren la misma trayectoria espacial.

Ejemplo 5.3: Sea la siguiente trayectoria:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sin(at) \\ y(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Se trata de una trayectoria oscilante en el eje x , si se utiliza (5.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} a(d_u \cos(at) - \sin(at)) \sin(\psi) &= 0 \\ F^2 &= a^2 (d_u \cos(at) - \sin(at))^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

En los puntos donde F se anule (hay dos por periodo) un intento directo de aplicar (5.6) fracasa. El motivo es que $\text{atan2}(0,0)$ no está bien definida, de este modo cuando F se anula la ecuación (5.6) tiene una discontinuidad.

Esta discontinuidad sin embargo es totalmente evitable ya que el salto es exactamente π radianes de tal forma que recurriendo directamente a (5.4) las únicas soluciones continuas son:

$$\begin{aligned} \psi_r &= n\pi \\ F_r &= (-1)^n a (d_u \cos(at) - \sin(at)) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Donde n es cualquier número entero. En este caso el problema se produce cuando el aerodeslizador pasa de acelerar a frenar sin cambiar de orientación. Además es claro que para a pequeño la trayectoria es estrictamente factible.

Cuando F se anula se produce un cambio entre dos ramas de la solución (5.6). La trayectoria sigue siendo diferencialmente plana, sin embargo es necesario un análisis adicional y consideraciones de continuidad para poder obtener el estado completo.

Ejemplo 5.4: Sea finalmente la siguiente trayectoria:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ ae^{\frac{-1}{t-1}} & t > 1 \end{cases} \\ y(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Es fácil ver que (5.23) es una trayectoria espacial suave, de hecho es C^∞ ya que todas las derivadas de la segunda rama de la función $x(t)$ se anulan en $t=1$.

Para $t < 1$ el aerodeslizador está quieto en el origen. En este periodo de tiempo la orientación es totalmente arbitraria. Una posible trayectoria factible podría ser por ejemplo mantener la orientación constante $\psi = c$.

A partir de $t = 1$ el aerodeslizador avanza en la dirección positiva del eje x y cuando $t \rightarrow \infty$ entonces $x \rightarrow a$. Calculando entonces la fuerza y la orientación se tiene:

$$\begin{aligned} \psi &= n\pi \\ F &= (-1)^n a \frac{e^{-1}}{(t-1)^2} \left(d_u + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{2}{t-1} \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Es fácil ver que la fuerza es acotada de tal modo que tomando a suficientemente pequeño la trayectoria será factible. De esta forma, una posible trayectoria en el espacio de configuración que recorre la trayectoria espacial (5.24) podría ser la siguiente.

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ ae^{-1} & t > 1 \end{cases} \\ y(t) &= 0 \\ \psi(t) &= c = n\pi \end{aligned} \quad (5.25)$$

Lo que hace que este ejemplo sea realmente interesante es que no es posible encontrar una trayectoria factible utilizando información local. Para poder calcular la trayectoria factible en cualquier tiempo $t < 1$ es necesario utilizar información sobre la trayectoria en $t \geq 1$.

Conocer la trayectoria y todas sus derivadas en cualquier tiempo menor que $t = 1$ no sirve para calcular la orientación inicial c . Ha sido necesario conocer el valor de la trayectoria y sus dos primeras derivadas en el tiempo $t = 1$ para poder calcularlo.

Esto representa un problema a la hora de diseñar una ley de control por realimentación que solo disponga de información local sobre la trayectoria espacial que se desea seguir.

El problema está en que una ley de control de estas características solo utiliza las medidas del estado y las derivadas de la trayectoria de referencia en un instante dado. Sin embargo como se ha visto anteriormente para poder calcular una trayectoria factible (esto es, una fuerza que aplicar al aerodeslizador) en general se necesita información sobre el futuro a largo plazo.

Los ejemplos anteriores muestran que cualquier violación de las condiciones del Lema 5.1 produce problemas de muy distinta naturaleza a la hora de calcular ψ . En algunos casos como los ejemplos 1 y 3 el problema puede solucionarse aplicando condiciones de continuidad (se necesita un análisis local), en otros casos la asignación de la orientación es arbitraria como ocurre en el ejemplo 4.2.

Finalmente existen casos que requieren un análisis global de toda la trayectoria espacial en su conjunto para poder obtener una trayectoria factible como en el ejemplo 4.

Para evitar esta variedad de posibilidades el análisis se limita a un tipo especial de trayectorias que no presenten dichos problemas. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.3: Una trayectoria espacial $[x(t), y(t)]$ que sea solución de (5.1) está bien definida si es estrictamente factible y además cumple las condiciones del Lema 5.1.

5.1.2. Definición del problema

Una vez estudiado el tipo de trayectorias que resultan aceptables se plantea el problema de control como sigue.

Sea el sistema dinámico (4.3) que se reescribe a continuación

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x + p_{vx} \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y + p_{vy} \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \tau - d_r r + p_r
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Representando al aerodeslizador subactuado (5.1) en presencia de un vector de perturbaciones acotadas $\mathbf{p}=[p_v, p_{vy}, p_r]^T$ que agrupa las perturbaciones del sistema y la dinámica no modelada.

Y sean $\mathbf{x}=[x, y, v_x, v_y, \psi, r]^T$ el vector de estados del sistema e \mathbf{y} la salida del mismo, incluyendo un error desconocido pero acotado en la medida \mathbf{n} .

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \tag{5.27}$$

Supóngase que la perturbación y su derivada están acotadas, así como el error en la medida:

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{p}\| &\leq p_{\max} \\
 \sup_{t \geq 0} \left\| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\| &\leq \dot{p}_{\max} \\
 \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{n}\| &\leq n_{\max}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Dada una trayectoria espacial bien definida $\mathbf{x}_e=[x_r(t), y_r(t)]^T$, ésta define una trayectoria de referencia $\mathbf{x}_r=[x_r, y_r, v_{xr}, v_{yr}, \psi_r, r_r]^T$. El objetivo de este capítulo es hallar una ley de realimentación que utilice información local de la trayectoria espacial de la forma:

$$\begin{aligned}
 F &= F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e, \dot{\mathbf{x}}_e, \ddot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e^{(3)}, \mathbf{x}_e^{(4)}) \\
 \tau &= \tau(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e, \dot{\mathbf{x}}_e, \ddot{\mathbf{x}}_e, \mathbf{x}_e^{(3)}, \mathbf{x}_e^{(4)})
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

De tal manera que para n_{max} , \dot{p}_{max} y p_{max} suficientemente pequeños la solución de (5.26) sometida a la ley de control (5.29) haga que:

- I El error de seguimiento espacial $\mathbf{e}_s = [x-x_r, y-y_r, v_x-v_{xr}, v_y-v_{yr}]^T$ sea global finalmente acotado. Esto es, que la trayectoria del aerodeslizador converja a un entorno de la trayectoria espacial deseada desde cualquier condición inicial.
- II Que partiendo de una condición inicial acotada las entradas de control F y τ sean estrictamente factibles.
- III Si el error y las perturbaciones fuesen nulas el error de seguimiento tienda a cero.

5.2. Seguimiento de trayectoria

En este apartado se diseña una ley de control que cumple con las especificaciones del apartado anterior. En primer lugar se da una explicación del procedimiento de diseño sin tener en cuenta perturbaciones ni ruido. A continuación se hace un análisis de la factibilidad y estabilidad del sistema completo. Finalmente se analizará el efecto del ruido y las perturbaciones sobre la ley de control.

5.2.1. Diseño del control

En este apartado primero se da dando una visión general del sistema para después describir por separado el control de posición y el control de orientación.

5.2.1.A. Planteamiento general

Se comienza por analizar cualitativamente el problema de control del aerodeslizador. Si se observa atentamente las dos últimas ecuaciones de (5.1) se deduce que la orientación es directamente controlable por medio del momento τ , de este modo es posible llevar la variable ψ a cualquier valor deseado ψ_c . El ángulo ψ_c es el valor que tendría la orientación en caso de que la misma se encontrara perfectamente controlada, no debe confundirse con ψ_r que es la orientación necesaria para seguir exactamente la trayectoria. En este caso el resto de variables serían:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi_c) - d_u v_x \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi_c) - d_u v_y
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

La actuación sobre las velocidades v_x y v_y se llevaría a cabo por medio de las entradas F y ψ_c . Esto sugiere definir $F_x = F \cos(\psi_c)$ y $F_y = F \sin(\psi_c)$ como dos fuerzas de control

virtuales e independientes, para así controlar las velocidades y con ellas la posición del vehículo.

Un esquema de dicho diseño de control se muestra en la Figura 5.3. El lazo externo calcula los valores de F_x y F_y . Esos valores se transformarían en valores de F y la referencia para la orientación ψ_c . Finalmente el lazo interno intenta controlar la orientación para seguir así las referencias del lazo externo.

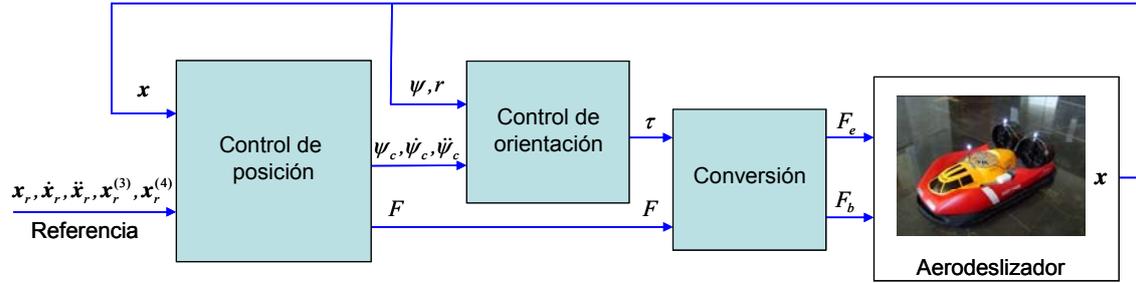


Figura 5.3. Esquema de control en cascada para el seguimiento de trayectoria.

5.2.1.B. Control de la posición

A continuación se plantea el lazo externo de control, para ello se definen las variables de error espacial.

Sea $\mathbf{x}_e = [x_r(t), y_r(t)]^T$ una trayectoria espacial bien definida y sea v_{xr} la derivada de x_r y v_{yr} la derivada de y_r , entonces se definen las siguientes variables de error:

$$\begin{aligned} e_x &= x - x_r \\ e_y &= y - y_r \\ e_{vx} &= v_x - \dot{x}_r = v_x - v_{xr} \\ e_{vy} &= v_y - \dot{y}_r = v_y - v_{yr} \end{aligned} \quad (5.31)$$

La dinámica de estas variables de error viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= v_x - v_{xr} = e_{vx} \\ \dot{e}_y &= v_y - v_{yr} = e_{vy} \\ \dot{e}_{vx} &= F \cos(\psi) - d_u v_x - \ddot{x}_r = F \cos(\psi) - d_u e_{vx} - d_u \dot{x}_r - \ddot{x}_r \\ \dot{e}_{vy} &= F \sin(\psi) - d_u v_y - \ddot{y}_r = F \sin(\psi) - d_u e_{vy} - d_u \dot{y}_r - \ddot{y}_r \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si se substituye (5.7) en (5.32) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= e_{vx} \\ \dot{e}_y &= e_{vy} \\ \dot{e}_{vx} &= F \cos(\psi) - d_u e_{vx} - F_{xr} \\ \dot{e}_{vy} &= F \sin(\psi) - d_u e_{vy} - F_{yr} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Se definen entonces las variables ψ_c y F como sigue:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \sin(\psi_c) \\ F_y &= F \cos(\psi_c) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \psi_c = \arctan 2(F_y, F_x) \\ F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \end{cases} \quad (5.34)$$

La ecuación (5.33) puede entonces reescribirse en términos de ψ_c y de unas variables de error z_x y z_y

$$\begin{aligned} z_x &= F (\cos(\psi) - \cos(\psi_c)) \\ z_y &= F (\sin(\psi) - \sin(\psi_c)) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Para ello manipulando (5.33) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= e_{vx} \\ \dot{e}_y &= e_{vy} \\ \dot{e}_{vx} &= F_d \cos(\psi_c) + (F \cos(\psi) - F \cos(\psi_c)) - d_u e_{vx} - F_{xr} \\ \dot{e}_{vy} &= F_d \sin(\psi_c) + (F \sin(\psi) - F \sin(\psi_c)) - d_u e_{vy} - F_{yr} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Y sustituyendo (5.35) en (5.36) finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= v_x \\ \dot{e}_y &= v_y \\ \dot{e}_{vx} &= -d_u e_{vx} + F_x - F_{xr} + z_x \\ \dot{e}_{vy} &= -d_u e_{vy} + F_y - F_{yr} + z_y \end{aligned} \quad (5.37)$$

Con el fin de estabilizar el sistema dinámico (5.37) se propone la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xr} - \text{sat}_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \\ F_y &= F_{yr} - \text{sat}_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Donde $\text{sat}_1(\text{Saf}_0)$ puede ser cualquier función de saturación suave que limite el valor de x al intervalo $[-F_0, F_0]$ mientras k_1 y k_2 son dos constantes de control positivas. Posteriormente se verá como es posible elegir la saturación de tal modo que las señales de control generadas sean siempre factibles.

Dicha ley de realimentación convierte la dinámica (5.37) en un sistema no lineal estable sometido a las perturbaciones z_x y z_y :

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x &= e_{vx} \\
\dot{e}_y &= e_{vy} \\
\dot{e}_{vx} &= -sat_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x \\
\dot{e}_{vy} &= -sat_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) - d_u e_{vy} + z_y
\end{aligned} \tag{5.39}$$

La estabilidad de dicho sistema quedará de manifiesto en el análisis posterior.

Las perturbaciones z_x y z_y que tienen una sencilla interpretación geométrica tal como muestra la Figura 5.4.

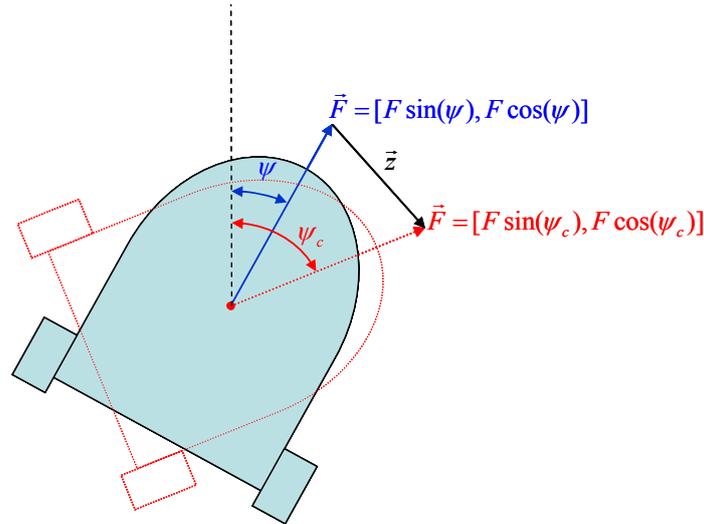


Figura 5.4. Interpretación geométrica de las variables z . El vector z representa la diferencia entre la fuerza que se aplicaría si la orientación fuese correcta y la fuerza que realmente se aplica.

F_x y F_y son las coordenadas de la fuerza que se quiere aplicar en el sistema de referencia inercial para seguir una trayectoria dada. Por otro lado, la fuerza que realmente se aplica en el aerodeslizador real es $\mathbf{F} = [F \sin(\psi), F \cos(\psi)]^T$. El vector $\mathbf{z} = [S_{ass_i}]^T$ representa entonces la diferencia entre la fuerza que se aplica y la fuerza que se debería aplicar para controlar el vehículo. Dicho vector puede acotarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{z}(F, \psi, \psi_c)\|^2 &= F^2 (\cos(\psi) - \cos(\psi_c))^2 + F^2 (\sin(\psi) - \sin(\psi_c))^2 = \\
&= 2F^2 - 2F^2 (\cos(\psi) \cos(\psi_c) + \sin(\psi) \sin(\psi_c)) = \\
&= 2F^2 (1 - \cos(\psi - \psi_c))
\end{aligned} \tag{5.40}$$

La interpretación geométrica del resultado es muy simple, la ecuación (5.40) indica que el error cometido es menor cuanto menor sea la diferencia entre la orientación real y la orientación de control.

5.2.1.C. Control de la orientación

El objetivo del lazo interno es eliminar las variables z , para ello se diseña una ley de control que haga que ψ converja hacia ψ_c , para ello de nuevo se introducen variables de error e_ψ y e_r :

$$\begin{aligned} e_\psi &= \psi - \psi_c \\ \dot{e}_\psi &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_c = e_r \\ \dot{e}_r &= \dot{r} - \ddot{\psi}_c = \tau - d_r r + p_r - \ddot{\psi}_c \\ &= \tau - d_r e_r - d_r \dot{\psi}_c - \ddot{\psi}_c \end{aligned} \quad (5.41)$$

De este modo definiendo:

$$\tau_c = d_r \dot{\psi}_c + \ddot{\psi}_c \quad (5.42)$$

Se obtiene la siguiente dinámica para el error en la orientación:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= \tau - d_r e_r - \tau_c \end{aligned} \quad (5.43)$$

Llegado a este punto conviene hacer una pequeña observación, la expresión para τ_c (5.42) guarda una gran similitud con la expresión (5.10) que permite calcular τ_r . En general las derivadas de ψ_c deben calcularse a partir de la expresión (5.34) y dependerán por tanto de la dinámica espacial a través de F_x y F_y . Sin embargo, en el caso de que el error de seguimiento espacial fuese nulo, entonces en virtud de (5.38) $F_x \equiv F_{xr}$ y $F_y \equiv F_{yr}$ de tal manera que $\psi_c \equiv \psi_r$, y por tanto $\tau_c \equiv \tau_r$.

Finalmente con el fin de estabilizar la dinámica (5.43) se propone la siguiente ley de control para τ similar a (5.38):

$$\tau = \tau_c - \text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) \quad (5.44)$$

De tal modo que la dinámica del sistema completo se transforma finalmente en:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= e_{vx} \\ \dot{e}_y &= e_{vy} \\ \dot{e}_{vx} &= -\text{sat}_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x \\ \dot{e}_{vy} &= -\text{sat}_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) - d_u e_{vy} + z_y \\ \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= -\text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) - d_r e_r \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.2.2. Análisis de factibilidad

Un punto crucial en la aplicación de la ley de control es verificar que las señales de control diseñadas en el apartado anterior son factibles y por tanto pueden ser aplicadas al sistema.

Para ello en primer lugar es necesario dar una expresión explícita de la ley de control. Esto conlleva el cálculo de las derivadas de ψ_c . Además será necesario hacer ciertas consideraciones acerca de las funciones de saturación sat_1 y sat_2 .

Una vez expandida la ley de control en función de las variables de error y las referencias se verá como F y τ permanecen en un entorno local de F_r y τ_r .

Llegados a este punto será fácil demostrar que bajo una correcta elección de las constantes del controlador, las señales F y τ generadas siempre son factibles.

A continuación se muestra de forma explícita el procedimiento de cálculo de la ley de control (5.38) y (5.44). En primer lugar se calculan las fuerzas virtuales F_x y F_y .

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xr} - sat_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \\ F_y &= F_{yr} - sat_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Estas fuerzas se utilizan para calcular F y ψ_c con las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} \psi'_c &= \arctan 2(F_y, F_x) \\ F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Un punto interesante a tener en cuenta es que la expresión para ψ'_c en (5.47) es discontinua ya que cualquier definición del arcotangente solo está bien definida en un intervalo de tamaño máximo 2π . En el caso de la función $atan2$ esta discontinuidad se encuentra en el semieje negativo del eje x como muestra la Figura 5.5.

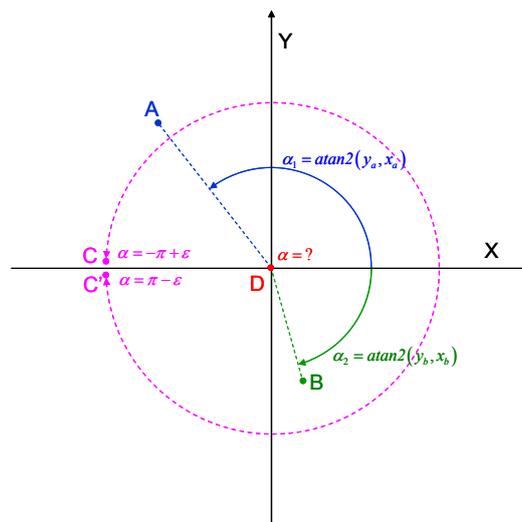


Figura 5.5. Discontinuidad del arcotangente. En los puntos A y B la función $atan2$ está definida y es continua. Entre el punto C y C' existe una discontinuidad evitable (puede evitarse sumando o restando 2π al pasar por el eje x) sin embargo en el punto D no existe ninguna forma coherente de definir el arcotangente.

Es importante destacar que la discontinuidad es evitable en todos los puntos excepto en el origen ($F=0$) ya que si $F \neq 0$ es siempre posible regularizar el ángulo mediante la suma de $2n\pi$ manteniendo la continuidad de la función y de sus derivadas. De este modo la señal de control regularizada viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned}\psi_c(t) &= \psi'_c(t) + 2n\pi \\ n / (\psi_c(t) - \psi_c(t^-)) &\leq \pi\end{aligned}\quad (5.48)$$

Una implementación práctica simple de (5.48) puede llevarse a cabo mediante el siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned}\delta &= \psi'_c(t) - \psi_c(t - \varepsilon) \\ \psi_c(t) &= \psi_c(t - \varepsilon) + \arctan 2(\sin(\delta), \cos(\delta))\end{aligned}\quad (5.49)$$

A continuación se calculan las derivadas de orden superior de F_x , F_y y F :

$$\begin{aligned}\dot{F}_x &= \dot{F}_{xr} - \text{sat}'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \left((k_1 - k_2 d_u) e_{vx} + k_2 (F \cos(\psi) - F_{xr}) \right) \\ \dot{F}_y &= \dot{F}_{yr} - \text{sat}'_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) \left((k_1 - k_2 d_u) e_{vy} + k_2 (F \sin(\psi) - F_{yr}) \right) \\ \dot{F} &= \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \dot{F}_x + \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} \dot{F}_y = \cos(\psi_c) \dot{F}_x + \sin(\psi_c) \dot{F}_y \\ \ddot{F}_x &= \ddot{F}_{xr} - \text{sat}''_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \left((k_1 - k_2 d_u) e_{vx} + k_2 (F \cos(\psi) - F_{xr}) \right)^2 - \\ &\quad - (k_1 - k_2 d_u) \text{sat}'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) (-d_u e_{vx} + F \cos(\psi) - F_{xr}) - \\ &\quad - k_2 \text{sat}'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) (\dot{F} \cos(\psi) - rF \sin(\psi) - \dot{F}_{xr}) \\ \ddot{F}_y &= \ddot{F}_{yr} - \text{sat}''_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) \left((k_1 - k_2 d_u) e_{vy} + k_2 (F \sin(\psi) - F_{yr}) \right)^2 - \\ &\quad - (k_1 - k_2 d_u) \text{sat}'_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) (-d_u e_{vy} + F \sin(\psi) - F_{yr}) - \\ &\quad - k_2 \text{sat}'_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) (\dot{F} \sin(\psi) + rF \cos(\psi) - \dot{F}_{yr})\end{aligned}\quad (5.50)$$

Es importante destacar que la derivada de F así como las derivadas segundas de F_x y F_y están bien definidas aunque F sea nula. De hecho si las funciones de saturación son C^∞ entonces las funciones F_x , F_y y F también lo son. Sin embargo no ocurre lo mismo con las derivadas de ψ_c :

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_c &= \frac{F_x \dot{F}_y - \dot{F}_x F_y}{F_x^2 + F_y^2} \\ \ddot{\psi}_c &= \frac{F_x \ddot{F}_y - \ddot{F}_x F_y}{F_x^2 + F_y^2} - 2\dot{\psi}_c \frac{F_x \dot{F}_x - \dot{F}_y F_y}{F_x^2 + F_y^2}\end{aligned}\quad (5.51)$$

Aunque dichas derivadas no están definidas cuando $F=0$, es posible definir funciones g_1 y g_2 que sí lo están (de hecho son C^∞ si las saturaciones son funciones suaves):

$$\begin{aligned}
g_1 &= F^2 \dot{\psi}_d = F_x \dot{F}_y - \dot{F}_x F_y \\
g_2 &= F^4 \ddot{\psi}_d = F^2 (F_x \ddot{F}_y - \ddot{F}_x F_y) - 2F^2 \dot{\psi}_d (F_x \dot{F}_x - \dot{F}_y F_y) = \\
&= F^2 (F_x \ddot{F}_y - \ddot{F}_x F_y) - 2(F_x \dot{F}_y - \dot{F}_x F_y)(F_x \dot{F}_x - \dot{F}_y F_y)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Finalmente los valores de dichas variables se utilizan para calcular τ_c , los errores de orientación y la señal de control τ .

$$\begin{aligned}
\tau_c &= d_r \dot{\psi}_c + \ddot{\psi}_c \\
\tau &= \tau_c - sat_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) = \\
&= \tau_c - sat_2(k_3(\psi - \psi_c) + k_4(r - \dot{\psi}_c), \tau_0)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Para poder continuar con el análisis es necesario establecer algunas propiedades de las funciones de saturación. En primer lugar resulta interesante que la función de saturación sat_1 sea pequeña así como sus derivadas:

$$\begin{aligned}
-F_0 &\leq sat_1(x, F_0) \leq F_0 \\
0 &\leq sat_1'(x, F_0) \leq c_1 F_0 \\
|sat_1''(x, F_0)| &\leq c_2 F_0 \\
|sat_1^{(3)}(x, F_0)| &\leq c_3 F_0
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Donde F_0 es una variable de nuestra elección y c_1 y c_2 dos constantes positivas. Una posible elección de la función de saturación que cumple con todas las propiedades anteriores para $c_1=1$, $c_2=2$ y $c_3=6$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
sat_1(x, F_0) &= F_0 \tanh(x) \\
sat_1'(x, F_0) &= F_0 (1 - \tanh(x)^2) \Rightarrow 0 < sat_1'(x) \leq F_0 \\
sat_1''(x, F_0) &= 2F_0 \tanh(x) (1 - \tanh(x)^2) \Rightarrow |sat_1''(x, F_0)| \leq 2F_0 \\
|sat_1^{(3)}(x, F_0)| &= F_0 \left| \left(-2(1 - \tanh(x)^2)^2 - 4 \tanh(x)^2 (1 - \tanh(x)^2) \right) \right| \leq 6F_0
\end{aligned} \tag{5.55}$$

En cuanto a la función de saturación sat_2 lo única condición que se impone es que el valor de dicha función sea acotado por τ_0 y que su primera derivada sea acotada por c_4 :

$$\begin{aligned}
-\tau_0 &\leq sat_2(x, \tau_0) \leq \tau_0 \\
0 &\leq sat_2'(x, \tau_0) \leq c_4
\end{aligned} \tag{5.56}$$

De este modo una elección posible de dicha saturación con $c_4=1$ es:

$$\begin{aligned} sat_2(x, \tau_0) &= \tau_0 \tanh\left(\frac{x}{\tau_0}\right) \\ sat_2'(x, \tau_0) &= 1 - \tanh\left(\frac{x}{\tau_0}\right)^2 \Rightarrow 0 < sat_2'(x) \leq 1 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Llegados a este punto es posible hacer consideraciones sobre la factibilidad de la ley de control. El siguiente teorema lo analiza con rigor.

Teorema 5.1. Dada una trayectoria espacial bien definida $\mathbf{x}(t)$ y fijado el valor de las constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 y así como una constante positiva M . Si las velocidades iniciales son acotadas por M ($|v_x(0)|, |v_y(0)|, |r(0)| < M$), entonces siempre es posible elegir las constantes F_0 y τ_0 de tal forma que la ley de control (5.46)-(5.53) aplicada al sistema (5.1) produzca señales de control F y τ factibles.

Demostración: En primer lugar puesto que la trayectoria es factible existe un valor F_{max} tal que $F_r < F_{max}$ para todo tiempo t .

Por otra parte, puesto que las derivadas parciales de F respecto a F_x y F_y son acotadas el valor de F se encuentra en un intervalo alrededor del valor de referencia F_r ya que:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{F_{xr}^2 + F_{yr}^2} + \frac{\partial F}{\partial F_x} \Big|_{F_x=\xi_1} (F_x - F_{xr}) + \frac{\partial F}{\partial F_y} \Big|_{F_y=\xi_2} (F_y - F_{yr}) = \\ &= F_r + \frac{\partial F}{\partial F_x} \Big|_{F_x=\xi_1} (F_x - F_{xr}) + \frac{\partial F}{\partial F_y} \Big|_{F_y=\xi_2} (F_y - F_{yr}) := F_r - f_1 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Calculando entonces las derivadas parciales se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial F_x} &= \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} = \cos(\psi_c) \\ \frac{\partial F}{\partial F_y} &= \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} = \sin(\psi_c) \end{aligned} \quad (5.59)$$

De este modo usando la cota de sat_1 se tiene que:

$$|f_1| \leq |\cos(\psi_c) sat_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx})| + |\sin(\psi_c) sat_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy})| \leq 2F_0 \quad (5.60)$$

Esto significa que a lo largo de la trayectoria se cumple que:

$$|F_r(t)| - 2F_0 \leq |F(t)| \leq |F_r(t)| + 2F_0 \quad (5.61)$$

Definiendo entonces las siguientes funciones:

$$w_1 = \frac{e_{vx}^2}{2}; \quad w_2 = \frac{e_{vy}^2}{2}; \quad (5.62)$$

Si se toma la derivada temporal de las mismas a lo largo de la trayectoria (derivada de Lie) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -e_{vx} (d_u e_{vx} - F \cos(\psi) - F_{xr}) \\ &\leq -|e_{vx}| (d_u |e_{vx}| - |F| - |F_{xr}|) \\ &\leq -|e_{vx}| (d_u |e_{vx}| - 2F_{\max} - 2F_0) \\ \dot{w}_2 &\leq -|e_{vy}| (d_u |e_{vy}| - 2F_{\max} - 2F_0) \end{aligned} \quad (5.63)$$

Esto implica que tomando $F_0 < F_{\max}$, si $|e_{vx}| > 4F_{\max}/d_u$ entonces w_1 disminuye (y por tanto también lo hace $|e_{vx}|$). De este modo si $|e_{vx}(0)| < 4F_{\max}/d_u$ entonces e_{vx} nunca podrá abandonar la región $|e_{vx}| < 4F_{\max}/d_u$ ya que la derivada w_2 no es creciente en el borde de la misma.

Por otra parte si $|e_{vx}(0)| > 4F_{\max}/d_u$, entonces $|e_{vx}|$ disminuye en la frontera $|e_{vx}| = |e_{vx}(0)|$ y por tanto no puede hacerse mayor que $|e_{vx}(0)|$ en ningún tiempo t . La misma conclusión puede obtenerse para e_{vy} de tal manera que ambos errores sean acotados por una cierta constante:

$$|e_{vx}(t)|, |e_{vy}(t)| \leq \max \left(|e_{vx}(0)|, |e_{vy}(0)|, \frac{4F_{\max}}{d_u} \right) = \max \left(M, \frac{4F_{\max}}{d_u} \right) = M' \quad (5.64)$$

Observando la expresión (5.50) es inmediato comprobar que las derivadas de F_x y F_y son entonces acotadas, ya que las derivadas de F_{xr} y F_{yr} también lo son. Esto implica en particular que la derivada de F también es acotada ya que:

$$|\dot{F}| \leq |\cos(\psi_c) \dot{F}_x| + |\sin(\psi_c) \dot{F}_y| \leq |\dot{F}_x| + |\dot{F}_y| \quad (5.65)$$

A partir de (5.50) y las cotas obtenidas, F_x , F_y , y sus derivadas pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xr} + f_2 \\ F_y &= F_{yr} + f_3 \\ \dot{F}_x &= \dot{F}_{xr} + f_4 \\ \dot{F}_y &= \dot{F}_{yr} + f_5 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Donde las funciones f_i con $i=1..4$ son acotadas debido a la cota de sat_I' , y e_{vx} , e_{vy} :

$$\begin{aligned} |f_2|, |f_3| &\leq F_0 \\ |f_4|, |f_5| &\leq F_0 ((k_1 - k_2 d_u) M' + k_2 (2F_{\max} + F_0)) = c_5 F_0 \end{aligned} \quad (5.67)$$

Para una cierta constante positiva c_5 . Del mismo modo es posible proceder con el resto de derivadas, solo que en este caso los términos que contengan r no pueden acotarse todavía:

$$\begin{aligned}\ddot{F}_x &= \ddot{F}_{xr} + f_6 \\ \ddot{F}_y &= \ddot{F}_{yr} + f_7\end{aligned}\quad (5.68)$$

Donde:

$$\begin{aligned}|f_6||f_7| &\leq F_0 c_5^2 + F_0 \left(|k_1 - k_2 d_u| (d_u M' + 2F_{\max} + F_0) \right) \\ &\quad + k_2 F_0 \left(F_r + 2(c_5 + |r|) F_0 + |r| (F_r + 2F_0) + \dot{F}_r + f_5 \right) \\ &\leq F_0 (c_6 + c_7 |r|)\end{aligned}\quad (5.69)$$

Para ciertas constantes positivas c_6 y c_7 . La función g_l es continua y derivable con respecto a F_x , F_y , y sus primeras derivadas, de este modo usando el teorema del valor medio existen unos ξ_i tales que:

$$g_1 = g_1|_{F_0=0} + \frac{\partial g_1}{\partial F_x} f_2 + \frac{\partial g_1}{\partial F_y} f_3 + \frac{\partial g_1}{\partial \dot{F}_x} f_5 + \frac{\partial g_1}{\partial \dot{F}_y} f_6 \Bigg|_{(F_x, F_y, \dot{F}_x, \dot{F}_y) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} \quad (5.70)$$

Ahora bien, todas las derivadas parciales de g_l son acotadas (puesto que lo son F_x , F_y y sus derivadas), sea la constante c_8 la cota de dichas derivadas, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}g_1 &= F_r^2 \dot{\psi}_r + f_8 \\ |f_8| &\leq c_8 (|f_2| + |f_3| + |f_4| + |f_5|) \leq c_8 (2 + 2c_5) F_0\end{aligned}\quad (5.71)$$

Y por tanto:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_c &= \dot{\psi}_r \frac{F_r^2}{F^2} + \frac{f_9}{F^2} = \\ &= \dot{\psi}_r + \dot{\psi}_r \left(\frac{F_r^2 - F^2}{F^2} \right) + \frac{f_9}{F^2} = \\ &= \dot{\psi}_r + f_9\end{aligned}\quad (5.72)$$

Puesto que la trayectoria está bien definida entonces existe un F_{\min} positivo $|F(t)| > F_{\min}$ y por tanto escogiendo $F_0 < F_{\min}$ el denominador no se anula, Entonces acotando inferiormente $|F|$ por $F_{\min} - 2F_0$:

$$|f_9| \leq \frac{-f_1 \dot{\psi}_r (f_1 + 2F_r) + c_8 (2 + 2c_5) F_0}{F^2} \leq \frac{c_9 F_0}{(F_{\min} - 2F_0)^2} \quad (5.73)$$

Por otra parte las derivadas parciales de g_2 también pueden acotarse, solo que ahora las derivadas que multiplican a f_7 y f_8 son acotadas por una constante mientras que las que multiplican a f_1 , f_2 , f_4 y f_5 son acotadas por $c_{10} + c_{11}|r|$. De este modo existen constantes c_{11} y c_{12} tales que:

$$\begin{aligned} g_2 &= F_r^4 \dot{\psi}_d + f_{10} \\ |f_{10}| &\leq (c_{12} + c_{13} |r|) F_0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

Y finalmente:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_c &= \ddot{\psi}_r \frac{F_r^4}{F_x^4} + \frac{f_{10}}{F_x^4} = \ddot{\psi}_r + \frac{\ddot{\psi}_r (F_x^4 - F_r^4) + f_{10}}{F_x^4} = \ddot{\psi}_r + f_{11} \\ |f_{11}| &\leq \frac{(c_{14} + c_{15} |r|) F_0}{(F_{\min} - 2F_0)^4} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Después de este laborioso cálculo es posible acotar la señal de control τ

$$\begin{aligned} \tau &= d_r \dot{\psi}_c + \ddot{\psi}_c - \text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) = \\ &= d_r \dot{\psi}_r + \ddot{\psi}_r + (d_r f_{10} + f_{11}) - \text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) \\ &= \tau_r + (d_r f_{10} + f_{11}) - \text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) \\ &= \tau_r + f_{12} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Donde:

$$|f_{12}| \leq \frac{c_{16} + c_{17} |r|}{(F_{\min} - F_0)^4} F_0 + \tau_0 \quad (5.77)$$

Para terminar el análisis es necesario comprobar que r es acotado, para ello se define la siguiente función:

$$w_3 = \frac{r^2}{2} \quad (5.78)$$

De nuevo tomando la derivada temporal:

$$\dot{w}_3 = -r (d_r r - \tau) \leq -d_r |r| \left(\left| r \right| - \frac{\tau}{d_r} \right) \quad (5.79)$$

Usando ahora la cota (5.77) y teniendo en cuenta que τ_r es acotado por τ_{\max} :

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 &\leq -d_r |r| \left(\left| r \right| - \frac{\tau_r + |f_{12}|}{d_r} \right) \leq \\ &\leq -d_r |r| \left(\left(1 - \frac{c_{17} F_0}{d_r (F_{\min} - 2F_0)^4} \right) \left| r \right| - \frac{c_{16} F_0}{d_r (F_{\min} - 2F_0)^4} + \frac{\tau_{\max} + \tau_0}{d_r} \right) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Si se escoge entonces F_0 de tal manera que $c_{17} F_0 < (1 - \theta) d_r (F_{\min} - 2F_0)^4$ para $0 < \theta < 1$ entonces:

$$\dot{w}_3 \leq -d_r |r| \left(\theta |r| - (1-\theta) \frac{c_{16}}{c_{17}} + \frac{\tau_{\max} + \tau_0}{d_r} \right) \quad (5.81)$$

Y de este modo, el mismo razonamiento que en (5.64) conlleva que r es acotado:

$$|r(t)| \leq \max \left(|r(0)|, \frac{1-\theta}{\theta} \frac{c_{16}}{c_{17}} + \frac{\tau_{\max} + \tau_0}{d_r \theta} \right) = M_2 \quad (5.82)$$

Por consiguiente existe una constante positiva c_{18} tal que:

$$|f_{11}| \leq \frac{c_{18} F_0}{(F_{\min} - 2F_0)^4} + \tau_0 \quad (5.83)$$

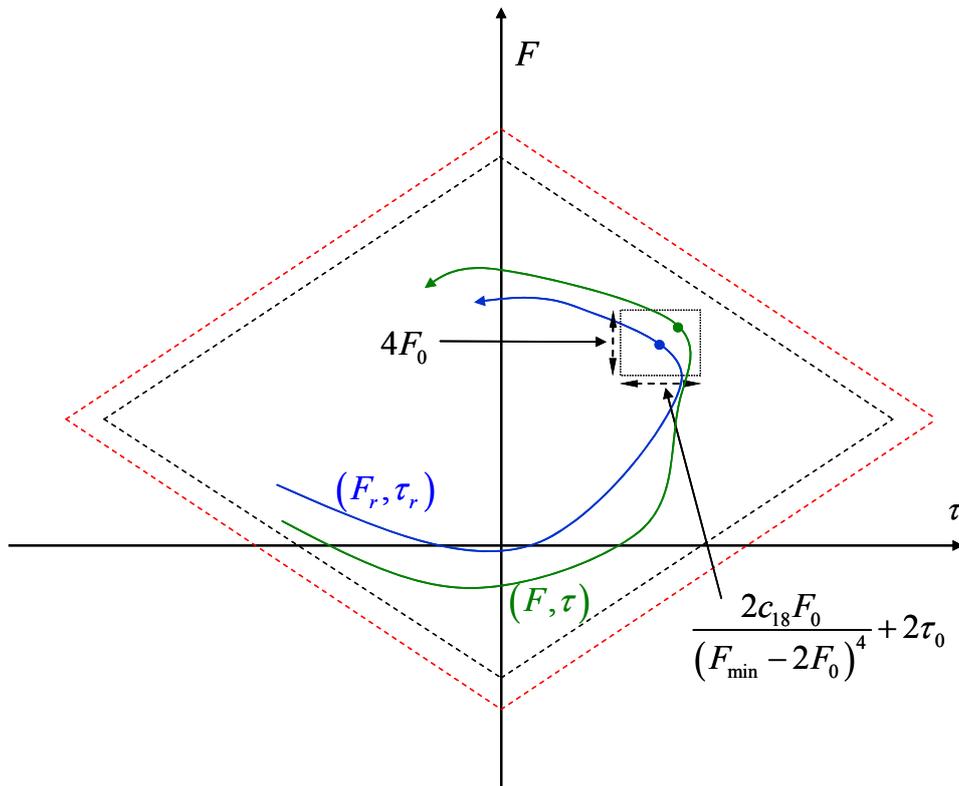


Figura 5.6. Factibilidad de las señales de control. Una correcta elección de las saturaciones garantiza que la señal de control generada siempre será factible en trayectorias bien definidas. Ya que un instante dado la distancia entre F y F_r así como τ y τ_r están acotados.

Establecidas las cotas de la señal de control es claro gráficamente (ver Figura 5.6) que si F_0 y τ_0 son suficientemente pequeñas entonces las señales de control serán factibles ya que se mueven en un entorno local de una señal estrictamente factible. Para comprobar esto analíticamente se procede como sigue:

La expresión para las fuerzas u_i , $i=1,2$ es:

$$\begin{aligned}
u_i &= \frac{1}{2} \left(mF \pm \frac{J\tau}{l} \right) = \frac{1}{2} \left(mF_r \pm \frac{J\tau_r}{l} \right) + \frac{1}{2} \left(mf_1 \pm \frac{Jf_{11}}{l} \right) \\
u_i &\leq u_{\max} - \varepsilon + \left(2m + \frac{Jc_{18}}{l(F_{\min} - 2F_0)^4} \right) F_0 + \tau_0 \\
u_i &\geq -u_{\min} + \varepsilon - \left(2m + \frac{Jc_{18}}{l(F_{\min} - 2F_0)^4} \right) F_0 - \tau_0
\end{aligned} \tag{5.84}$$

La expresión que multiplica a F_0 en (5.84) es continua en $F_0=0$, de este modo existe un δ tal que si $F_0 < \delta$ entonces el producto de dicha expresión por F_0 se hace menor que $\varepsilon/2$. De este modo tomando $\tau_0 < \varepsilon/2$ y $F_0 < \min(\delta, F_{\min}, F_{\max})$, la cota (5.84) es válida, obteniendo finalmente:

$$\begin{aligned}
u_i &\leq u_{\max} - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = u_{\max} \\
u_i &\geq -u_{\min} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -u_{\min} \\
-u_{\min} &\leq u_i \leq u_{\max}
\end{aligned} \tag{5.85}$$

Como se quería demostrar ■

El significado del teorema es simple, si la trayectoria está bien definida y la condición inicial es acotada (al menos en velocidad), eligiendo las F_0 y τ_0 adecuadamente, las señales F y τ serán siempre factibles. Esto se muestra en la Figura 5.6.

Corolario: Si F_0 y τ_0 se eligen considerando condiciones iniciales nulas y se aumentan las cotas M_1 y M_2 en una cantidad finita δ , y además se aplican fuerzas y momentos restringidos a la región factible, entonces las señales F y τ solo podrán exceder las saturaciones durante un tiempo finito $T(\|e_0\|)$. Siendo T una función de clase K respecto de $\|e(0)\|$. Transcurrido dicho tiempo se aplican las condiciones del teorema anterior.

Demostración: Sean las funciones w_1, w_2 y w_3 las definidas previamente. Puesto que se aplican las señales de control restringidas a la región factible entonces $|F(t)| \leq F_{\max}$ y $|\tau| \leq \tau_{\max}$. Tomando las derivadas temporales de estas funciones se tiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &\leq -|e_{vx}| \left(d_u |e_{vx}| - 2F_{\max} \right) \\
\dot{w}_2 &\leq -|e_{vy}| \left(d_u |e_{vy}| - 2F_{\max} \right) \\
\dot{w}_3 &\leq -d_r |r| \left(|r| - \frac{\tau_{\max}}{d_r} \right)
\end{aligned} \tag{5.86}$$

De este modo $|e_{vx}|$ y $|e_{vy}|$ decrecen si son mayores que $2F_{\max}/d_u$. De hecho el decrecimiento es exponencial. Luego existe un T_1 , que dependerá de forma creciente y continua de la condición inicial, tal que para $t > T_1$ entonces $|e_{vx}| < M + \delta$. Siendo M el resultado de aplicar (5.64) con $K=0$.

Del mismo modo existe un T_2 tal que para $t > T_2$, $|r| < M + \delta$, donde M es el resultado de aplicar (5.82) con $|r(0)| = 0$. Por tanto para $t > T = \max(T_1, T_2)$ el razonamiento del teorema anterior es aplicable ■

Lo que afirma el corolario es que en cualquier caso, para un valor dado de T_0 y τ_0 si las velocidades iniciales fueran muy grandes se podría saturar la señal de control únicamente en los instantes iniciales.

Puesto que las velocidades son global y finalmente acotadas para cualquier condición inicial, esta saturación de las señales de control desaparecería en un tiempo finito, transcurrido el cual las señales de control nunca volverían a saturarse.

5.2.3. Estabilidad del sistema

Como se ha visto en el apartado anterior una elección correcta de F_0 y τ_0 permite garantizar que las señales de control son factibles. A continuación se muestra que el sistema resultante en lazo cerrado es global y asintóticamente estable.

Para el análisis de la estabilidad será de gran ayuda analizar en primer lugar el siguiente sistema auxiliar:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ x_2 &= -cx_2 - \text{sat}(k_1x_1 + k_2x_2) + p \end{aligned} \quad (5.87)$$

Teorema 5.2. Sea el sistema dinámico (5.87) donde, c , k_1 y k_2 son constantes positivas p es una perturbación acotada $|p| < \alpha M$ siendo $\alpha \leq 1$ la constante positiva definida por

$$\alpha = \min \left(\frac{2\sqrt{k_2c}}{\sqrt{k_2c} + \sqrt{k_1}}, 1 \right) \quad (5.88)$$

Y sea $\text{sat}(x)$ cualquier función de saturación monótona creciente que cumpla:

$$\begin{aligned} \text{sat}(0) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sat}(x) &= \pm M \end{aligned} \quad (5.89)$$

Entonces el sistema (5.87) es ISS respecto de p , esto es, existe una función β de clase KL y una función γ de clase K tales que:

$$|p(t)| < \alpha M \leq M \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) + \gamma \left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{|p(\tau)|\} \right) \quad (5.90)$$

Demostración: Es necesario considerar tres casos, dependiendo de que k_1 sea mayor, menor o igual a ck_2 :

Caso a: $k_1 > ck_2$: Definiendo la siguiente función de Lyapunov:

$$V_1 = \int_0^{k_1 x_1 + k_2 x_2} \text{sat}(s) ds + (k_1 - ck_2) \frac{x_2^2}{2} \quad (5.91)$$

El segundo término es claramente no negativo puesto que $k_1 > ck_2$. Por otra parte la integral de una función de saturación es definida positiva ya que si s es positivo $\text{sat}(s)$ también lo es (puesto que sat es una función monótona creciente y $\text{sat}(0)=0$) y del mismo modo si s es negativo, $\text{sat}(s)$ es también negativo por lo que se tiene (5.92).

$$\int_0^x \text{sat}(s) ds = \begin{cases} \int_0^x |\text{sat}(s)| ds > 0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \int_{-|x|}^0 |\text{sat}(s)| ds > 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (5.92)$$

Por tanto V_1 es definida positiva ya que es no negativa y además si $V_1=0$ esto implica que $x_2=0$ y que $k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0$ y dado que k_1 no es nula entonces $x_1=0$. Por tanto V_1 solo se anula en el origen. Además la función V_1 es radialmente no acotada ya que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\text{sat}(x)| = M \Rightarrow \int_0^{\pm\infty} \text{sat}(s) ds = \infty \quad (5.93)$$

De este modo cuando $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ tiende a infinito entonces, o bien x_2^2 no es acotado y por tanto V_1 diverge o bien x_2^2 es acotado y entonces x_1 tiende a infinito, y por tanto $k_1 x_1 + k_2 x_2$ también tiende a infinito de modo que V_1 diverge. En cualquier caso:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty \quad (5.94)$$

Tomando entonces la derivada de V_1 a lo largo de la trayectoria se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \text{sat}(k_1 x_1 + k_2 x_2) \left((k_1 - ck_2) x_2 - k_2 \text{sat}(k_1 x_1 + k_2 x_2) + k_2 p \right) + \\ &\quad + (k_1 - ck_2) x_2 \left(-cx_2 - \text{sat}(k_1 x_1 + k_2 x_2) + p \right) = \\ &= -k_2 \text{sat}(k_1 x_1 + k_2 x_2) \left(\text{sat}(k_1 x_1 + k_2 x_2) - p \right) - (k_1 - ck_2) x_2 (cx_2 - p) \end{aligned} \quad (5.95)$$

A la vista de la expresión anterior es claro que si p es nulo entonces la derivada de V_1 es definida negativa y por tanto el sistema sería global y asintóticamente estable.

Definiendo entonces $z = \text{sat}(k_1 x_1 + k_2 x_2)$ se tiene que:

$$\dot{V}_1 = -k_2 z (z - p) - (k_1 - ck_2) x_2 (cx_2 - p) \quad (5.96)$$

La expresión (5.96) es una expresión cuadrática en x_2 y z , puesto que los términos de segundo orden son negativos es claro que la derivada de V_I será negativa si z y x_2 son suficientemente grandes. Para un p dado la región en la que V_I puede crecer está limitada por una elipse en coordenadas x_2 y z correspondiente a la siguiente ecuación:

$$k_2 z(z-p) + (k_1 - ck_2)x_2(cx_2 - p) = 0 \quad (5.97)$$

El máximo valor que puede tomar z en dicha región se puede calcular anulando la derivada de z con respecto a x_2 en la ecuación (5.97). Derivando implícitamente se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (-2z+p)k_2 \frac{dz}{dx_2} + (k_1 - ck_2)(-2cx_2 + p) \Big|_{z=z_{\max}} &= 0 \\ (k_1 - ck_2)(-2cx_2 + p) \Big|_{z=z_{\max}} &= 0 \\ x_2 \Big|_{z=z_{\max}} &= \frac{p}{2c} \end{aligned} \quad (5.98)$$

De tal manera que el valor máximo de z resulta ser:

$$\begin{aligned} k_2 z(z-p) + (k_1 - ck_2) \frac{p^2}{4c} &= 0 \\ z_{\max} &= \frac{1 + \sqrt{\frac{k_1}{ck_2}}}{2} p = \alpha^{-1} p \\ |z| \leq \alpha^{-1} |p| &\leq \alpha^{-1} \alpha M = M \end{aligned} \quad (5.99)$$

Del mismo modo es fácil comprobar que el máximo valor que toma x_2 en (5.97) es:

$$|x_2| \leq \frac{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_1 - ck_2}}}{2c} |p| = b |p| \quad (5.100)$$

Donde b es una constante positiva. Puesto que z es menor que M entonces la siguiente región está bien definida y en el exterior de la misma la derivada de V_I es negativa:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : sat(|k_1 x_1 + k_2 x_2|) \leq \alpha^{-1} |p|, |x_2| \leq b |p|\} \quad (5.101)$$

Como V_I es radialmente no acotada entonces existe una curva de nivel de $V_I = V_{max}$ que encierra la región Ω . Esta curva de nivel de V_I es una región de atracción ya que en el exterior V_I decrece y una vez en el interior las trayectorias no pueden salir ya que la derivada de V_I es negativa en la frontera. La Figura 5.7 muestra un diagrama de estas regiones.

Por la continuidad de la función de saturación la región Ω puede hacerse tan pequeña como se quiera si $p \rightarrow 0$, de tal modo que $V_{max} \rightarrow 0$ cuando $|p| \rightarrow 0$, y por tanto existe una función γ_1 de clase K , y una función β_1 de clase KL tal que:

$$|p| \leq p_m < \alpha M \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta_1(\|\mathbf{x}(0)\|, t - t_0) + \gamma_1(p_m) \quad (5.102)$$

Caso b: $k_1 < ck_2$: En este caso se define la siguiente función de Lyapunov:

$$V_2 = \frac{(ck_2 - k_1)}{2} x_2^2 + \frac{k_1}{2} (cx_1 - x_2)^2 \quad (5.103)$$

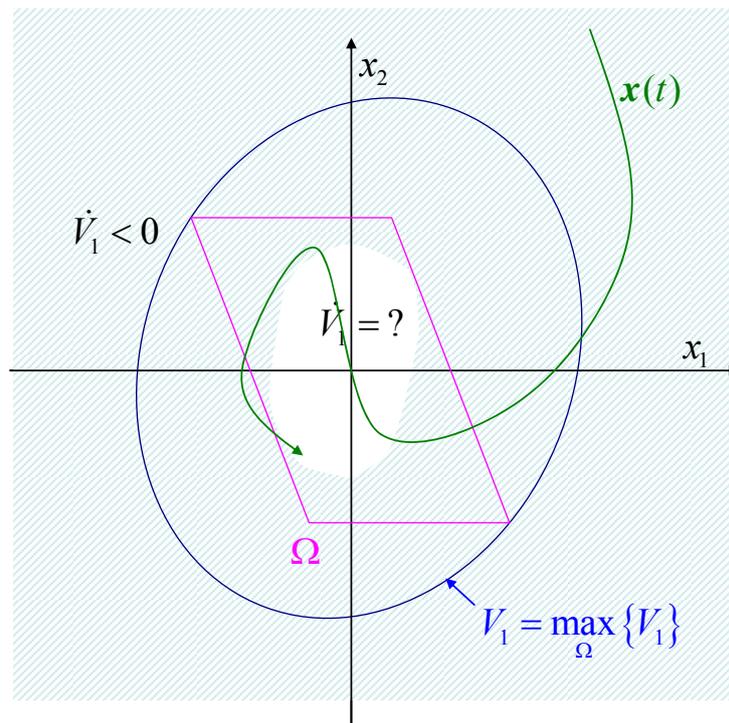


Figura 5.7. La región $V_1 = V_{1max}$ delimita una región de atracción del sistema. Esto es claro ya que dicha curva de nivel encierra completamente la región donde la derivada de V_1 es positiva.

El segundo término de (5.103) es claramente no negativo puesto que $ck_2 > k_1$ por tanto define una función de Lyapunov cuadrática y definida positiva. Tomando la derivada respecto al tiempo de dicha función:

$$\dot{V}_2 = -c(ck_2 - k_1)x_2^2 - c(k_1x_1 + k_2x_2)(sat(k_1x_1 + k_2x_2) - p) \quad (5.104)$$

Si p fuese cero entonces la derivada de V_2 sería definida negativa y por tanto el sistema sería global asintóticamente estable. Definiendo ahora $z_2 = k_1x_1 + k_2x_2$:

$$\dot{V}_2 \leq -c(ck_2 - k_1)x_2^2 - cz_2 sat(z_2) + cz_2 p \quad (5.105)$$

Es claro que si $|z_2| > sat^{-1}(|p|)$ entonces V_2 decrece sea cual sea el valor de x_2 (la función inversa de saturación está bien definida ya que $|p| < M$):

$$\begin{aligned}
\text{sat}(|z_2|) > |p| \Rightarrow \dot{V}_2 &\leq -c(ck_2 - k_1)x_2^2 - cz_2 \text{sat}(z_2) - c|z_2||p| \leq \\
&\leq -c(ck_2 - k_1)x_2^2 - c|z_2||\text{sat}(z_2)| - c|z_2||p| \leq \\
&< -c|z_2||p| - c|z_2||p| = 0
\end{aligned} \tag{5.106}$$

Por otra parte si z_2 es menor o igual que $\text{sat}^{-1}(|p|)$ entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
|z_2| > \text{sat}^{-1}(|p|) \Rightarrow \dot{V}_2 &\leq -c(ck_2 - k_1)x_2^2 - cz_2 \text{sat}(z_2) - cz_2 p \\
&\leq -c(ck_2 - k_1)x_2^2 - c|z_2||p| \leq \\
&\leq -c((ck_2 - k_1)x_2^2 - \text{sat}^{-1}(|p|)|p|)
\end{aligned} \tag{5.107}$$

Que es claramente negativo siempre y cuando se cumpla que:

$$|x_2|^2 > \frac{\text{sat}^{-1}(|p|)|p|}{(ck_2 - k_1)} \tag{5.108}$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x_1, x_2) : |k_1 x_1 + k_2 x_2| \leq \text{sat}^{-1}(|p|), |x_2| \leq \sqrt{\frac{\text{sat}^{-1}(|p|)|p|}{(ck_2 - k_1)}} \right\} \tag{5.109}$$

Por tanto V_2 es decreciente fuera de la región acotada Ω_2 y esta región puede hacerse tan pequeña como se quiera cuando $p \rightarrow 0$. Según el mismo razonamiento del caso anterior, existe una función γ_2 de clase K y una función β_2 de clase KL tal que:

$$|p| \leq p_m < M \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta_2(\|\mathbf{x}(0)\|, t - t_0) + \gamma_2(p_m) \tag{5.110}$$

Caso c: $k_1 = ck_2$ En este caso las funciones de Lyapunov planteadas anteriormente fracasan. Al hacer que $k_1 = ck_2$ entonces la derivada de la función de Lyapunov V_1 deja de ser definida negativa. En el caso de la función V_2 lo que ocurre es que dicha función deja de ser definida positiva.

Podría parecer entonces que en este caso se pierde la estabilidad o aumenta la sensibilidad a la perturbación (como parece sugerir (5.108) y (5.100)). Nada más lejos de la realidad, esto es solamente un efecto secundario de elección concreta de las funciones de Lyapunov.

Para analizar que ocurre en este caso se define la variable $z_3 = c_1 x_1 + k_2$, entonces:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_3 &= cx_2 - cx_2 - \text{sat}(k_1 x_1 + k_2 x_2) + p = \\
&= -\text{sat}(ck_2 x_1 + k_2 x_2) + p = -\text{sat}(k_2 z_3) + p
\end{aligned} \tag{5.111}$$

Tomando $V_3 = z_3^2/2$ como función de Lyapunov para (5.111) se tiene que:

$$V_3 = \frac{z_3^2}{2} \Rightarrow \dot{V}_3 = -z_3(\text{sat}(k_2 z_3) - p) \leq -|z_3|(|\text{sat}(k_2 z_3)| - |p|) \tag{5.112}$$

Si $|p| < M$ entonces esta función será decreciente siempre y cuando $z_3 > \text{sat}^{-1}(|p|)/k_2$ de tal forma que existe una función β_3 de clase K tal que:

$$|p| \leq p_m < M \Rightarrow |z_3(t)| \leq \beta_3(|z_3(0)|, t - t_0) + \frac{\text{sat}^{-1}(p_m)}{k_2} \quad (5.113)$$

Una vez probado que z_3 es global finalmente acotado puede analizarse el comportamiento de x_1 :

$$\dot{x}_1 = -cx_1 + z_3 \quad (5.114)$$

Es obvio a partir de (5.114) que x_1 es ISS respecto a z_3 , de hecho tomando como función de Lyapunov $x_1^2/2$ se tiene que:

$$V_4 = \frac{x_1^2}{2} \Rightarrow \dot{V}_4 = -cx_1(x_1 - p) \leq -|x_1|(|x_1| - |p|) \quad (5.115)$$

Que es decreciente si $|x_1| > |p|$. De este modo existe una función β_4 tal que:

$$|x_1(t)| \leq \beta_4(|x_1(0)|, t - t_0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{|z(\tau)|\} \quad (5.116)$$

Puesto que x es ISS con respecto a z con $\gamma(x) = x$ y además z es global finalmente acotada por $\gamma_3(p)$ se tiene que x es ISS respecto a p (ver (Khalil, 2002)):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|^2 &= x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + (z - cx_1)^2 \leq \\ &\leq \left(\beta_4 + \frac{\text{sat}^{-1}(p_m)}{k_2} \right)^2 + \left(c\beta_4 + \frac{c\text{sat}^{-1}(p_m)}{k_2} + \frac{\text{sat}^{-1}(p_m)}{k_2} \right)^2 \leq \\ &\leq \beta_5 + \left(1 + (1+c)^2 \right) \left(\frac{\text{sat}^{-1}(p_m)}{k_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.117)$$

Por tanto:

$$|p| \leq p_m < M \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta_6(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) + \sqrt{1 + (1+c)^2} \frac{\text{sat}^{-1}(p_m)}{k_2} \quad (5.118)$$

Como se quería demostrar ■

El resultado anterior se entender desde un punto de vista intuitivo. Esencialmente afirma que un sistema de la forma (5.87) es estable siempre y cuando la perturbación sea suficientemente pequeña en relación con el máximo de la función de saturación elegida. La aplicación de este resultado al sistema (5.45) es inmediata.

Teorema 5.3. Dada una trayectoria espacial bien definida $[x_r(t), y_r(t)]^T$ y su trayectoria factible asociada $\mathbf{x}_r = [x_{r_s}, y_{r_s}, v_{xr_s}, v_{yr_s}, \psi_{r_s}, r_r]^T$, existen unas constantes $F_0, \tau_0, k_1, k_2, k_3$, y k_4 tales que la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ solución del sistema (5.1) bajo la

acción de control (5.46)-(5.53) restringida al intervalo factible $F_{b,e} \subset [-u_{min}, u_{max}]$ converge global y asintóticamente a la trayectoria deseada x_r .

Demostración: De acuerdo con el Teorema 5.1 y su corolario, para cualquier condición inicial acotada y fijado el valor de k_1 , k_2 , k_3 y k_4 es posible elegir las constantes F_0 y τ_0 de tal forma que las señales de control F y τ sean factibles transcurrido un tiempo T (que es una función de clase K respecto de la condición inicial).

En el intervalo $[0, T]$ la ley de control (5.46)-(5.53) produce entradas que pueden no ser factibles. De este modo las fuerzas que se aplicarán al aerodeslizador serán una saturación de las mismas tal que no obedece a la dinámica del error (5.45). No obstante las soluciones de (5.1) son acotadas ya que, en virtud de (5.86), las velocidades son acotadas por $M = \max(|e_{vx}(0)|, |e_{vy}(0)|, 4F_{max}/d_u)$. De este modo para $0 \leq t \leq T$:

$$\|e(t)\| \leq \|e(0)\| + MT \quad (5.119)$$

Una vez transcurrido el tiempo T las señales de control serán factibles. Aplicándolas al sistema (5.1) se obtiene la dinámica del error (5.45). Observando las dos últimas ecuaciones de dicho sistema:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= -\text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) - d_r e_r \end{aligned} \quad (5.120)$$

El sistema anterior cumple con las condiciones del Teorema 5.2 de tal modo que e_ψ y e_r tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$. De este modo existe un $T_2 > T$ (que es una función de clase K respecto de la condición inicial) tal que:

$$t > T_2 (\|e(T)\|) \Rightarrow |e_\psi(0)|, |e_r(0)| < \varepsilon < \frac{\alpha F_0}{\sqrt{2}(F_{max} + 2F_0)} \quad (5.121)$$

Donde α es la constante positiva dada por (5.88). Por lo que la dinámica de e_x será:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= v_x \\ \dot{e}_{vx} &= -\text{sat}_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x \end{aligned} \quad (5.122)$$

Esta dinámica cumple las condiciones del Teorema 5.1 siempre que $|z_x| < \alpha F_0$ esto es, siempre que $t > T_2$ ya que de acuerdo con (5.40):

$$\begin{aligned} |z_x|, |z_y| &\leq \|z\| = \sqrt{2F^2(1 - \cos(\psi - \psi_c))} \leq \sqrt{2}(F_{max} + 2F_0)|e_\psi| \leq \\ &\leq \sqrt{2}(F_{max} + 2F_0)\varepsilon < \alpha F_0 \end{aligned} \quad (5.123)$$

Por otra parte, en el intervalo $[T, T_2]$ la solución de (5.1) se mantiene acotada (ya que la velocidad se encuentra restringida en virtud de (4.12)) y para $T \leq t \leq T_2$

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|e(T_1)\| + MT_2 \leq \|e(0)\| + MT(\|e(0)\|) + MT_2(\|e(T)\|) \leq \\ &\leq \|e(0)\| + M(T(\|e(0)\|) + MT_2(\|e(0)\| + MT(\|e(0)\|))) = \gamma(\|e(0)\|) \end{aligned} \quad (5.124)$$

Siendo γ una función de clase K . De este modo para $t > T_2$ (5.90) implica que:

$$|e_x(t)|, |e_{vx}(t)| \leq \beta(\gamma(\|e(0)\|), t-T) + \gamma_2((F_{\max} + 2F_0)\varepsilon) \quad (5.125)$$

Con lo que existirá otro $T_3 > T$ tal que:

$$t > T_2(\|e(0)\|) \Rightarrow |e_x(t)|, |e_{vx}(t)| \leq 2\gamma_2((F_{\max} + 2F_0)\varepsilon) \quad (5.126)$$

Repitiendo entonces el mismo razonamiento con e_y y e_{vy} se tiene finalmente que existe un T_3 tal que:

$$\begin{aligned} t > T_3 \Rightarrow \|x - x_r\| &\leq |e_x(t)| + |e_{vx}(t)| + |e_y(t)| + |e_{vy}(t)| + |e_w(t)| + |e_r(t)| \leq \\ &\leq 8\gamma_2((F_{\max} + 2F_0)\varepsilon) + 2\varepsilon \end{aligned} \quad (5.127)$$

Y puesto que ε puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando T_3 suficientemente grande se concluye que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - x_r\| = 0 \quad (5.128)$$

Y por tanto la trayectoria converge hacia la referencia ■

5.2.4. Efecto del ruido y las perturbaciones

La ley de control del apartado anterior se ha diseñado asumiendo un conocimiento perfecto del estado del sistema y la ausencia de perturbaciones. Sin embargo en el sistema real existen perturbaciones que afectan al estado así como ruido en la medida del mismo.

El análisis del efecto de estos dos factores se llevara a cabo incrementalmente, en primer lugar se introducirá las perturbaciones en la entrada, en segundo lugar se analizará el efecto del ruido en la medida. Finalmente se extenderán los resultados de estabilidad y factibilidad alcanzados anteriormente.

5.2.4.A. Efecto de las perturbaciones

Bajo el efecto de las perturbaciones de entrada, el sistema (5.1) se convierte en el sistema (5.26), de este modo recalculando la dinámica de las variables de error espacial resulta:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x &= v_x \\
\dot{e}_y &= v_y \\
\dot{e}_{vx} &= F \cos(\psi) - d_u e_{vx} - F_{xr} + p_{vx} \\
\dot{e}_{vy} &= F \sin(\psi) - d_u e_{vy} - F_{yr} + p_{vy}
\end{aligned} \tag{5.129}$$

Repitiendo entonces los cálculos (5.34)-(5.39) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x &= v_x \\
\dot{e}_y &= v_y \\
\dot{e}_{vx} &= -\text{sat}_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x + p_{vx} \\
\dot{e}_{vy} &= -\text{sat}_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) - d_u e_{vy} + z_y + p_{vy}
\end{aligned} \tag{5.130}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
z_x &= (F \cos(\psi) - F_d \cos(\psi_c)) \\
z_y &= (F \sin(\psi) - F_d \sin(\psi_c))
\end{aligned} \tag{5.131}$$

Con lo que el efecto de la perturbación sobre la dinámica del error de posición es muy simple, ya que aparece como unas perturbaciones adicionales p_{vx} y p_{vy} que se suman a las ya existentes z_x y z_y .

Antes de analizar el efecto del error de orientación conviene verificar que la dinámica (5.130) sigue produciendo velocidades acotadas, para ello usando las funciones w_1 y w_2 del Teorema 5.2:

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= -e_{vx} (d_u e_{vx} - F \cos(\psi) - F_{xr} + p_{vx}) \\
&\leq -|e_{vx}| (d_u |e_{vx}| - |F| - |F_{xr}| - p_{\max}) \\
&\leq -|e_{vx}| (d_u |e_{vx}| - 2F_{\max} - 2F_0 - p_{\max}) \\
\dot{w}_2 &\leq -|e_{vy}| (d_u |e_{vy}| - 2F_{\max} - 2F_0 - p_{\max})
\end{aligned} \tag{5.132}$$

Es entonces claro que eligiendo $F_0 < F_{\max}$ estas funciones son decrecientes siempre que la velocidad sea mayor que $(4F_{\max} + p_{\max})/d_u$, de tal manera que para unas condiciones iniciales acotadas existe una constante M' tal que:

$$|e_{vx}(t)|, |e_{vy}(t)| \leq \max \left(|e_{vx}(0)|, |e_{vy}(0)|, \frac{4F_{\max} + p_{\max}}{d_u} \right) = M' \tag{5.133}$$

El efecto sobre la dinámica del error de orientación es sin embargo más complejo, ya que la presencia de la perturbación afecta a las derivadas de ψ_c . Si se calcula por ejemplo la derivada de F_x , F_y y F a lo largo de la trayectoria se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{F}_x &= \dot{F}_{xr} - sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \left((k_1 - k_2 d_u) e_{vx} + k_2 (F \cos(\psi) - F_{xr} + p_{vx}) \right) \\
&= \dot{F}_x \Big|_{p=0} - sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) k_2 p_{vx} = \dot{F}_x \Big|_{p=0} + h_1 \\
\dot{F}_y &= \dot{F}_y \Big|_{p=0} + h_2 \\
\dot{F} &= \dot{F} \Big|_{p=0} + \cos(\psi_c) h_1 + \sin(\psi_c) h_2 = \dot{F} \Big|_{p=0} + h_3 \\
|h_1|, |h_2| &\leq c_1 k_2 F_0 p_{\max} \\
|h_3| &\leq 2c_1 k_2 F_0 p_{\max}
\end{aligned} \tag{5.134}$$

El mismo análisis puede llevarse a cabo con las derivadas de orden superior, de este modo:

$$\begin{aligned}
\ddot{F}_x &= \ddot{F}_{xr} - sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \left((k_1 - k_2 d_u) e_{vx} + k_2 (F \cos(\psi) - F_{xr} + p_{vx}) \right)^2 - \\
&\quad - (k_1 - k_2 d_u) sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) (-d_u e_{vx} + F \cos(\psi) - F_{xr} + p_{vx}) - \\
&\quad - k_2 sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \left(\cos(\psi) \left(\dot{F} \Big|_{p=0} + h_3 \right) - rF \sin(\psi) - \dot{F}_{xr} \Big|_{p=0} + h_1 + \dot{p}_{vx} \right) = \\
&= \ddot{F}_x \Big|_{p=0} - (k_1 - k_2 d_u) sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) p_{vx} - \\
&\quad - sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) \left(k_2^2 p_{vx}^2 + 2k_2 p_{vx} \left((k_1 - k_2 d_u) e_{vx} + k_2 (F \cos(\psi) - F_{xr}) \right) \right) \\
&\quad - k_2 sat'_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) (\cos(\psi) h_3 + h_1 + \dot{p}_{vx}) = \\
&= \ddot{F}_x \Big|_{p=0} + h_4 \\
\ddot{F}_y &= \ddot{F}_y \Big|_{p=0} + h_5
\end{aligned} \tag{5.135}$$

Donde las funciones h_4 y h_5 se pueden acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
|h_4| &\leq c_2 F_0 \left(k_2^2 p_{vx}^2 + 2k_2 |p_{vx}| \left(|k_1 - k_2 d_u| |e_{vx}| + 2k_2 F_0 \right) \right) + \\
&\quad + c_1 F_0 \left(|k_1 - k_2 d_u| |p_{vx}| + (|h_3| + |h_1| + |\dot{p}_{vx}|) \right) \\
&\leq F_0 \left(c_{19} p_{\max} + c_{20} p_{\max}^2 + c_{21} \dot{p}_{\max} \right) \\
|h_5| &\leq F_0 \left(c_{19} p_{\max} + c_{20} p_{\max}^2 + c_{21} \dot{p}_{\max} \right)
\end{aligned} \tag{5.136}$$

De este modo las derivadas segundas de F_x y F_y se ven afectadas no solamente por el valor de la perturbación en el tiempo t sino también por el valor de su derivada. Bajo estas condiciones es posible calcular el valor de las derivadas de ψ_c como se hizo en el Teorema 5.2:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 \Big|_{p=0} + \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \dot{F}_x} h_1 + \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \dot{F}_y} h_2 \Big|_{(F_x, F_y, \dot{F}_x, \dot{F}_y) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)} \tag{5.137}$$

Ahora bien, todas las derivadas parciales de \mathbf{g}_1 son acotadas (puesto que lo son F_x , F_y y sus derivadas), sea c_{22} la cota de estas derivadas, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} g_1 &= F^2 \dot{\psi}_d + h_6 \\ |h_6| &\leq c_{22} (|h_1| + |h_2|) \leq c_{23} F_0 p_{\max} \end{aligned} \quad (5.138)$$

Para una cierta constante c_{23} Y por tanto:

$$\dot{\psi}_c = \dot{\psi}_c|_{p=0} + \frac{h_6}{F^2} \quad (5.139)$$

Por otra parte las derivadas de g_2 con respecto a F_x, F_y y sus derivadas también pueden acotarse por $c_{24} + c_{25}|r|$ lo que permite obtener

$$\begin{aligned} g_2 &= F_r^4 \dot{\psi}_d|_{p=0} + h_7 \\ |h_7| &\leq F_0 (c_{24} + c_{25}|r|) (c_{19} p_{\max} + c_{20} p_{\max}^2 + c_{21} \dot{p}_{\max}) \end{aligned} \quad (5.140)$$

Por lo que finalmente:

$$\ddot{\psi}_c = \ddot{\psi}_c|_{p=0} + \frac{h_7}{F^4} \quad (5.141)$$

Llegados a este punto es posible estudiar la dinámica del error de orientación. Para ello en primer lugar se plantea la dinámica del mismo en presencia de la perturbación p_r :

$$\begin{aligned} \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= \tau - \tau_d - d_r e_r + p_r \end{aligned} \quad (5.142)$$

Para calcular la ley de control (5.44) se necesita el conocimiento exacto de ψ_c y sus dos primeras derivadas, no obstante esta información no está disponible puesto que la perturbación no es medible. De este modo la señal de control que realmente se aplica τ_{real} es la correspondiente a $p=0$:

$$\begin{aligned} \tau|_{real} &= \tau_d|_{p=0} - sat_2 \left(k_3 e_\psi + k_4 (r - \dot{\psi}_c|_{p=0}), \tau_0 \right) \\ \tau|_{real} - \tau_r + sat_2 \left(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0 \right) &= \\ &= d_r (\dot{\psi}_c|_{p=0} - \dot{\psi}_d) + (\ddot{\psi}_c|_{p=0} - \ddot{\psi}_c) + \\ &+ sat_2 \left(k_3 e_\psi + k_4 (r - \dot{\psi}_c|_{p=0}), \tau_0 \right) - sat_2 \left(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0 \right) = \\ &= d_r \frac{h_6}{F^2} + \frac{h_7}{F^4} d_r \dot{\psi}_d + sat_2' \left(\xi \right) \frac{h_7}{F^4} \end{aligned} \quad (5.143)$$

Agrupando las funciones h y substituyendo por sus cotas:

$$\begin{aligned} \tau|_{real} &= \tau_r - sat_2 \left(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0 \right) + h_8 \\ |h_8| &\leq \frac{(1 + c_{26}|r|)}{F^2} F_0 \gamma_1 (\max(p_{\max}, \dot{p}_{\max})) \end{aligned} \quad (5.144)$$

De modo que la dinámica del error es:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= -\text{sat}_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) + h_8 + p_r \end{aligned} \tag{5.145}$$

Para terminar el análisis es necesario comprobar que r continua siendo acotado en presencia de la perturbación. Usando nuevamente la función w_3 definida en el Teorema 5.1 y teniendo en cuenta que el término que multiplica a $F_0|r|$ es acotado, entonces:

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 &\leq -d_r |r| \left(|r| - \frac{\tau_r + |f_{13}| + |h_8| + |p_r|}{d_r} \right) \leq \\ &\leq -d_r |r| \left(\left(1 - \frac{c_{17} + \gamma_1}{d_r (F_{\min} - 2F_0)^4} F_0 \right) |r| - \frac{c_{16} + \gamma_1}{d_r (F_{\min} - 2F_0)^4} F_0 + \frac{\tau_{\max} + \tau_0}{d_r} \right) \end{aligned} \tag{5.146}$$

Si se escoge entonces F_0 suficientemente pequeño, esto es, si se cumple que $(c_{17} + \gamma_1)F_0 < (1 - \theta)d_r(F_{\min} - 2F_0)^4$, entonces el término que acompaña a $|r|$ es negativo y el mismo razonamiento que en (5.81) lleva a que r es acotado, y para una condición inicial con velocidad acotada existe una función γ de clase K tal que:

$$|h_8| \leq \frac{\gamma_a(\max(p_{\max}, \dot{p}_{\max}))}{(F_{\min} - 2F_0)^4} \tag{5.147}$$

El efecto de las perturbaciones es mayor cuanto menor sea la fuerza F_{\min} en la trayectoria. Este comportamiento puede entenderse de forma intuitiva con la ayuda del siguiente ejemplo.

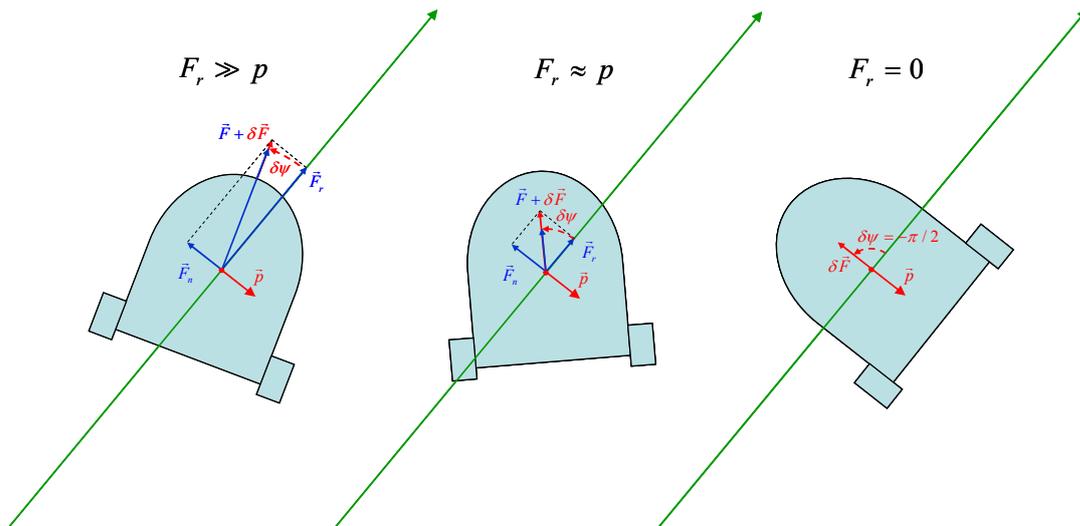


Figura 5.8. Balance de fuerzas en presencia de una perturbación. Cuanto mayor es el valor de F_r , menor es el efecto de la perturbación sobre ψ .

Considérese el aerodeslizador siguiendo una trayectoria rectilínea con velocidad uniforme. Si la velocidad es grande entonces F_r también lo es ($F_r = d_u \cdot V_r$, donde V_r es el módulo de la velocidad de referencia). Supongase que sobre él se aplica una perturbación p perpendicular a la dirección del movimiento (el peor caso posible).

Para que la ley de control pueda seguir la trayectoria rectilínea, la orientación del vehículo deberá estar girada respecto a la velocidad de avance un ángulo $\delta\psi$, y la fuerza deberá incrementarse una cantidad δF de modo que se mantenga el balance de fuerzas. La Figura 5.8 ilustra dicho balance.

De este modo resulta claro que la sensibilidad de la orientación respecto a la perturbación es mucho mayor cuanto menor sea el módulo de F_r . De hecho si F_r fuese cero (el aerodeslizador permaneciese quieto en un punto) la única forma de mantenerse en el punto en presencia de la perturbación p es enfrentarse directamente a la misma. De tal modo que $\delta\psi$ sería $\pi/2$ independientemente de lo pequeña que pueda ser la perturbación.

5.2.4.B. Efecto del ruido

El cálculo de la ley de control no se lleva a cabo utilizando el estado del sistema $\mathbf{x} = [x, y, v_x, v_y, \psi, r]^T$ sino solo una estimación del mismo $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$. Donde $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_{v_x}, n_{v_y}, n_\psi, n_r]^T$ es el vector de ruido en la medida. Para no complicar excesivamente la notación los estados medidos se marcarán con un gorro mientras que los reales (con perturbación incluida) se mantendrán sin gorro. De este modo el error de la medida se propaga al cálculo de la fuerza F como sigue:

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_x &= F_{xr} - \text{sat}_1(k_1 \hat{e}_x + k_2 \hat{e}_{v_x}, F_0) = \\
 &= F_{xr} - \text{sat}_1(k_1 (e_x + n_x) + k_2 (e_{v_x} + n_{v_x}), F_0) = \\
 &= F_x - \text{sat}'_1(\xi_1) k_1 n_x - \text{sat}'_1(\xi_2) k_2 n_{v_x} = \\
 &= F_x + h_8 \\
 \hat{F}_y &= F_y + h_9 \\
 |h_8|, |h_9| &\leq c_1 (k_1 + k_2) F_0 n_{\max}
 \end{aligned} \tag{5.148}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \hat{F} &= \sqrt{(F_{xr} + h_8)^2 + (F_{yr} + h_9)^2} \\
 &= F + \frac{\partial F}{\partial F_x} h_8 + \frac{\partial F}{\partial F_y} h_9 \Bigg|_{(\xi_1, \xi_2)} = \\
 &= F + \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} h_8 + \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} h_9 \Bigg|_{(\xi_1, \xi_2)} = \\
 &= F + \cos(\xi_1) h_8 + \sin(\xi_2) h_9
 \end{aligned} \tag{5.149}$$

Puesto que todas las derivadas parciales son acotadas por una constante multiplicada por F_0 entonces:

$$\begin{aligned}\hat{F} &= F + h_{10} \\ |h_{10}| &\leq 2c_1(k_1 + k_2)F_0n_{\max}\end{aligned}\quad (5.150)$$

Para una cierta constante positiva c_l . Esto permite describir la dinámica del error de posición.

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= v_x \\ \dot{e}_y &= v_y \\ \dot{e}_{vx} &= \hat{F} \cos(\psi) - d_u e_{vx} - F_{xr} + p_{vx} = \\ &= F \cos(\psi) - d_u e_{vx} - F_{xr} + p_{vx} + h_{10} \cos(\psi) \\ \dot{e}_{vy} &= \hat{F} \sin(\psi) - d_u e_{vy} - F_{yr} + p_{vy} = \\ &= F \sin(\psi) - d_u e_{vy} - F_{yr} + p_{vy} + h_{10} \sin(\psi)\end{aligned}\quad (5.151)$$

Con lo que se obtiene finalmente la siguiente dinámica para el error de posición:

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= v_x \\ \dot{e}_y &= v_y \\ \dot{e}_{vx} &= -sat_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x + p_{vx} + h_{11} \\ \dot{e}_{vy} &= -sat_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) - d_u e_{vy} + z_y + p_{vy} + h_{12}\end{aligned}\quad (5.152)$$

Donde:

$$\begin{aligned}z_x &= F(\cos(\psi) - \cos(\psi_c)) \\ z_y &= F(\sin(\psi) - \sin(\psi_c)) \\ |h_{10}|, |h_{11}| &\leq 2c_1(k_1 + k_2)F_0n_{\max}\end{aligned}\quad (5.153)$$

De forma que el ruido en la medida simplemente añade otra perturbación acotada a la dinámica de posición.

Puesto que F es acotado sea cual sea el valor del ruido (ya que este se encuentra dentro de la función de saturación), la velocidad del sistema será acotada de tal manera que las derivadas parciales de (5.134) y (5.135) con respecto a sus variables serán también acotadas, a excepción de aquellas que contengan r .

Siguiendo el mismo razonamiento que en el punto anterior es inmediato concluir que para cualquier condición inicial acotada por una constante c_{28} tal que:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_d &= \dot{\psi}_c + \frac{h_{12}}{F^2} \\ \hat{\psi}_d &= \ddot{\psi}_c + \frac{h_{13}}{F^4}\end{aligned}\quad (5.154)$$

Donde:

$$|h_{12}|, |h_{13}| \leq (1 + c_{28} |r|) \gamma(n_{\max}) \quad (5.155)$$

Si se calcula entonces el valor de τ resultante se llega a la expresión.

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_{real} + d_r \frac{h_{12}}{F^2} + \frac{h_{13}}{F^4} - \\ &\quad - sat_2 \left(k_3 \left((\psi + n_\psi) - \left(\psi_d + \frac{h_{12}}{F^2} \right) \right) + k_4 \left((r + n_r) - \left(r_d + \frac{h_{13}}{F^4} \right) \right), \tau_0 \right) = \\ &= \tau_{real} + h_{14} \\ |h_{14}| &\leq \frac{(c_{29} + m_{30} |r|) \gamma_2(n_{\max})}{(F_{\min} - 2F_0)^4} \end{aligned} \quad (5.156)$$

La cota en el valor de τ depende por tanto de $|r|$. Este a su vez depende de τ , no obstante (5.157) tiene la misma forma que (5.145) y por tanto es inmediato comprobar que $|r|$ es acotado siempre que F_0 y n_{\max} sean suficientemente pequeños.

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 &\leq -d_r |r| \left(|r| - \frac{\tau_r + |f_{13}| + |h_8| + |h_{14}| + |p_r|}{d_r} \right) \leq \\ &\leq -d_r |r| \left(\left(1 - \frac{c_{17} F_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{d_r (F_{\min} - F_0)^4} \right) |r| - \frac{c_{16} F_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{d_r (F_{\min} - F_0)^4} + \frac{\tau_{\max} + \tau_0}{d_r} \right) \end{aligned} \quad (5.157)$$

Y por tanto que existe una función γ de clase K tal que:

$$|h_{14}| \leq \frac{\gamma_b(n_{\max})}{(F_{\min} - 2F_0)^4} \quad (5.158)$$

El resultado de este estudio puede entonces resumirse de la siguiente forma:

Teorema 5.4. Dada cualquier constante positiva M y fijado el valor de las constantes k_1 , k_2 , k_3 y k_4 siempre es posible elegir las constantes F_0 y τ_0 de tal forma que si n_{\max} , p_{\max} y \dot{p}_{\max} son suficientemente pequeños y la velocidad inicial del vehículo es acotada por M ($|v_x(0)|, |v_y(0)|, |r(0)| < M$). Entonces:

- I La ley de control (5.46)-(5.53) aplicada al sistema (5.1) bajo la acción de las perturbaciones y el ruido que cumplan (5.28) produce señales de control F y τ factibles.
- II Existe una constante a y unas funciones γ de clase K tales que la dinámica del error viene dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x &= v_x \\
\dot{e}_y &= v_y \\
\dot{e}_{vx} &= -sat_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x + p_{vx} + n_1 \\
\dot{e}_{vy} &= -sat_1(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, F_0) - d_u e_{vy} + z_y + p_{vy} + n_2 \\
\dot{e}_\psi &= e_r \\
\dot{e}_r &= -d_r e_r - sat_2(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, \tau_0) + \frac{f(t)}{F^4} + p_r
\end{aligned} \tag{5.159}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
|p_{vx}|, |p_{vy}| &\leq (F_{\max} + 2F_0) \left| \sqrt{2 - 2\cos(e_\psi)} \right| \leq (F_{\max} + 2F_0) \sqrt{2} |e_\psi| \\
|n_1|, |n_2| &\leq an_{\max} = 2c_1(k_1 + k_2)F_0 n_{\max} \\
|f(t)| &\leq \gamma(\max(p_{\max}, \dot{p}_{\max}, n_{\max}))
\end{aligned} \tag{5.160}$$

Demostración: I) De acuerdo con el análisis anterior se cumple que:

$$\begin{aligned}
\tau - \tau_r &= (\tau - \tau_{real}) + (\tau_{real} - \tau|_{p=0}) + (\tau|_{p=0} - \tau_r) = \\
&= h_{14} + h_8 + f_{12} \\
|\tau - \tau_r| &\leq \tau_0 + \frac{\gamma(\max(p_{\max}, \dot{p}_{\max}))}{(F_{\min} - F_0)^4} + \frac{c_{29}\gamma_2(n_{\max})}{(F_{\min} - F_0)^4}
\end{aligned} \tag{5.161}$$

Por tanto si F_0 , t_0 , n_{\max} , p_{\max} y \dot{p}_{\max} son suficientemente pequeños entonces:

$$|\tau - \tau_r| \leq \frac{\varepsilon l}{2J} \tag{5.162}$$

Y puesto que en cualquier caso tomando F suficientemente pequeño:

$$|F - F_r| \leq 2F_0 \leq \frac{\varepsilon}{2m} \tag{5.163}$$

Se obtiene finalmente que:

$$\begin{aligned}
u_i &= \frac{1}{2} \left(mF_r \pm \frac{J\tau_r}{l} \right) + \frac{1}{2} \left(m(F - F_r) \pm \frac{J(\tau - \tau_r)}{l} \right) \\
\left| u_i - \frac{1}{2} \left(mF_r \pm \frac{J\tau_r}{l} \right) \right| &\leq \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon) = \varepsilon \\
u_i &\leq \left| \frac{1}{2} \left(mF_r \pm \frac{J\tau_r}{l} \right) \right| + \varepsilon = u_{\max} - \varepsilon + \varepsilon = u_{\max} \\
u_i &\geq - \left| \frac{1}{2} \left(mF_r \pm \frac{J\tau_r}{l} \right) \right| - \varepsilon = -u_{\min} + \varepsilon - \varepsilon = -u_{\min}
\end{aligned} \tag{5.164}$$

De tal forma que las señales de control son factibles $-u_{min} \leq u_i \leq u_{max}$.

II) El sistema (5.159) es simplemente la unión de (5.152) con (5.153) donde se ha tenido en cuenta que:

$$\tau = \tau_{real} + h_{14} = \tau_r - sat_2(k_3 e_\psi + k_4 e_r, \tau_0) + h_8 + h_{14} \quad (5.165)$$

Y por tanto:

$$\dot{e}_r = -d_r e_r - sat_2(k_1 e_y + k_2 e_{yy}, \tau_0) + h_8 + h_{14} + p_r \quad (5.166)$$

Que tiene la forma (5.159) con:

$$\begin{aligned} f &= F^4 (h_8 + h_{14}) \\ \frac{|f|}{F^4} &\leq \frac{\gamma_b (n_{max})}{(F_{min} - 2F_0)^4} + \frac{\gamma_a (\max(p_{max}, \dot{p}_{max}))}{(F_{min} - 2F_0)^4} \leq \frac{\gamma (\max(n_{max}, p_{max}, \dot{p}_{max}))}{(F_{min} - 2F_0)^4} \end{aligned} \quad (5.167)$$

Como se quería demostrar ■

Como en el caso anterior este resultado tiene una extensión directa cuando la condición inicial no es acotada.

Corolario: Si F_0 y τ_0 se eligen considerando condiciones iniciales nulas y aumentando las cotas M en una cantidad finita δ , entonces las señales F y τ solo podrán exceder las saturaciones durante un tiempo finito $T(\|e_0\|)$ que es una función de clase K respecto de $\|e(0)\|$. Transcurrido dicho tiempo se aplican las condiciones del teorema anterior.

Demostración: La demostración es exactamente la misma que el corolario del Teorema 5.1 ■

5.2.4.C. Estabilidad del sistema con perturbaciones y ruido

Los resultados del Teorema 5.3 pueden extenderse fácilmente en presencia de perturbaciones y ruido como sigue:

Teorema 5.5. Dada una trayectoria espacial bien definida $[x_r(t), y_r(t)]^T$ y su trayectoria factible asociada $\mathbf{x}_r = [x_r, y_r, v_{xr}, v_{yr}, \psi_r, r_r]^T$. Siempre es posible elegir unas constantes F_0 , τ_0 , k_1 , k_2 , k_3 , y k_4 tales que si las perturbaciones y el ruido cumplen (5.169) para un ε positivo suficientemente pequeño, entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ del sistema (5.1) bajo la ley de control (5.46)-(5.53) y entradas acotadas (5.13) con $F_{b,e} \in [-u_{min}, u_{max}]$, es tal que:

$$\|e(t)\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r\| \leq \beta (\|e(t_0)\|, t - t_0) + \gamma (\max(p_{max}, \dot{p}_{max}, n_{max})) \quad (5.168)$$

$$\max(p_{max}, \dot{p}_{max}, n_{max}) < \varepsilon \quad (5.169)$$

Para una función β de clase K y una función γ de clase KL .

Demostración: De acuerdo con el Teorema 5.4 y su corolario, para cualquier condición inicial acotada y fijado el valor de k_1 , k_2 , k_3 , y k_4 , es posible elegir las constantes F_0 y τ_0 de tal forma que las señales de control F y τ sean factibles transcurrido un tiempo T (que es una función de clase K respecto de la condición inicial).

En el intervalo $[0, T]$ la ley de control (5.46)-(5.53) produce entradas que pueden no ser factibles. De este modo las fuerzas que se aplicarán al aerodeslizador serán una versión saturada de las mismas tal que no obedece a la dinámica del error (5.45). No obstante la dinámica del error es acotada ya que, en virtud de (5.86) las velocidades son acotadas por $M = \max(|e_{vx}(0)|, |e_{vy}(0)|, |r(0)|, 2F_{max}/d_u, 2\tau_{max}/d_r)$. De este modo para $0 \leq t \leq T$:

$$\|e(t)\| \leq \|e(0)\| + MT \quad (5.170)$$

De acuerdo con el Teorema 5.4 una vez transcurrido el tiempo T si el ruido, la perturbación y su derivada temporal son suficientemente pequeñas (menores que un ε_1) es posible elegir las constantes F_0 y τ_0 de tal forma que las señales de control F y τ sean factibles. De este modo la dinámica del sistema será la especificada por (5.159). Observando las dos últimas ecuaciones de dicho sistema se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\psi &= e_r \\ \dot{e}_r &= -d_r e_r - \text{sat}_2(k_1 e_y + k_2 e_{vy}, \tau_0) + \frac{f(t)}{F^4} + p_r \end{aligned} \quad (5.171)$$

Puesto que $f(t)$ puede acotarse por funciones de clase K del ruido y las perturbaciones, existirá un ε_2 tal que:

$$\frac{\gamma_1(\varepsilon_2) + \gamma_2(\varepsilon_2)}{F_{\min} - 2F_0} + \varepsilon_2 \leq \alpha_1 \tau_0 \quad (5.172)$$

Donde α_1 es la siguiente constante:

$$\alpha_1 = \min\left(\frac{2\sqrt{k_4 d_r}}{\sqrt{k_4 d_r} + \sqrt{k_3}}, 1\right) \quad (5.173)$$

De este modo si $\varepsilon < \varepsilon_2$:

$$\left| \frac{f(t)}{F^4} + p_r \right| \leq \frac{\gamma_1(\varepsilon_2) + \gamma_2(\varepsilon_2)}{(F_{\min} - 2F_0)^4} + \varepsilon_2 \leq \alpha_1 \tau_0 \quad (5.174)$$

Con lo cual el sistema (5.171) cumple con las condiciones del Teorema 5.2 y por tanto:

$$|e_v|, |e_r| \leq \beta_a (\|e(T)\|, t-T) + \gamma_a \left(\frac{\gamma_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon)}{(F_{\min} - 2F_0)^4} + \varepsilon \right) \quad (5.175)$$

Puesto que la función $\beta_a \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ existe un T_2 (que es una función de clase K respecto $\|e(T)\|$, que a su vez es una función de clase K respecto de $\|e(0)\|$) tal que β_a se hace menor que ε . Durante el intervalo de tiempo $[T_1, T_2]$ las velocidades del sistema permanecen acotadas por lo que para $T_1 \leq t \leq T_2$ el error cumple que:

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|e(0)\| + MT(\|e(0)\|) + MT_2(\|e(T)\|)\|e(0)\| + MT_1(\|e(0)\|) = \\ &= \gamma_b(\|e(0)\|) \end{aligned} \quad (5.176)$$

Por otra parte si $t > T_2$ entonces:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= v_x \\ \dot{e}_{vx} &= -sat_1(k_1 e_x + k_2 e_{vx}, F_0) - d_u e_{vx} + z_x + p_{vx} + n_1 \end{aligned} \quad (5.177)$$

Existe entonces un ε_3 tal que:

$$\sqrt{2}(F_{\max} + 2F_0) \left(\varepsilon_3 + \gamma_a \left(\frac{\gamma_1(\varepsilon_3) + \gamma_2(\varepsilon_3)}{(F_{\min} - 2F_0)^4} + \varepsilon_3 \right) \right) + (1+a)\varepsilon_3 \leq \alpha_2 F_0 \quad (5.178)$$

Donde α_2 es la siguiente constante:

$$\alpha_2 = \min \left(\frac{2\sqrt{k_2 d_u}}{\sqrt{k_2 d_u} + \sqrt{k_1}}, 1 \right) \quad (5.179)$$

Por lo tanto si $\varepsilon < \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ entonces:

$$\begin{aligned} |z_x + p_{vx} + n_1| &\leq \sqrt{2}(F_{\max} + 2F_0) |e_v| + (1+a)\varepsilon \leq \\ &\leq \sqrt{2}(F_{\max} + 2F_0) \left(\varepsilon + \gamma_a \left(\frac{\gamma_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon)}{(F_{\min} - 2F_0)^4} + \varepsilon \right) \right) + (1+a)\varepsilon = \gamma_c(\varepsilon) \\ &\leq \sqrt{2}(F_{\max} + 2F_0) \left(\varepsilon_3 + \gamma_a \left(\frac{\gamma_1(\varepsilon_3) + \gamma_2(\varepsilon_3)}{(F_{\min} - 2F_0)^4} + \varepsilon_3 \right) \right) + (1+a)\varepsilon_3 \leq \\ &\leq \alpha_2 F_0 \end{aligned} \quad (5.180)$$

Esta dinámica cumple las condiciones del Teorema 5.1 de modo que:

$$\begin{aligned}
|e_x|, |e_{vx}| &\leq \beta_c (\|e(T_2)\|, t - T_2) + \gamma_d (\gamma_c (\varepsilon)) \leq \\
&\leq \beta_c (\gamma_b (\|e(0)\|), t - T_0) + \gamma_d (\gamma_c (\varepsilon)) \leq \\
&\leq \beta_c (\gamma_b (\|e(0)\|), t) + \gamma_d (\gamma_c (\varepsilon)) \leq \\
&\leq \beta'_c (\|e(0)\|, t) + \gamma_d (\gamma_c (\varepsilon))
\end{aligned} \tag{5.181}$$

Donde β_c es una función de clase KL. La expresión (5.181) resulta entonces válida para todo tiempo t . Lo mismo puede hacerse para e_y y e_{vy} por lo que finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|e(t)\| &\leq |e_x(t)| + |e_{vx}(t)| + |e_y(t)| + |e_{vy}(t)| + |e_x(t)| + |e_{vx}(t)| \leq \\
&\leq 2\beta_a (\|e(0)\|, t) + 2\gamma_a \left(\frac{\gamma_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon)}{(F_{\min} - 2F_0)^4} + \varepsilon \right) + \\
&\quad + 4\beta'_c (\|e(0)\|, t) + 4\gamma_d (\gamma_c (\varepsilon)) \\
&\leq \beta (\|e(0)\|, t) + \gamma (\varepsilon) \leq \\
&\leq \beta (\|e(0)\|, t) + \gamma (\max(p_{\max}, \dot{p}_{\max}, n_{\max}))
\end{aligned} \tag{5.182}$$

Como se quería demostrar ■

5.3. Resultados de simulación

Los resultados de simulación se han llevado a cabo utilizando los parámetros nominales del aerodeslizador que se muestran en la Tabla 2.1.

En primer lugar se comprueba la convergencia hacia una trayectoria circular desde diferentes condiciones iniciales. Asimismo se estudia la influencia del ruido y las perturbaciones sobre la trayectoria.

En segundo lugar se comprueba la convergencia hacia trayectorias más complejas y se analiza que ocurre cuando la trayectoria de referencia no es factible en un conjunto discreto de puntos.

5.3.1. Seguimiento de una trayectoria circular

Para comprobar los resultados del apartado anterior se plantea una trayectoria circular de radio R centrada en el origen y recorrida con una velocidad V en sentido horario como sigue:

$$\begin{aligned}
x_r(t) &= R \sin\left(\frac{V}{R}t\right) \\
y_r(t) &= R \cos\left(\frac{V}{R}t\right)
\end{aligned} \tag{5.183}$$

En las simulaciones, se utilizan las constantes de control $k_1=0.5 \text{ m}^{-1}$, $k_2=1\text{s/m}$, $k_3=1\text{rad}^{-1}$, $k_4=1\text{s/rad}$, y las saturaciones $F_0=0.1\text{m/s}^2$, y $\tau_0=0.8\text{rad/s}^2$. Dichos valores han sido escogidos para tener una dinámica del error de posición adecuada así como para producir señales acotadas para la trayectoria circular.

La trayectoria definida anteriormente puede seguirse mediante la aplicación de una fuerza y un momento constantes.

$$F_r = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + d_u^2 V^2} \quad (5.184)$$

$$\tau_r = \frac{d_r V}{R}$$

De este modo tomando $V=0.5\text{m/s}$ y $R=2\text{m}$ entonces $F_r=0.2179\text{m/s}^2$ y $\tau_r=0.4339\text{rad/s}^2$, de tal forma que la trayectoria es estrictamente factible.

5.3.1.A. Convergencia en ausencia de ruido y perturbaciones.

En primer lugar se comenzará simulando la trayectoria del aerodeslizador desde condiciones iniciales nulas.

La trayectoria parte del origen con velocidad inicial nula y orientada en la dirección del eje x ($\psi=0$) y converge hacia la trayectoria circular de referencia que se muestra en la Figura 5.9. Como se puede apreciar en la misma el aerodeslizador se aproxima asintóticamente hacia la trayectoria.

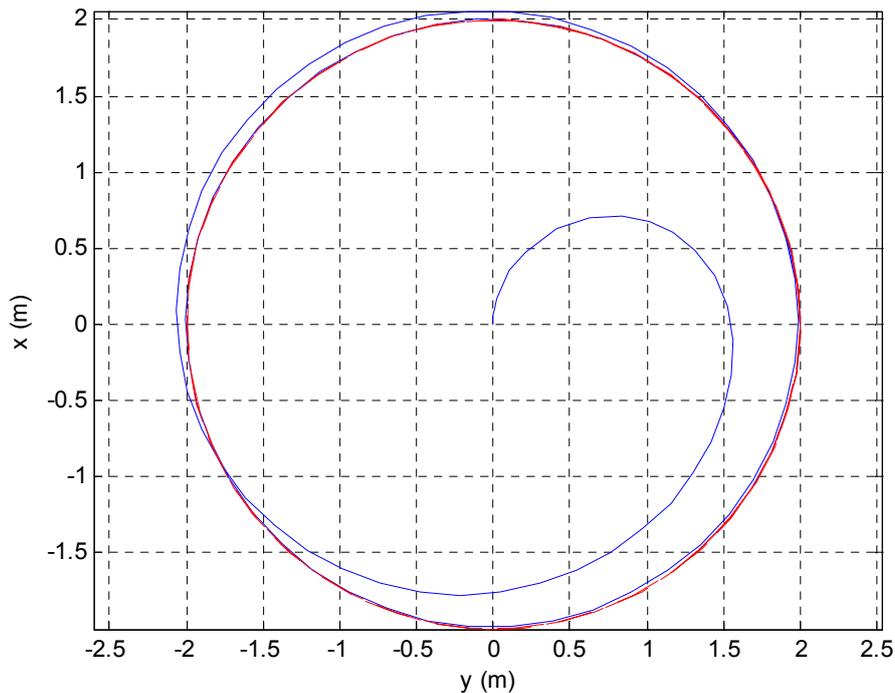


Figura 5.9. Convergencia a una trayectoria circular $R=2\text{m}$ $V=0.5\text{m/s}$. La referencia se marca en rojo mientras que la trayectoria se marca en azul.

La Figura 5.10 muestra la evolución temporal de la posición mientras que la Figura 5.11 muestra la evolución de las velocidades. Tanto la posición como la velocidad convergen hacia la trayectoria confirmando así el resultado del Teorema 5.2. En un tiempo de aproximadamente 30 segundos el error de seguimiento de la trayectoria en ausencia de perturbaciones y ruido se hace inapreciable a simple vista.

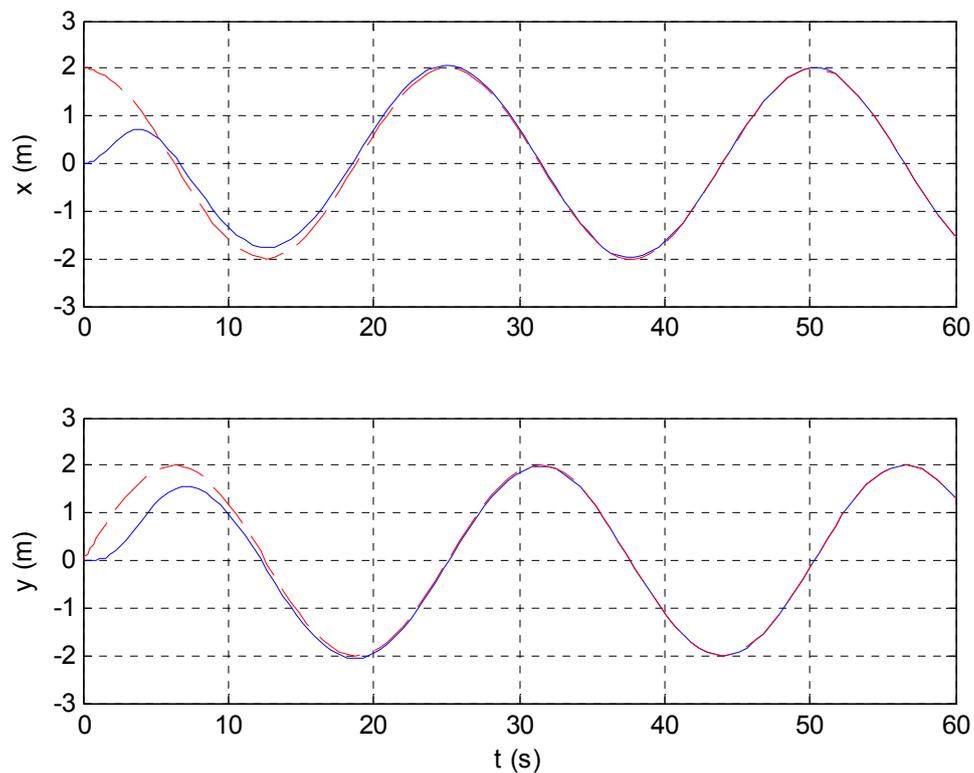


Figura 5.10. Evolución temporal de las variables de posición. La trayectoria se muestra en azul continuo mientras que la referencia se muestra en rojo discontinuo.

La evolución de la orientación del vehículo se muestra en la Figura 5.12. La trayectoria circular de referencia se recorre manteniendo una velocidad angular constante $r_r=0.25\text{rad/s}$. Inicialmente, durante el transitorio, la referencia de orientación de control ψ_c , y la referencia en la velocidad angular r_c tienen una dinámica compleja. Sin embargo transcurridos los 30 primeros segundos del mismo, puesto que la posición converge hacia la trayectoria de referencia y por consiguiente entonces $r_c \rightarrow r_r$.

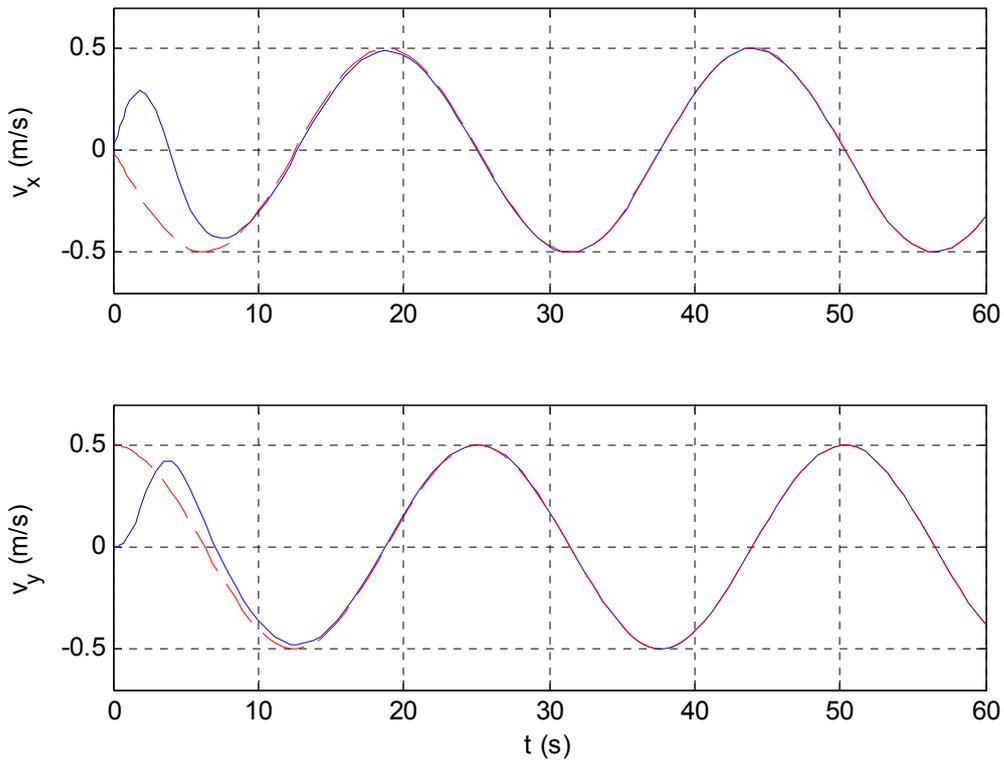


Figura 5.11. Evolución temporal de las velocidades. La velocidad del vehículo se muestra en azul continuo mientras que la referencia se muestra en rojo discontinuo.

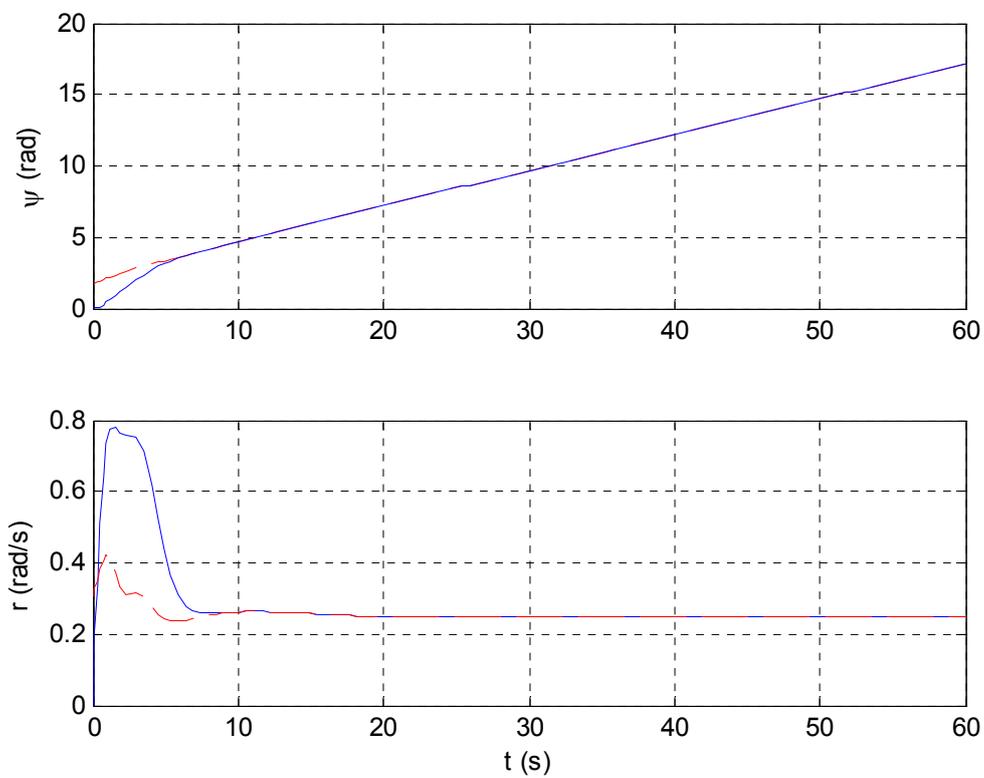


Figura 5.12. Orientación y velocidad angular de la trayectoria. En azul continuo se muestra el valor de ψ y r mientras que en rojo discontinuo se muestra el valor de ψ_c y r_c .

Finalmente las acciones de control F y τ así como F_s y F_b se muestran en la Figura 5.13 y Figura 5.14 respectivamente. Puesto que las saturaciones han sido convenientemente elegidas las fuerzas F y τ son siempre factibles. De este modo F_s y F_b no se saturan y las fuerzas son aplicables.

Para mostrar que la convergencia es global se simula la trayectoria del sistema partiendo desde varias posiciones iniciales. Se simula el comportamiento bajo las condiciones iniciales $\mathbf{x}_a = [-10 \ -10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{x}_b = [0 \ 0 \ 5 \ 5 \ 0 \ 0]^T$ y $\mathbf{x}_c = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10]^T$.

La forma más simple de comprobar la convergencia consiste en representar la distancia a la trayectoria de referencia como función del tiempo, tal como se hace en la Figura 5.15.

A partir de esta figura pueden sacarse interesantes conclusiones. Por una parte cuando la trayectoria comienza desde una posición alejada pero con un error de velocidad bajo (condición inicial \mathbf{x}_a) el error converge rápidamente.

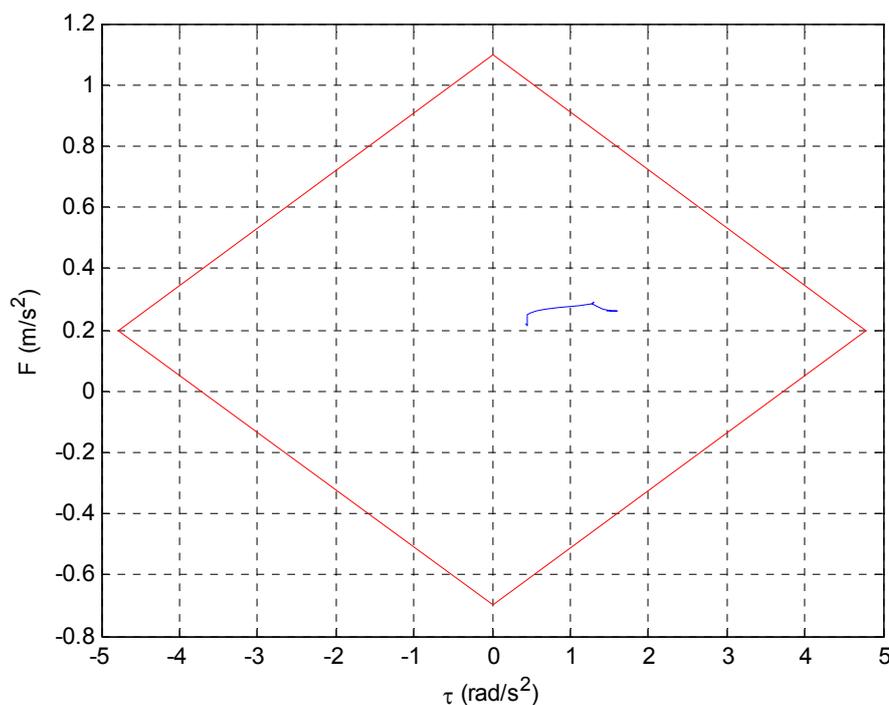


Figura 5.13. Diagrama de fuerzas correspondiente al seguimiento de la trayectoria circular. A lo largo de la trayectoria las fuerzas y momentos son siempre factibles.

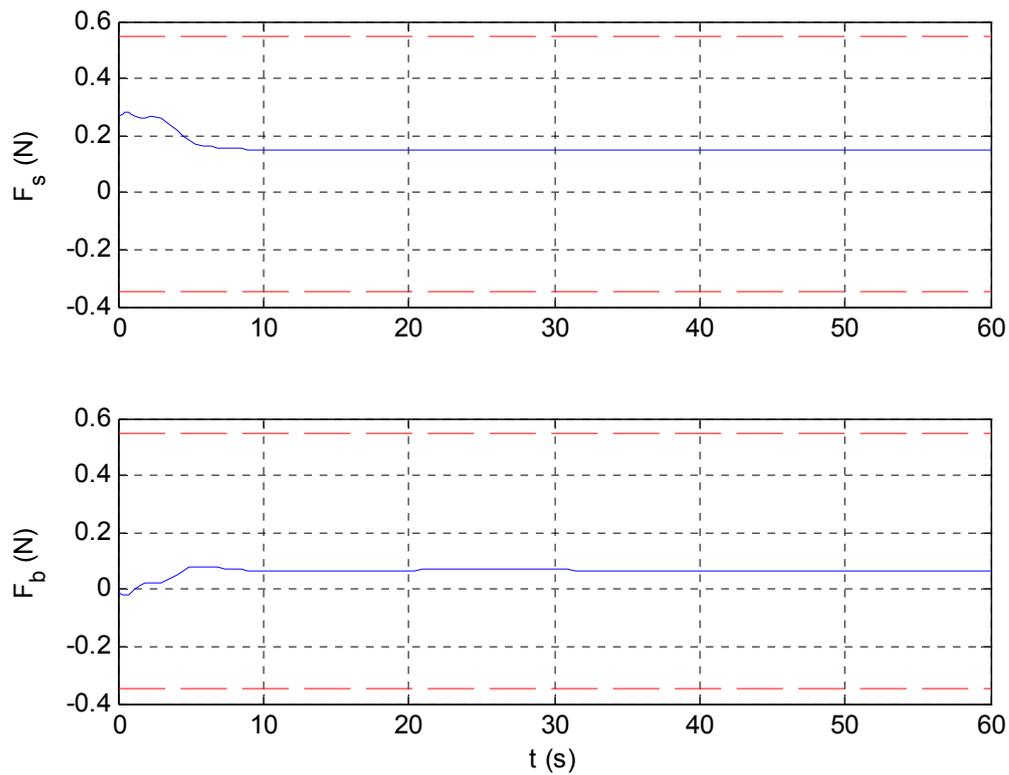


Figura 5.14. Fuerzas de control en el aerodeslizador. La fuerza aplicada se muestra en azul mientras los límites máximos y mínimos de muestran en rojo discontinuo.

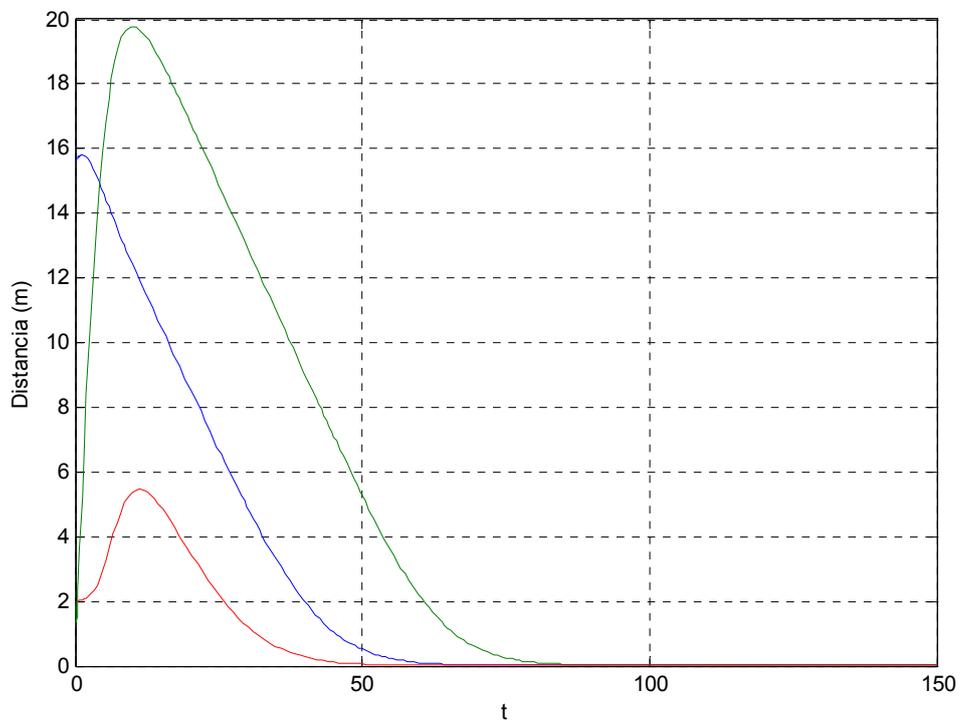


Figura 5.15. Evolución de la distancia a la trayectoria desde tres condiciones iniciales distintas. La condición inicial x_a se muestra en azul, x_b en verde y x_c en rojo. En los tres casos la trayectoria converge hacia la referencia.

Si se parte una posición próxima pero la velocidad angular es grande (condición inicial x_c) la posición inicial se aleja ligeramente pero se recupera aproximadamente en el mismo tiempo que en el caso anterior.

Sin embargo si se parte del origen con una velocidad elevada (condición inicial x_b) el sistema tarda mucho tiempo en recuperarse. Esto se debe a que la gran velocidad inicial genera una saturación en los actuadores lo que impide actuar con mayor velocidad.

Las trayectorias espaciales correspondientes se muestran en la Figura 5.16. Como puede apreciarse independientemente de la condición inicial todas las trayectorias convergen finalmente a la referencia. En la figura se aprecia claramente como el peor transitorio se corresponde con la condición inicial x_b (trayectoria verde).

Las señales de control necesarias para seguir las trayectorias anteriores se muestran en la Figura 5.17. La mayor tendencia a la saturación se produce en la trayectoria que parte de x_b .

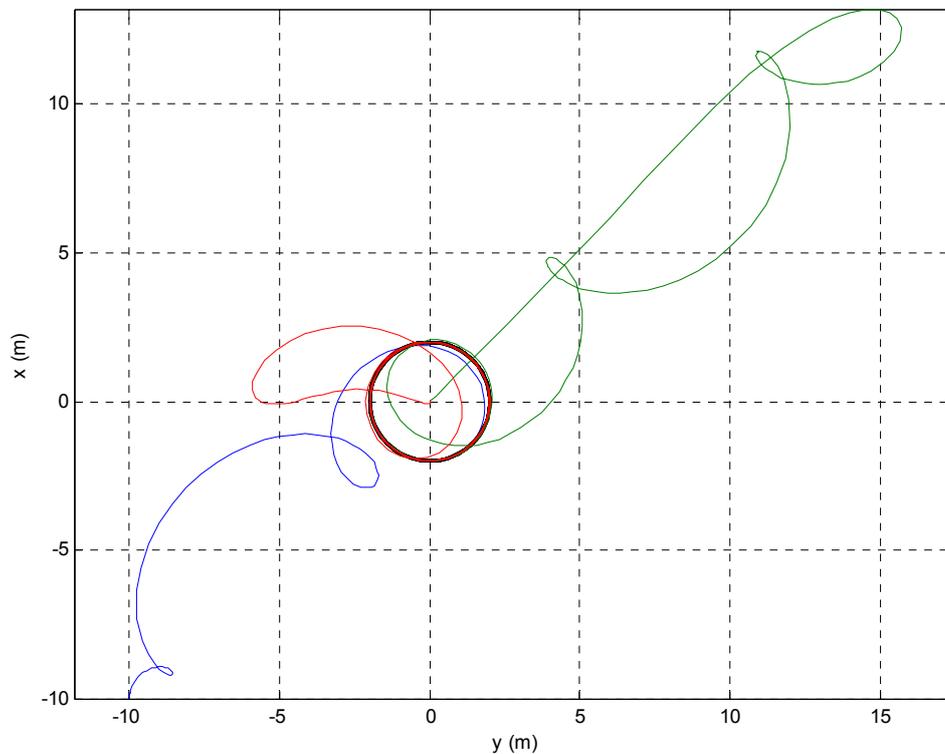


Figura 5.16. Trayectorias espaciales desde diferentes condiciones iniciales. x_a en azul, x_b verde y x_c rojo.

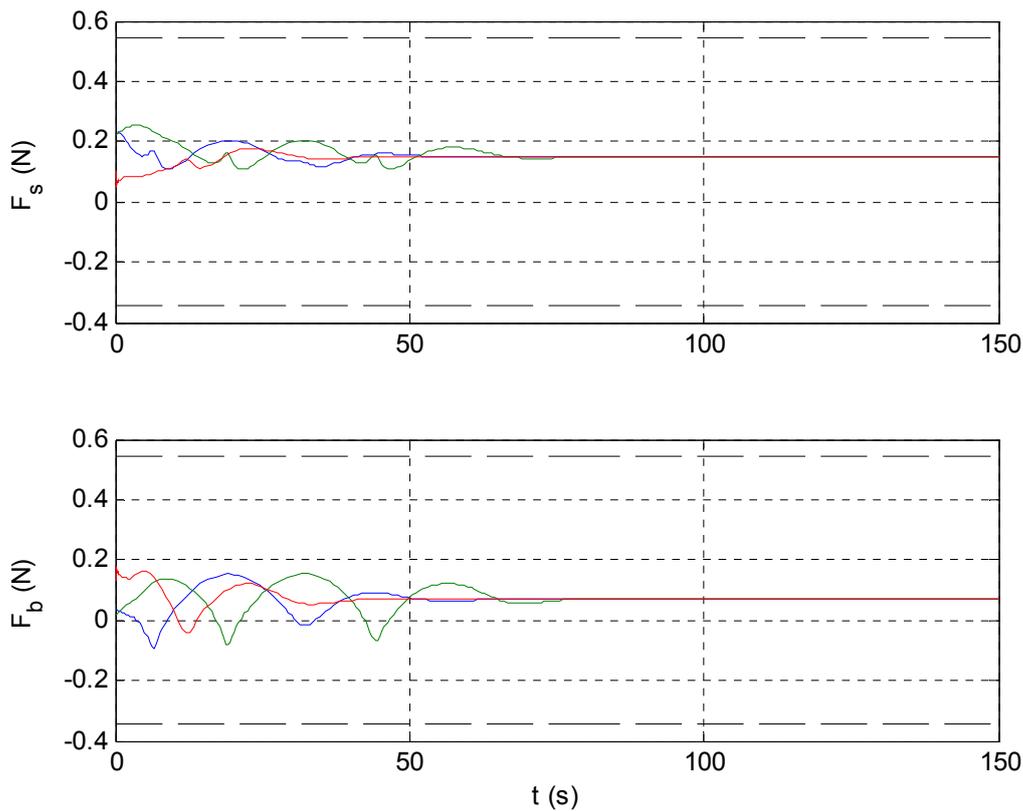


Figura 5.17. Señales de control para las distintas trayectorias. x_a en azul, x_b verde y x_c rojo. Las saturaciones se marcan con línea negra discontinua.

5.3.1.B. Efecto de las perturbaciones y el ruido

A continuación se muestra el efecto del ruido sobre la trayectoria circular de prueba desde condiciones iniciales nulas. Para ello se simula el sistema anterior añadiendo un ruido en la medida de amplitud n comprendida entre 0.1 y 0.5 (con sus unidades correspondientes en cada una de los componentes del vector de estados). El efecto sobre la trayectoria se muestra en la Figura 5.18.

El efecto del ruido en la medida es bajo durante el transitorio (ya que también lo es la relación señal/ruido). No obstante en el estado estacionario las variables de error son más pequeñas, de tal forma que el efecto del ruido sobre la trayectoria es máximo.

Como puede apreciarse en la Figura 5.19 para cualquier valor del ruido en el rango especificado, la trayectoria converge a un entorno de la trayectoria circular. En cualquier caso, con valores de n menores que 0.5 el ruido no provoca una saturación de los actuadores. Tal como se muestra en la Figura 5.20.

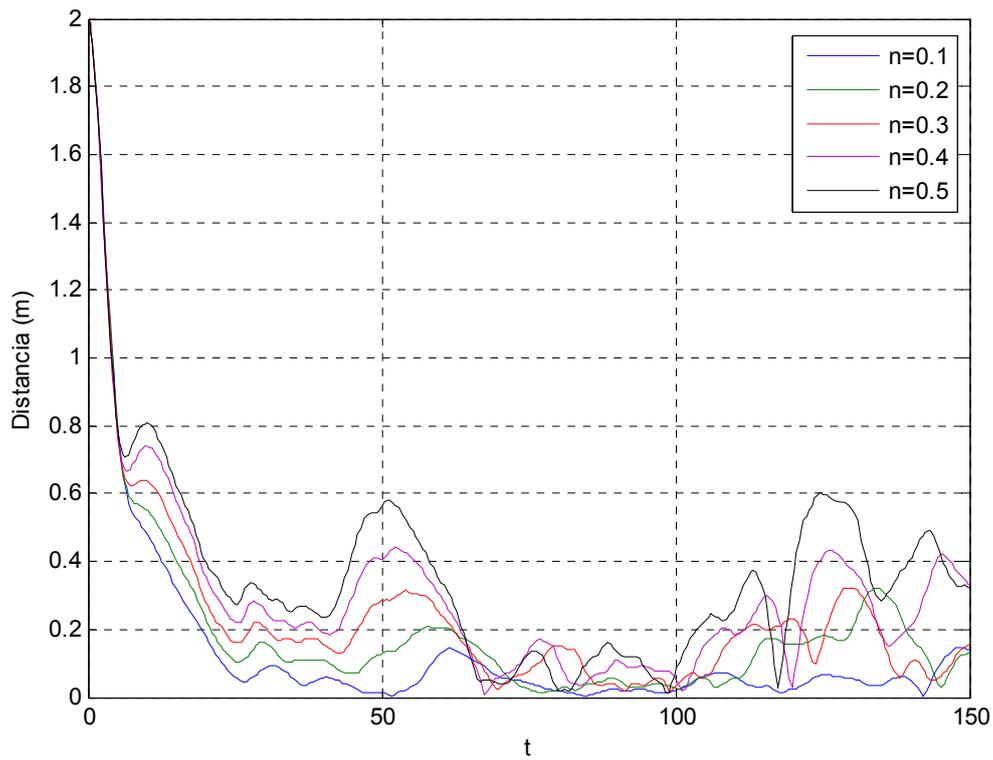


Figura 5.18. Efecto del ruido sobre la trayectoria. Cuanto mayor es el ruido peor es la respuesta en estado estacionario.

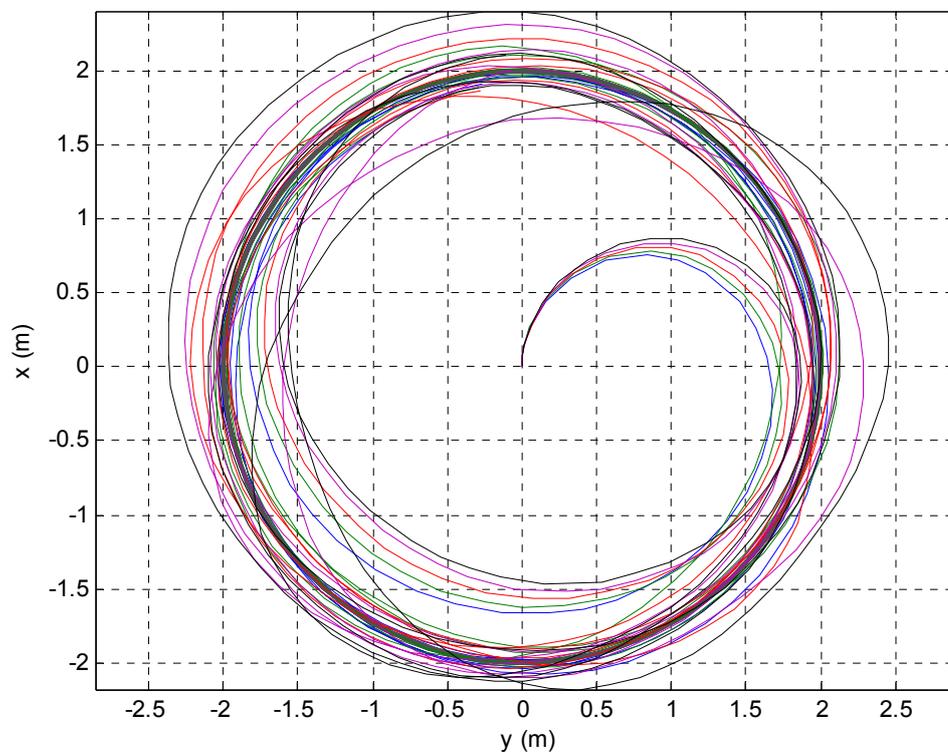


Figura 5.19. Efecto del ruido sobre la trayectoria espacial. La figura muestra la trayectoria para $n=0.1$, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5 en azul, verde, rojo, violeta y negro respectivamente.

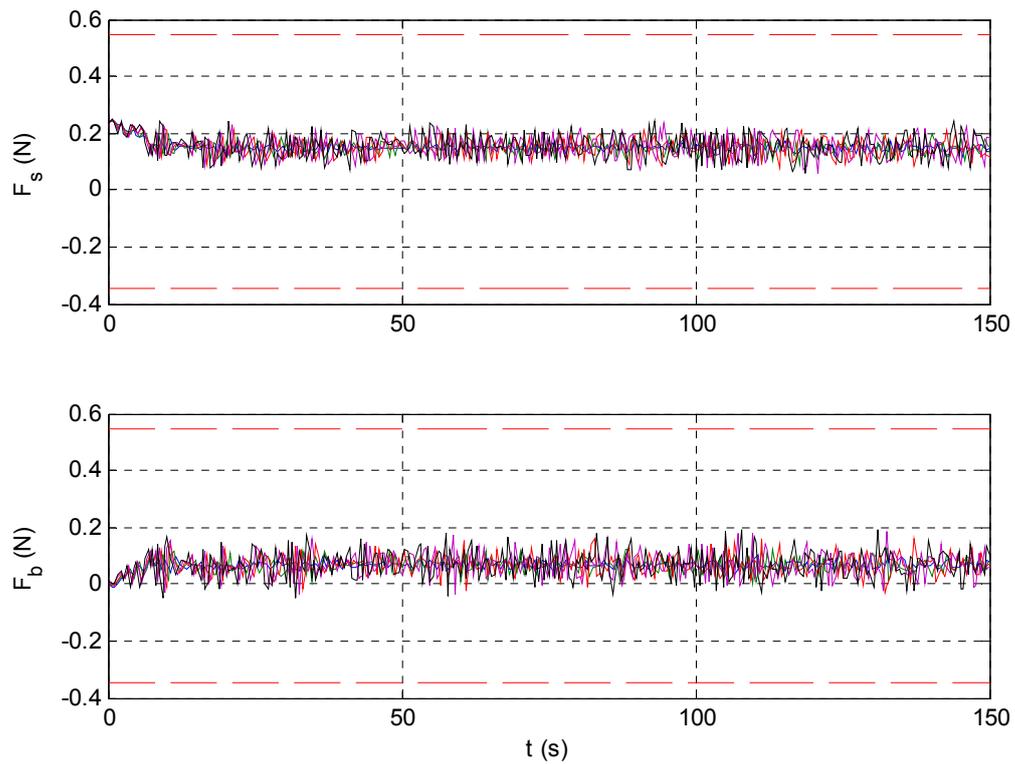


Figura 5.20. Señales de control en presencia de ruido en la medida. La figura muestra las señales de control con $n=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5 en azul, verde, rojo, violeta y negro respectivamente.

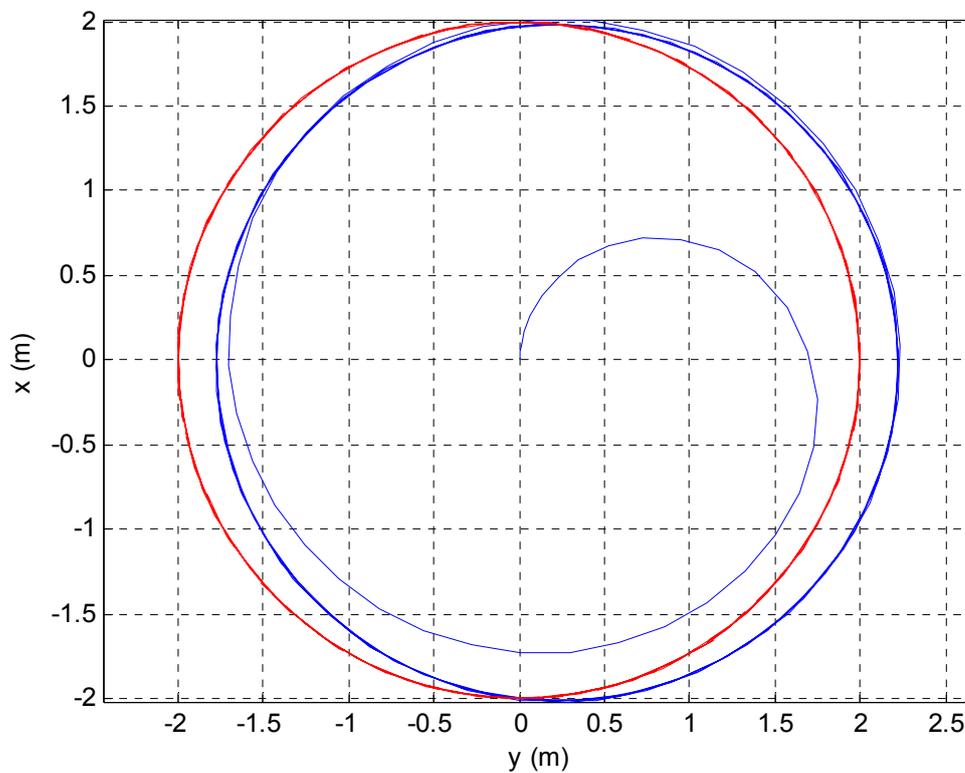


Figura 5.21. Efecto de una perturbación constante.

Finalmente si sobre el aerodeslizador se aplica una perturbación de magnitud constante $p_y=0.01m/s^2$ que simularía el efecto de la corriente sobre el aerodeslizador, la trayectoria del sistema es la mostrada en la Figura 5.21.

La trayectoria final hacia la que converge el aerodeslizador se encuentra desplazada con respecto a la trayectoria de referencia. La perturbación aplicada resulta ser el 10% de la saturación en la acción de control.

5.3.1.C. Incertidumbre en los parámetros del modelo

En los ejemplos anteriores se asume un conocimiento perfecto de los parámetros del sistema a la hora de la implementación del control. En caso de que los parámetros no se conozcan con total precisión, los valores calculados de F_s y F_b no serán correctos. Sean los parámetros m' , J' , l' , d_u' y d_r' la estimación de los parámetros de los que se dispone para el cálculo de la ley de control siendo m , J , l , d_u y d_r los valores exactos de dichos parámetros, entonces:

$$\begin{aligned}
 F'_e, F'_b &= \frac{1}{2} \left(m'F \pm \frac{J'\tau}{l'} \right) \\
 F' &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} \left(m'F + \frac{J'\tau}{l'} \right) + \frac{1}{2} \left(m'F - \frac{J'\tau}{l'} \right) \right) = \frac{m'}{m} F = F + \left(\frac{m' - m}{m} \right) F \quad (5.185) \\
 \tau' &= \frac{l}{J} \left(\frac{1}{2} \left(m'F + \frac{J'\tau}{l'} \right) + \frac{1}{2} \left(m'F - \frac{J'\tau}{l'} \right) \right) = \frac{l}{J} \frac{J'}{l'} \tau = \tau + \left(\frac{J'l - J'l'}{Jl'} \right) \tau
 \end{aligned}$$

Del mismo modo la dinámica del sistema no será la misma para la cual fue diseñada la ley de control de tal modo que:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F' \cos(\psi) - d_u v_x = \\
 &= F \cos(\psi) - d'_u v_x + (F' - F) \cos(\psi) - (d_{uu} - d'_u) v_x \\
 \dot{v}_y &= F' \sin(\psi) - d_u v_y = \\
 &= F \sin(\psi) - d'_u v_y + (F' - F) \sin(\psi) - (d_u - d'_u) v_y = \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \tau' - d'_r r = \tau - d'_r r + (\tau' - \tau) - (d_r - d'_r) r =
 \end{aligned} \quad (5.186)$$

Puesto que la velocidad del sistema y las fuerzas de control son acotadas, entonces la variación de los parámetros del modelo es equivalente a la introducción en el sistema para el que fue diseñada la ley de control de una perturbación acotada pero dependiente del tiempo). Por esta razón que es aplicable el resultado del Teorema 5.5.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d'_u v_x + p_1 \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d'_u v_y + p_1 \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \tau - d'_r r + p_3
 \end{aligned} \tag{5.187}$$

Para analizar este caso se simula el sistema con los parámetros nominales contenidos en la Tabla 2.1 y la trayectoria circular de prueba. Sin embargo los parámetros que se usan en el cálculo de la señal de control son los correspondientes a incrementar la masa y el momento de inercia un 10% y al mismo tiempo reducir los coeficientes de rozamiento rotacional y traslacional otro 10%.

La Figura 5.22 ilustra el efecto de la incertidumbre en los parámetros. Para un 10% de error en los parámetros del controlador, el error de seguimiento continúa siendo global y finalmente acotado. El efecto de la incertidumbre en la trayectoria circular se limita a cambiar el radio de la circunferencia recorrida sin modificar la velocidad angular.

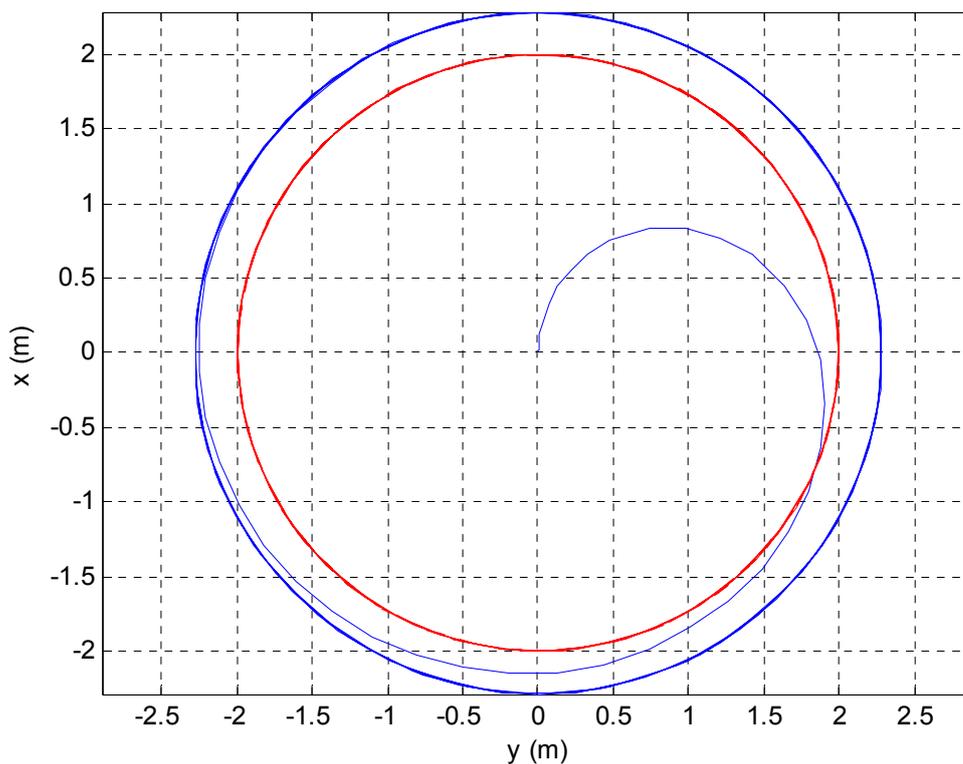


Figura 5.22. Efecto de la incertidumbre en los parámetros.

5.3.2. Seguimiento de trayectorias genéricas

En este apartado se analiza el seguimiento de trayectorias más generales con un ejemplo de trayectoria factible y otro de trayectoria no factible.

5.3.2.A. Trayectoria factible genérica

Como ejemplo de trayectoria factible no circular se plantea la siguiente trayectoria de Lissajous:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 2 \sin\left(\frac{3}{8}t\right) \\ y_r(t) &= 3 \cos\left(\frac{2}{8}t\right) \end{aligned} \quad (5.188)$$

Utilizando los mismos parámetros de control que en el caso anterior y partiendo de condiciones iniciales nulas se obtiene la trayectoria ilustrada en la Figura 5.23.

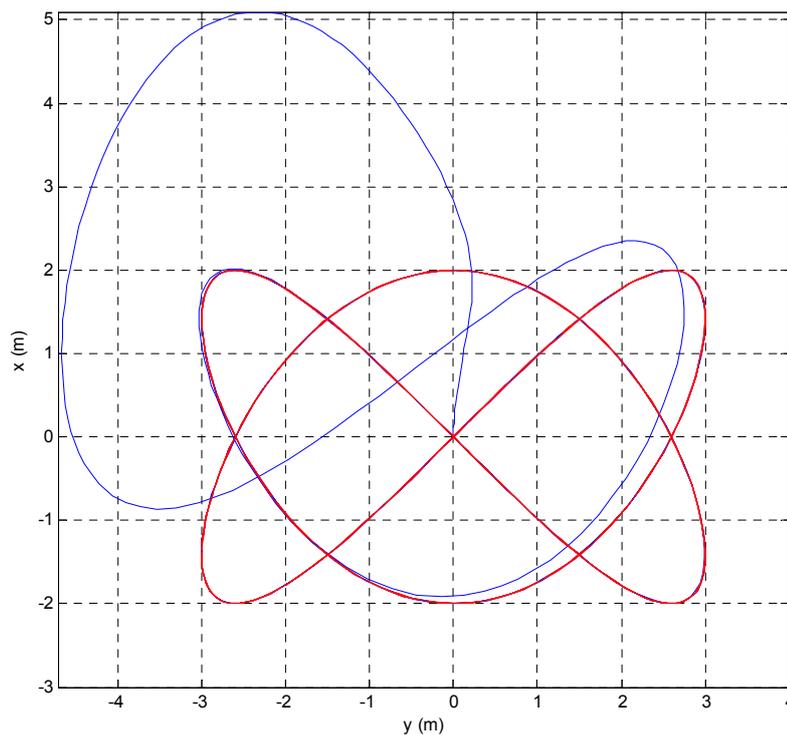


Figura 5.23. Trayectoria general. Se muestra la trayectoria del aerodeslizador en azul mientras que la referencia se encuentra en rojo.

Es evidente que la trayectoria converge a la referencia. Además, tal como se muestra en la Figura 5.24, las señales de control permanecen dentro de los límites de la saturación.

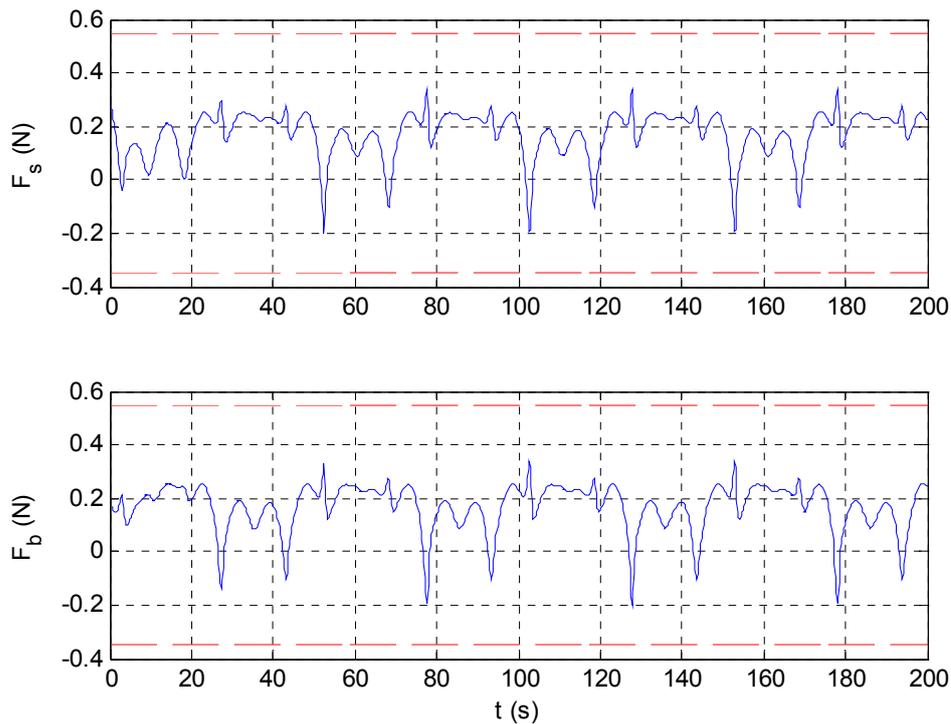


Figura 5.24. Señales de control en una trayectoria general.

5.3.2.B. Seguimiento de trayectoria puntualmente no factible

El Teorema 5.5 afirma que si la trayectoria es factible en todos sus puntos, entonces es posible seguir la trayectoria cuando el ruido y las perturbaciones sean pequeños.

Sin embargo esto no quiere decir que no sea posible seguir una trayectoria que no sea factible en un conjunto de sus puntos. Como ejemplo de trayectoria de este tipo se plantea la siguiente senoide:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 3 \sin(0.55t) \\ y_r(t) &= t \end{aligned} \quad (5.189)$$

Esta trayectoria requiere fuerzas y momentos no factibles cada vez que se invierte el radio de curvatura (cuando x_r cambia de signo). Sin embargo la trayectoria puede seguirse como se muestra en la Figura 5.25.

El precio a pagar es que el error de seguimiento no tiende a cero, lo cual es imposible puesto que la trayectoria no es factible, sin embargo sí que se mantiene finalmente acotado por un valor pequeño $\varepsilon=0.15 \text{ m}$. De este modo para los valores del ejemplo el error de seguimiento es pequeño pero no nulo.

Para comprobar que las acciones de control se saturan en cada cambio de signo de la curvatura se muestran las señales de control en la Figura 5.26.

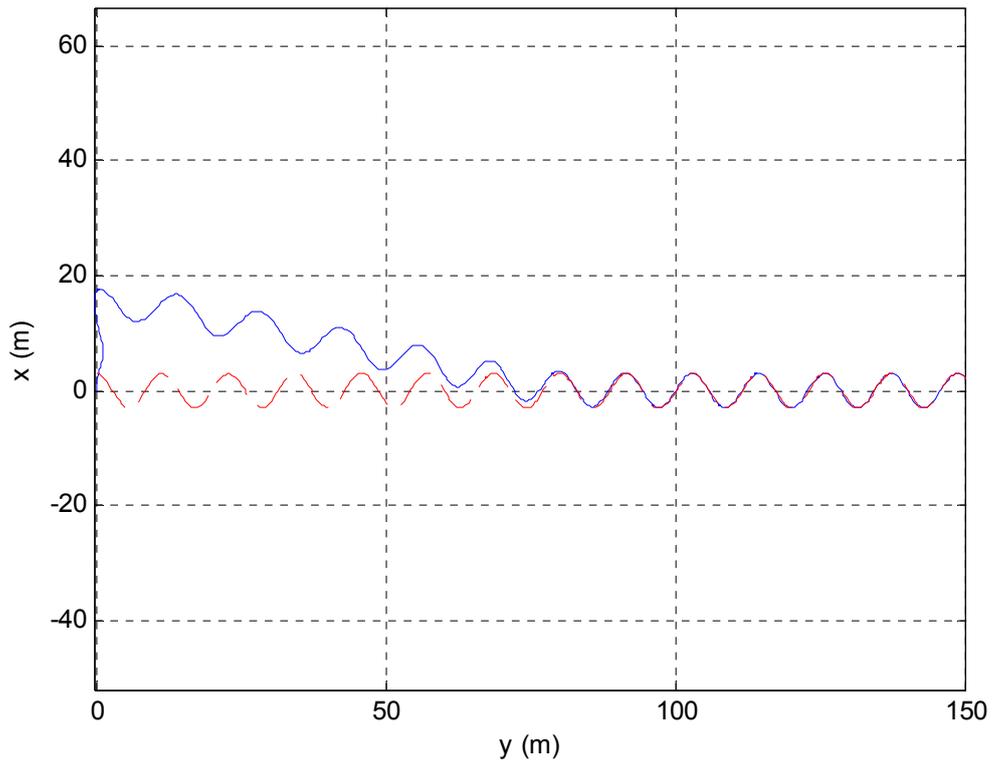


Figura 5.25. Seguimiento de una trayectoria no factible.

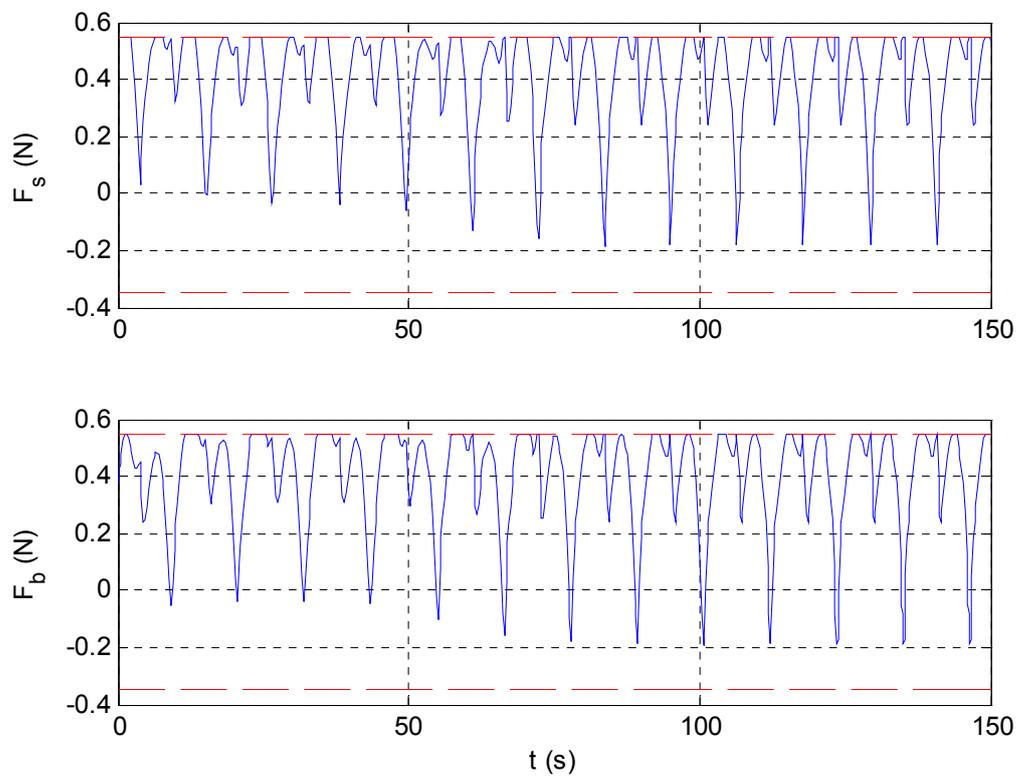


Figura 5.26. Señales de control en una trayectoria sinusoidal.

No obstante la robustez del controlador en este ejemplo es mínima, de hecho una pequeña variación de los parámetros de la trayectoria (en particular un descenso de la velocidad v_y o un aumento de la frecuencia de la senoide) desestabiliza fácilmente el sistema.

5.4. Conclusiones

En este capítulo se ha analizado el problema de seguimiento de trayectoria por parte de un aerodeslizador subactuado. Tal como se muestra en el apartado 5.1.1. Debido a la restricción no holonómica en el movimiento del aerodeslizador no todas las trayectorias espaciales pueden ser seguidas.

Dentro del conjunto de trayectorias que el aerodeslizador puede seguir se ha seleccionado un subconjunto de ellas tales que exista un cierto margen de maniobra en la acción de control a aplicar (no saturen los actuadores) y además permitan calcular las acciones de control utilizando únicamente información local acerca de la trayectoria espacial. Estas son las trayectorias *bien definidas*.

Finalmente se ha diseñado una ley de control por realimentación que permite hacer el seguimiento de cualquier trayectoria bien definida, haciendo especial hincapié en el hecho de que las señales de control deben de permanecer acotadas y además el sistema debe de soportar la presencia de perturbaciones y ruido en la medida del estado.

Como se ha demostrado teóricamente y se ha evidenciado mediante simulaciones, si la trayectoria está bien definida es posible ajustar las constantes de la ley de control para garantizar que se cumplen los límites impuestos por la saturación de los actuadores en presencia de perturbaciones y ruido. Además cuanto menores sean el ruido y las perturbaciones mejor será el seguimiento de la trayectoria.

Asimismo se ha comprobado mediante simulación que las condiciones del Teorema 5.5 si bien son restrictivas, resultan necesarias si se quiere mantener cierto grado de robustez en la ley de control diseñada.

Capítulo 6 Seguimiento de trayectoria con entradas discretas

El objetivo de este capítulo es construir una ley de control por realimentación de estados que resuelva el problema de seguimiento de trayectoria (*tracking*) empleando para ello un conjunto discreto de acciones de control. Esto es, diseñar una ley de control por realimentación que a partir del estado y las referencias genere las fuerzas F_e y F_b que hagan al aerodeslizador converger hacia una trayectoria espacial parametrizada en el tiempo.

La diferencia fundamental con respecto al Capítulo 5 radica en que la ley de control no debe generar señales continuas de control F_e y F_b dentro de un intervalo $[-u_{min}, u_{max}]$ sino señales discretas que solo pueden tomar tres valores: $F_{b,e} \in \{-u_{min}, 0, u_{max}\}$ (todo-nada-inversión).

El capítulo comienza analizando el problema y definiendo una familia de trayectorias que pueden ser seguidas por un control todo-nada. A continuación se diseña una ley de control y se ve el efecto que sobre ella tienen las perturbaciones y el ruido, se estudiando a continuación su estabilidad.

El capítulo concluye con una verificación de los resultados de estabilidad utilizando simulaciones y una validación experimental del control llevada a cabo en el sistema real de laboratorio.

6.1. Introducción al problema

Como se expuso en el Capítulo 5 el control de seguimiento de trayectoria de vehículos subactuados es un tema de gran interés en los últimos tiempos. Es por ello que existen muchas soluciones de control continuo para vehículos marinos subactuados, Véase por ejemplo los trabajos de (Aguilar et al., 2003; Balluchi et al., 2000; Lefeber et al., 2003) y (Aguilar et al., 2007) que se comentan en el capítulo anterior.

Sin embargo existen muy pocos trabajos en los que se considere el control de un vehículo marino utilizando señales de control discretas. En algunos trabajos como por ejemplo (Seguchi & Ohtsuka, 2002) y (Seguchi & Ohtsuka, 2003) se solventa este

problema utilizando un controlador predictivo de horizonte deslizante y aproximando la señal de control a aquella señal de control disponible más próxima.

Esta estrategia puede tener resultados positivos cuando la ley de control sea de tipo bang-bang, pero no funciona correctamente en leyes de control que produzcan resultados intermedios difíciles de aproximar mediante señales todo-nada.

Cuando el vehículo es completamente actuado es común emplear controles en modo deslizante como por ejemplo en (Chatchanayuenyong & Parnichkun, 2006), la limitación de estas estrategias aparece cuando no es posible actuar sobre todos los estados del vehículo al mismo tiempo.

Para solventar este problema autores como (Ashrafiuon & Muske, 2008) y (Sira-Ramírez, 2002) plantean leyes de control en modo deslizante de segundo orden, estas leyes tienen una tendencia natural a producir señales de control extremas lo que las hace interesantes para aplicarlas a sistemas con entradas de control todo-nada.

En el campo del control de robots móviles no holonómicos con radio de giro limitado (*Dubin's vehicle*) es posible diseñar controles que lleven el vehículo hacia una trayectoria espacial utilizando acciones de control extremas (girar a ambos lados acelerar y frenar) como se hace por ejemplo en (Chwa, 2004) y (Balluchi et al., 2000).

Desde un punto de vista intuitivo resulta lógico pensar que esto mismo puede hacerse en un aerodeslizador donde la limitación está en que las ligaduras de giro vengán impuestas por condiciones no holonómicas de segundo orden.

Por otra parte, resulta claro que para poder controlar un vehículo utilizando únicamente un conjunto discreto de acciones de control será necesario que se cumplan al menos dos condiciones:

- I Que las acciones de control disponibles sean mayores o iguales a las acciones necesarias para seguir la trayectoria.
- II Que puedan aplicarse acciones de control en todas las direcciones necesarias (acelerar, frenar, girar hacia ambos lados y cualquier combinación de las anteriores).

De este modo para poder controlar el vehículo es necesario analizar el tipo de trayectorias que pueden seguirse utilizando solamente un conjunto discreto de acciones de control.

6.1.1. Limitaciones del control

Para tener en cuenta las limitaciones del control con entradas discretas en primer lugar conviene recordar el modelo del sistema que expuso en el Capítulo 2 según el cual la dinámica del aerodeslizador subactuado puede expresarse como sigue.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x \\
\dot{y} &= v_y \\
\dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x \\
\dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y \\
\dot{\psi} &= r \\
\dot{r} &= \tau - d_r r + p_r
\end{aligned} \tag{6.1}$$

En el caso actual F_b y F_e solo funcionan en modo todo-nada-inversión, esto es $F_{b,e} \in \{-u_{\min}, 0, u_{\max}\}$. De este modo la fuerza y el momento normalizados se relacionan con las fuerzas disponibles mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
F &= (F_b + F_e) / m \\
\tau &= l(F_b - F_e) / J \\
F_{b,e} &\in \{-u_{\min}, 0, u_{\max}\}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

El conjunto de posibles entradas disponibles (F_i, τ_i) , $i=1,2..9$ contiene todas las combinaciones de las tres posibles entradas de control para el motor de babor con las correspondientes del motor de estribor. Las nueve señales de control disponibles se muestran de forma gráfica en la Figura 4.2 y su signo se analiza en la Tabla 4.1

Una característica destacable de las acciones de control disponibles es que si $F \neq 0$ siempre existe una combinación adecuada de F_b y F_e que producen F y τ con cualquier combinación de signos posibles. Un posible esquema de elección es la que se analizó en Tabla 4.2.

Dada una tabla de selección de fuerzas y momentos en los cuales $F \neq 0$ y $\tau \neq 0$ (como por ejemplo la Tabla 4.2) siempre existen dos constantes positivas F_0 y τ_0 tales que para cualquier selección de las fuerzas $|F_i| \geq F_0$ y $|\tau_i| \geq \tau_0$. Del mismo modo existen dos fuerzas F_m y τ_m tales que $|F_i| \leq F_m$ y $|\tau_i| \leq \tau_m$.

Puesto que el esquema de selección restringe los valores de fuerza y momento que pueden aplicarse en el sistema con entradas discretas, se hace necesaria una definición más restrictiva de la factibilidad de una trayectoria que la dada en el Capítulo 5.

Definición 6.1: Sea $[x_r(t), y_r(t)]^T$ una trayectoria espacial cuatro veces derivable que verifica (6.1) para $F=F_r(t)$ y $\tau=\tau_r(t)$. Se dice que dicha trayectoria es dominable si en cualquier tiempo t se cumple que $|F_r(t)| > \varepsilon$ y además existen cuatro combinaciones posibles de la fuerza y el momento disponibles (F_i, τ_i) , (F_j, τ_j) , (F_k, τ_k) , y (F_l, τ_l) tales que:

$$\begin{aligned}
|F_r(t)| &< F_i, \quad |\tau_r(t)| < \tau_i \\
|F_r(t)| &< F_j, \quad |\tau_r(t)| < -\tau_j \\
|F_r(t)| &< -F_k, \quad |\tau_r(t)| < \tau_k \\
|F_r(t)| &< -F_l, \quad |\tau_r(t)| < -\tau_l
\end{aligned} \tag{6.3}$$

La definición anterior implica que una trayectoria es dominable si la fuerza no se anula y además siempre es posible escoger (según algún criterio de selección como puede ser la Tabla 4.2) una fuerza que domine sobre F_r y un par que domine sobre τ_r sea cual sea la combinación de signos de F_i y τ_i .

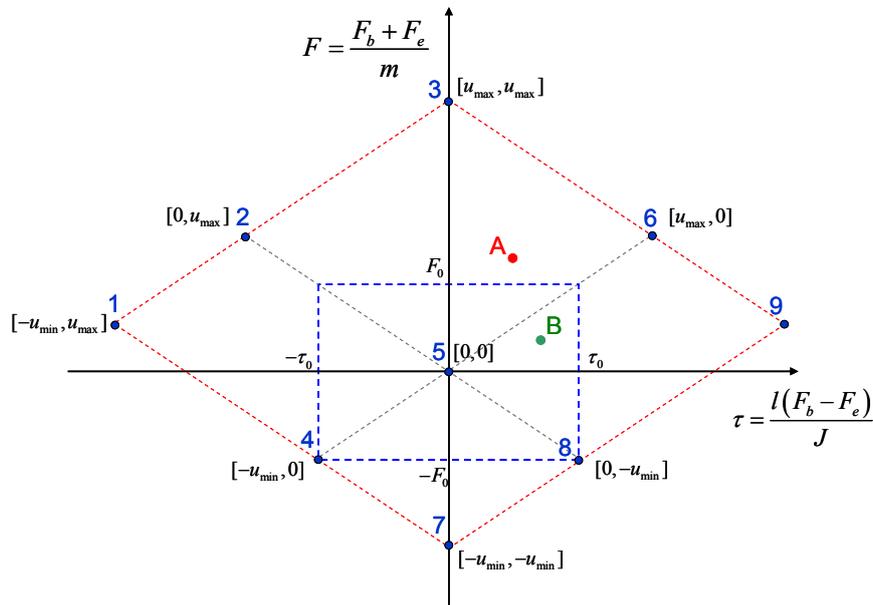


Figura 6.1. Región de fuerzas y momentos dominables. Los puntos azules muestran los valores de las fuerza y momentos aplicables.

Esta condición se cumple si F_r no se anula en toda la trayectoria y además la fuerza y el momento se encuentran “rodeados” por fuerzas y momentos aplicables de acuerdo con la Figura 6.1. Nótese que la simetría en la región se debe a que cualquier trayectoria puede ser seguida hacia delante o hacia atrás. Nótese además que la región dominable es un subconjunto de la región factible si las señales de control fueran continuas (región roja de la Figura 6.1).

Por ejemplo, el punto B es dominable ya que los puntos 2, 4, 6 y 8, verifican las desigualdades (5.14), sin embargo el punto A no es dominable ya que si se quiere hacer que $|F_a| < -F_i$ entonces necesariamente $i=7$ pero entonces $\tau_r=0$ y por tanto no es mayor que $|\tau_a|$.

6.2. Objetivos de control.

Dado el sistema dinámico

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_x \\
 \dot{y} &= v_y \\
 \dot{v}_x &= F \cos(\psi) - d_u v_x + p_{vx} \\
 \dot{v}_y &= F \sin(\psi) - d_u v_y + p_{vy} \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \tau - d_r r + p_r
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Que representa un aerodeslizador subactuado en presencia un vector de perturbaciones $\mathbf{p}=[p_{vx}, p_{vy}, p_r]^T$, donde además las variables se encuentran afectadas por un error en la medida \mathbf{n} :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (6.5)$$

Siendo \mathbf{p} y su derivada temporal acotados por p_{max} y \mathbf{n} acotado por n_{max} , esto es:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{p}\| &\leq p_{max} \\ \sup_{t \geq 0} \left\| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\| &\leq p_{max} \\ \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{n}\| &\leq n_{max} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Definiendo el error de seguimiento espacial $\mathbf{e}_p=[x-x_r, y-y_r, v_x-v_{xr}, v_y-v_{yr}]^T$. El objetivo del capítulo es encontrar una ley de control por realimentación que partiendo de un error inicial acotado $\|\mathbf{e}_p\| < M$ y usando entradas de control discretas que cumplan la restricción (4.2) haga que:

- I El error de seguimiento espacial \mathbf{e}_p sea finalmente acotado. Esto es, que la trayectoria del aerodeslizador converja a un entorno de la trayectoria espacial deseada.
- II Si el error y las perturbaciones fuesen nulas el error de seguimiento pueda hacerse arbitrariamente pequeño.
- III La cota M pueda hacerse arbitrariamente grande si el p_{max} , n_{max} son suficientemente pequeños mediante una elección adecuada de los parámetros del controlador.

6.3. Diseño del control

En esta sección se procede a diseñar una ley de control que resuelva el problema planteado en el punto anterior. Para ello se comienza con un planteamiento general y a continuación se analiza cada uno de los subproblemas de control.

6.3.1. Planteamiento general

El control del aerodeslizador se descompondrá en dos etapas en cascada como ya sucedía en el Capítulo 5. El lazo externo calculará el signo de la fuerza F a aplicar y la referencia para la orientación ψ_c y la velocidad angular r_c a partir de la trayectoria del aerodeslizador y las referencias.

Por otra parte, el lazo interno admitirá como entradas ψ y r así como las referencias generadas por el bloque anterior ψ_c y r_c produciendo como salida el signo de momento τ que debe aplicarse para seguir la trayectoria tal como muestra la Figura 6.2.

Finalmente, conocidos los signos de la fuerza F y del momento τ se obtendrán las fuerzas efectivas F_s y F_b que deben de ser aplicadas al aerodeslizador mediante un esquema de elección (en este caso el de la Tabla 4.2).

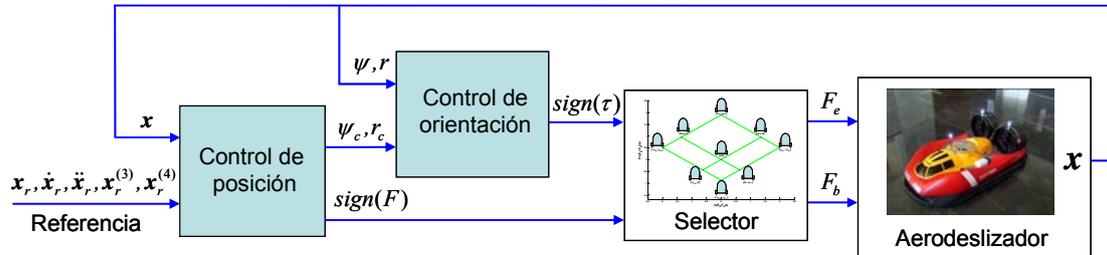


Figura 6.2. Esquema de control en cascada para el seguimiento de trayectoria.

6.3.2. Control de posición

El objetivo de la ley de control de posición es llevar la trayectoria del aerodeslizador cuya dinámica es descrita por el sistema (6.4) hacia una trayectoria espacial $[x_r(t), y_r(t)]^T$. Para ello se comienza definiendo las siguientes variables de error:

$$\begin{aligned} e_x &= x - x_r \\ e_y &= y - y_r \\ e_{vx} &= v_x - v_{xr} \\ e_{vy} &= v_y - v_{yr} \end{aligned} \quad (6.7)$$

La ley de control debe estabilizar las variables de error (6.7) en el origen. Calculando la dinámica de dichas variables de error de acuerdo a (6.4) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= e_{vx} \\ \dot{e}_y &= e_{vy} \\ \dot{e}_{vx} &= F \cos(\psi) - d_u e_{vx} - F_{xr} + p_{vx} \\ \dot{e}_{vy} &= F \sin(\psi) - d_u e_{vy} - F_{yr} + p_{vy} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Con el fin de estabilizar las variables de error se introduce la constante positiva de control k_I y se definen las nuevas variables s_x y s_y como sigue.

$$\begin{aligned} s_x &= e_x + k_I e_{vx} \\ s_y &= e_y + k_I e_{vy} \end{aligned} \quad (6.9)$$

La motivación de esta definición es simple, si las variables s_x y s_y fuesen nulas entonces de acuerdo con su definición la derivada de e_x sería $-e_x/k_I$ y la derivada de e_y sería $-e_y/k_I$ lo que implicaría automáticamente que e_x y e_y tienden exponencialmente a cero.

De acuerdo con la definición (6.9) la dinámica de las variables s_x y s_y viene dada por:

$$\begin{aligned}\dot{s}_x &= e_{vx} + k_1 \dot{e}_{vx} = k_1 F \cos(\psi) + (1 - d_u k_1) e_{vx} - k_1 F_{xr} + k_1 p_{vx} \\ \dot{s}_y &= e_{vy} + k_1 \dot{e}_{vy} = k_1 F \sin(\psi) + (1 - d_u k_1) e_{vy} - k_1 F_{yr} + k_1 p_{vy}\end{aligned}\quad (6.10)$$

El problema de las variables s_x y s_y es que la fuerza de control F aparece al mismo tiempo en ambas expresiones, por lo que no resulta claro como elegir el valor de dicha fuerza para conseguir llevar ambas variables a cero.

Para salvar esta dificultad se expresan las componentes del vector $s = [s_x, s_y]^T$ en el sistema de referencia anclado al aerodeslizador (ejes cuerpo). La expresión de dichas variables viene entonces dada por:

$$\begin{aligned}z_1 &= s_x \cos(\psi) + s_y \sin(\psi) \\ z_2 &= -s_x \sin(\psi) + s_y \cos(\psi)\end{aligned}\quad (6.11)$$

Esto significa que las variables z_1 y z_2 se obtienen mediante una rotación de ángulo ψ aplicada a las componentes s_x y s_y . De este modo el vector $z = [z_1, z_2]^T$ es el vector s expresado en una base distinta tal como se muestra en la Figura 6.3

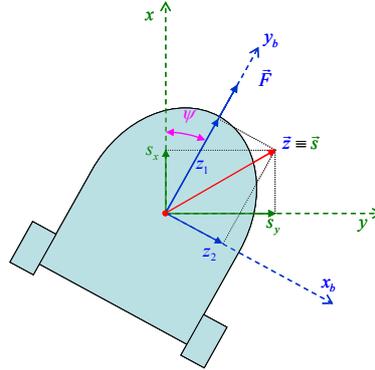


Figura 6.3. Vectores s y z . Las variables z_1 y z_2 son las componentes del vector s expresado en ejes cuerpo, mientras que las variables s_x y s_y son las componentes del mismo vector en el sistema inercial.

Para poder controlar z_1 y z_2 (que equivale a controlar s_x y s_y) es necesario en primer lugar calcular la dinámica de dichas variables. Para ello se comienza calculando la derivada temporal de z_1 .

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{s}_x \cos(\psi) + \dot{s}_y \sin(\psi) - s_x \sin(\psi)r + s_y \cos(\psi)r = \\ &= \dot{s}_x \cos(\psi) + \dot{s}_y \sin(\psi) + z_2 r = \\ &= z_2 r + k_1 F \cos(\psi)^2 + (1 - d_u k_1) e_{vx} \cos(\psi) - k_1 (F_{xr} - p_{vx}) \cos(\psi) + \\ &\quad + k_1 F \sin(\psi)^2 + (1 - d_u k_1) e_{vy} \sin(\psi) - k_1 (F_{yr} - p_{vy}) \sin(\psi) = \\ &= k_1 F + z_2 r + (1 - d_u k_1) (e_{vx} \cos(\psi) + e_{vy} \sin(\psi)) - \\ &\quad - k_1 ((F_{yr} - p_{vy}) \sin(\psi) + (F_{xr} - p_{vx}) \cos(\psi))\end{aligned}\quad (6.12)$$

Y usando el mismo procedimiento calculan las derivadas de z_2 .

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_2 &= -\dot{s}_x \sin(\psi) + \dot{s}_y \cos(\psi) - s_x \cos(\psi)r - s_y \sin(\psi)r = \\
 &= -\dot{s}_x \sin(\psi) + \dot{s}_y \cos(\psi) - z_1 r = \\
 &= -z_1 r - k_1 F \cos(\psi) \sin(\psi) - (1 - d_u k_1) e_{vx} \sin(\psi) + k_1 (F_{xr} - p_{vx}) \sin(\psi) + \\
 &\quad + k_1 F \sin(\psi) \cos(\psi) + (1 - d_u k_1) e_{vy} \cos(\psi) - k_1 (F_{yr} - p_{vy}) \cos(\psi) = \quad (6.13) \\
 &= -z_1 r + (1 - d_u k_1) (-e_{vx} \sin(\psi) + e_{vy} \cos(\psi)) + \\
 &\quad + k_1 ((F_{xr} - p_{vx}) \sin(\psi) - (F_{yr} - p_{vy}) \cos(\psi))
 \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden simplificarse si se utiliza la definición de ψ_r (ver Capítulo 5):

$$\left. \begin{aligned} F_{xr} &= F_r \sin(\psi_r) \\ F_{yr} &= F_r \cos(\psi_r) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\psi_r) = \frac{F_{yr}}{\sqrt{F_{xr}^2 + F_{yr}^2}} = \frac{F_{yr}}{F_r} \\ \cos(\psi_r) = \frac{F_{xr}}{\sqrt{F_{xr}^2 + F_{yr}^2}} = \frac{F_{xr}}{F_r} \end{cases} \quad (6.14)$$

De tal forma que $\sin(\psi)$ y $\cos(\psi)$ pueden expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}
 \sin(\psi) &= \sin(\psi_r + (\psi - \psi_r)) = \sin(\psi_r) \cos(\psi - \psi_r) + \cos(\psi_r) \sin(\psi - \psi_r) = \\
 &= \frac{F_{yr} \cos(\psi - \psi_r) + F_{xr} \sin(\psi - \psi_r)}{F_r} \\
 \cos(\psi) &= \cos(\psi_r + (\psi - \psi_r)) = \cos(\psi_r) \cos(\psi - \psi_r) - \sin(\psi_r) \sin(\psi - \psi_r) = \\
 &= \frac{F_{xr} \cos(\psi - \psi_r) - F_{yr} \sin(\psi - \psi_r)}{F_r} \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

Utilizando un poco de trigonometría se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 F_{xr} \sin(\psi) - F_{yr} \cos(\psi) &= \frac{F_{xr}^2 + F_{yr}^2}{F_r} \sin(\psi - \psi_r) = F_r \sin(\psi - \psi_r) \\
 F_{yr} \sin(\psi) + F_{xr} \cos(\psi) &= \frac{F_{yr}^2 + F_{xr}^2}{F_r} \cos(\psi - \psi_r) = F_r \cos(\psi - \psi_r) \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Expresando el vector de perturbaciones $\mathbf{p} = [p_x, p_y]^T$ en el sistema de ejes cuerpo se definen las variables p_1 y p_2 :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_{vx} \cos(\psi) + p_{vy} \sin(\psi) \\
 p_2 &= -p_{vx} \sin(\psi) + p_{vy} \cos(\psi) \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

Substituyendo entonces (6.16) y (6.17) en (6.12) y (6.13) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= k_1 F - k_1 F_r \cos(\psi - \psi_r) + z_2 r + (1 - d_u k_1)(e_{vx} \cos(\psi) + e_{vy} \sin(\psi)) + k_1 p_1 \\ \dot{z}_2 &= k_1 F_r \sin(\psi - \psi_r) - z_1 r + (1 - d_u k_1)(-e_{vx} \sin(\psi) + e_{vy} \cos(\psi)) + k_1 p_2\end{aligned}\quad (6.18)$$

Donde:

$$\| [p_1, p_2]^T \| = \| \mathbf{p} \| \leq p_{\max} \quad (6.19)$$

La expresión (6.18) es más adecuada para el diseño del control que la expresión (6.10) ya que en este caso la fuerza de control F aparece en la dinámica de la variable z_1 pero no en la de z_2 . Esto sugiere que para estabilizar z_1 deberá escogerse un valor de F de tal forma que su signo sea opuesto al de z_1 . Por tanto se plantea la siguiente ley de control:

$$\text{sign}(F) = \begin{cases} -\text{sign}(z_1) & \text{si } |z_1| \geq \varepsilon \\ \text{sign}(F^-) & \text{si } |z_1| < \varepsilon \end{cases} \quad (6.20)$$

En realidad la ecuación (6.20) no indica cual es el valor de F que debe aplicarse sino solamente su signo. El valor de F deberá seleccionarse de entre los valores de la Tabla 4.2 una vez que se conozca el signo de τ .

Por otra parte, para controlar la variable z_2 se dispone únicamente del ángulo ψ . Puesto que el valor de ψ_r se encuentra fijado por la trayectoria, entonces ψ debería escogerse de tal manera que $F_r \sin(\psi - \psi_r)$ tuviese el signo opuesto a z_2 . Este objetivo puede cumplirse si ψ sigue la referencia ψ_c definida como:

$$\psi_c = \psi_r - k_2 \tanh(z_2) \text{sign}(F_r) \quad (6.21)$$

Para una constante k_2 positiva menor que $\pi/2$, ya que si $\psi \neq \psi_c$ entonces:

$$F_r \sin(\psi - \psi_r) = F_r \sin(-k_2 \tanh(z_2) \text{sign}(F_r)) = -|F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) \quad (6.22)$$

Y puesto que k_2 es menor que $\pi/2$ entonces $\sin(k_2 \tanh(z_2))$ tiene el mismo signo que z_2 .

En general ψ será distinto de ψ_c por lo que para tener en cuenta el efecto de dicha variable sobre el error se define la variable w como sigue:

$$F_r w = F_r \sin(\psi - \psi_r) + |F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) \quad (6.23)$$

De este modo:

$$\begin{aligned}F_r w &= F_r \sin(\psi - \psi_r) + |F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) = \\ &= F_r \sin(\psi_c + (\psi - \psi_c) - \psi_r) + |F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) = \\ &= F_r \sin(-k_2 \tanh(z_2) \text{sign}(F_r) + (\psi - \psi_c)) + |F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2))\end{aligned}\quad (6.24)$$

Y por tanto de acuerdo con el teorema del valor medio existe un ξ tal que:

$$\begin{aligned}
F_r w &= F_r \sin(-k_2 \tanh(z_2) \text{sign}(F_r)) + F_r \cos(\xi)(\psi - \psi_c) + \\
&+ |F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) = \\
&= -|F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) + F_r \cos(\xi)(\psi - \psi_c) + |F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) \\
&= F_r \cos(\xi)(\psi - \psi_c)
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Lo que implica que la variable w puede acotarse fácilmente como:

$$|w| \leq |\psi - \psi_c| \tag{6.26}$$

Con lo que finalmente la dinámica de z_1 y z_2 se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= k_1 F - k_1 F_r \cos(\psi - \psi_r) + z_2 r + (1 - d_u k_1)(e_{vx} \cos(\psi) + e_{vy} \sin(\psi)) + k_1 p_1 \\
\dot{z}_2 &= -k_1 |F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) - z_1 r + (1 - d_u k_1)(e_{vy} \cos(\psi) - e_{vx} \sin(\psi)) + k_1 F_r w + k_1 p_2
\end{aligned} \tag{6.27}$$

La ecuación (6.27) indica que w se comporta como una perturbación que actúa sobre la dinámica de z .

6.3.3. Control de orientación

La ecuación (6.21) establece una orientación de referencia que el aerodeslizador debe seguir para estabilizar las variables z_1 y z_2 y con ellas el error de posición. El objetivo de este apartado es diseñar una ley de control que empleando τ como acción de control haga que ψ converja hacia la referencia ψ_c .

Para lograr este objetivo se definen las variables de error como sigue:

$$\begin{aligned}
e_\psi &= \psi - \psi_c \\
e_r &= r - \dot{\psi}_c
\end{aligned} \tag{6.28}$$

La definición de las variables de error es muy similar a la realizada en (6.7), no obstante cabe destacar la diferencia entre ambas expresiones ya que en este caso se usa como referencia ψ_c y no ψ_r .

De esta forma, de acuerdo con (6.28) la dinámica del error de orientación viene descrita por:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_\psi &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_c = r - \dot{\psi}_c = \dot{e}_r \\
\dot{e}_r &= \dot{r} - \ddot{\psi}_c = \tau - d_r r + p_r - \ddot{\psi}_c \\
&= \tau - d_r e_r - d_r \dot{\psi}_c - \ddot{\psi}_c + p_r = \tau - \tau_c - d_r e_r + p_r
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Donde:

$$\tau_c = d_r \dot{\psi}_c - \ddot{\psi}_c \tag{6.30}$$

Del mismo modo que se hizo en (6.9) se define la variable de error s_ψ :

$$s_\psi = e_\psi + k_3 e_r \quad (6.31)$$

La motivación de dicha definición es similar a la del apartado anterior. Si s_ψ se anula entonces e_ψ y e_r tienden exponencialmente a cero ya que:

$$s_\psi = 0 \rightarrow e_\psi = -k_3 e_r = -k_3 \dot{e}_\psi \rightarrow \dot{e}_\psi = -\frac{1}{k_3} e_\psi \quad (6.32)$$

Calculando la dinámica s_ψ se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{s}_\psi &= \dot{e}_\psi + k_3 \dot{e}_r = e_r + k_3 (\tau - \tau_c - d_r e_r + p_r) \\ &= k_3 (\tau - \tau_c + p_r) + (1 - k_3 d_r) e_r \end{aligned} \quad (6.33)$$

Si τ se escoge de forma que su signo sea el opuesto a s_ψ , entonces s_ψ converge siempre y cuando τ pueda dominar sobre el resto de los términos de (6.33).

Para comprobar cuando esto sucede es necesario disponer de una cota del valor de τ_c . Por ello es preciso calcular las derivadas de la referencia ψ_c :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_c &= \dot{\psi}_r - k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(z_2)) \dot{z}_2 \\ \ddot{\psi}_c &= \ddot{\psi}_r - 2k_2 \text{sign}(F_r) \tanh(z_2) (1 - \tanh^2(z_2)) (\dot{z}_2)^2 - k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(z_2)) \ddot{z}_2 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Y por lo tanto:

$$\tau_c = d_r \dot{\psi}_c + \ddot{\psi}_c = \tau_r - k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(z_2)) (d_r \dot{z}_2 + 2 \tanh(z_2) (\dot{z}_2)^2 + \ddot{z}_2) \quad (6.35)$$

De este modo si z y sus derivadas son acotadas y τ_r no es demasiado grande, entonces escogiendo adecuadamente k_2 parece razonable que τ domine sobre τ_c y por tanto e_ψ converja.

Para lograr estabilizar s_ψ se propone entonces la siguiente ley de control:

$$\text{sign}(\tau) = \begin{cases} -\text{sign}(s_\psi) & \text{si } |s_\psi| \geq \varepsilon \\ \text{sign}(\tau^-) & \text{si } |s_\psi| < \varepsilon \end{cases} \quad (6.36)$$

Esta selección del signo de τ garantiza que para $|s_\psi| > \varepsilon$ el signo de τ se opone al signo de s_ψ y además ε evita que τ oscile infinitamente rápido.

Las ecuaciones de control (6.20) y (6.36) establecen el signo de F y τ . Una vez fijados estos signos siempre es posible seleccionar los valores exactos de la fuerzas F_s y F_e que producen los signos necesarios de entre los valores de la Tabla 4.1. Una posible elección de dichas fuerzas es la que se muestra en la Tabla 4.2.

6.3.4. Efecto del ruido y las perturbaciones

Las leyes de control planteadas en el apartado anterior se basan en un conocimiento exacto de las variables de estado. Si la medida contiene un cierto nivel de ruido en cada una de las variables, se está introduciendo un error en el cálculo de las variables s que finalmente se propaga a las variables z .

El objetivo de este apartado consiste en ver como se propaga el error en la medida hacia el cálculo del control. A lo largo de la sección se denotan con tilde las variables medidas (esto es, bajo el ruido en la medida (6.5)) y sin tilde las variables reales.

En primer lugar se considera el efecto del ruido en el cálculo de las variables s_x y s_y :

$$\begin{aligned}\hat{s}_x &= \hat{e}_x + k_1 \hat{e}_{vx} = e_x + k_1 e_{vx} + n_x + k_1 n_{vx} = s_x + n_x + k_1 n_{vx} \\ \hat{s}_y &= s_y + n_y + k_1 n_{vy}\end{aligned}\quad (6.37)$$

Si ahora se propaga el efecto a z_1 se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{z}_1 &= \hat{s}_x \cos(\hat{\psi}) + \hat{s}_y \sin(\hat{\psi}) = \\ &= s_x \cos(\hat{\psi}) + s_y \sin(\hat{\psi}) + (n_x + k_1 n_{vx}) \cos(\hat{\psi}) + (n_y + k_1 n_{vy}) \sin(\hat{\psi}) = \\ &= s_x \cos(\psi) + s_y \sin(\psi) + s_x (\cos(\hat{\psi}) - \cos(\psi)) + s_y (\sin(\hat{\psi}) - \sin(\psi)) + \\ &\quad + (n_x + k_1 n_{vx}) \cos(\hat{\psi}) + (n_y + k_1 n_{vy}) \sin(\hat{\psi}) \\ &= z_1 + n_1\end{aligned}\quad (6.38)$$

Donde:

$$\begin{aligned}n_1 &= s_x (\cos(\psi + n_\psi) - \cos(\psi)) + s_y (\sin(\psi + n_\psi) - \sin(\psi)) + \\ &\quad + (n_x + k_1 n_{vx}) \cos(\hat{\psi}) + (n_y + k_1 n_{vy}) \sin(\hat{\psi})\end{aligned}\quad (6.39)$$

Usando el teorema del valor medio existe un ξ tal que:

$$\begin{aligned}n_1 &= -s_x \sin(\xi) n_\psi + s_y \cos(\xi) n_\psi + \\ &\quad + (n_x + k_1 n_{vx}) \cos(\hat{\psi}) + (n_y + k_1 n_{vy}) \sin(\hat{\psi})\end{aligned}\quad (6.40)$$

Lo que permite obtener la expresión

$$\begin{aligned}|n_1| &\leq \left| -s_x \sin(\xi) + s_y \cos(\xi) \right| n_{\max} + \\ &\quad + (1 + k_1) n_{\max} (|\cos(\hat{\psi})| + |\sin(\hat{\psi})|) = \\ &= \|s\| n_{\max} + \sqrt{2} (1 + k_1) n_{\max} = \left(\|z\| + \sqrt{2} (1 + k_1) \right) n_{\max}\end{aligned}\quad (6.41)$$

Nótese que $-s_x \sin(\xi) + s_y \cos(\xi)$ es la componente del vector $s = [s_x, s_y]^T$ rotada un ángulo ξ y por ello puede acotarse por $\|s\|$ o lo que es lo mismo, por $\|z\|$.

Un cálculo completamente análogo puede llevarse a cabo con z_2 obteniendo finalmente:

$$\begin{aligned}\hat{z}_1 &= z_1 + n_1 \\ \hat{z}_2 &= z_2 + n_2 \\ |n_1|, |n_2| &\leq \left(\|z\| + \sqrt{2} (1 + k_1) \right) n_{\max}\end{aligned}\quad (6.42)$$

Por otra parte el error en la medida también afecta al cálculo de ψ_c ya que:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_c &= \psi_r - k_2 \text{sign}(F_r) \tanh(\hat{z}_2) = \\ &= \psi_r - k_2 \text{sign}(F_r) \tanh(z_2) + k_2 \text{sign}(F_r) (\tanh(z_2) - \tanh(\hat{z}_2)) = \\ &= \psi_c + n_c \\ n_c &= k_2 \text{sign}(F_r) (\tanh(z_2) - \tanh(\hat{z}_2))\end{aligned}\quad (6.43)$$

El valor de n_c puede acotarse fácilmente con ayuda del teorema del valor medio:

$$\begin{aligned}n_c &= k_2 \text{sign}(F_r) (\tanh(z_2) - \tanh(\hat{z}_2)) = \\ &= k_2 \text{sign}(F_r) (\tanh(z_2) - \tanh(z_2 + n_2)) = \\ &= -k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(\xi)) n_2 \\ |n_c| &\leq k_2 |1 - \tanh^2(\xi)| |n_2| = k_2 |n_2|\end{aligned}\quad (6.44)$$

Para calcular la derivada de ψ_c y por lo tanto e_ψ se necesita evaluar la derivada de z_2 , no obstante la expresión (6.18) depende del error en la medida p que es desconocido. Esto significa que el z_2 que realmente se está calculando es:

$$\begin{aligned}\hat{z}_2 &= k_1 F_r \sin(\hat{\psi} - \psi_r) - \hat{z}_1 \hat{r} + (1 - d_u k_1) (-\hat{e}_{vx} \sin(\psi) + \hat{e}_{vy} \cos(\psi)) = \\ &= k_1 F_r \sin(\psi + n_\psi - \psi_r) - (z_1 + n_1)(r + n_r) - \\ &\quad - (1 - d_u k_1) \sin(\psi + n_\psi) (e_{vx} + n_{vx}) + \\ &\quad + (1 - d_u k_1) \cos(\psi + n_\psi) (e_{vy} + n_{vy})\end{aligned}\quad (6.45)$$

Aplicando de nuevo el teorema del valor medio existen unos valores ξ_1 y ξ_2 tales que:

$$\begin{aligned}\hat{z}_2 &= k_1 F_r \sin(\psi + n_\psi - \psi_r) - \hat{z}_1 (r + n_r) + \\ &\quad + (1 - d_u k_1) (- (e_{vx} + n_{vx}) \sin(\psi + n_\psi) + (e_{vy} + n_{vy}) \cos(\psi + n_\psi)) = \\ &= k_1 F_r \sin(\psi - \psi_r) - z_1 r + (1 - d_u k_1) (-e_{vx} \sin(\psi) + e_{vy} \cos(\psi)) + \\ &\quad + (k_1 F_r \cos(\xi_1) + (1 - d_u k_1) (-e_{vx} \cos(\xi_1) - e_{vy} \cos(\xi_1))) n_\psi + (r + n_r) n_1 \\ &\quad - (1 - d_u k_1) e_{vx} \sin(\xi_2) n_{vx} + (1 - d_u k_1) e_{vy} \cos(\xi_2) n_{vy} \\ &= \dot{z}_2 - k_1 p_2 + f\end{aligned}\quad (6.46)$$

Y puesto que todos los términos que contienen componentes de \mathbf{n} pueden acotarse como ya se hizo en (6.41) entonces:

$$|f| \leq \left(k_1 |F_r| + 2\sqrt{2} |1 - d_u k_1| \sqrt{e_{vx}^2 + e_{vy}^2} + |r| + n_{\max} \right) n_{\max} \quad (6.47)$$

Una vez estimado el error en la derivada de z_2 es posible propagarlo a la derivada de ψ_c como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_c &= \dot{\psi}_r - k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(\hat{z}_2)) \hat{z}_2 = \\ &= \dot{\psi}_r - k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(\hat{z}_2)) \dot{z}_2 + \\ &\quad + k_2 \text{sign}(F_r) \left((1 - \tanh^2(\hat{z}_2)) \hat{z}_2 - (1 - \tanh^2(z_2)) \dot{z}_2 \right) = \\ &= \dot{\psi}_r + f_2 \\ f_2 &= k_2 \text{sign}(F_r) \left((1 - \tanh^2(z_2 + n_2)) \hat{z}_2 - (1 - \tanh^2(z_2)) \dot{z}_2 \right) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Y usando una vez más el teorema del valor medio para acotar f_2 :

$$\begin{aligned} f_2 &= k_2 \text{sign}(F_r) \left((1 - \tanh^2(z_2 + n_2)) (\dot{z}_2 - k_1 p_2 + f) - (1 - \tanh^2(z_2)) \dot{z}_2 \right) = \\ &= k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(z_2 + n_2)) (k_1 p_2 + f) + \\ &\quad + k_2 \text{sign}(F_r) \dot{z}_2 \left(-\tanh^2(z_2 + n_2) + \tanh^2(z_2) \right) = \\ &= k_2 \text{sign}(F_r) (1 - \tanh^2(z_2 + n_2)) (k_1 p_2 + f) - \\ &\quad - k_2 \text{sign}(F_r) \dot{z}_2 2 \tanh(\xi) (1 - \tanh^2(\xi)) n_2 \\ |f_2| &\leq k_2 \left(k_1 p_{\max} + |f| + |\dot{z}_2| |n_2| \right) \end{aligned} \quad (6.49)$$

De tal forma que:

$$\begin{aligned} \hat{e}_\psi &= \hat{\psi} - \hat{\psi}_c = \psi + n_\psi - \psi_c + (\psi_c - \hat{\psi}_c) \\ &= e_\psi + n_\psi - n_c \end{aligned} \quad (6.50)$$

Y además:

$$\hat{e}_r = \hat{r} - \hat{\psi}_c = r + n_r - (\dot{\psi}_r + f_2) = e_r + n_r - f_2 \quad (6.51)$$

Por lo que finalmente se concluye que el efecto del ruido de la medida y la perturbación no medible sobre s_ψ es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{s}_\psi &= \hat{e}_\psi + k_3 \hat{e}_r = e_\psi + n_\psi - n_c + k_3 (e_r + n_r - n_{cr}) = \\ &= s_\psi + f_3 \\ f_3 &= n_\psi - n_c + k_3 n_r - k_3 f_2 \end{aligned} \quad (6.52)$$

Donde f_3 puede acotarse mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
|f_3| &\leq |n_\psi| + |n_c| + k_3 |n_r| + k_3 |f_2| \leq \\
&\leq n_{\max} + k_2 |n_2| + k_3 n_{\max} + k_3 k_2 (k_1 p_{\max} + |f| + |\dot{z}_2| |n_2|) \leq \\
&\leq n_{\max} + (1 + k_3 |\dot{z}_2|) |n_2| + k_3 n_{\max} + k_3 k_2 (k_1 p_{\max} + |f|) \leq \\
&\leq n_{\max} + k_2 (1 + k_3 |\dot{z}_2|) (\|z\| + \sqrt{2} (1 + k_1)) n_{\max} + k_3 n_{\max} + \\
&\quad + k_3 k_2 \left(k_1 p_{\max} + \left(k_1 |F_r| + 2\sqrt{2} |1 - d_u k_1| \sqrt{e_{vx}^2 + e_{vy}^2} + |r| + n_{\max} \right) n_{\max} \right) \leq \\
&\leq n_3 + k_3 k_2 k_1 p_{\max}
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
n_3 &= \left(1 + k_3 + k_2 (1 + k_3 |\dot{z}_2|) (\|z\| + \sqrt{2} (1 + k_1)) + k_1 |F_r| + \right. \\
&\quad \left. + 2\sqrt{2} |1 - d_u k_1| \sqrt{e_{vx}^2 + e_{vy}^2} + |r| + n_{\max} \right) n_{\max}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Después de este laborioso cálculo se está en condiciones de estudiar el efecto del ruido y las perturbaciones sobre la ley de control. Debido a dicho ruido y perturbaciones los valores de la ley de control que realmente se calculan son:

$$\begin{aligned}
\text{sign}(F) &= \begin{cases} -\text{sign}(\hat{z}_1) & \text{si } |\hat{z}_1| \geq \varepsilon \\ \text{sign}(F^-) & \text{si } |\hat{z}_1| < \varepsilon \end{cases} \\
\text{sign}(\tau) &= \begin{cases} -\text{sign}(\hat{s}_\psi) & \text{si } |\hat{s}_\psi| \geq \varepsilon \\ \text{sign}(\tau^-) & \text{si } |\hat{s}_\psi| < \varepsilon \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Asumiendo que los términos en (6.54) permanezcan acotados, la ley de control (6.55) produce los mismos valores que las leyes de control (6.20) y (6.36) siempre y cuando z_2 y s_ψ sean suficientemente grandes y n_{\max} y p_{\max} suficientemente pequeños:

$$\begin{aligned}
|z_1| \geq \varepsilon + n_1 &\rightarrow \begin{cases} |\hat{z}_1| = |z_1 + n_1| \geq \varepsilon \\ \text{sign}(\hat{z}_2) = \text{sign}(z_1 + n_1) = \text{sign}(z_1) \end{cases} \\
|s_\psi| \geq \varepsilon + n_3 + k_1 k_2 k_3 p_{\max} &\rightarrow \begin{cases} |\hat{s}_\psi| = |s_\psi + f_3| \geq \varepsilon \\ \text{sign}(\hat{s}_\psi) = \text{sign}(s_\psi + f_3) = \text{sign}(s_\psi) \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.56}$$

6.4. Estabilidad

El análisis de estabilidad se realiza en tres partes, en primer lugar se muestra que es posible estabilizar la posición del vehículo siempre y cuando el error de orientación sea pequeño. A continuación se ve como es posible estabilizar el error de orientación cuando el error de posición es acotado. Finalmente se unen ambos resultados demostrando la estabilidad del conjunto.

En primer lugar cabe hacer una observación importante: dado que las entradas de control así como las perturbaciones son acotadas, entonces e_{vx} y e_{vy} son de acuerdo con (6.8) global finalmente acotados. Lo mismo ocurre con la velocidad angular r como se comprueba a continuación.

Lema 6.1. Para cualquier señal de control $F_s(t)$, $F_e(t)$ que cumplan la restricción (4.2) las soluciones del sistema (6.4) mantienen e_{vx} , e_{vy} y r global finalmente acotadas.

Demostración: En primer lugar, es claro a partir de (4.2) que la fuerza F y el momento τ están acotados por F_m y t_m respectivamente, en particular:

$$\begin{aligned} |F| &= \left| \frac{F_b + F_e}{m} \right| \leq \left| \frac{\max(u_{\min}, u_{\max}) + \max(u_{\min}, u_{\max})}{m} \right| = \frac{2 \max(u_{\min}, u_{\max})}{m} \equiv F_m \\ |\tau| &= \left| \frac{l(F_b - F_e)}{J} \right| \leq \left| \frac{l(u_{\max} - (-u_{\min}))}{J} \right| = l \frac{u_{\max} + u_{\min}}{J} \equiv \tau_m \end{aligned} \quad (6.57)$$

Si se definen entonces las siguientes funciones:

$$L_1 = \frac{e_{vx}^2}{2}; \quad L_2 = \frac{e_{vy}^2}{2}; \quad L_3 = \frac{r^2}{2} \quad (6.58)$$

Y se toman las derivadas de las mismas a lo largo de la trayectoria (derivadas de Lie) y teniendo en cuenta (4.10) y que $\|p\| < p_{max}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= -e_{vx} (d_u e_{vx} - F \cos(\psi) - F_{xr} - p_{xr}) \\ &\leq -|e_{vx}| (|d_u e_{vx}| - |F| - |F_{xr}| + p_{max}) \\ &\leq -|e_{vx}| (|d_u e_{vx}| - 2F_{max} - p_{max}) \\ \dot{L}_2 &\leq -|e_{vy}| (|d_u e_{vy}| - 2F_{max} - p_{max}) \\ \dot{L}_3 &= -r (d_r r - \tau - p_r) \leq -|r| (|d_r r| - \tau_{max} + p_{max}) \end{aligned} \quad (6.59)$$

Las funciones L_i pueden ser vistas como funciones de Lyapunov para la dinámica de cada una de las velocidades. Fijándose primero en L_1 :

La ecuación (4.12) muestra que la derivada temporal de L_1 es estrictamente negativa siempre que $d_u v_x > (1+\varepsilon)(F_{max} + p_{max})$, siendo ε cualquier constante positiva. Por otra parte la función L_1 toma el valor máximo en la frontera de dicha región $L_{1m} = ((1+\varepsilon)(F_{max} + p_{max})/d_u)^2/2$. Puesto que la función L_1 es estrictamente decreciente para $L_1 > L_{1m}$, se deduce que transcurrido un tiempo finito T , entonces $L_1(T) = L_{1m}$. Luego para $t > T$ entonces $d_u v_x < (1+\varepsilon)(F_{max} + p_{max})$.

Repetiendo este razonamiento con las funciones L_2 y L_3 se llega a la conclusión de que los errores en velocidad e_{vx} , e_{vy} son global finalmente acotados por $(1+\varepsilon)(F_{max} + p_{max})/d_u$ y la velocidad angular r es global finalmente acotada por $(1+\varepsilon)(\tau_{max} + p_{max})/d_r$. De este modo, transcurrido un tiempo T suficientemente grande el estado del sistema (6.4) pertenece al conjunto Ω_l .

$$\Omega_1 = \left\{ (x, y, v_x, v_y, \psi, r) : |e_{vx}|, |e_{vy}| \leq \frac{2F_{\max} + p_{\max}}{d_u}, |r| \leq \frac{2\tau_{\max} + p_{\max}}{d_r} \right\} \quad (6.60)$$

■

Como en capítulos anteriores el conocimiento de la cota final del error de velocidad y de la velocidad angular permite simplificar el estudio de la estabilidad.

Proposición 6.1: La estabilidad asintótica del sistema (6.4) puede estudiarse restringiéndose al conjunto $\mathbf{x} \in \Omega_1$.

Demostración: Puesto que el sistema es uniformemente Lipschitz en el estado \mathbf{x} , el estado del sistema no puede escapar a infinito en el tiempo finito. De este modo durante el tiempo T del Lema 4.1 el estado del sistema permanecerá acotado.

Puesto que para $t > T$ el estado cumple que $\mathbf{x}(t) \in \Omega_1$, la estabilidad del sistema solo depende del comportamiento de $\mathbf{x}(t)$ restringido a dicho conjunto ■

6.4.1. Estabilidad de la posición

Para analizar la estabilidad de la posición del aerodeslizador se comienza analizando el comportamiento del vector \mathbf{z} . El siguiente teorema muestra que \mathbf{z} es finalmente acotado si w, p_{\max} y n_{\max} no son demasiado grandes.

Teorema 6.1. Sea el aerodeslizador (6.4) en presencia de ruido en la medida \mathbf{n} y perturbaciones acotadas \mathbf{p} de acuerdo a (6.6). Sea además el vector $\mathbf{z} = [z_1, z_2]^T$ definido por (6.11) y $\mathbf{x}_r(t)$ una trayectoria dominable. Si n_{\max} y p_{\max} son suficientemente pequeños entonces existen unas constantes k_1 y k_2 y w_m y unas función β de clase KL y γ de clase K tales que la ley de control (6.55) cumple:

$$|w| \leq w_m \rightarrow \|\mathbf{z}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{z}(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \quad (6.61)$$

Demostración: De acuerdo con la proposición anterior y sin pérdida de generalidad el estudio de estabilidad puede restringirse al dominio Ω_1 .

En primer lugar, puesto que la trayectoria es dominable, sea cual sea el signo de τ se puede elegir un F_i de tal forma que $|F_i| - |F_r|$ sea positivo. Entonces si p_{\max} es suficientemente pequeño, existirá un δ positivo tal que:

$$|F_i| - |F_r| - p_{\max} \geq \delta \quad (6.62)$$

Por otra parte, dado un positivo ε_1 arbitrariamente pequeño siempre es posible elegir un k_1 tal que:

$$\sqrt{2} \left| \frac{(1-d_u k_1)}{d_u k_1} \right| (2F_{\max} + p_{\max}) \leq \delta \varepsilon_1 \quad (6.63)$$

Esto resulta claro ya que siempre es posible tomar $k_1=1/d_u$. Entonces para cualquier k_2 positivo, puesto que F_r es acotado inferiormente (al ser la trayectoria dominable) si p_{\max} es suficientemente pequeño siempre es posible encontrar un w_m tal que:

$$\sqrt{2} (p_{\max} + \delta \varepsilon_1 + |F_r| w_m) < \min(\delta, |F_r| \sin(k_2)) \quad (6.64)$$

A continuación se define la siguiente función de Lyapunov de control para estudiar la dinámica de las variables de error z_1 y z_2 :

$$V = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2} \quad (6.65)$$

Si se toma la derivada temporal de V a lo largo de la trayectoria solución de (6.4) (derivada de Lie) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 = \\ &= k_1 z_1 (F - F_r \cos(\psi - \psi_r) + p_1) - k_1 z_2 (|F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) - F_r w - p_2) + \\ &\quad + (1 - d_u k_1) (z_1 e_{vx} \cos(\psi) + z_1 e_{vy} \sin(\psi) - z_2 e_{vx} \sin(\psi) + z_2 e_{vy} \cos(\psi)) = \\ &= k_1 z_1 (F - F_r \cos(\psi - \psi_r) + p_1) - k_1 z_2 (|F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) - F_r w - p_2) + \\ &\quad + (1 - d_u k_1) (e_{vx} (z_1 \cos(\psi) - z_2 \sin(\psi)) + e_{vy} (z_1 \sin(\psi) + z_2 \cos(\psi))) = \\ &= k_1 z_1 (F - F_r \cos(\psi - \psi_r) + p_1) - k_1 z_2 (|F_r| \sin(k_2 \tanh(z_2)) - F_r w - p_2) + \\ &\quad + (1 - d_u k_1) (s_1 e_{vx} + s_2 e_{vy}) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Para poder estudiar el signo de la derivada de V , puesto que la ley de control (6.56) se encuentra definida a intervalos, hay que tener en cuenta dos casos:

Caso A) Supóngase inicialmente que $|z_1| > n_1 + \varepsilon$.

De acuerdo con la ley de control (6.55) y la condición (6.56) se sabe que F tiene signo opuesto a z_1 y además su valor será mayor que $|F_i|$ de tal forma que el primer término de (6.66) puede acotarse como sigue:

$$\begin{aligned} k_1 z_1 (F - F_r \cos(\psi - \psi_r) + p_1) &= k_1 z_1 (-|F_i| \text{sign}(z_1) + F_r \cos(\psi - \psi_r) + p_1) \leq \\ &\leq -k_1 |z_1| (|F_i| - |F_r \cos(\psi - \psi_r)| - |p_1|) \leq \\ &\leq -k_1 |z_1| (|F_i| - |F_r| - |p_{\max}|) \\ &\leq -k_1 \delta |z_1| \end{aligned} \quad (6.67)$$

Por otra parte el tercer término puede acotarse teniendo en cuenta la condición (6.63):

$$\begin{aligned}
\left| (1-d_u k_1)(s_1 e_{vx} + s_2 e_{vy}) \right| &\leq \left| (1-d_u k_1) \left(|s_1| |e_{vx}| + |s_2| |e_{vy}| \right) \right| \leq \\
&\leq k_1 \left| \frac{(1-d_u k_1)}{d_u k_1} \right| (|s_1| + |s_2|) (2F_{\max} + p_{\max}) \leq \\
&\leq k_1 \left| \frac{(1-d_u k_1)}{d_u k_1} \right| \sqrt{2} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} (2F_{\max} + p_{\max}) \quad (6.68) \\
&\leq \sqrt{2} k_1 \left| \frac{(1-d_u k_1)}{d_u k_1} \right| (2F_{\max} + p_{\max}) \|z\| \leq \\
&\leq k_1 \delta \varepsilon_1 \|z\|
\end{aligned}$$

De este modo:

$$\dot{V} \leq -k_1 \left(\delta |z_1| + \delta \varepsilon_1 \|z\| + |F_r z_2| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) - |z_2| (|F_r| |w| + p_{\max}) \right) \quad (6.69)$$

Si a continuación se define la función g como sigue:

$$g(x) = \min \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{F_r}{\sqrt{2}} \sin \left(k_2 \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \quad (6.70)$$

Entonces puesto que F_r es distinto de cero, g solo se anula en el origen. Además, puesto que $\|z\|^2 = z_1^2 + z_2^2$, entonces:

O bien $z_1^2 > \|z\|^2 / 2$, lo que implica que:

$$\begin{aligned}
-\delta |z_1| - |F_r z_2| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) &\leq -\delta \frac{\|z\|}{\sqrt{2}} - |F_r z_2| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) \leq \\
&\leq -\delta \frac{\|z\|}{\sqrt{2}} \leq -\|z\| g(\|z\|) \quad (6.71)
\end{aligned}$$

O bien $z_1^2 < \|z\|^2 / 2$ y por tanto:

$$\begin{aligned}
-\delta |z_1| - |F_r z_2| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) &\leq -\delta |z_1| - |F_r| \frac{\|z\|}{\sqrt{2}} \sin \left(k_2 \tanh \left(\frac{\|z\|}{\sqrt{2}} \right) \right) \leq \\
&\leq -|F_r| \frac{\|z\|}{\sqrt{2}} \sin \left(k_2 \tanh \left(\frac{\|z\|}{\sqrt{2}} \right) \right) \leq -\|z\| g(\|z\|) \quad (6.72)
\end{aligned}$$

De tal modo que en cualquier caso se verifica la siguiente condición:

$$\dot{V} \leq -k_1 \|z\| \left(g(\|z\|) - (\delta \varepsilon_1 + |F_r| |w| + p_{\max}) \right) \quad (6.73)$$

Luego V es decreciente en aquella región en la cual $g(\|z\|) > (\delta \varepsilon_1 + |F_r| |w| + p_{\max})$.

Defínase entonces z_{maxI} como sigue:

$$z_{\max 1} = \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{1}{k_2} \sin^{-1} \left(\sqrt{2} \left(\frac{p_{\max} + \delta \varepsilon}{|F_r|} + w_m \right) \right) \right) \quad (6.74)$$

De acuerdo a (6.64), $z_{\max 1}$ está bien definido, ya que:

$$\sqrt{2} (p_{\max} + |F_r| w_m + \delta \varepsilon_1) < |F_r| \sin(k_2) \rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{p_{\max} + \delta \varepsilon_1}{|F_r|} + w_m \right) < \sin(k_2) \quad (6.75)$$

Lo cual significa que existe un ε_2 tal que:

$$\sin^{-1} \left(\sqrt{2} \left(\frac{p_{\max} + \delta \varepsilon_1}{|F_r|} + w_m \right) \right) = k_2 (1 - \varepsilon_2) \quad (6.76)$$

Por lo que:

$$z_{\max 1} = \sqrt{2} \tanh^{-1} (1 - \varepsilon_2) < \infty \quad (6.77)$$

Además, si $\|z\| > z_{\max 1}$ entonces:

$$\begin{aligned} g(\|z\|) &\geq \min \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \frac{F_r}{\sqrt{2}} \sin \left(k_2 \tanh \left(\frac{z_{\max 1}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \\ g(\|z\|) &\geq \min \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}}, \delta \varepsilon_1 + |F_r| w_m + p_{\max} \right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Por otra parte (6.64) también implica que:

$$\frac{\delta}{\sqrt{2}} \geq (\delta \varepsilon_1 + |F_r| w_m + p_{\max}) \quad (6.79)$$

De este modo si $\|z\| > z_{\max}$ entonces $g(\|z\|) > (\delta \varepsilon_1 + |F_r| w_m + p_{\max})$ y por lo tanto la derivada de V es negativa.

Caso B) Supóngase por el contrario que $|z_1| < n_1 + \varepsilon$.

En este caso el valor de $\|z\|$ puede acotarse de la siguiente forma. Si $|z_1| > |z_2|$ entonces utilizando la cota (6.41) para n_1 se tiene que:

$$\begin{aligned} |z_1| &\leq (\|z\| + \sqrt{2} (1 + k_1)) n_{\max} + \varepsilon \\ \|z\| &\leq \sqrt{2} |z_1| \leq \sqrt{2} \|z\| n_{\max} + \sqrt{2} (\sqrt{2} (1 + k_1) n_{\max} + \varepsilon) \\ (1 - \sqrt{2} n_{\max}) \|z\| &\leq \sqrt{2} (\sqrt{2} (1 + k_1) n_{\max} + \varepsilon) \end{aligned} \quad (6.80)$$

Si n_{max} es suficientemente pequeño el término que multiplica a $\|z\|$ será positivo por lo que puede escribirse:

$$|z_2| \leq |z_1| \rightarrow \|z\| \leq \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}(1+k_1)n_{max} + \varepsilon)}{(1 - \sqrt{2}n_{max})} = \varepsilon_3 \quad (6.81)$$

Nótese que ε_3 puede hacerse arbitrariamente pequeño si n_{max} también lo es y ε se elige adecuadamente.

Por el contrario si $|z_1| \leq |z_2|$ entonces simplemente:

$$|z_1| \leq |z_2| \rightarrow \|z\| \leq \sqrt{2}|z_2| \quad (6.82)$$

Luego sea cual sea la relación entre z_1 y z_2 siempre se cumple que:

$$\|z\| \leq \sqrt{2}|z_2| + \varepsilon_3 \quad (6.83)$$

Usando (6.83) el primer término de la derivada de V puede acotarse como sigue:

$$\begin{aligned} k_1 z_1 (F - F_r \cos(\psi - \psi_r) + p_1) &\leq k_1 (|n_1| + \varepsilon) (2F_{max} + |p_1|) \leq \\ &\leq k_1 \left((\|z\| + \sqrt{2}(1+k_1)n_{max} + \varepsilon) (2F_{max} + p_{max}) \right) = \\ &\leq k_1 c_1 \|z\| n_{max} + k_1 c_1 \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (6.84)$$

Donde $c_1 = 2F_{max} + p_{max}$ es una constante positiva y ε_4 puede hacerse tan pequeño como se quiera si el ruido n es pequeño:

$$\begin{aligned} c_1 &= (2F_{max} + p_{max}) \\ \varepsilon_4 &= k_1 (\sqrt{2}(1+k_1)n_{max} + \varepsilon) \end{aligned} \quad (6.85)$$

Entonces la derivada de la función V puede acotarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq k_1 c_1 \|z\| n_{max} + k_1 c_1 \varepsilon_2 - k_1 |z_2| |F_r| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) + \\ &\quad + k_1 |z_2| (|F_r| |w| + p_{max}) + k_1 \delta \varepsilon_1 \|z\| \leq \\ &\leq k_1 \left(-|z_2| (|F_r| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) - |F_r| |w| - p_{max}) \right) + \\ &\quad + k_1 \left((c_1 n_{max} + \delta \varepsilon_1) (\sqrt{2}|z_2| + \varepsilon_3) + c_1 \varepsilon_2 \right) \\ &\leq -k_1 \left(|z_2| (|F_r| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) - \sqrt{2}(c_1 n_{max} + \delta \varepsilon_1) + (|F_r| |w| + p_{max})) \right) + \\ &\quad k_1 \left((c_1 n_{max} + \delta \varepsilon_1) \varepsilon_3 + c_1 \varepsilon_2 \right) \end{aligned} \quad (6.86)$$

Agrupando términos se tiene que:

$$\dot{V} \leq -k_1 \left(|z_2| \left(|F_r| \sin(k_2 \tanh(|z_2|)) - \varepsilon_5 - (|F_r| |w| + p_{\max}) \right) - \varepsilon_6 \right) \quad (6.87)$$

Donde ε_5 y ε_6 son términos que pueden hacerse arbitrariamente pequeños si n_{\max} lo es, ya que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_5 &= \sqrt{2} (c_1 n_{\max} + \delta \varepsilon_1) \\ \varepsilon_6 &= (c_1 n_{\max} + \delta \varepsilon_1) \varepsilon_3 + c_1 \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (6.88)$$

Definiendo entonces $z_{\max 2}$ como:

$$z_{\max 2} = \tanh^{-1} \left(\frac{1}{k_2} \sin^{-1} \left(\frac{p_{\max} + \varepsilon_5}{|F_r|} + w_m \right) \right) \quad (6.89)$$

$z_{\max 2}$ también está bien definido siempre y cuando n sea suficientemente pequeño ya que haciendo que $\varepsilon_5 < \delta \varepsilon_1$:

$$\begin{aligned} (p_{\max} + |F_r| w_m + \varepsilon_5) &\leq (p_{\max} + |F_r| w_m + \delta \varepsilon_1) \leq \\ &\leq \sqrt{2} (p_{\max} + |F_r| w_m + \delta \varepsilon_1) < |F_r| \sin(k_2) \end{aligned} \quad (6.90)$$

Y como en el caso anterior esto garantiza que $z_{\max 2} < \infty$. Puesto que z_2 está bien definido entonces cuando $\|z\| > z_{\max 2}$ se cumple que:

$$\left(|F_r| \sin(k_2 \tanh(|z_{\max 2}|)) - \varepsilon_4 - (|F_r| |w| + p_{\max}) \right) \leq c_2 \quad (6.91)$$

Para una cierta constante c_2 positiva de tal manera que:

$$\dot{V}_1 \leq k_1 \left(-|z_{\max 2}| c_2 + \varepsilon_5 \right) \quad (6.92)$$

Que es definido negativo si ε_5 es suficientemente pequeño, esto es, si el ruido en la medida n_{\max} también lo es.

En conclusión, si se define $z_{\max} = \max(z_{\max 1}, z_{\max 2})$ y además n es pequeño entonces V decrece en la región $\|z\| > z_{\max}$.

Puesto que $V = \|z\|^2/2$ entonces V decrece fuera de la región $V < \|z_{\max}\|^2/2$ lo que significa que la curva de nivel es una región de atracción del sistema, tal como se muestra en la Figura 6.4. De este modo $\|z\|$ es global finalmente acotado por z_{\max} .

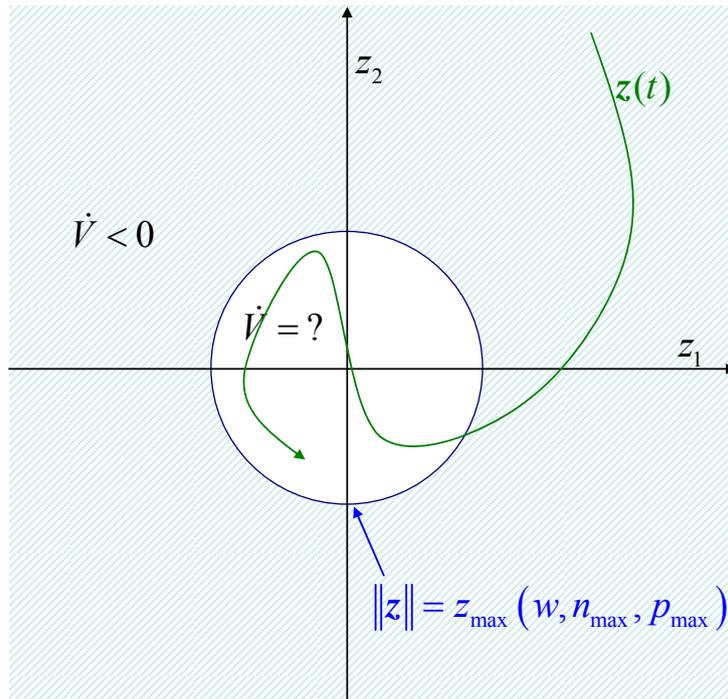


Figura 6.4. Región de decrecimiento de V . Cuando $\|z\| > z_{max}$ entonces V decrece y por lo tanto $\|z\|$ también decrece. Esto significa que la región $\|z\| \leq z_{max}$ es una región de atracción del sistema.

Puesto que z_{max1} y z_{max2} son funciones de clase K respecto de p_{max} , n_{max} y w , entonces $z_{max} = \max(z_{max1}, z_{max2})$ también lo será. Esto implica que existe una función γ de clase K tal que:

$$\begin{aligned} |w| \leq w_m \rightarrow \|z(t)\| &\leq \beta(\|z(t_0)\|, t - t_0) + z_{max} \leq \\ &\leq \beta(\|z(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(|w_m| + n_{max} + p_{max}) \end{aligned} \tag{6.93}$$

Lo que completa la demostración ■

Una vez que se sabe que z es acotado resulta sencillo comprobar que es lo que ocurre con el error de posición y el error en velocidad.

Para ello, partiendo de (6.9) se tiene que:

$$\begin{aligned} e_{vx} &= \frac{s_x - e_x}{k_1} \\ e_{vy} &= \frac{s_y - e_y}{k_1} \end{aligned} \tag{6.94}$$

De tal manera que de acuerdo con (6.8) se puede sustituir e_{vx} por la derivada de e_x y e_{vy} por la derivada de e_y y por tanto:

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= \frac{1}{k_1}(s_x - e_x) \\ \dot{e}_y &= \frac{1}{k_1}(s_y - e_y)\end{aligned}\tag{6.95}$$

Teorema 6.2. El estado $\mathbf{e}_I = [e_x, e_y]^T$ del sistema (6.95) es ISS respecto a $\mathbf{s} = [s_x, s_y]^T$, más aún, existe una función β_2 de clase KL tal que.

$$\|\mathbf{e}_1(t)\| \leq \beta_2(\|\mathbf{e}_1(t_0)\|, t - t_0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{\mathbf{s}(\tau)\}\tag{6.96}$$

Demostración: Sea la siguiente función de Lyapunov del sistema (6.95):

$$V_2 = \frac{e_x^2 + e_y^2}{2}\tag{6.97}$$

Sea s_m el máximo valor de $\|\mathbf{s}\|$ en el intervalo $[t_0, t]$ y el vector de estado de (6.95). Entonces tomando la derivada temporal de dicha función:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y = \frac{1}{k_1} e_x (s_x - e_x) + e_y \frac{1}{k_1} (s_y - e_y) = \\ &= -\frac{1}{k_1} (e_x^2 + e_y^2 - e_x s_x - e_y s_y) = -\frac{1}{k_1} (\|\mathbf{e}_1\|^2 - \mathbf{e}_1^T \mathbf{s}) \leq \\ &\leq -\frac{1}{k_1} (\|\mathbf{e}_1\|^2 - \|\mathbf{e}_1\| s_m) = -\frac{\|\mathbf{e}_1\|}{k_1} (\|\mathbf{e}_1\| - s_m)\end{aligned}\tag{6.98}$$

Es claro que cuando $\|\mathbf{e}_I\| > s_m$ entonces V_2 disminuye y por lo tanto también lo hace $\|\mathbf{e}_p\|$ (ya que $V_2 = \|\mathbf{e}_I\|^2/2$). De este modo la región $\|\mathbf{e}_I\| \leq s_m$ es la región de atracción del sistema (6.95) luego $\|\mathbf{e}_I\|$ es ISS respecto a \mathbf{s} por lo que se cumple (6.96) ■

Para concluir este apartado conviene comprobar que ocurre al error de posición \mathbf{e}_p cuando w es pequeño.

$$\mathbf{e}_p = [e_x, e_y, e_{v_x}, e_{v_y}]^T\tag{6.99}$$

Puesto que \mathbf{z} es global finalmente acotado por una función que depende de w , el ruido y las perturbaciones, \mathbf{e}_I es ISS respecto a \mathbf{s} y además $\|\mathbf{s}\| = \|\mathbf{z}\|$ con lo que el siguiente resultado es inmediato:

Teorema 6.3. Bajo las condiciones del Teorema 6.1 existen unas funciones β_3 y γ_3 de clase KL y de clase K respectivamente y una constante w_m tales que:

$$|w| \leq w_m \rightarrow \|\mathbf{e}_p(t)\| \leq \beta_3(\|\mathbf{e}_p(t_0)\|, t - t_0) + \gamma_3(w_m + n_{\max} + p_{\max})\tag{6.100}$$

Demostración: De acuerdo con el Teorema 6.1 se sabe que existen unas funciones β_I y γ_I de clase K y KL respectivamente y una constante w_m tales que si $|w| < w_m$:

$$\|z(t)\| \leq \beta_1(\|z(0)\|, t-t_0) + \gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \quad (6.101)$$

La ecuación anterior implica que para todo ε existe un T_ε que es una función de clase K en $\|z(0)\|$ tal que:

$$T_\varepsilon(\|z(t)\|) < t \rightarrow \|z(t)\| \leq \varepsilon + \gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \quad (6.102)$$

Definiendo entonces $e_2 = [e_{vx}, e_{vy}]^T$ y utilizando (6.94) se tiene que:

$$e_2 = \frac{s - e_1}{k_1} \rightarrow \|e_2\| \leq \|s\| + \|e_1\| = \|z\| + \|e_1\| \quad (6.103)$$

Por otra parte según la definición del vector z se tiene que:

$$\|z\| = \|s\| = \|k_1 e_2 + e_1\| \leq k_1 \|e_2\| + \|e_1\| \leq k_1 \|e_p\| + \|e_p\| = (1+k_1) \|e_p\| \quad (6.104)$$

Además el Teorema 6.2 implica que existe una función β_2 de clase KL tal que:

$$\begin{aligned} \|e_1(t)\| &\leq \beta_2(\|e_1(t_0)\|, t-t_0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{\|s(\tau)\|\} = \\ &= \beta_2(\|e_1(t_0)\|, t-t_0) + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{\|z(\tau)\|\} \end{aligned} \quad (6.105)$$

Puesto que β_l es decreciente en t , entonces el supremo de $\|z\|$ se alcanza en $t=t_0$ y por tanto:

$$\|e_1(t)\| \leq \beta_2(\|e_1(t_0)\|, t-t_0) + \beta_1(\|z(0)\|, 0) + \gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \quad (6.106)$$

Además para $t > T_\varepsilon$ se tiene que:

$$\|e_1(t)\| \leq \beta_2(\|e_1(T_\varepsilon)\|, t-T_\varepsilon) + \varepsilon + \gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \quad (6.107)$$

De este modo para $t < T_\varepsilon$ el error e_p puede acotarse tal como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} \|e_p(t)\| &= \sqrt{\|e_1(t)\|^2 + \|e_2(t)\|^2} \leq \|e_1(t)\| + \|e_2(t)\| \leq 2\|e_1(t)\| + \|z(t)\| \leq \\ &\leq 2\beta_2(\|e_1(t_0)\|, t-t_0) + 2\beta_1(\|z(0)\|, 0) + \\ &\quad + \beta_1(\|z(0)\|, t-t_0) + 3\gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \leq \\ &\leq 2\beta_2(\|e_p(0)\|, 0) + 3\beta_1((1+k_1)\|e_p(0)\|, 0) + \\ &\quad + 3\gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \leq \\ &\leq \gamma_4(\|e_p(0)\|) + 3\gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \end{aligned} \quad (6.108)$$

Donde γ_4 es una función de clase K . Mientras que para $T_\varepsilon < t$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|e_p(t)\| &\leq 2\|e_1(t)\| + \|z(t)\| \\
&\leq 2\beta_2\left(\|e_1(T_\varepsilon)\|, t - T_\varepsilon\right) + 3\varepsilon + 3\gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) \leq \\
&\leq 2\beta_2\left(\|e_p(T_\varepsilon)\|, t - T_\varepsilon\right) + 3\varepsilon + 3\gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max})
\end{aligned} \tag{6.109}$$

Con lo que e_p es acotado en el intervalo de tiempo $t_0 < t < T_\varepsilon$ por una función de clase K en $\|e_p(0)\|$ y además cuando $t \rightarrow \infty$ entonces e_p es finalmente acotado por $3\gamma_1 + 3\varepsilon$, siendo ε arbitrariamente pequeño. De modo que existe una función β_3 (la envolvente de ambas funciones) de clase KL tal que:

$$\begin{aligned}
\|e_p(t)\| &\leq \beta\left(\|e_p(T_\varepsilon)\|, t - t_0\right) + 3\gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max}) = \\
&= \beta\left(\|e_p(T_\varepsilon)\|, t - t_0\right) + 3\gamma_1(w_m + n_{\max} + p_{\max})
\end{aligned} \tag{6.110}$$

Como se quería demostrar ■

6.4.2. Estabilidad de la orientación.

En este apartado se considera la estabilidad del error de orientación. Para ello se analiza en primer lugar el comportamiento de la variable s_ψ asumiendo que el vector z es acotado. A continuación se muestra el efecto sobre el estado completo e_ψ y e_r .

Teorema 6.4. Sea s_ψ la solución del sistema dinámico (6.33) y $x_r(t)$ una trayectoria dominable. Entonces, para cualquier valor de k_2 y ε , si las perturbaciones y el ruido son suficientemente pequeños existen cinco constantes positivas z_m , k_3 , a , b y c tales que bajo la acción de control (6.55) se cumple:

$$|z| \leq z_m \rightarrow |s_\psi(t)| \leq \max\left(|s_\psi(0)| - at, \gamma(b + z_m + p_{\max})n_{\max} + cp_{\max} + \varepsilon\right) \tag{6.111}$$

Demostración: En primer lugar y sin pérdida de generalidad la estabilidad de s_ψ puede estudiarse asumiendo que el estado inicial del sistema se encuentra en la región Ω_I .

Esto implica que e_r es acotado ya que:

$$|e_r| = |r - r_r| \leq |r| + |r_r| \leq \frac{|\tau_m|}{d_r} + |r_r| \tag{6.112}$$

Por otra parte, de acuerdo con (6.18), puesto que $\|z\|$ es acotado por z_m y $|r|$ es acotado por r_m en Ω_I , entonces la derivada de z también es acotada:

$$\begin{aligned}
\|\dot{z}\| &= \sqrt{\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2} \leq |\dot{z}_1| + |\dot{z}_2| \leq c_1 + (|\dot{z}_1| + |\dot{z}_2|)r_{\max} + k_1(p_1 + p_2) \\
&\leq c_1 + 2r_{\max}z_m + 2k_1p_{\max} \leq c_1 + c_2z_m + c_3p_{\max}
\end{aligned} \tag{6.113}$$

Para algunas constantes positivas c_1 , c_2 y c_3 .

Del mismo modo la derivada segunda de z_2 también es acotada ya que las derivadas de e_{vx} , e_{vy} y r son acotadas en Ω_l , y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_2 &= k_1 \dot{F}_r \sin(\psi - \psi_r) + k_1 F_r \cos(\psi - \psi_r)(r - \dot{\psi}_r) - z_1 \dot{r} - \dot{z}_1 r + \\ &\quad + (1 - d_u k_1)(-\dot{e}_{vx} \sin(\psi) + \dot{e}_{vy} \cos(\psi)) - \\ &\quad - r(1 - d_u k_1)(e_{vx} \cos(\psi) + e_{vy} \sin(\psi)) + k_1 \dot{p}_2 \\ |\ddot{z}_2| &\leq c_4 + |z_1| |\dot{r}| + |\dot{z}_1| |r| + k_1 |\dot{p}_2| \leq c_4 + |z_1| |\dot{r}| + \\ &\quad + (c_1 + c_2 z_m + c_3 p_{\max}) |r_{\max}| + k_1 |\dot{p}_2| \leq \\ &\leq c_4 + c_5 z_m + c_6 p_m \end{aligned} \quad (6.114)$$

Insertando este resultado en la definición de τ_c (6.35) se tiene que:

$$\begin{aligned} |\tau_c| &= |\tau_r| - k_2 \left| \text{sign}(F_r)(1 - \tanh^2(z_2)) \left(d_r |\dot{z}_2| + 2 |\tanh(z_2)| (\dot{z}_2)^2 + |\ddot{z}_2| \right) \right| \leq \\ &|\tau_r| + k_2 \gamma_5(z_m + p_m) \end{aligned} \quad (6.115)$$

Para una función γ_5 de clase K_∞ e independiente de k_2 .

Del mismo modo todos los términos la ecuación (6.54) que acompañan a n_{\max} son acotados y por lo tanto existe una función γ_6 de clase K tal que:

$$|f_3| \leq \gamma_6(c_7 + z_m + p_{\max}) n_{\max} + k_3 k_2 k_1 p_{\max} \quad (6.116)$$

Dado que la trayectoria es dominable entonces $|\tau_i| < |\tau_i|$ y por lo tanto $|\tau_i| - |\tau_r| \leq \delta$ para un cierto δ positivo. De este modo sea z_m la siguiente constante positiva:

$$z_m = -\frac{1}{2} \gamma_5^{-1} \left(\frac{\delta}{4k_2} \right) \quad (6.117)$$

z_m está bien definido para cualquier k_2 ya que $\gamma_5(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$ y por tanto la inversa de γ_5 existe para todo x . Más aún, cuando $k_2 \rightarrow 0$ entonces $z_m \rightarrow \infty$ (este hecho es importante en el estudio de la estabilidad global).

De este modo si $\|z\| < z_m$ y $\gamma_5(2p_{\max}) + p_{\max} < \delta/4$ se cumple que:

$$\begin{aligned} |\tau_i| - |\tau_c| - |p_{\max}| &\geq |\tau_i| - |\tau_r| - k_2 \gamma(z_m + p_{\max}) - p_{\max} \\ &\geq |\tau_i| - |\tau_r| - k_2 \gamma(2z_m) - k_2 \gamma(2p_m) - p_{\max} \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} \end{aligned} \quad (6.118)$$

Elíjase entonces k_3 de tal forma que:

$$\frac{|1-k_3d_r|}{k_3d_r}(|\tau_m|+d_r|r_r|) \leq \frac{\delta}{4} \quad (6.119)$$

Esto siempre es posible puesto que puede tomarse $k_3=1/d_r$.

Defínase entonces la siguiente función de Lyapunov:

$$V_3 = \frac{s_\psi^2}{2} \quad (6.120)$$

De acuerdo con la dinámica (6.33) la derivada temporal de V_3 viene dada por:

$$\dot{V}_3 = s_\psi \dot{s}_\psi = s_\psi (k_3(\tau - \tau_c + p_r) + (1 - k_3d_r)e_r) \quad (6.121)$$

Supóngase en primer lugar que $s_\psi \geq f_3 + \varepsilon$ entonces de acuerdo con (6.56) el signo de τ es opuesto al signo de s_ψ y además $|\tau| < |\tau_i|$ de tal forma que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq s_\psi \dot{s}_\psi = s_\psi (k_3(-\tau_i - \tau_c + p_r) + (1 - k_3d_r)e_r) \leq \\ &\leq -|s_\psi| (k_3(|\tau_i| - |\tau_c| - |p_r|) - |1 - k_3d_r||e_r|) \leq \\ &\leq -|s_\psi| (k_3(|\tau_i| - |\tau_r| - k_2\gamma(z_m + p_m) - p_m) - |1 - k_3d_r||e_r|) \leq \\ &\leq -|s_\psi| \left(\frac{\delta}{2} k_3 - |1 - k_3d_r||e_r| \right) \leq \\ &\leq -|s_\psi| k_3 \left(\frac{\delta}{2} - \frac{|1 - k_3d_r|}{k_3} \left(\frac{|\tau_m|}{d_r} + |r_r| \right) \right) \leq \\ &\leq -|s_\psi| k_3 \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{3} \right) = -\frac{\delta k_3}{4} |s_\psi| \end{aligned} \quad (6.122)$$

Por lo que la derivada de V_3 es negativa. Por otra parte si $s_\psi < f_3 + \varepsilon$ entonces el signo de V_3 podría ser positivo.

Esto significa que V_3 y por lo tanto s_ψ disminuye siempre que $s_\psi \geq f_3 + \varepsilon$. Luego s_ψ es global finalmente acotada por $f_3 + \varepsilon$. Para verificar la cota (6.111) obsérvese lo que ocurre cuando $s_\psi \geq f_3 + \varepsilon$.

$$\dot{V}_3 \leq -\frac{\delta k_3}{4} |s_\psi| = -\frac{\delta k_3}{4} \sqrt{2V_3} \quad (6.123)$$

Resolviendo el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \dot{V}' &= -\frac{\delta k_3}{4} \sqrt{2V'} \\ V'(t_0) &= V'_0 \end{aligned} \quad (6.124)$$

Se obtiene:

$$V'(t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2V'_0} - \frac{\delta k_3}{4} (t - t_0) \right)^2 \quad (6.125)$$

Por el principio de comparación (Khalil, 2002) resulta que mientras $s_\psi > f_3 + \varepsilon$ se tiene que:

$$V_3(t) \leq \frac{1}{2} \left(|s_\psi(0)| - \frac{\delta k_3}{4} t \right)^2 \rightarrow |s_\psi(t)| \leq |s_\psi(0)| - \frac{\delta k_3}{4} t \quad (6.126)$$

Una vez que se ha penetrado en la región $s_\psi \leq f_3 + \varepsilon$ no es posible salir y de este modo se tiene que:

$$|s_\psi(t)| \leq \max \left(|s_\psi(0)| - \frac{\delta k_3}{4} t, f_3 + \varepsilon \right) \quad (6.127)$$

Para completar la demostración es necesario usar la cota (6.54) de f_3 , obteniendo:

$$|s_\psi(t)| \leq \max \left(|s_\psi(0)| - \frac{\delta k_3}{4} t, \gamma_2 (c_7 + z_m + p_{\max}) n_{\max} + k_3 k_2 k_1 p_{\max} + \varepsilon \right) \quad (6.128)$$

Que tiene la forma de (6.111) con $a = \delta k_3$, $b = c_7$ y $c = k_1 k_2 k_3$ ■

Un detalle importante a tener en cuenta en la demostración del teorema anterior es que el valor de z_m puede hacerse tan grande como se quiera reduciendo k_2 . Si además se reduce también el ruido n_{\max} y la perturbación p_{\max} la cota final de s_y puede hacerse tan pequeña como se quiera.

Puesto que bajo las condiciones del teorema anterior s_ψ es acotado conviene considerar que ocurre con e_ψ . Si se despeja e_r de la ecuación (6.29) y se sustituye en la definición de s_ψ (6.31) se tiene que:

$$s_\psi = e_\psi + k_3 e_r = e_\psi + k_3 \dot{e}_\psi \quad (6.129)$$

De este modo la dinámica de e_ψ es la siguiente:

$$\dot{e}_\psi = \frac{s_\psi - e_\psi}{k_3} \quad (6.130)$$

Es claro entonces a primera vista que e_ψ es estable y puesto que s_ψ es acotado se obtiene el siguiente resultado general:

Teorema 6.5. Sea e_y la solución de (6.130) y sea z_m la constante positiva del Teorema 6.4, entonces para cualquier condición inicial en Ω_I si el ruido y las perturbaciones son suficientemente pequeñas se cumple que:

$$\|z(t)\| \leq z_m \rightarrow |e_\psi(t)| \leq C e^{-\frac{t}{k_3}} + \gamma_2 (b + z_m + p_{\max}) n_{\max} + c p_{\max} + \varepsilon \quad (6.131)$$

Para alguna constante C positiva y una función γ_2 de clase K .

Demostración: La ecuación (6.130) es lineal y su solución viene dada por:

$$e_\psi(t) = e_\psi(0)e^{-\frac{t}{k_3}} + \frac{1}{k_3} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} s_\psi(\tau) d\tau \quad (6.132)$$

De este modo si $\|z\| < z_m$ y utilizando la cota de s_ψ que viene impuesta por (6.128) se tiene que:

$$\begin{aligned} |e_\psi(t)| &\leq |e_\psi(0)| e^{-\frac{t}{k_3}} + \frac{1}{k_3} \left| \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} s_\psi(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq |e_\psi(0)| \leq |e_\psi(0)| e^{-\frac{t}{k_3}} + \frac{1}{k_3} \left| \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} |s_\psi(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq |e_\psi(0)| e^{-\frac{t}{k_3}} + \frac{1}{k_3} \int_0^{\frac{|s_\psi(0)|}{a}} e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} (|s_\psi(t_0)| - a\tau) d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{k_3} (\gamma_2(b + z_m + p_{\max}) n_{\max} + cp_{\max} + \varepsilon) \int_{\frac{|s_\psi(0)|}{a}}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} d\tau \end{aligned} \quad (6.133)$$

Considerando por separado los términos que aparecen en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_3} \int_0^{\frac{|s_\psi(0)|}{a}} e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} (|s_\psi(0)| - a\tau) d\tau &\leq e^{-\frac{t}{k_3}} \frac{1}{k_3} \int_0^{\frac{|s_\psi(0)|}{a}} e^{\frac{\tau}{k_3}} (|s_\psi(0)|) d\tau \leq \\ &\leq |s_\psi(0)| \left(e^{\frac{|s_\psi(0)|}{ak_3}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{k_3}} \end{aligned} \quad (6.134)$$

Y además:

$$\frac{1}{k_3} \int_{\frac{|s_\psi(t_0)|}{a}}^t e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} d\tau \leq \frac{1}{k_3} \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{k_3}} d\tau = \left(1 - e^{-\frac{t}{k_3}} \right) < 1 \quad (6.135)$$

Por otra parte puesto que la condición inicial pertenece a Ω_l entonces e_r es acotado. Además el error de orientación en el instante inicial siempre puede tomarse en el rango $[-\pi, \pi]$ (ya que ψ está indeterminado módulo 2π) lo cual significa que $s_y(0)$ también es acotado y de este modo:

$$\begin{aligned}
|e_\psi(t)| &\leq |e_\psi(0)|e^{-\frac{t}{k_3}} + |s_\psi(0)| \left(e^{\frac{|s_\psi(0)|}{ak_3}} - 1 \right) e^{-\frac{t}{k_3}} + \gamma_2 (b + z_m + p_{\max}) n_{\max} + cp_{\max} + \varepsilon \\
&\leq \left(|e_\psi(0)| + |s_\psi(0)| e^{\frac{|s_\psi(0)|}{ak_3}} \right) e^{-\frac{t}{k_3}} + \gamma_2 (b + z_m + p_{\max}) n_{\max} + cp_{\max} + \varepsilon \\
&\leq C e^{-\frac{t}{k_3}} + \gamma_2 (b + z_m + p_{\max}) n_{\max} + cp_{\max} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{6.136}$$

Donde C es la siguiente constante:

$$C = \sup_{\Omega_1} \left\{ |e_\psi| + |s_\psi| e^{\frac{|s_\psi|}{ak_3}} \right\} \tag{6.137}$$

■

6.4.3. Estabilidad del conjunto

El Teorema 6.1 afirma que si el ruido, las perturbaciones y w son pequeños entonces z es global y finalmente acotado. Por otra parte el Teorema 6.7 afirma que si $\|z\| < z_m$ entonces e_ψ (y por lo tanto w) converge exponencialmente a una pequeña región que depende de las perturbaciones y el ruido. La idea básica para demostrar la convergencia del conjunto será por tanto la siguiente.

Supóngase que z parte de la condición inicial acotada $\|z(0)\| < M$ y además $2M < z_m$ entonces, puesto que $|w(0)|$ podría ser mayor que w_m , en general $\|z\|$ comenzará creciendo (de hecho z_m puede no estar bien definido).

Ahora bien, si la velocidad con la que $\|z\|$ diverge es acotada pasará al menos un cierto tiempo finito T_l hasta que $\|z(t)\|$ se haga mayor que $2M$. Durante este tiempo como $\|z(t)\| < z_m$ la variable e_ψ (y por tanto w) converge hacia una región ε_l .

Supóngase además que ε_l es tal que $z_{\max}(\varepsilon_l) < M$. Entonces en el tiempo T_l el vector z estará fuera de la región de atracción $\|z\| < z_m$ (ver Teorema 6.1) y por tanto $\|z\|$ disminuirá. Esto significa que $\|z\|$ no podrá cruzar la frontera $\|z\| = 2M$.

De este modo la cota de w continuará disminuyendo hacia una cota final que solo depende de las perturbaciones y el ruido y z no podrá salir nunca de la región $\|z\| < 2M$. Como se muestra en la Figura 6.5.

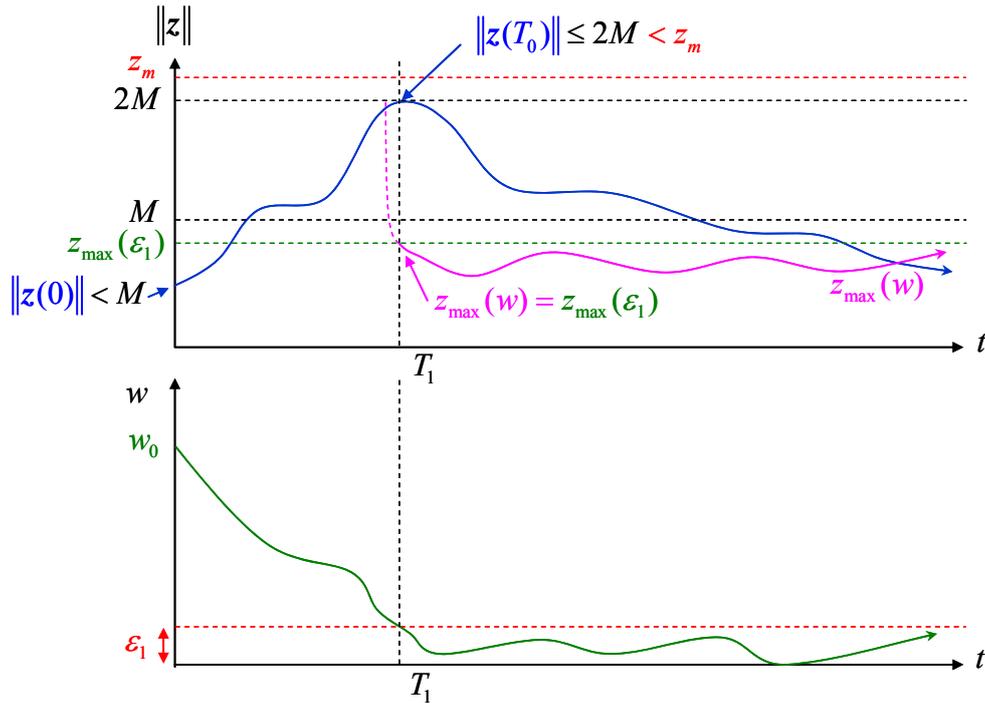


Figura 6.5. Estabilidad del conjunto. Si se cumple que $\|z(0)\| < M$, $w(T_1) < \epsilon_1$, $\|z(T_1)\| < 2M$ y $z_{\max}(\epsilon_1) < M$ entonces la trayectoria nunca abandonará la región $\|z\| < 2M$.

Si estas condiciones se cumplen entonces z será finalmente acotado por una función creciente de las perturbaciones y el ruido.

Nótese que si $z_{\max}(\epsilon_1) > 2M$ entonces z podría abandonar la región $\|z\| < z_m$ de tal modo que w podría divergir, inestabilizando así el sistema.

Esta idea se formaliza en el siguiente resultado:

Teorema 6.6. Si el ruido y las perturbaciones son suficientemente pequeños para satisfacer las condiciones del Teorema 6.1 y del Teorema 6.5 y además existe una constante positiva M tal que

$$\sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{4\gamma_2(4M)}{\delta} \sin^{-1} 3 \left(2\sqrt{2} C e^{-\frac{M}{ak_3}} \right) \right) < M \quad (6.138)$$

Donde δ , C y a son las constantes positivas del Teorema 6.5, γ_2 es la función de clase K definida en (6.117).

Entonces si $\|z(0)\| < M$ existe una función γ_7 de clase K , una función β_7 de clase KL y unas constantes k_1 , k_2 y k_3 tales que el sistema (6.4) bajo la ley de control (6.55) con las constantes k_1 , k_2 y k_3 cumple que:

$$\|e_p(t)\| \leq \beta_7 \left(\|e_p(0)\|, t - t_0 \right) + \gamma_7(n_{\max}, p_{\max}) + \epsilon_7 \quad (6.139)$$

Donde ε_7 puede hacerse tan pequeño como se quiera reduciendo ε en la ley de control (6.55).

Demostración: Puesto que $\|z(0)\| < M$, existe un tiempo T_1 tal que para $t < T_1$ entonces $\|z(t)\| < 2M$. Para acotar inferiormente dicho tiempo considérese de nuevo la derivada de la función V del Teorema 6.1. De acuerdo con la ecuación (6.66):

$$\dot{V} \leq k_1 |z_2| (|F_r| |w| + p_2) + (1 - d_u k_1) (s_1 e_{vx} + s_2 e_{vy}) \leq c_1 \|z\| + c_2 \quad (6.140)$$

Para algunas constantes c_1 y c_2 .

Si M es suficientemente grande de tal forma que $\|z\| > c_2/c_1$ entonces aplicando el principio de comparación:

$$\dot{V} \leq 2c_1 \sqrt{V} \rightarrow V \leq \frac{1}{2} (\sqrt{2V(0)} + 2c_1 t)^2 \rightarrow \|z\| \leq \|z(0)\| + 2c_1 t \quad (6.141)$$

Esto significa que para M suficientemente grande el tiempo que necesitará el sistema para pasar desde $\|z\|=M$ hasta $\|z\|=2M$ será al menos $M/(2c_2)$. Dicho de otra manera, para M grande entonces $T_1 > M/(2c_2)$.

Elíjase entonces k_2 del siguiente modo:

$$k_2 = \frac{\delta}{4\gamma_2(4M)} \quad (6.142)$$

Es claro que este valor de k_2 verifica (6.117) y por lo tanto el Teorema 6.5 se aplica al intervalo $[0, T_1]$. De este modo substituyendo (6.131) en (6.131):

$$|e_\psi(T_1)| \leq C e^{-\frac{T_1}{k_3}} + \gamma_2 (b + M + p_{\max}) n_{\max} + c p_{\max} + \varepsilon \quad (6.143)$$

Ahora bien, si p_{\max} , n_{\max} y ε son suficientemente pequeños entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\gamma_2 (b + M + p_{\max}) n_{\max} + c p_{\max} + \varepsilon \leq C e^{-\frac{T_1}{k_3}} \quad (6.144)$$

Entonces la expresión (6.143) se convierte en:

$$|e_\psi(T_1)| \leq 2C e^{-\frac{T_1}{k_3}} \quad (6.145)$$

Si además el ruido y las perturbaciones son suficientemente pequeños como para que:

$$\max \left(\frac{p_{\max} + \varepsilon_5}{|F_r|}, \frac{p_{\max} + \delta \varepsilon}{|F_r|} \right) < C e^{-\frac{T_1}{k_3}} \quad (6.146)$$

Lo cual es siempre posible ya que T_1 es finito, entonces sustituyendo en (6.74) se obtiene la expresión (6.147).

$$\begin{aligned}
z_{\max 1}(T_1) &= \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{1}{k_2} \sin^{-1} \left(\sqrt{2} \left(\frac{p_{\max} + \delta \varepsilon}{|F_r|} + 2Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} \right) \right) \right) \\
&\leq \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{1}{k_2} \sin^{-1} \left(\sqrt{2} \left(Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} + 2Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} \right) \right) \right) = \\
&= \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{\delta}{4\gamma_2(4M)} \sin^{-1} \left(3\sqrt{2}Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.147}$$

Y haciendo lo mismo con (6.89):

$$\begin{aligned}
z_{\max 2}(T_1) &= \tanh^{-1} \left(\frac{1}{k_2} \sin^{-1} \left(\frac{p_{\max} + \varepsilon_5}{|F_r|} + 2Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} \right) \right) \leq \\
&\leq \tanh^{-1} \left(\frac{1}{k_2} \sin^{-1} \left(Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} + 2Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} \right) \right) = \\
&= \tanh^{-1} \left(\frac{\delta}{4\gamma_2(4M)} \sin^{-1} \left(3Ce^{-\frac{T_1}{k_3}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{6.148}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
z_{\max}(T_1) &= \max(z_{\max 1}(T_1), z_{\max 2}(T_1)) = z_{\max 1}(T_1) = \\
&= \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\frac{4\gamma(4M)}{\delta} \sin^{-1} \left(3\sqrt{2}Ce^{-\frac{M}{2c_2k_3}} \right) \right) < M
\end{aligned} \tag{6.149}$$

Se procede por reducción al absurdo.

Supóngase que z cruzase la frontera $\|z\|=2M$ en el tiempo t_2 . Entonces $\|z(t_2)\|=2M$ y además $\|z\|$ es creciente en t_2 (la derivada de V es positiva).

Ahora bien, V solo crece si $\|z\| < z_{\max}$ lo que significa que $z_{\max}(|e_\psi(t_2)|) \leq M$, pero, puesto que $\|z\| < z_m$ para todo $T_1 \leq t \leq t_2$ entonces

$$t < t_2 \rightarrow \|z(t)\| \leq z_m \rightarrow |e_\psi(t_2)| \leq 2Ce^{\frac{T_1}{k_1}} \tag{6.150}$$

Luego $\|z(t_2)\| < z_{\max}(|e_\psi(t_2)|) \leq M$ que contradice el hecho de $\|z(t_2)\|=2M$.

Una vez demostrado que $\|z\| < z_{\max}$ para todo tiempo t entonces por aplicación del Teorema 6.5 existe un T_3 tal que:

$$\begin{aligned} |e_{\psi}(T_1)| &\leq Ce^{\frac{T_1}{k_3}} + \gamma_2 (b + M + p_{\max}) n_{\max} + cp_{\max} + \varepsilon \leq \\ &\leq 2(\gamma_2 (b + M + p_{\max}) n_{\max} + cp_{\max} + \varepsilon) \end{aligned} \quad (6.151)$$

Y de este modo de acuerdo al Teorema 6.3:

$$\begin{aligned} \|e_p(t)\| &\leq \beta_3 (\|e_p(0)\|, t) + \gamma_3 (\varepsilon_3 + (\gamma_2 (b + M + p_{\max}) + 1) n_{\max} + (c + 1) p_{\max} + \varepsilon) \\ &\leq \beta_7 (\|e_p(0)\|, t) + \gamma_7 (n_{\max}, p_{\max}) + \varepsilon_7 \end{aligned} \quad (6.152)$$

Como se quería demostrar ■

Llegados a este punto para concluir el estudio de la estabilidad será necesario demostrar primero un lema técnico:

Lema 6.2. Sea $\gamma(x)$ una función de clase K de orden polinómico y a , b y c tres constantes positivas arbitrarias. Entonces la ecuación:

$$g(x) = \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(bg(4x) \sin^{-1} \left(ce^{\frac{x}{ak_3}} \right) \right) < x \quad (6.153)$$

Siempre tiene solución para x suficientemente grande.

Demostración: Puesto que g es de orden polinómico entonces existe un x_0 , un número entero n y una constante c_n tal que para $x > x_0$ entonces $g(x) < c_n x^n$. Y puesto que $\tanh^{-1}(x)$ es una función monótona creciente se tiene que:

$$x > x_0 \rightarrow g(x) \leq \sqrt{2} \tanh^{-1} (bc_n x^n \sin^{-1}(ce^{-ax})) \quad (6.154)$$

Calculando el límite cuando x tiende a infinito se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2} \tanh^{-1} (bc_n x^n \sin^{-1}(ce^{-ax})) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2} \tanh^{-1} (bx^n (ce^{-ax} + o(e^{-2ax}))) = \\ &= \sqrt{2} \tanh^{-1} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} bx^n (ce^{-ax} + o(e^{-2ax})) \right) = \sqrt{2} \tanh^{-1}(0) = 0 \end{aligned} \quad (6.155)$$

De este modo cuando x tiende a infinito $g(x)$ tiende a cero, es claro entonces que para x grande la desigualdad (6.153) se cumple ■

Una vez demostrado este lema técnico es posible reunir los resultados parciales de los teoremas anteriores en el siguiente resultado unificador:

Teorema 6.7. Sea el sistema dinámico (6.4) bajo el efecto de perturbaciones y ruido en la medida acotados, $\mathbf{x}_r(t)$ una trayectoria de referencia dominable y $\mathbf{e}_p = [x - x_r, y - y_r, v_x - v_{xr}, v_y - v_{yr}]^T$ el error de seguimiento espacial.

Dada una cota M de la condición inicial ($\|\mathbf{x}(0)\| < M$), si n_{\max} y p_{\max} son suficientemente pequeños es posible escoger las constantes k_1, k_2, k_3 y ε de tal forma que la solución de (6.4) sometida a la ley de control (6.55) verifique

$$\|\mathbf{e}_p(t)\| \leq \beta_8(\|\mathbf{e}_p(0)\|, t) + \gamma_7(n_{\max}, p_{\max}) + \varepsilon_7 \quad (6.156)$$

Para unas funciones β_8 y γ_8 de clase KL y K respectivamente siendo ε_8 una constante arbitrariamente pequeña.

Demostración: De acuerdo con el Lema 6.2 siempre existe un valor de M que verifica la ecuación (6.138). Llamemos M_0 a dicho valor.

Supongase primeramente que la cota M del teorema es tal que $\mathbf{x}(0) \in \Omega_I$, entonces el error de seguimiento inicial es acotado ya que:

$$\|\mathbf{e}_p(0)\| \leq \|\mathbf{x}(0)\| + \|\mathbf{x}_r(0)\| \leq \|\mathbf{x}_r(0)\| + M \quad (6.157)$$

Por otro lado si $\mathbf{x}(0) \notin \Omega_I$ entonces por el Lema 4.1 existe un tiempo T_Ω tal que para $t \geq T_\Omega$ se cumple que $\mathbf{x}(t) \in \Omega_I$. Puesto que el sistema es uniformemente Lipschitz en el estado \mathbf{x} , entonces en el intervalo de tiempo $[0, T_\Omega]$ el estado se mantendrá acotado y por lo tanto existirá un M_1 tal que $\|\mathbf{e}_p\| < M_1$.

De este modo tomando $M = \max(M + \|\mathbf{x}_r(0)\|, M_1, M_0)$ es posible elegir k_1, k_2, k_3 y ε de modo que se verifique el Teorema 6.6 para $t > T_\Omega$. Tomando entonces como T_Ω el tiempo de partida en la conclusión de dicho teorema se tiene que:

$$\|\mathbf{e}_p(t)\| \leq \begin{cases} M_1 & t \leq T_\Omega \\ \beta_7(M_1, t - T_\Omega) + \gamma_7(n_{\max}, p_{\max}) + \varepsilon_7 & t > T_\Omega \end{cases} \quad (6.158)$$

Definiendo β_8 de la como:

$$\beta_8(\|\mathbf{e}_p(0)\|, t) = \begin{cases} M_1 & t \leq T_\Omega \\ \beta_7(M_1(\|\mathbf{e}_p(0)\|), t - T_\Omega(\|\mathbf{e}_p(0)\|)) & t > T_\Omega \end{cases} \quad (6.159)$$

Es claro que β_8 es una función de clase KL ya que es creciente con $\|\mathbf{e}_p\|$, se anula cuando $\mathbf{e}_p = 0$ y además tiende a cero cuando t tiende a infinito de tal modo que:

$$\|\mathbf{e}_p(t)\| \leq \beta_8(\|\mathbf{e}_p(0)\|, t) + \gamma_7(n_{\max}, p_{\max}) + \varepsilon_7 \quad (6.160)$$

Como se quería demostrar ■

6.4.4. Consideraciones sobre la ley de control

Debido a la complejidad y extensión de las demostraciones es fácil que algunos detalles importantes pasen desapercibidos. Por este motivo en esta sección se intenta dar una visión intuitiva de los resultados obtenidos así como de las condiciones que se exigen a las constantes del controlador, las perturbaciones y el ruido.

En primer lugar, es interesante analizar la suposición de partida. Los teoremas exigen que la trayectoria sea dominable, este hecho se ha utilizado para demostrar tres cosas.

En primer lugar la condición fue necesaria para encontrar un F_i del signo adecuado y que fuese mayor que F_r (ecuación (6.62)), esta condición es simple de entender ya que de no cumplirse no sería posible, en general, evitar que los términos que contienen z_l hagan crecer V (según la ecuación (6.66)).

En segundo lugar, también fue necesario admitir que la trayectoria es dominable para denotar que el término τ_i somina sobre el termino τ_r (su módulo es mayor) en la expresión (6.118).

En tercer lugar conviene observar con detenimiento el papel de la ecuación (6.64). La desigualdad planteada solo puede cumplirse si:

$$\sqrt{2}p_{\max} < |F_r| \sin(k_2) \quad (6.161)$$

Este es el motivo por el que se exige que F_r no se anule en las trayectorias dominables. De hecho este resultado es similar a lo que ocurría en el control continuo del Capítulo 5, la tolerancia del sistema a las perturbaciones es mayor cuanto mayor sea F_r .

Este hecho es fácil de entender observando (6.18) ya que si F_r se anulase se estaría perdiendo la acción de control sobre z_2 y por lo tanto el sistema resultaría incontrolable. Esta conclusión se encuentra íntimamente relacionada con el teorema de Brocket y la controlabilidad a lo largo de una trayectoria analizada en detalle en el Capítulo 2.

La condición de que la trayectoria sea dominable es, sin embargo muy restrictiva (la región es mucho más pequeña que la región factible). No obstante, si bien se ha demostrado que la dominancia permite controlar la trayectoria cuando el ruido y las perturbaciones acotados, también es cierto que existen trayectorias que no son dominables y en las que sin embargo la ley de control funciona. Este punto se muestra con un ejemplo en el apartado 6.5.1.B.

La segunda conclusión que puede extraerse de (6.161) es que cuanto menor sea k_2 menor será la tolerancia del sistema ante las perturbaciones, lo que resulta completamente lógico ya que k_2 es la ganancia que se utiliza para estabilizar z_2 (véase (6.27)).

Una conclusión similar puede obtenerse acerca del ruido en la medida. Analizando las ecuaciones (6.89) y la (6.88), cuanto mayor sea k_2 , menor será el efecto del ruido (recuérdese que el ruido está presente en (6.89) a través de ε_3). Esto sugiere que es bueno utilizar valores grandes de la constante k_2 .

Ahora bien, si se observa la ecuación (6.117) el efecto es el contrario, cuanto menor es la constante k_2 mayor es z_m . Esto sugiere tomar valores pequeños de k_2 con el fin de aumentar al máximo el tamaño de la región de atracción.

De este modo, de acuerdo a las cotas impuestas por los teoremas anteriores, existe un compromiso entre la tolerancia al ruido y las perturbaciones y la región de atracción del sistema.

Otro punto que puede resultar oscuro es el papel de las ecuaciones (6.63) y (6.119). En principio la opción más simple sería cancelar ambos términos tomando simplemente $k_1=1/d_u$ y $k_3=1/d_r$, de este modo se simplificaría el análisis. Esto no se ha hecho esencialmente por dos motivos:

- I Las constantes d_u y d_r son parámetros del modelo (y por tanto afectados por la incertidumbre), de modo que no será posible una cancelación exacta. Por este motivo al mantener dichos términos se está analizando la incertidumbre en el modelo.
- II En muchas ocasiones puede resultar conveniente tomar valores $k_1 \neq 1/d_u$ y $k_3 \neq 1/d_r$ con el fin de obtener una mejor respuesta en el transitorio. De este modo, si el sistema resultante es estable (lo cual ocurre al menos dentro de un rango de valores), la elección concreta de las ganancias k_1 y k_3 no afecta demasiado al estado estacionario.

Esto es así ya que en estado estacionario e_{vx} , e_{vy} y e_r serán pequeños y por tanto los términos a los que multiplica $(1-d_u k_1)$ y $(1-d_r k_3)$ no serán muy grandes (véase ecuaciones (6.27) y (6.121)).

Por último cabe destacar que los teoremas garantizan la estabilidad práctica semiglobal para una elección concreta de constantes k_1 , k_2 y k_3 . Esto quiere decir que partiendo de condiciones iniciales acotadas por una cierta constante M , entonces el error de seguimiento es finalmente acotado.

No obstante, esto no significa que si se comienza en condiciones iniciales tales que $\|\mathbf{x}(0)\| > M$ la trayectoria sea inestable. De hecho los experimentos numéricos muestran que para las trayectorias de prueba utilizadas, si la elección de las constantes es correcta el sistema resultante converge para cualquier condición inicial. Esto sugiere que el sistema puede en realidad ser global y finalmente acotado. Aunque a falta de una prueba analítica este hecho constituye solamente una conjetura.

6.5. Resultados

En este apartado se presentan resultados de simulación de la ley de control y la validación experimental que confirma el buen funcionamiento de la misma en el aerodeslizador de laboratorio.

En primer lugar se analiza mediante simulaciones el comportamiento de la ley de control para diferentes trayectorias y condiciones iniciales, de forma similar al estudio

que se llevó a cabo en el Capítulo 5 con el control continuo. De este modo se verifican algunas de las propiedades comentadas en los apartados anteriores.

Estas simulaciones permiten analizar circunstancias que son físicamente imposibles de probar en el sistema de laboratorio así como analizar el efecto de las perturbaciones y el ruido.

Finalmente se muestra el comportamiento de la ley de control con un experimento real de laboratorio. Se comprueba que los resultados experimentales son coherentes con los resultados de simulación y se analizan las limitaciones del sistema experimental.

6.5.1. Simulación

En primer lugar se analiza el comportamiento de la ley de control en trayectorias circulares. A continuación se muestra el funcionamiento con trayectorias más generales, finalmente se estudia el efecto de las perturbaciones y el ruido en la medida. Todas las simulaciones son llevadas a cabo con los siguientes parámetros del controlador: $k_1=6s$, $k_2=1s$ y $k_3=1s$.

6.5.1.A. Seguimiento de una trayectoria circular

La trayectoria de prueba para este caso será una circunferencia de radio R centrada en el origen y recorrida con una velocidad V :

$$\begin{aligned} x_r(t) &= R \sin\left(\frac{V}{R}t\right) \\ y_r(t) &= R \cos\left(\frac{V}{R}t\right) \end{aligned} \tag{6.162}$$

Con el objetivo de poder comparar resultados de la ley de control discreta con los obtenidos mediante la ley de control continua (ver Capítulo 5) se utilizan los mismos valores $V=0.5 \text{ m/s}$ y $R=2 \text{ m}$. De este modo $F_r=0.2179 \text{ m/s}^2$ y $\tau_r=0.4339 \text{ rad/s}^2$ lo que implica que la trayectoria es dominable, como se puede apreciar en Figura 6.6.

A la vista de la figura anterior es claro que en ausencia de ruido y perturbaciones el aerodeslizador converge a la trayectoria y la sigue sin error. Observando la Figura 6.8 y la Figura 6.9 es claro que tras un transitorio de aproximadamente 30 s la trayectoria converge hacia la referencia, siguiéndola posteriormente con total precisión.

El comportamiento de la orientación del vehículo se muestra en la Figura 6.10. En primer lugar la velocidad angular r converge hacia la referencia r_c , esto ocurre durante los quince primeros segundos. Del mismo modo la orientación del vehículo ψ converge hacia la orientación de referencia ψ_c .

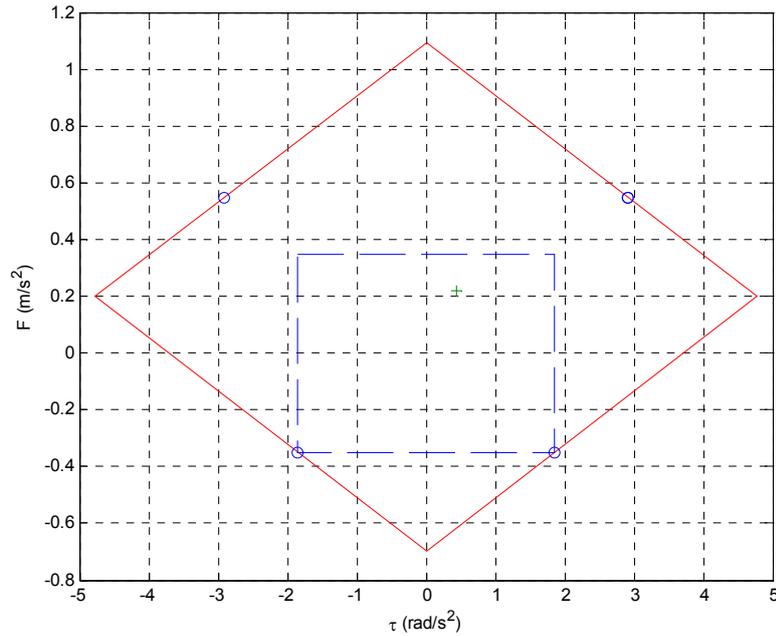


Figura 6.6. La trayectoria circular planteada es dominable. La línea roja delimita la región factible, la azul discontinua es la región dominable, y el + verde es el par (τ_r, F_r) .

Simulando la trayectoria del aerodeslizador desde condiciones iniciales nulas y sin perturbaciones ni ruido se obtiene la trayectoria mostrada en la Figura 6.7.

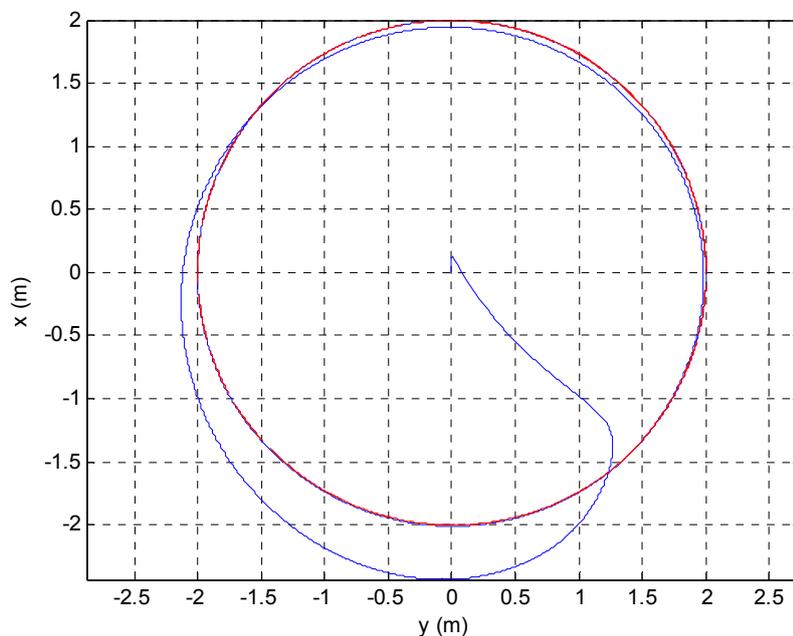


Figura 6.7. Trayectoria circular sin ruido. La trayectoria se muestra en azul y la referencia en rojo.

Además es posible apreciar como el tiempo de asentamiento del error de orientación es inferior al tiempo de asentamiento de la posición. Este comportamiento resulta normal ya que z no se estabiliza hasta que e_ψ sea pequeño como se indicaba en el Teorema 6.1.

Una vez que z comienza a converger entonces la referencia de control r_c tiende hacia la velocidad angular de giro del círculo r_r y la referencia ψ_c converge hacia ψ_c . A partir de $t=30$ s todas las referencias son indistinguibles lo que se corresponde a un seguimiento perfecto de la referencia.

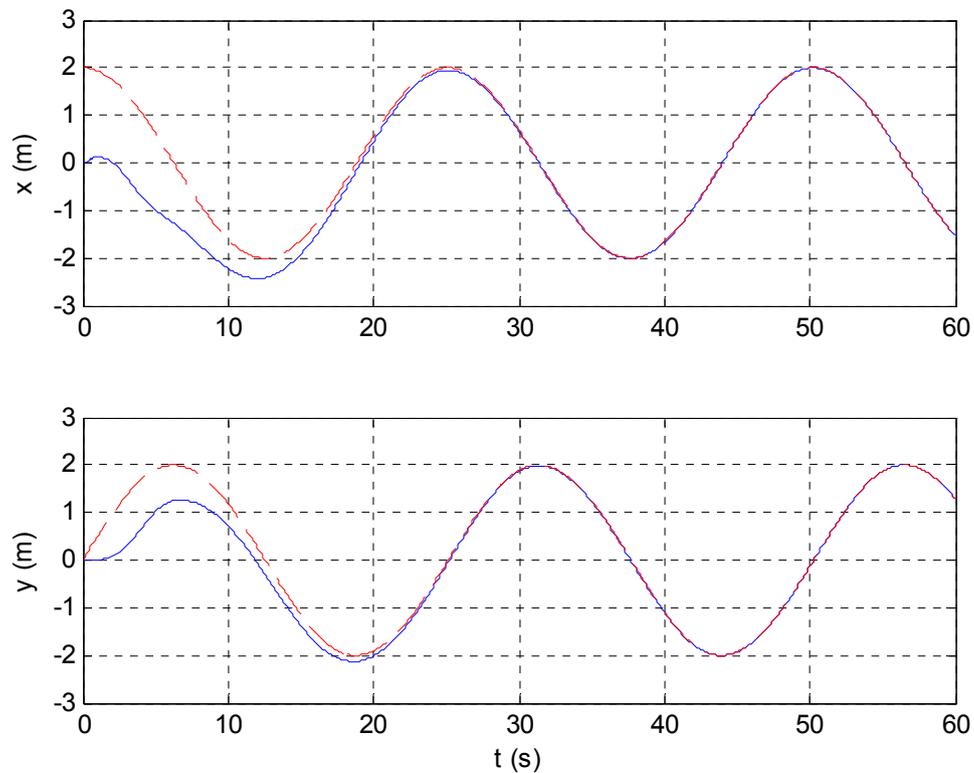


Figura 6.8. Evolución temporal de la posición. Trayectoria en azul y referencia en rojo.

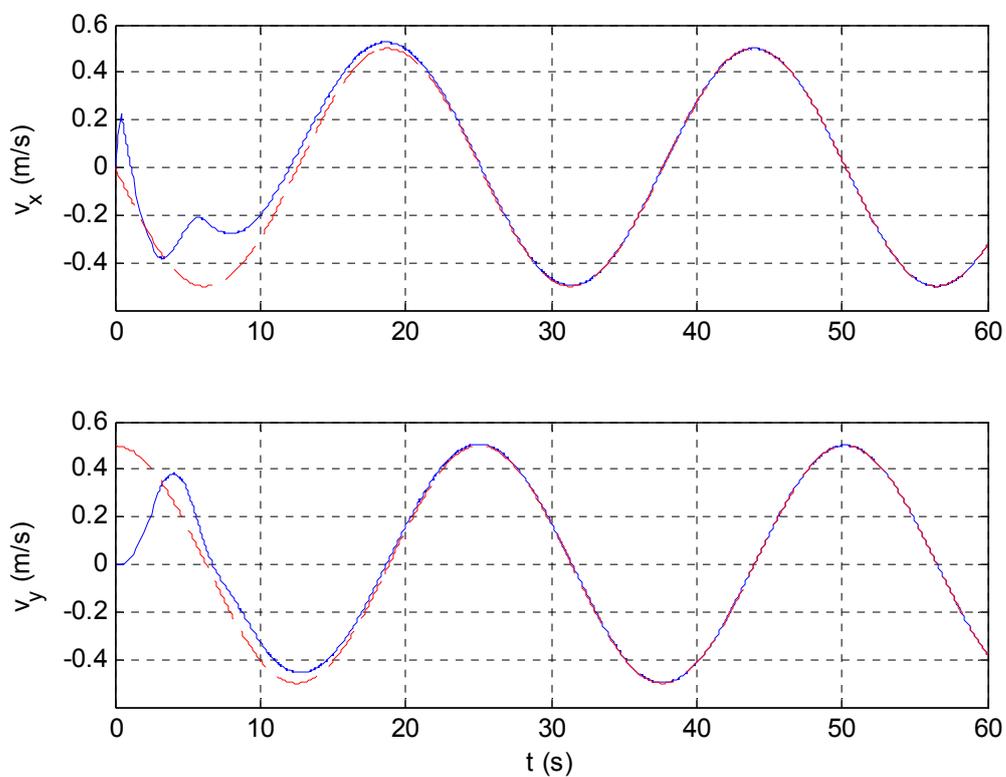


Figura 6.9. Evolución temporal de la velocidad. Trayectoria en azul y referencia en rojo.

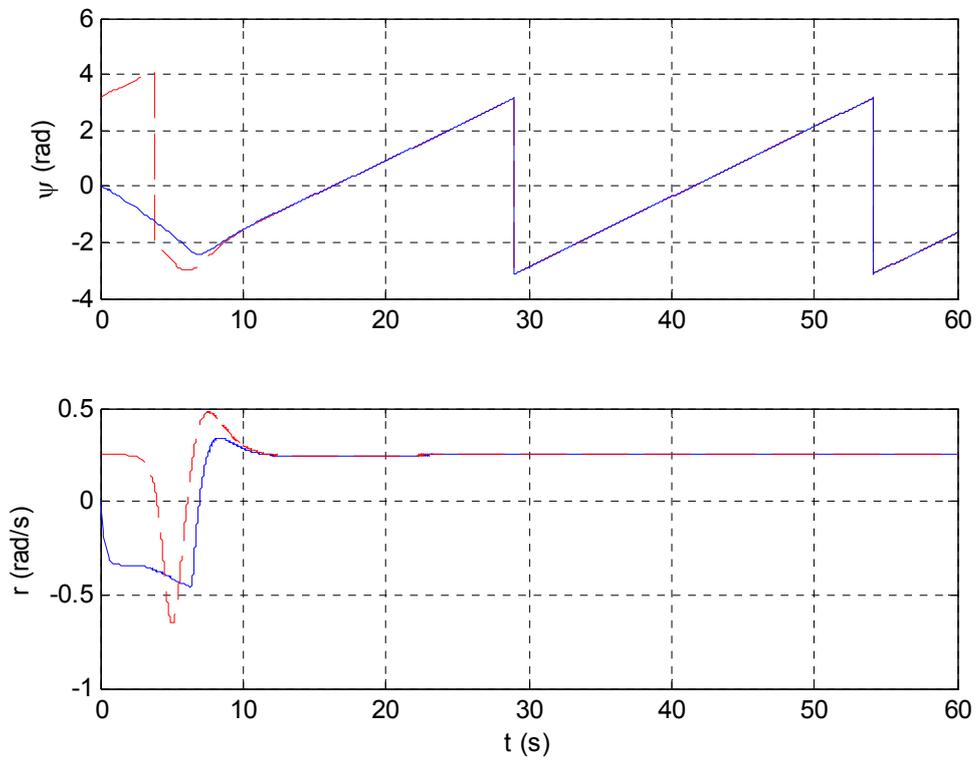


Figura 6.10. Evolución de la orientación. Referencias en rojo y trayectoria en azul.

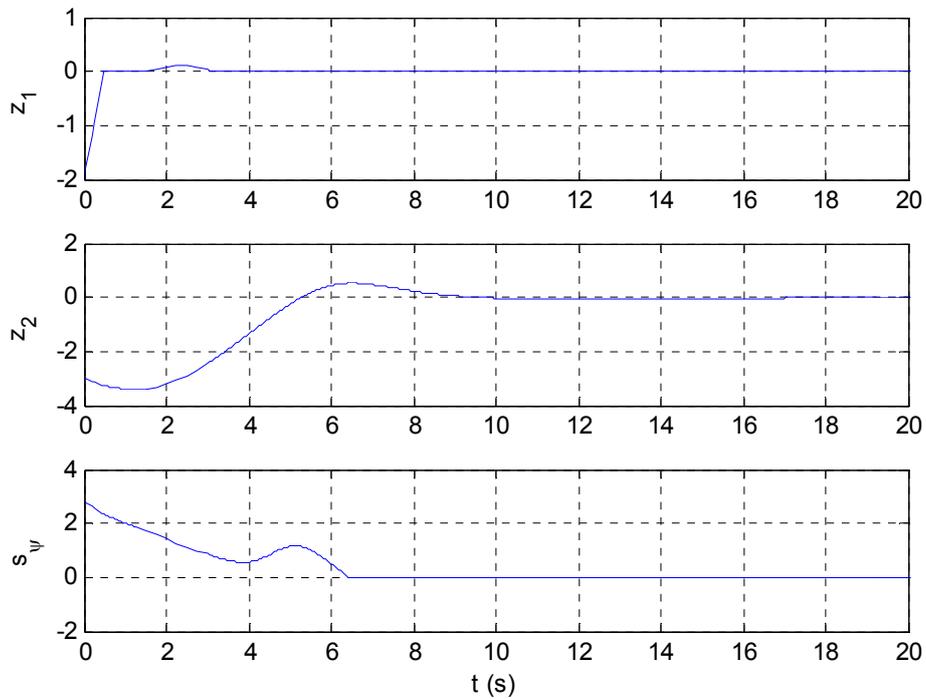


Figura 6.11. Detalle de la convergencia de las variables auxiliares z y s_ψ . Para confirmar las hipótesis realizadas en el desarrollo teórico se muestra la evolución de las variables z y s_ψ . La Figura 6.12 permite apreciar como la variable z_1 converge

muy rápidamente hacia cero mientras que z_2 converge de forma más suave. Con el propósito de observar la dinámica de z_1 la escala de tiempo ha sido ampliada. También se confirma que s_{ψ} converge hacia cero en tiempo finito.

Finalmente en la Figura 6.12 se muestra la señal de control aplicada a cada uno de los motores. Puesto que el control es de tipo todo-nada transcurrido el transitorio la señal de control es fuertemente oscilante.

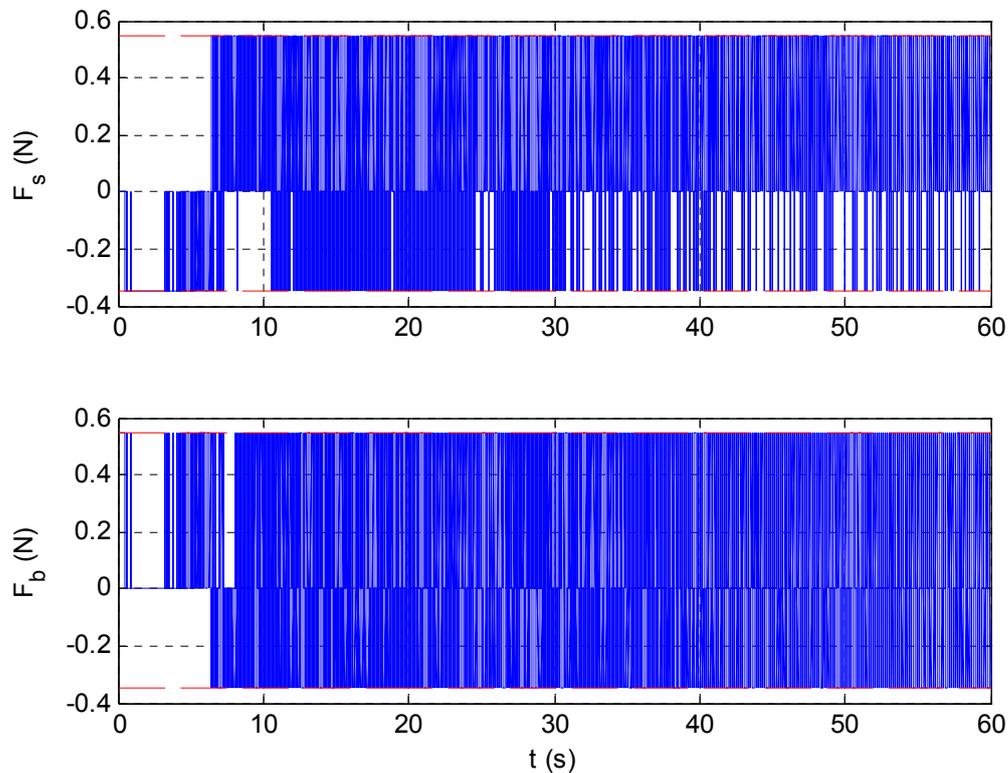


Figura 6.12. Señales de control aplicadas al aerodeslizador. En rojo se marca la saturación de los motores.

Las simulaciones anteriores han sido llevadas a cabo desde condiciones iniciales nulas. Cabría entonces preguntarse qué ocurre si las condiciones iniciales fuesen adversas.

Los teoremas de estabilidad afirmaban que para un valor adecuado de las constantes del controlador existe una región de atracción del sistema, de tal modo que si las condiciones iniciales pertenecen a esta región, la trayectoria inicial converge hacia la referencia.

Por otra parte, en el apartado 6.4.4 se conjetura que el sistema puede ser global y asintóticamente estable para ciertas configuraciones de parámetros. La base para esta conjetura es que en las simulaciones numéricas el aerodeslizador converge hacia el círculo (y otras trayectorias de prueba dominables) desde cualquier condición inicial.

Como ejemplo ilustrativo de esta afirmación se muestran las trayectorias del aerodeslizador que parten desde tres condiciones iniciales muy alejadas de la referencia: $\mathbf{x}_a = [-50 \ 50 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{x}_b = [0 \ 0 \ 0 \ 20 \ -20 \ 20]^T$ y $\mathbf{x}_c = [50 \ 50 \ 2 \ 10 \ 10 \ 10]^T$.

Dichas condiciones iniciales se corresponden a una posición inicial muy alejada, una velocidad inicial muy grande y una combinación de ambas cosas.

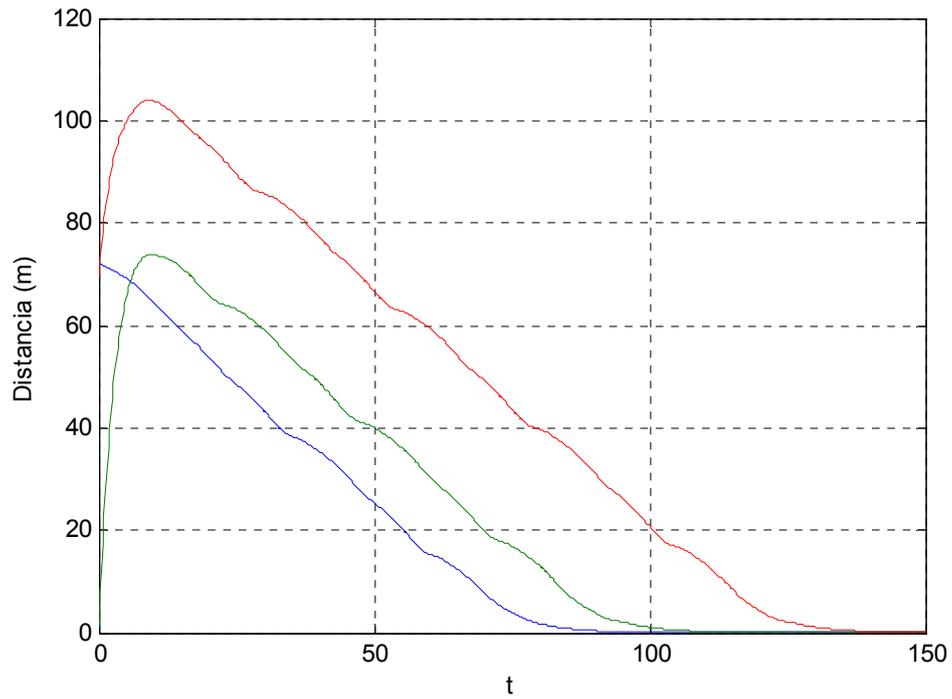


Figura 6.13. Evolución de la distancia a la trayectoria desde tres condiciones iniciales adversas. x_a en azul, x_b verde y x_c rojo. En los tres casos la trayectoria converge hacia la referencia.

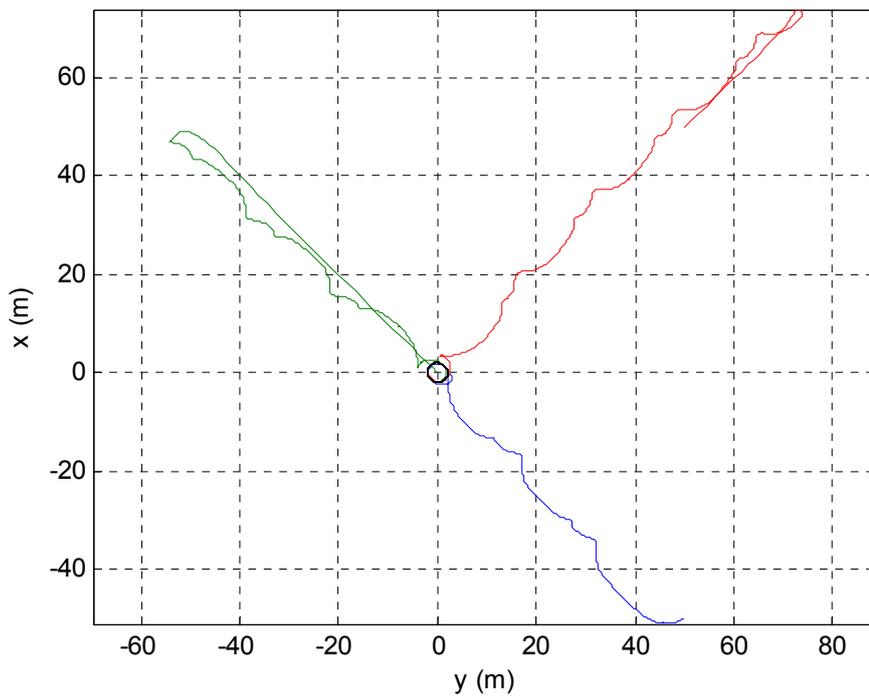


Figura 6.14. Trayectoria con condiciones iniciales adversas. x_a en azul, x_b verde y x_c rojo. En los tres casos la trayectoria converge hacia la referencia circular (negro).

En la Figura 6.13 así como en la Figura 6.14 se muestran la distancia de seguimiento y la trayectoria seguida desde las tres condiciones iniciales adversas de prueba. En todos los casos la trayectoria converge finalmente hacia la referencia.

Como ya ocurría en el control continuo del Capítulo 5 una velocidad inicial elevada tiene un efecto más negativo sobre el transitorio que una distancia inicial muy grande. Como se puede observar comparando el error de seguimiento desde las posiciones iniciales x_a y x_b .

6.5.1.B. Seguimiento de una trayectoria genérica

Como ejemplo de trayectoria general se tomará la misma trayectoria de Lissajous factible del Capítulo 5:

$$\begin{aligned} x_r(t) &= 2 \sin\left(\frac{3}{8}t\right) \\ y_r(t) &= 3 \cos\left(\frac{2}{8}t\right) \end{aligned} \quad (6.163)$$

Esta trayectoria resulta muy interesante ya que se trata de una trayectoria factible pero no dominable. Para verlo considérese el diagrama de fuerzas de la Figura 6.15.

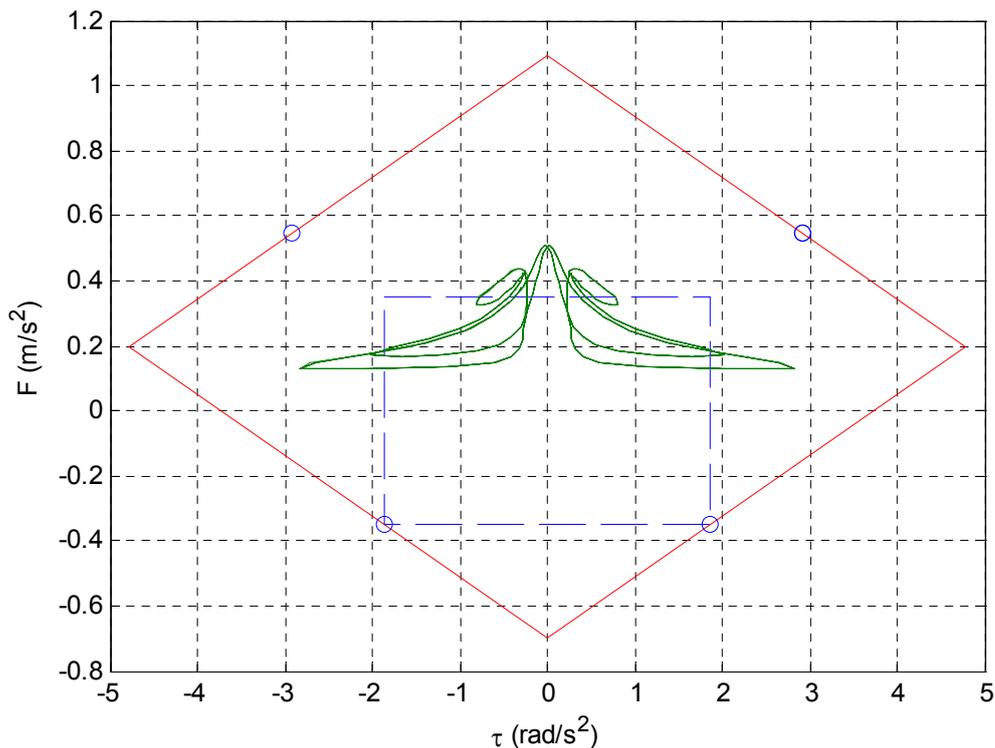


Figura 6.15. Trayectoria factible no dominable. La región dominable es el interior del rectángulo azul mientras que la región factible es el rombo rojo. Las fuerzas y momentos necesarios para seguir la trayectoria se muestran en verde.

Es claro que la fuerza y el momento se encuentran fuera de la región azul por lo que la trayectoria no es dominable. No obstante, mientras la fuerza es positiva siempre es posible elegir un τ que domine sobre τ_r y F domine sobre F_r . (En particular los dos puntos superiores pueden ser utilizados para tal fin).

Utilizando solamente los teoremas anteriores no es posible demostrar que la trayectoria converge, ya que ni τ_i domina sobre τ_r ni F_i domina sobre F_r en cada instante de tiempo. No obstante, puesto que la fuerza promedio es siempre positiva parece lógico pensar que si bien τ_i y F_i no dominan en todo tiempo t si que lo hará en promedio.

Ahora bien, puesto que el aerodeslizador es un sistema paso-bajo, cabría esperar que el sistema funcione correctamente mientras la trayectoria sea “*casi dominable*”.

Para comprobar esta hipótesis intuitiva se simula el sistema con los mismos parámetros de control que en el caso anterior. Partiendo de condiciones iniciales nulas se obtiene la trayectoria ilustrada en la Figura 6.16.

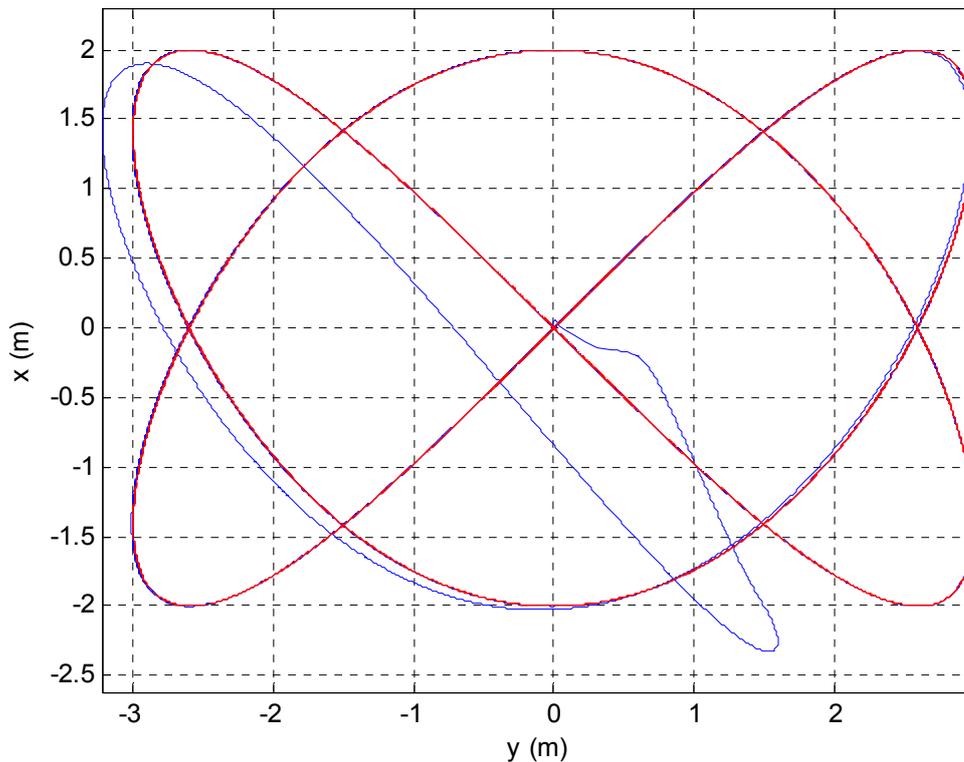


Figura 6.16. Convergencia hacia una trayectoria general. Trayectoria en azul y referencia en rojo.

La figura anterior muestra que aunque la trayectoria no sea dominable en todos sus puntos, sí es posible converger hacia ella y seguirla con bastante precisión. Para observar con mayor detalle el efecto sobre la trayectoria de la pérdida de control sobre la misma conviene examinar la evolución de la orientación del aerodeslizador mostrada en la Figura 6.17.

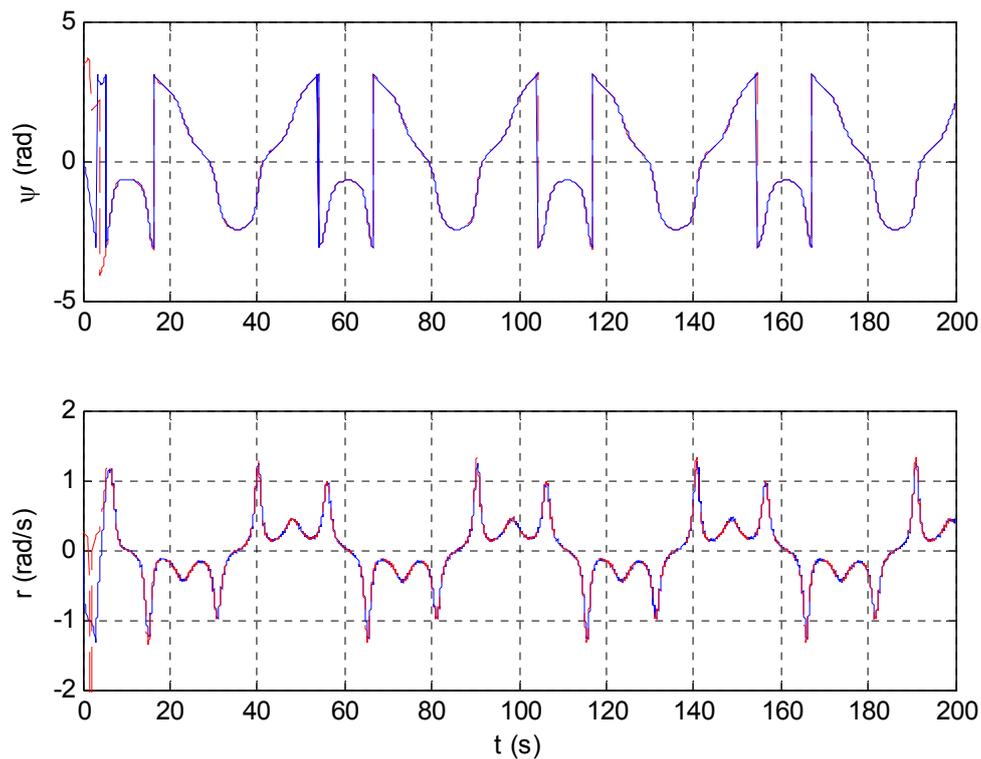


Figura 6.17. Evolución de la orientación en una trayectoria no dominable. Las mayores discrepancias se producen en los picos de velocidad en r donde t es máximo.

A la vista de la Figura 6.17 es claro que el seguimiento de la referencia de orientación es correcto. De este modo, el error de seguimiento espacial mostrado en la Figura 6.18, es muy pequeño (en estado estacionario el error es menor que 0.01 m).

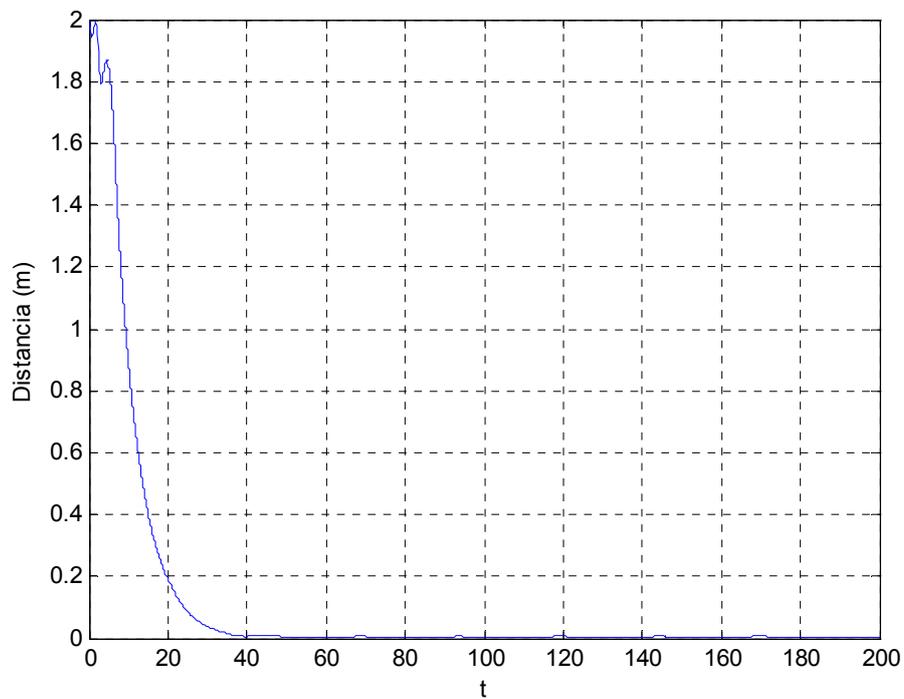


Figura 6.18. Error de seguimiento de la trayectoria. El error de seguimiento en estado estacionario es mínimo.

6.5.1.C. Efecto del ruido en la medida y las perturbaciones

A continuación se muestra el efecto del ruido sobre la trayectoria circular de prueba desde condiciones iniciales nulas. Para ello se añade un ruido blanco de media nula en la medida de amplitud n comprendida entre 0.1 y 0.5 (con sus unidades correspondientes en cada una de los componentes del vector de estados). El efecto sobre la trayectoria se muestra en la Figura 6.19.

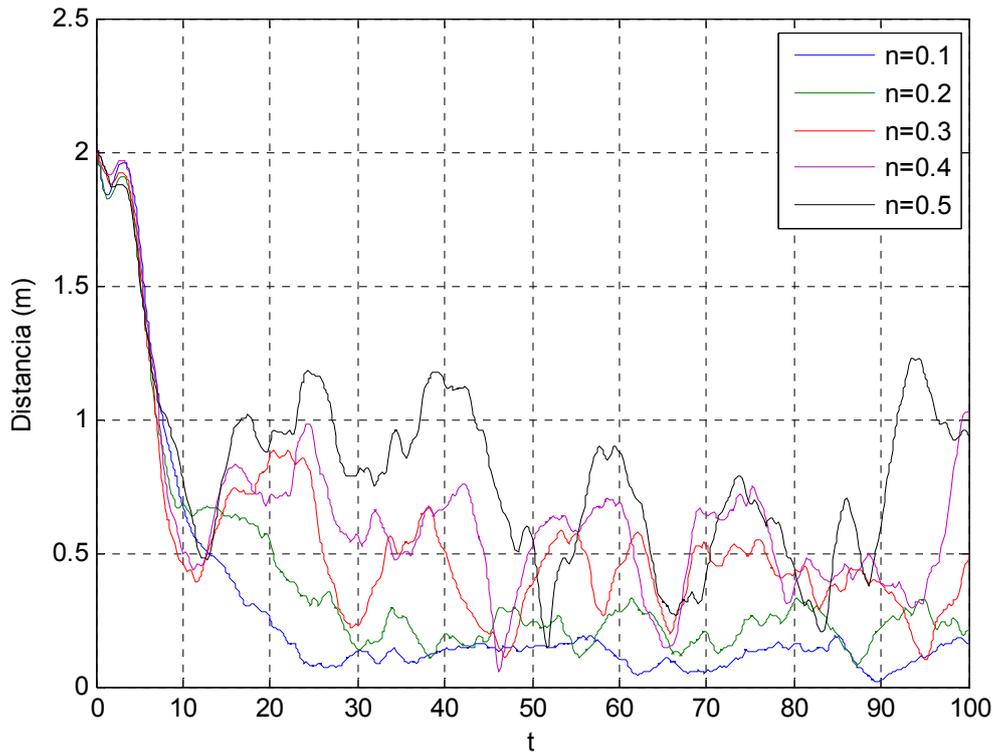


Figura 6.19. Error de seguimiento para diferentes niveles de ruido.

A partir de la figura anterior se aprecia que el error de seguimiento de la trayectoria en estado estacionario es una función creciente del nivel de ruido. Además resulta interesante observar que el error de seguimiento obtenido para $n=0.2$ es de aproximadamente 40cm . Este dato es importante ya que el error en la medida en el sistema real de laboratorio tiene el mismo orden de magnitud.

La forma de las trayectorias seguidas por el aerodeslizador para los mismos niveles de ruido se muestra en la Figura 6.20. Es posible observar que pese a la deformación de la trayectoria inducida por el ruido, esta sigue siendo cualitativamente correcta.

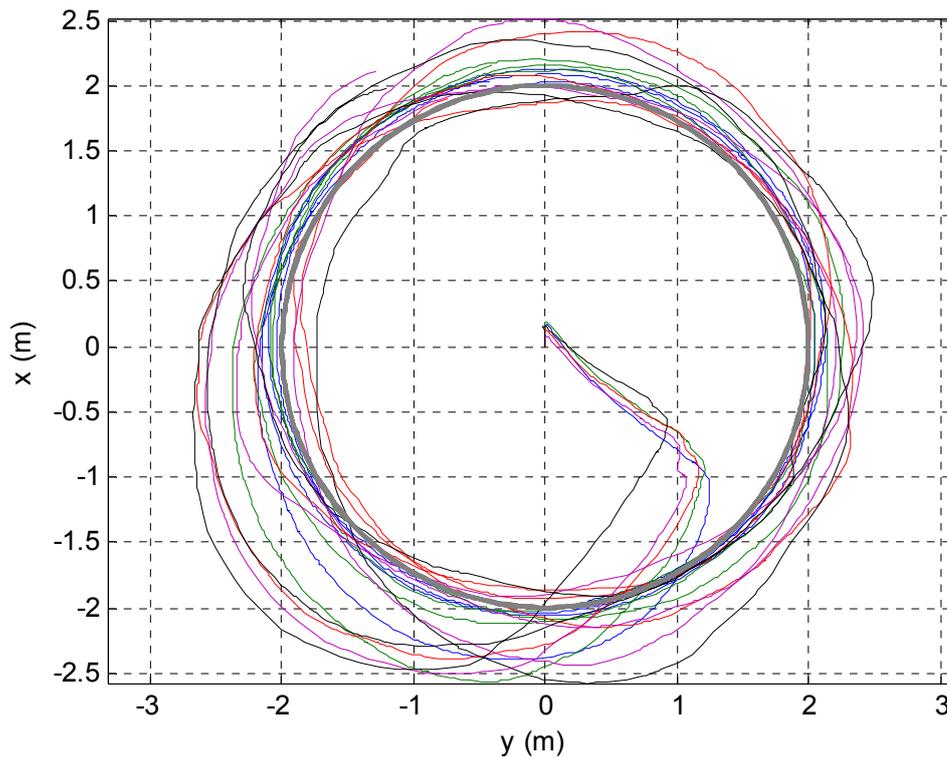


Figura 6.20. Trayectorias del aerodeslizador para diferentes niveles de ruido.

6.5.1.D. Efecto de las perturbaciones

En cuanto a las perturbaciones cabe considerar varios efectos, por una parte se encuentra la perturbación externa p , por otra hay que tener en cuenta que en una implementación de control real el control aplicado no será continuo en el tiempo sino muestreado.

De este modo y para obtener una simulación realista se considera el sistema muestreado con un periodo $T=1/17s$ (que se corresponde con la frecuencia de adquisición de imágenes de 17 *fps* en el sistema real de laboratorio) Sobre el cual actúa una perturbación constante $p_{vy}=0.05m/s^2$.

La trayectoria resultante se muestra en la Figura 6.21. Y el error de seguimiento en la Figura 6.22.

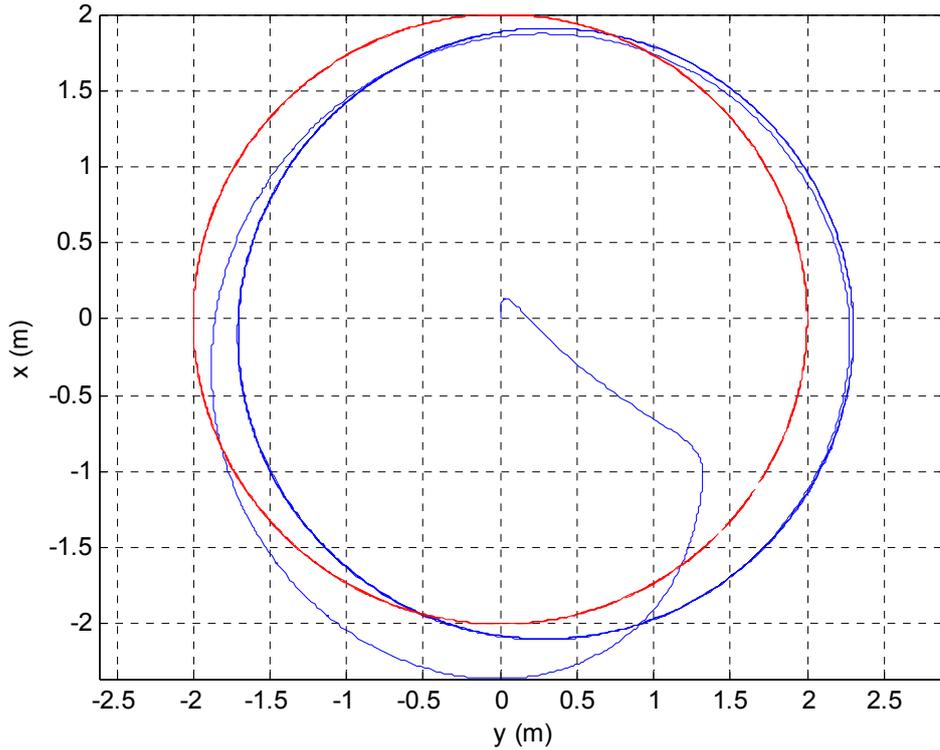


Figura 6.21. Trayectoria en presencia de una perturbación constante.

La Figura 6.21 muestra como la perturbación tiene como efecto un desplazamiento de la trayectoria hacia la derecha lo que es coherente con el hecho de que se está aplicando una fuerza de deriva constante en la dirección positiva del eje y . A la luz de la Figura 6.22 es claro que el efecto de la perturbación constante en la trayectoria circular es la adición de una perturbación periódica en la trayectoria.

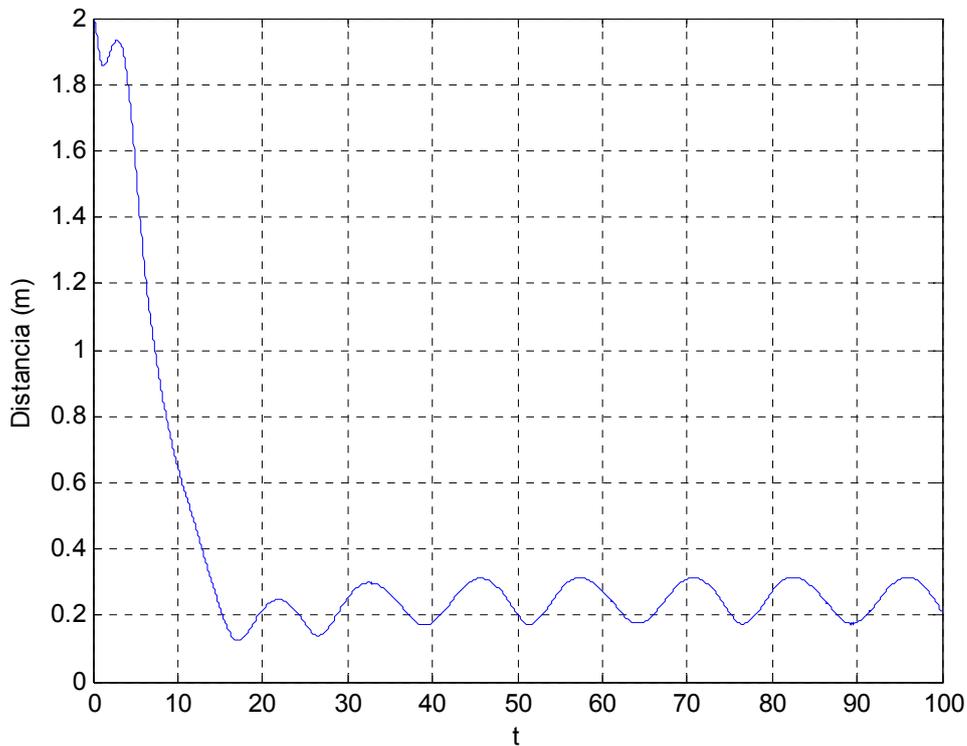


Figura 6.22. Error de seguimiento en presencia de una perturbación acotada constante.

6.5.2. Validación experimental

En este apartado se valida el control diseñado en los apartados anteriores en el sistema real de laboratorio que se describe en detalle en el Capítulo 3.

Para tener una idea más precisa del resultado del experimento conviene ver los videos de seguimiento que se encuentran en el CD adjunto. En particular el video *Tracking1* muestra parte de la trayectoria que se analiza en detalle en este apartado.

El experimento que se muestra en este apartado consiste en el seguimiento de una trayectoria circular de la forma (6.162) de radio $R=0.65m$ y velocidad $V=0.5m/s$. Los parámetros del controlador son los mismos que se emplean en las simulaciones anteriores.

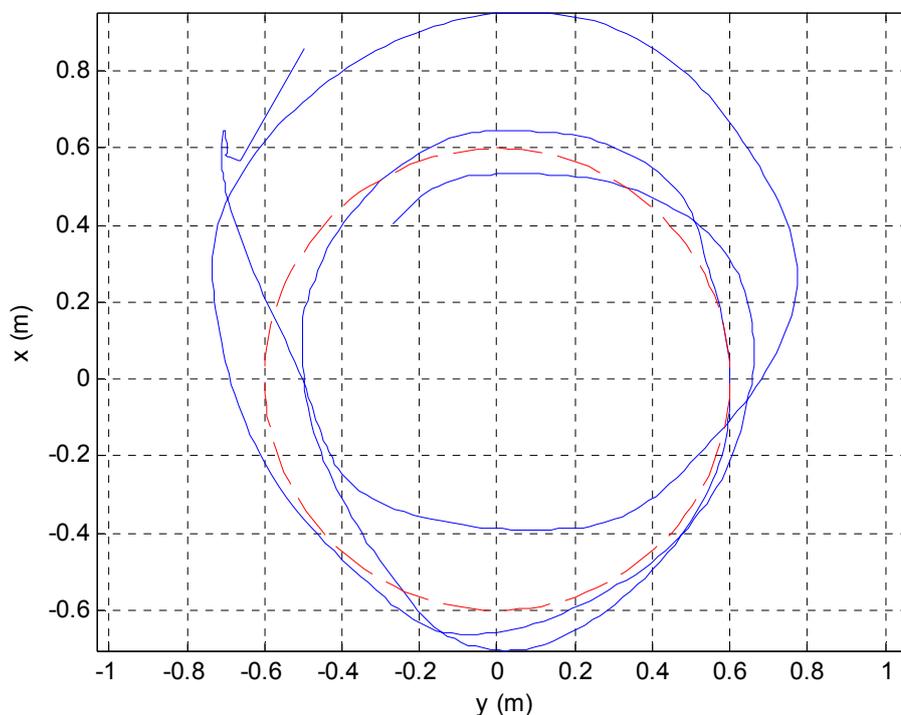


Figura 6.23. Seguimiento de una trayectoria circular de prueba.

La selección del radio de giro está motivada por las limitaciones físicas del sistema experimental (en particular para evitar que el aerodeslizador abandone el área de visión de la cámara). Por otra parte la velocidad se elige con objeto de mantener la trayectoria en la región dominable.

Debido al pequeño radio de giro y la baja velocidad, la trayectoria de prueba es especialmente difícil de seguir. Conviene en este punto recordar que cuanto menor sea F menos controlable es el aerodeslizador a lo largo de la trayectoria, siendo el caso extremo el posicionamiento en un punto.

En la Figura 6.23 se muestra la trayectoria espacial del aerodeslizador. La trayectoria se encuentra ligeramente desplazada en el sentido x e y crecientes. Esto sugiere el efecto de una perturbación constante en dicha dirección (ver Figura 6.21). La Figura 6.23 muestra

que la trayectoria seguida es cualitativamente correcta ya que el aerodeslizador realiza revoluciones en torno al origen de coordenadas. No obstante el efecto del ruido, las perturbaciones y los retardos de control son evidentes.

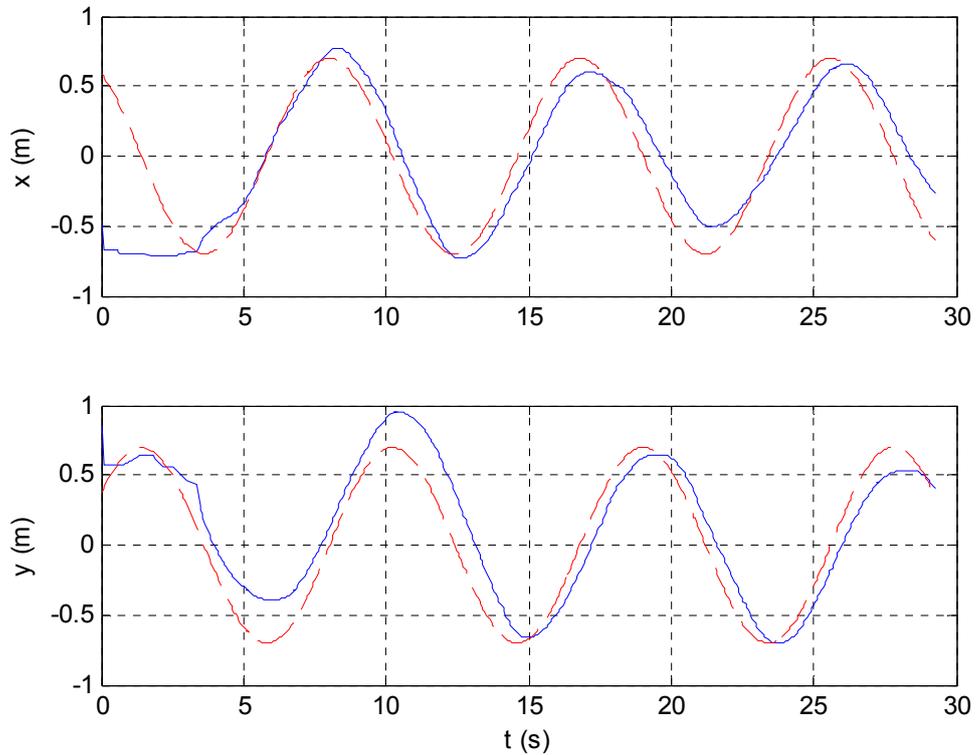


Figura 6.24. Trayectoria del sistema real. Las medidas se muestran en azul y referencias en rojo.

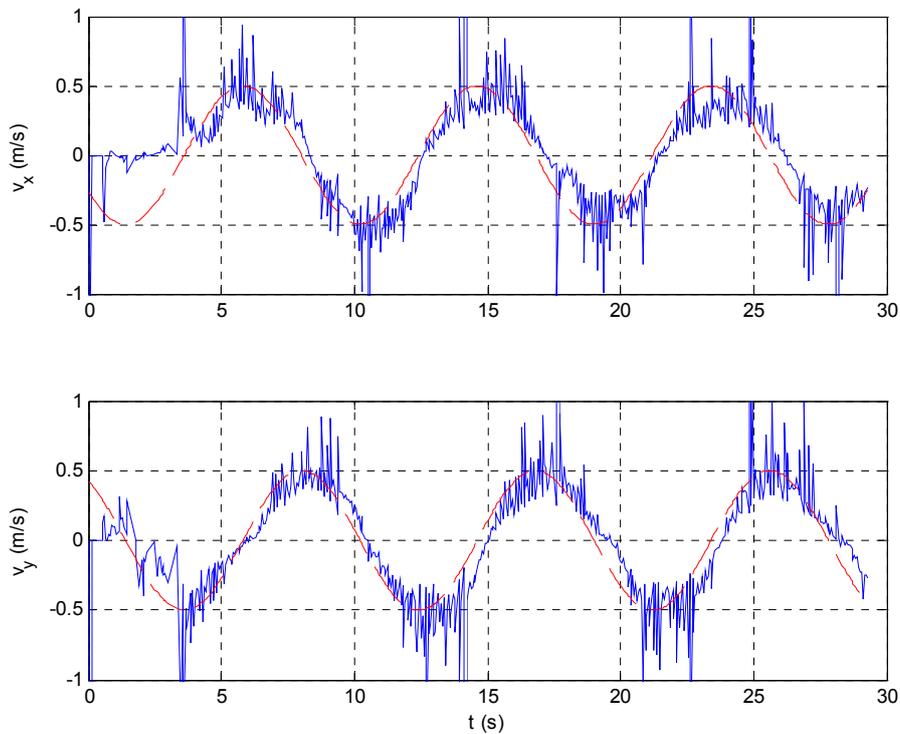


Figura 6.25. Velocidades del aerodeslizador

En la Figura 6.24 se muestra la evolución de la posición respecto al tiempo. Es interesante comprobar como la trayectoria se mantiene próxima a la referencia y además el periodo de las revoluciones es correcto.

En la Figura 6.25 puede verse como la medida de velocidad sigue con bastante precisión la velocidad de referencia. Es interesante observar que dado que la ley de control es de tipo todo-nada-inversión el ruido en la medida de la velocidad no es en absoluto despreciable.

En cuanto a la orientación del aerodeslizador se muestra en la Figura 6.26. Es interesante observar que la referencia de orientación ψ_c se ve afectada por el ruido y las perturbaciones presentes en la posición mientras que la evolución de la orientación ψ es mucho más suave. Además se aprecia un retardo de aproximadamente un segundo entre ψ y ψ_c .

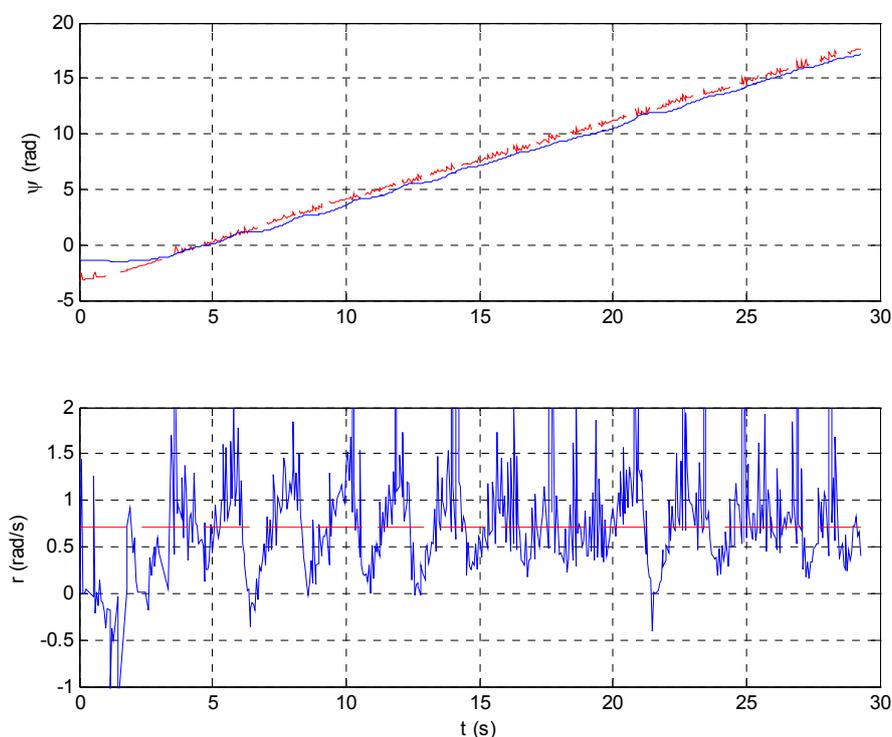


Figura 6.26. Evolución de la orientación del vehículo. En azul se muestra la orientación ψ y la velocidad angular r . Por otra parte en rojo se muestra la referencia ψ_c así como la velocidad angular r_c .

Si se observa la velocidad angular se aprecia que al igual que la velocidad lineal su medida es muy ruidosa. De hecho en la Figura 6.26 se muestra r_r y no r_c puesto que el valor de esta última referencia se encuentra muy afectado por el ruido en la medida y no aporta mucha información.

Según las simulaciones del apartado 6.5.1.C teniendo en cuenta el nivel de ruido en la medida de velocidad y la velocidad angular (que descontando los *outliers* se encuentra en torno a $n=0.2$), cabría esperar un error de seguimiento debido solamente al ruido de unos 40cm. Esta sospecha es confirmada por la Figura 6.27 de tal modo que el resultado experimental es coherente con las simulaciones anteriores.

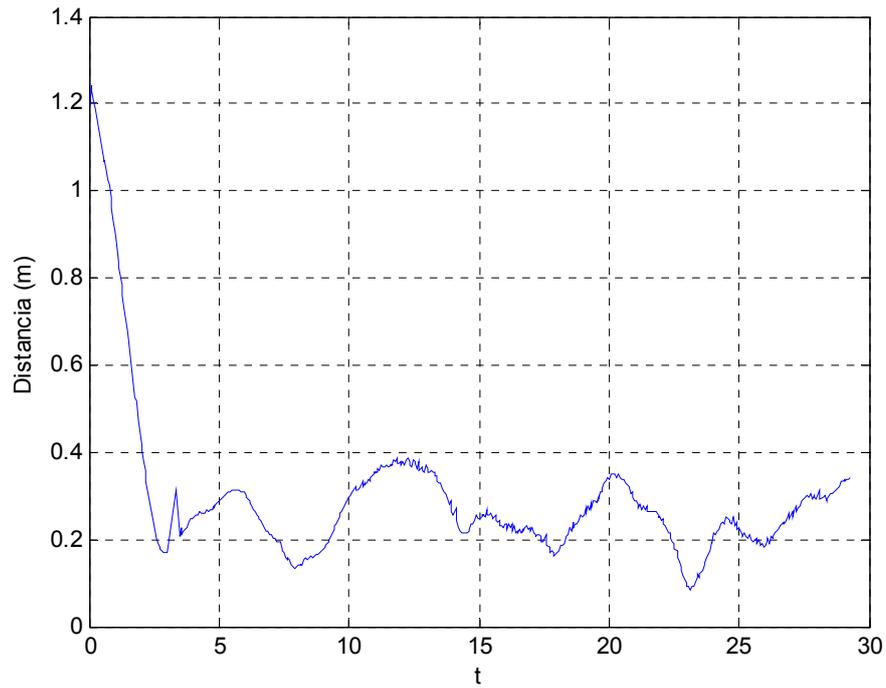


Figura 6.27. Error de seguimiento en un experimento real.

Para concluir, en la Figura 6.28 se muestran las señales de control discretas que se aplican al aerodeslizador real de laboratorio.

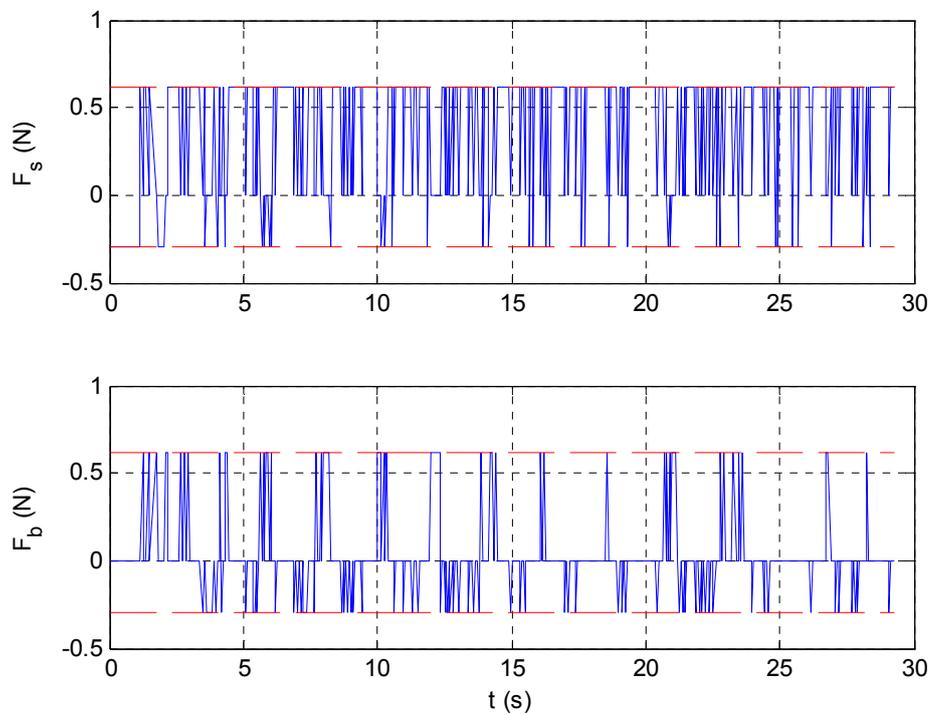


Figura 6.28. Señales de control aplicadas al aerodeslizador real.

6.6. Conclusiones

En este capítulo se ha diseñado una ley de control que es capaz de resolver el problema de seguimiento de trayectoria de un aerodeslizador subactuado con entradas discretas.

Para ello se ha limitado el tipo de trayectorias a un subconjunto de las trayectorias factibles denominado trayectorias *dominables*. Esta restricción, es importante desde el punto de vista teórico para demostrar la estabilidad. No obstante, en la práctica una violación de dicha condición no resulta demasiado grave siempre y cuando la trayectoria sea dominable la mayor parte del tiempo como se comprobó en el apartado 6.5.1.B.

Se han obtenido demostraciones teóricas de la estabilidad de la ley de control. En particular se ha demostrado que la ley de control produce un error de seguimiento finalmente acotado y que este error puede hacerse tan pequeño como se quiera en ausencia de perturbaciones y ruido.

Además, de acuerdo con el resultado de las simulaciones, se conjetura que una elección correcta de los parámetros del controlador puede lograr que el error sea global y fielmente acotado. Lo que implica que el aerodeslizador puede converger hacia la trayectoria desde cualquier condición inicial posible.

Puesto que la ley de control diseñada hace uso únicamente de valores discretos de la fuerza en cada uno de los motores, es directamente aplicable al modelo de laboratorio. De este modo se ha realizado una validación de la ley de control diseñada por medio de experimentos reales obteniendo resultados satisfactorios y totalmente coherentes con los resultados de simulación.

Capítulo 7 Conclusiones

En este capítulo se muestran las principales conclusiones de este trabajo así como las posibles líneas futuras de investigación a las que da lugar.

7.1. Conclusiones

En esta tesis se ha llevado a cabo un estudio en profundidad del tipo de problemas de control que pueden ser resueltos en un aerodeslizador subactuado. Se han obtenido resultados acerca de la controlabilidad local y global del estado por métodos directos y se han analizado las condiciones bajo las cuales el aerodeslizador puede ser controlado en torno a una trayectoria completando así estudios previos de (Fantoni et al., 2000). Esto supone un análisis exhaustivo de lo que puede y no puede hacerse con un aerodeslizador subactuado.

Con el propósito de validar las leyes de control diseñadas a lo largo de este trabajo se ha desarrollado un laboratorio de control de un aerodeslizador. Además de la implementación física del laboratorio se ha creado un conjunto de librerías en LabVIEW que permiten resolver los problemas de visión artificial, calibración del sistema, comunicación con el vehículo e implementación de las leyes de control. Con este sistema ha sido posible obtener y validar los parámetros del modelo del vehículo que se utiliza para el diseño de las leyes de control y las simulaciones.

Además en se ha resuelto el problema de posicionamiento en un punto empleando dos señales de control que pueden tomar valores en un conjunto discreto de valores, toda-nada-inversión. Se ha demostrado matemáticamente la estabilidad de cada una de las partes que componen la ley de control empleando para ello técnicas de análisis no lineal.

Adicionalmente se ha desarrollado una estrategia innovadora para el análisis de la estabilidad de sistemas conmutados para los cuales no existe una función de Lyapunov común que se basa en el concepto de *Sistema Equivalente*. Empleando esta nueva herramienta ha sido posible demostrar analíticamente la estabilidad del conjunto.

También se ha desarrollado una ley de control continua que permite seguir cualquier trayectoria espacial bien definida que se encuentre parametrizada en el tiempo. Esta ley de control hace uso de señales de control acotadas, dando por tanto solución al problema de las saturaciones de las señales de control que pueden aplicarse en un

vehículo real. La Estabilidad global de dicha ley de control ha quedado demostrada tanto analíticamente como en simulación.

Finalmente se han diseñado una ley de control que permite resolver el problema de seguimiento de trayectoria de un aerodeslizador haciendo uso únicamente de las señales de control discretas de tipo todo-nada-inversión. Para garantizar la estabilidad en este caso es necesario restringir las trayectorias a un subconjunto de las trayectorias bien definidas que se denomina trayectorias *dominables*.

Dicho subconjunto es tal que siempre es posible obtener fuerzas y momentos de cualquier signo que dominen sobre el módulo de la fuerza necesaria para seguir la trayectoria necesaria en cada instante. Bajo estas condiciones se ha demostrado analíticamente la estabilidad semiglobal. Además es posible hacer que la región de atracción de las trayectorias arbitrariamente grande mediante una elección adecuada de las constantes de control. La ley de control desarrollada ha sido verificada en el sistema experimental de laboratorio.

Para cada uno de los controles diseñados se ha hecho un análisis de la influencia del ruido en la medida, las perturbaciones y la incertidumbre en los parámetros. Ha sido posible demostrar analíticamente que en todos los casos existe un margen de robustez tal que si el ruido, las perturbaciones y la incertidumbre permanecen acotadas por dicho margen, entonces la estabilidad se mantiene (el error se mantiene en un pequeño entorno del origen).

De este modo puede considerarse que se han alcanzado todos los objetivos planteados en el Capítulo 1.

7.2. Trabajo futuro

Esta Tesis abre nuevas líneas de investigación que definen propuestas de trabajo futuro tanto a nivel teórico como práctico.

En primer lugar, desde el punto de vista práctico resulta interesante ampliar el sistema experimental de tal forma que admita múltiples vehículos que puedan generar señales de control continuas. Esto permitiría extender el sistema experimental para su uso como plataforma de colaboración de múltiples vehículos.

Por otro lado, desde el punto de vista teórico, puesto que los parámetros del modelo pueden variar considerablemente a lo largo del tiempo, con el fin de mejorar el rendimiento de las leyes de control resulta interesante la aplicación de técnicas de control adaptativo que ajustasen los parámetros del controlador a los parámetros físicos reales de la planta.

En el capítulo 6 se ha demostrado que la ley de control desarrollada para el seguimiento de trayectoria con señales de control discreta, es semiglobalmente estable. No obstante, los resultados de simulación sugieren que el sistema puede ser global y asintóticamente estable.

Además las restricciones impuestas sobre la trayectoria son excesivamente rígidas. Esto sugiere que podrían obtenerse resultados más precisos acerca de las trayectorias que pueden seguirse utilizando técnicas de análisis basadas en el sistema promedio utilizando (*Averaging*).

Finalmente como línea de trabajo futuro está el estudio del problema de seguimiento de camino (*path following*). En general una ley de control de seguimiento de trayectoria puede adaptarse de forma simple para ser usada como ley de seguimiento de camino (estableciendo una asignación de la velocidad en el cálculo de la referencia de posición).

No obstante para obtener una ley de control que explote al máximo la estructura del problema de seguimiento de camino, es necesario un análisis exhaustivo del problema concreto. De este modo sería posible diseñar leyes de control eficientes para la solución del problema de seguimiento de camino.

Bibliografía

- Aguiar, A. P., Cremean, L., & Hespanha, J. P. 2003. Position Tracking for a Nonlinear Underactuated Hovercraft: Controller Design and Experimental Results, **42nd Conference on Decision and Control**.
- Aguiar, A. P., & Hespanha, J. P. 2003. Position tracking of underactuated vehicles, **American Control Conference**. Denver, CO.
- Aguiar, A. P., & Hespanha, J. P. 2007. Trajectory-Tracking and Path-Following of Underactuated Autonomous Vehicles With Parametric Modeling Uncertainty. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 52(8): 1362-1379.
- Aguiar, A. P., Hespanha, J. P., & Pascoal, A. M. 2007. Switched seesaw control for the stabilization of underactuated vehicles. **Automatica**, 43 1997 - 2008.
- Aguiar, A. P., & Pascoal, A. M. 2001. **Regulation of a Nonholonomic Autonomous Underwater Vehicle with Parametric Modeling Uncertainty using Lyapunov Functions**. 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando.
- Aguiar, A. P., & Pascoal, A. M. 2002. Global stabilization of an underactuated autonomous underwater vehicle via logic-based switching, **41st IEEE Conference on Decision and Control**. Las Vegas.
- Aranda, J., Cruz, J. M. d. l., & Díaz, J. M. 2004. Identification of multivariable models of fast ferries. **European Journal of Control**, 10: 187-198.
- Ariaei, F., & Jonckheere, E. 2006. LDV Approach to Circular Trajectory Tracking of the Underactuated Hovercraft Model, **2006 American Control Conference**. Minneapolis, Minnesota.
- Ashrafiuon, H., & Muske, K. R. 2008. Sliding Mode Tracking Control of Surface Vessels., **American Control Conference** Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington.
- Balluchi, A., Bicchi, A., Piccoli, B., & Souères, P. 2000. **Stability and Robustness of Optimal Synthesis for Route Tracking by Dubins' Vehicles**. 39th IEEE Conference on Decision and Control Sydney, Australia.

- Behal, A., Dawson, D. M., Dixon, W. E., & Fang, Y. 2002. Tracking and Regulation Control of an Underactuated Surface Vessel With Nonintegrable Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3): 495-500.
- Brockett, R. W. 1976. Nonlinear systems and differential geometry. *Proceedings of the IEEE*, 64: 61-72.
- Brockett, R. W. 1983. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R. S. M. a. H. J. S. R. W. Brockett (Ed.), *Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser.
- Caccia, M., Bruzzone Gabriele, and Bono Riccardo 2008. A Practical Approach to Modeling and Identification of Small Autonomous Surface Craft. *IEEE Journal of oceanic engineering*, 33(2): 133-145.
- Cremean, L., Dunbar, W. B., Gogh, D. v., Hickey, J., Klavins, E., Meltzer, J., & Murray, R. M. 2002. *The caltech multi-vehicle wireless testbed*. IEEE Conference on Decision and Control.
- Chatchanayuenyong, T., & Parnichkun, M. 2006. Neural network based-time optimal sliding mode control for an autonomous underwater robot. *Mechatronics*, 16: 471-478.
- Chung, T., Cremean, L., Dunbar, W. B., Jin, Z., Klavins, E., Moore, D., Tiwari, A., Gogh, D. v., & Waydo, S. 2002. A Platform for Cooperative and Coordinated Control of Multiple Vehicles: The Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed, *Conference on Cooperative Control and Optimization*.
- Chwa, D. 2004. Sliding-Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots in Polar Coordinates. *IEEE transactions on control systems technology*, 12(4): 637-644.
- Do, K. D., Jiang, Z. P., & Pang, J. 2002. Universal Controllers for stabilization and tracking of underactuated ships. *Systems & Control Letters*, 27: 229-317.
- Dong, W., & Guo, Y. 2005. Nonlinear Tracking Control of Underactuated Surface Vessel, *2005 American Control Conference*. Portland, Orlando.
- Dunbar, W. B., Olfati-Saber, R., & Murray, R. M. 2003. Nonlinear and Cooperative Control of Multiple Hovercraft with Input Constraints, *European Control Conference*.
- Encarnação, P., & Pascoal, A. 2001. *Combined trajectory tracking and path following for marine craft*. 19th Mediterranean conferences on control and automation, Dubrovnik, Croatia.
- Fantoni, I., Lozano, R., Mazenc, F., & Pettersen, K. Y. 2000. *tabilization of a Nonlinear Underactuated Hovercraft*. 38th Conference on Decision & Control, Phoenix, Arizona.

- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., & Rouchon, P. 1995. flatness and defect of nonlinear systems introductory theory and examples. *International Journal of Control* 61: 1327-1361.
- Fossen, T. I. 2002. *Marine Control Systems: Guidance, Navigation and Control of Ships, Rigs and Underwater Vehicles*. Trondheim Marine Cybernetics AS.
- Greytak, M., & Hover, F. 2008. Underactuated Point Stabilization Using Predictive Models with Application to Marine Vehicles, *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Acropolis Convention Center, Nice, France.
- Hartley, p. R., & Zisserman, A. 2003. *Multiple view geometry in computer vision* (2 ed.) Cambridge University Press.
- Hermann, R., & Krener, A. 1977. Nonlinear controllability and observability. *Transactions on In Automatic Control*, 22(5): 728-740.
- James, M. R. 1987. *Controllability and Observability of Nonlinear Systems*. <http://hdl.handle.net/1903/4698>
- Jin, Z., Waydo, S., Wildanger, E. B., Lammers, M., Scholze, H., Foley, P., Held, D., & Murray, R. M. 2004. MVWT-II: The Second Generation Caltech Multi-vehicle Wireless Testbed, *2004 American Control Conference*.
- Johansson, M., & Rantzer, A. 1998. Computation of Piecewise Quadratic Lyapunov Functions for Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4): 555-559.
- Kai, T., Kimura, H., & Hara, S. 2005. *Nonlinear Control Analysis on Nonholonomic Dynamic Systems with Affine Constraints*. European Control Conference, Seville, Spain.
- Khalil, H. K. 2002. *Nonlinear systems* (3 ed.) Prentice Hall.
- Kim, T.-H., & Başar, T. 2003. *Asymptotic Stabilization of an Underactuated Surface Vessel via Logic-Based Control*. American Control Conference, Anchorage, Alaska.
- Kolmanovsky, I., & Clamroch, N. H. M. 1995. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems Magazine* 15: 1949-1952.
- Lefeber, E., Pettersen, K. Y., & Nijmeijer, a. H. 2003. Tracking Control of an Underactuated Ship. *IEEE transactions on control systems technology*, 11(1): 52-61.
- Mason, O., & Shorten, R. 2004. On common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable discrete-time LTI systems. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 69: 271-283.

- Mazenc, F., Pettersen, K. Y., & Nijmeijer, H. 2008. *Global Uniform Asymptotic Stabilization of an Underactuated Surface Vessel*. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Convention Center Nice, France.
- Megretski, A. 2003. *Local controllability*. M. OpenCourseWare. Dynamics of Nonlinear Systems. <http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-243JFall2003/CourseHome/index.htm>
- MVWT. *The Caltech Multi-Vehicle Wireless Testbed*. <http://www.cds.caltech.edu/~murray/projects/durip01-mvwt/>
- Narendra, K. S., & Balakrishnan, J. 1994. A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12): 2469-2471.
- Okawa, K., & Yuta, S. i. 2003. Motion Control for Vehicle with Unknown Operating Properties -On-Line Data Acquisition and Motion Planning-, *International Conference on Robotics & Automation*. Taipei, Taywan.
- Olfati-Saber. 2002. Global Configuration Stabilization for the VTOL Aircraft with Strong Input Coupling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11): 1949-1952.
- Olfati-Saber, R. 2001. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. MIT.
- Oya, M., Su, C.-Y., & Katoh, R. 2003. Robust Adaptive Motion/Force Tracking Control of Uncertain Nonholonomic Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(1): 175-181.
- Pettersen, K. I., & Nijmeijer, H. 2001. Underactuated ship tracking control; theory and experiment. *International Journal of Control*, 74(14): 1435-1446.
- Pettersen, K. Y., & Egeland, O. 1996. *Exponential stabilization of an underactuated surface vessel*. 35th IEEE Decision and Control.
- Pettersen, K. Y., & Fossen, T. I. 1998 *Underactuated ship stabilization using integral control. Experimental results with Cybership I*. 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium NOLCOS'98, Enschede, the Netherlands.
- Reyhanoglu, M. 1997. Exponential Stabilization of an Underactuated Autonomous Surface Vessel. *Automatica*, 33(12): 2249-2254.
- Rugh, w. J. 1996. *Linear system theory* (2 ed.) Prentice-Hall.
- Seguchi, H., & Ohtsuka, T. 2002. *Nonlinear receding horizon control of an RC hovercraft*. International Conference on Control Applications.

- Seguchi, H., & Ohtsuka, T. 2003. Nonlinear receding horizon control of an underactuated hovercraft. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 13: 381–398.
- Sira-Ramírez, H. 2002. Dynamic Second-Order Sliding Mode Control of the Hovercraft Vessel. *IEEE transactions on control systems technology*, 10(6): 860-865.
- Sira-Ramírez, H., & Ibañez, C. A. 2000. *The Control of the Hovercraft System: A Flatness Based Approach*. IEEE International Conference on Control Applications, Anchorage, Alaska.
- SNAME. 1950. Nomenclature for Treating the Motion of a Sumerged Body Through a Fluid, *The Socery of naval Architects and Marine Engineers*. Technical and research bulletin N° 3-47.
- Toussaint, G. J., Tamer Başar , & Bullo, F. 2000. Tracking for Nonlinear Underactuated Surface Vessels with Generalized Forces, *IEEE International Conference on Control Applications*. Anchorage, Alaska.
- Vladimerou, V., Stubbs, A., Rubel, J., Fulford, A., Strick, J., & Dullerud, G. 2004. *Hovercraft Testbed for Decentralized and Cooperative Control*. 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts.
- Zhu, H. P., & Yu, A. B. 2002. A contribution to the stability of nonholonomin systems. *Mechanics research communications*, 29(5): 307-314